Chapitre 6

Séries numériques

6.1 Introduction

La notion de séries, intimement liée à la notion de suites apparait au 17 ème siècle à propos du développement des fonctions en séries entières. Néanmoins il faut attendre le 19 ème siècle avec Abel, Cauchy, Gauss pour avoir une notion de limite et donc une étude sérieuse de la convergence de séries.
Le mathématicien et astronome Madhava fut le premier, au 14 ème siècle, à considérer de véritables séries. Ses travaux furent poursuivis par ses successeurs de l'école du Kerala, région du sud de l'Inde, et nous sont connus par le livre Yuktibhasa. Madhava s'intéresse à des fonctions trigonométriques, il en propose des développements de fonctions sous forme de séries, séries de Taylor, séries trigonométriques. Il utilise ces concepts pour des calculs d'approximation (notamment pour estimer le nombre π) et effectue des estimations de l'erreur commise. Il introduit aussi les premiers critères de convergence.
Au 17 ème siècle, James Gregory redécouvre plusieurs de ces résultats, notamment le développement des fonctions trigonométriques en séries de Taylor et la série de Gregory permettant le calcul de π. En 1715, Brook Taylor, en donnant la construction générale des séries qui portent son nom, établit un lien fructueux avec le calcul différentiel. Au 18 ème siècle également, Leonhard Euler établit de nombreuses relations remarquables portant sur des séries et introduit les séries hypergéométriques.

6.2 Généralités

Définition 1 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de K. On appelle série de terme général u_n ou encore série $\sum u_n$ le couple de suites $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}})$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

La suite (S_n) est appelée suite des sommes partielles de la série.
On dit que la série $\sum u_n$ est convergente si la suite (S_n) est convergente vers une limite appelée somme de la série et on note alors:

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Dans le cas contraire, on dit que la série est divergente

6.2.1 Une condition nécessaire de convergence

Proposition 1 *Soit $(\sum u_n)$ une série d'éléments de K. Si la série $(\sum u_n)$ est convergente alors la suite (u_n) converge vers 0.*

[Ind] On a, pour n supérieur à 1, $u_n = S_n - S_{n-1}$

[Dem] Si la suite (S_n) converge, la suite $(u_n) = (S_n - S_{n-1})$ converge vers 0.

Remarque: La réciproque est fausse. Si le terme général ne tend pas vers 0, la série est divergente, ce type de divergence est parfois appelé divergence grossière.

Exercice 1 Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n+1}$ n'est pas convergente.

[Ind] Nier le critère de cauchy pour la suite des sommes partielles.

[Dem] On a $S_{2n} - S_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k+1} \geq n \times \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$. Donc la suite $(S_n)_n$ n'est pas de Cauchy.

Exercice 2 Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que la série $\sum \alpha^n$ est convergente si et seulement si $|\alpha| < 1$. Trouver sa somme.

[Ind] Utiliser la formule donnant la $n^{\text{ème}}$ somme partielle d'une série géométrique.

[Dem] On a, si $\alpha \neq 1$, l'expression $S_n = \dfrac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} = \dfrac{1}{1-\alpha} - \dfrac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$.
Si $|\alpha| < 1$ alors S_n converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}$.
Si $|\alpha| \geq 1$ alors la suite $(\alpha^n)_n$ ne tend pas vers 0 et donc la série géométrique est divergente.

6.2.2 Structure de l'ensemble des séries convergentes

Proposition 2 *L'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel et l'application qui, à une série convergente, associe sa somme est une application linéaire.*

[Ind] Vérifiez...

[Dem] Si on note C l'espace vectoriel des suites convergentes de K, cet ensemble est une partie non vide et stable de $C \times C$. La linéarité de l'application considérée provient alors de la linéarité de l'application de C dans K qui, à une suite convergente, associe sa limite.

Proposition 3 *On ne modifie pas la nature (convergente ou divergente) d'une série $(\sum u_n)$ en modifiant un nombre fini de termes de la suite (u_n).*

[Ind] A partir d'un certain rang, les deux sommes partielles ne diffèrent que par une constante.

[Dem] Notons u_n le terme général de la série originelle et S_n la somme partielle d'indice n de cette série. Si on modifie un nombre fini de termes de la suite (u_n), on obtient alors une suite (v_n) telle qu'il existe un entier n_0 qui vérifie, pour tout $n \geq n_0$, $u_n = v_n$. Notons lors T_n la somme partielle d'indice n de la série de terme général v_n. Pour $n \geq n_0$, on a $T_n - S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n_0-1} (v_k - u_k)$. Ainsi les deux suites (S_n) et (T_n) sont de même nature.

6.2.3 Reste d'une série convergente

Définition 2 *Soit $(\sum u_n)$ une série convergente de K et S sa somme. On appelle suite des restes de la série, la suite dont le terme général est $R_n = S - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.*

Proposition 4 *Soit (R_n) la suite des restes de la série convergente $(\sum u_n)$ de somme S. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a: $S = S_n + R_n$, $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ et $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$.*

[Ind] On a $R_n = \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{p} u_k$.

[Dem] Puisque la suite (S_n) converge vers S, la suite (R_n) converge vers 0.
Pour tout entier p supérieur à $n+1$, on a $S_p = S_n + \sum_{k=n+1}^{p} u_k$, ainsi $R_n = \lim_{p\to+\infty} S_p - S_n$ est la somme de la série de terme général u_k pour $k \geq n+1$.

Remarque: Le terme u_{n+1} (premier terme de la série $\sum_{k\geq n+1} u_k$) est appelé premier terme négligé de l'approximation de S par la somme partielle S_n.

6.2.4 Relation entre suites et séries

Proposition 5 *Soit (u_n) une suite de K et $(\sum v_n)$ la série dont le terme général est $v_n = u_{n+1} - u_n$. La suite (u_n) est convergente vers l si et seulement si la série $(\sum v_n)$ est convergente vers $l - u_0$.*

[Ind] Calculer les sommes partielles de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$.

[Dem] Pour tout entier n, $\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1} - u_0$. La proposition découle alors du fait que la suite (u_n) est convergente vers l si et seulement si la suite (u_{n+1}) est convergente vers l.

Remarque: Toute série $(\sum u_n)$ peut se mettre sous cette forme: en notant (v_n) la suite définie par $v_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}*$, $v_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_{n+1} - v_n$.

Exercice 3 Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{n(n+1)}$ est convergente.

[Ind] Décomposer en éléments simples.

[Dem] Nous écrivons $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$. Or la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_n$ converge, par suite la série de terme général $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ converge.

6.2.5 Critère de Cauchy

Théorème 1 *Soit $(\sum u_n)$ une série de K.*
La série $(\sum u_n)$ est convergente si et seulement si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall p, q \in \mathbb{N} \quad n \leq p \leq q \implies \left| \sum_{k=p}^{q} u_k \right| \leq \varepsilon.$$

[Ind] L'espace vectoriel normé K est complet

[Dem] La propriété est celle qui identifie les suites convergentes et les suites de Cauchy dans un espace complet.

Exercice 4 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que la série de terme général défini, pour $n \geq 1$, par $\dfrac{1}{n^\alpha}$ est divergente si $\alpha \leq 1$.

[Ind] Séparer les cas $\alpha \leq 0$, $0 < \alpha < 1$ (utiliser le critère de Cauchy) et $\alpha = 1$.

[Dem] Si $\alpha = 1$ on a montré la divergence.
Si $\alpha \leq 0$ alors le terme général ne tend pas vers 0.
Si $0 < \alpha < 1$ alors $\displaystyle\sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k^\alpha} > n\frac{1}{(2n)^\alpha} = \frac{1}{2^\alpha}n^{1-\alpha} \to +\infty$.

6.2.6 Séries absolument convergentes

Définition 3 *La série* $(\sum u_n)$ *est absolument convergente si la série* $(\sum |u_n|)$ *est convergente.*

Définition 4 *Soit* $(\sum u_n)$ *une série de* K. *On appelle série majorante, toute série* $(\sum v_n)$ *à termes positifs telle que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*:* $|u_n| \leq v_n$.

Proposition 6 *Toute série* $(\sum u_n)$ *absolument convergente est convergente et*

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$$

[Ind] Vérifier que la suite des sommes partielles est une suite de Cauchy.

[Dem] Pour un entier n, notons $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} |u_k|$. Si la série de terme général u_n est absolument convergente, alors la suite de terme général A_n est convergente donc est une suite de Cauchy, de l'inégalité $\left|\displaystyle\sum_{k=p}^{q} u_k\right| \leq \displaystyle\sum_{k=p}^{q} |u_k|$, valable pour les entiers $p \leq q$, on en déduit alors que la série $\sum u_n$ vérifie le critère de Cauchy des séries et donc est convergente. L'inégalité proposée s'obtient alors en passant à la limite lorsque q tend vers $+\infty$ et en prenant $p = 0$ dans l'inégalité ci-dessus.

Proposition 7 *Toute série* $(\sum u_n)$ *admettant une série* $(\sum v_n)$ *majorante convergente est convergente et*

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \left|\sum_{n=p+1}^{\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=p+1}^{\infty} v_n.$$

[Ind] La série est alors absolument convergente.

[Dem] La suite (A_n) des sommes partielles de la série de terme général $|u_k|$ est alors majorée par la suite (V_n) des sommes partielles de la série $\sum v_n$. On vérifie alors que les suites (A_n) et (V_n) sont croissantes et puisque la suite (V_n) est convergente, elle est donc majorée, on en déduit donc que la suite (A_n) est convergente puisqu'elle est croissante et majorée, donc la série $\sum u_n$ est absolument convergente.
L'inégalité proposée provient alors de la comparaison des restes des séries $\sum u_n$, $\sum |u_n|$ et $\sum v_n$.

6.3 Séries à termes positifs

Théorème 2 *Soit* $(\sum u_n)$ *une série à termes réels positifs. La série est convergente si et seulement si la suite* (S_n) *des sommes partielles est majorée. On a alors* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} S_n$.

[Ind] La suite (S_n) est croissante.

[Dem] Pour tout entier n, on a $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$. La suite (S_n) est donc croissante et on peut alors appliquer le théorème sur la convergence des suites croissantes de réels.

Remarque: Si une série $(\sum u_n)$ à termes positifs est divergente, alors $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = +\infty$, et on note alors $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k = +\infty$.

Exercice 5 Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Montrer que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si les séries de termes généraux u_{2n} et u_{2n+1} convergent.

[Ind] Pour montrer qu'une série à termes positifs est convergente il suffit de prouver que les sommes partielles sont bornées.

[Dem] Si $\sum u_n$ converge vers S alors on a $\sum\limits_{k=0}^{n} u_{2k} \leq \sum\limits_{k=0}^{2n} \leq S$ donc la série $\sum u_{2n}$ converge. De mÃªme pour $\sum u_{2n+1}$.
Si $\sum u_{2k}$ converge vers S_1 et $\sum u_{2k+1}$ vers S_2 alors $\sum\limits_{k=0}^{n} \leq S_1 + S_2$. Donc $\sum u_n$ converge.

6.3.1 Utilisation des relations de comparaison

Proposition 8 *Soient $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ deux séries à termes positifs. Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ alors $(\sum v_n)$ convergente implique $(\sum u_n)$ convergente.*

[Ind] Comparer les sommes partielles.

[Dem] Soit n_0 un entier tel que, pour tout entier $n \geq n_0 + 1$, $u_n \leq v_n$. On a alors, pour $n \geq n_0$, $\sum\limits_{k=n_0+1}^{n} u_k \leq \sum\limits_{k=n_0+1}^{n} v_k$. En notant S_n et T_n les sommes partielles respectives des deux séries, on a donc $S_n \leq T_n - T_{n_0} + S_{n_0}$ pour $n \geq n_0 + 1$.
Si la série de terme général v_n converge, la suite (T_n) converge et donc est majorée, on en déduit alors que la suite S_n est majorée et, étant croissante, est donc convergente.

Exercice 6 Trouver la nature des séries $(\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{\sin^2(n)}{2^n})$, $(\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{r^n}{n})$ avec $r \in \mathbb{R}_+$, $(\sum\limits_{n\geq 2}\dfrac{1}{\ln n})$.

[Ind] Trouver des majorations ou des minorations entre termes positifs.

[Dem] Pour la première on a $\dfrac{\sin^2 n}{2^n} \leq \dfrac{1}{2^n}$, d'où la convergence.

Pour $\dfrac{r^n}{n}$ on a $\begin{cases} \text{si } r > 1 \text{ alors le terme général ne tend pas vers } 0 \\ \text{si } r = 1 \text{ alors c'est la série harmonique} \\ \text{si } r < 1 \text{ alors on a } \dfrac{r^n}{n} < r^n \text{ et la série converge} \end{cases}$

Pour la suivante on a $\dfrac{1}{\ln n} > \dfrac{1}{n}$ pour n assez grand car $\dfrac{n}{\ln n} \to +\infty$. La série diverge.

Proposition 9 *Soient $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ deux séries à termes positifs. Si $u_n \sim v_n$ alors les séries $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ sont de même nature.*

[Ind] A partir d'un certain rang $\frac{1}{2}u_n \leq v_n \leq \frac{3}{2}u_n$.

[Dem] Si les deux suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes, il existe alors un entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $|u_n - v_n| \leq \frac{1}{2}|u_n|$. On en déduit alors, puisque le terme u_n est positif, que $\frac{1}{2}u_n \leq v_n \leq \frac{3}{2}u_n$. On applique alors la proposition sur la comparaison de deux séries à termes positifs.

Exercice 7 Trouver la nature des séries $(\sum \dfrac{2^n+3}{5^n-9})$, $(\sum(\operatorname{ch} n)^\alpha - (\operatorname{sh} n)^\alpha)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 8 Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Étudier la série de terme général $\dfrac{1}{n^\beta} - \dfrac{1}{(n+1)^\beta}$. En déduire que, pour $\alpha \in R$, la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha \in]1, \infty[$.

[Ind] Prendre ou chercher des équivalents.

[Dem] Pour la première on a : $\dfrac{2^n+3}{5^n-9} \sim \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$, il y a donc convergence.
Pour la seconde $(\operatorname{ch} n)^\alpha - (\operatorname{sh} n)^\alpha = \left(\dfrac{e^n + e^{-n}}{2}\right)^\alpha - \left(\dfrac{e^n - e^{-n}}{2}\right)^\alpha = \dfrac{e^{n\alpha}}{2}\left((1+e^{-2n})^\alpha - (1-e^{-2n})^\alpha\right) \sim \dfrac{e^{n\alpha}}{2}(2e^{-2n\alpha}) = e^{-n\alpha} = (e^{-\alpha})^n$. Ainsi $\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \alpha > 0 \ : \ e^{-\alpha} < 1 \Leftrightarrow e^\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha > 0 \text{ il y a convergence} \\ \text{si } \alpha < 0 \text{ le terme général ne tend pas vers 0 la série diverge} \end{array} \right.$.
Si $\alpha = 0$ la série est nulle.

Exercice 9 Soient $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ deux séries à termes positifs dont les termes généraux sont équivalents. Montrer que, si elles sont convergentes, leurs restes sont équivalents, tandis que, si elles sont divergentes, ce sont leurs sommes qui sont équivalentes.

[Ind] Écrire la définition et sommer prudement.

[Dem] On sait que

$$\forall \varepsilon,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ u_n(1-\varepsilon) \leq v_n \leq u_n(1+\varepsilon)$$

. Si les deux séries convergent, on somme cs inégalités pour n entre $p+1$ et $q \geq p+1$, si $p \geq n_0$:

$$(1-\varepsilon)\sum_{n=p+1}^{q+1} u_n \geq \sum_{n=p+1}^{q+1} v_n \geq (1+\varepsilon)\sum_{n=p+1}^{q+1} u_n$$

d'où si q tend vers $+\infty$ on a, en notant R_p et S_p les restes d'ordre p des séries de terme général u_n et v_n : $(1-\varepsilon)R_p \leq S_p \leq (1+\varepsilon)R_p$. En résumé

$$\forall \varepsilon,\ \exists n_0,\ \forall p\, p \geq n_0 \Rightarrow (1-\varepsilon)R_p \leq S_p \leq (1+\varepsilon)R_p.$$

Les restes sont bien équivalents.
Si les deux séries divergent en sommant ce coup-ci de n_0 à p on a

$$(1-\varepsilon)(S_p - S_{n_0} - 1) \leq T_p - T_{n_0} - 1 \leq (1+\varepsilon)(S_p - S_{n_0} - 1)$$

en notant S_p et T_p les sommes partielles d'ordre p.On en déduit

$$(1-\varepsilon)S_p - (1-\varepsilon)S_{n_0-1} + T_{n_0-1} \leq T_p \leq (1+\varepsilon)S_p - (1+\varepsilon)S_{n_0-1} + T_{n_0-1}.$$

Mais les S_p deviennent strictement positifs pour n assez grand car elles tendent vers $+\infty$. D'où

$$1 - \varepsilon + \frac{T_{n_0-1} - (1-\varepsilon)S_{n_0-1}}{S_p} \leq \frac{S_p}{T_p} \leq 1 + \varepsilon + \frac{T_{n_0-1} - (1+\varepsilon)S_{n_0-1}}{S_p}.$$

Le fait que $\lim\limits_{p\to\infty} S_p = +\infty$ on a

$$\forall \varepsilon,\ \exists n_1,\ \forall p \ : \ p \leq n_1 \Rightarrow 1 - 2\varepsilon \leq \frac{T_p}{S_p} \leq 1 + 2\varepsilon.$$

Les sommes partielles sont équivalentes.

Proposition 10 *Soient $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ deux séries à termes positifs. Si $u_n << v_n$ alors $(\sum v_n)$ convergente implique $(\sum u_n)$ convergente.*

[Ind] A partir d'un certain rang $u_n \geq v_n$

[Dem] Si la suite (u_n) est négligeable devant la suite (v_n), il existe alors un entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $|v_n| \leq |u_n|$ et donc $v_n \leq u_n$ puisque les deux suites sont positives. On applique alors la proposition sur la comparaison de deux séries à termes positifs.

Proposition 11 (Comparaison logarithmique) *Soient* $(\sum u_n)$ *et* $(\sum v_n)$ *deux séries à termes* **strictement positifs**. *Si, à partir d'un certain rang,* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ *alors* $(\sum v_n)$ *convergente implique* $(\sum u_n)$ *convergente.*

[Ind] Vérifier que la suite (u_n) est dominée par la suite (v_n).

[Dem] On vérifie, en le démontant par récurrence que, pour tout $n \geq n_0$, $\dfrac{u_n}{u_{n_0}} \leq \dfrac{v_n}{v_{n_0}}$. On applique alors la proposition sur la comparaison de deux séries à termes positifs.

6.3.2 Comparaison à une série géométrique

Proposition 12 (Méthode de D'Alembert) *Soit* $(\sum u_n)$ *une série à termes* **strictement positifs**.
1) S'il existe un réel $k \in [0, 1[$ *tel qu'à partir d'un certain rang* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq k$ *alors la série* $(\sum u_n)$ *est convergente.*
2) S'il existe un réel $k \geq 1$ *tel qu'à partir d'un certain rang* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq k$ *alors la série* $(\sum u_n)$ *est divergente.*

[Ind] Comparer la suite (u_n) et la suite géométrique (k^n).

[Dem] 1) Si, à partir du rang n_0, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq k$, alors, à partir de ce rang, on a $\dfrac{u_n}{u_{n_0}} \leq \dfrac{k^n}{k^{n_0}}$. On applique alors la proposition sur la comparaison de deux séries à termes positifs. 2) Il suffit de renverser les inégalités dans la démonstration précédente.

Proposition 13 (Règle de D'Alembert) *Soit* $(\sum u_n)$ *une série réelle ou complexe telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \neq 0 \text{ et } \lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = l.$$

Si $0 \leq l < 1$ *alors la série* $(\sum u_n)$ *est absolument convergente (donc convergente).*
Si $l > 1$ *alors la série* $(\sum u_n)$ *est divergente car le terme général* u_n *ne tend pas vers* 0.

[Ind] Essayer d'appliquer la méthode de D'Alembert à la série $\sum |u_n|$.

[Dem] 1) Si $l < 1$, alors, pour tout réel ε strictement positif, à partir d'un certain rang $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leq l + \varepsilon$. En prenant $\varepsilon = \dfrac{1-l}{2}$, on pose alors $k = l + \varepsilon$ et on a $k < 1$. On en déduit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente.
2) Si $l > 1$, alors, pour tout réel ε strictement positif, à partir d'un certain rang $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \geq l - \varepsilon$. En prenant $\varepsilon = \dfrac{l-1}{2}$, on pose alors $k = l - \varepsilon$ et on a $k > 1$. On en déduit que la suite $(|u_n|)$ domine la suite géométrique (k^n) et donc diverge vers $+\infty$.

Remarque: Le cas où $l = 1$ est appelé cas douteux de la règle de D'Alembert.

6.3.3 Comparaison avec une intégrale

Soit f une fonction continue définie sur $[a, b[$ $(a < b \leq +\infty)$ **à valeurs positives**. Nous verrons que ce type de fonction est appelée fonction intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si la limite lorsque x tend vers b de $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ existe. Cette limite est alors notée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

Exemple 1 Soit α un réel, la fonction qui, à $x \in [1, +\infty[$, associe $\dfrac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Proposition 14 *Soit f une fonction continue définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs positives. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs tendant vers $+\infty$.*
La série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)dt$ est convergente si et seulement si la fonction f est intégrable sur $[0,+\infty[$ et lorsqu'elle est convergente : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \int_{x_0}^{+\infty} f(t)dt$.

[Ind] Considérer la fonction croissante $F \ : \ x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

[Dem] Notons F la primitive de f qui s'annule en 0.
La somme partielle S_n de la série $\sum u_n$ est égale à $F(x_{n+1}) - F(x_0)$. Or la fonction f étant positive, est intégrable si et seulement F possède une limite en $+\infty$, mais, puisque F est une fonction croissante, F possède une limite en $+\infty$ si et seulement s'il existe une suite x_n qui tend vers $+\infty$ telle que la suite $(F(x_n))$ converge. On en déduit donc la proposition.

Proposition 15 *Soit f une fonction continue décroissante définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs positives. La série de terme général $f(n)$ est convergente si et seulement si la fonction f est intégrable sur $[0,+\infty[$.*

[Ind] Examiner la méthode des rectangles appliquée à l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[0,n]$ avec des pas de 1.

[Dem] Puisque la fonction f est décroissante, on a , pour tout entier k, $f(k+1) \leq \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k)$.
En notant S_n la somme partielle de la série de terme général $f(n)$, on a donc, en sommant cette dernière égalité pour k variant de 0 à n: $S_{n+1} - f(0) \leq \displaystyle\int_0^n f(t)dt \leq S_n$.
Si la fonction f est intégrable, on en déduit que, pour tout entier $n \geq 1$, $S_n \leq f(0) + \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$, la suite (S_n) est majorée et donc étant croissante, qu'elle est convergente.
Si la série $\sum f(n)$ est convergente, de somme S, on en déduit que la fonction F définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ vérifie, pour tout entier n, $F(n) \leq S$. Ceci implique, puisque F est croissante, qu'elle est majorée par S et donc qu'elle possède une limite en $+\infty$.

Exercice 10 Soit f une fonction positive décroissante continue sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que la série de terme général $f(n) - \displaystyle\int_n^{n+1} f$ est convergente. En déduire que si la fonction f n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$ alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k) \sim \int_0^n f(t)dt$.

[Ind] Reprebdre les inégalités.

[Dem] Si $n \leq x \leq n+1$ on a $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$ et $f(n+1) \leq \displaystyle\int_n^{n+1} f \leq f(n)$. Ainsi $f(n) - \displaystyle\int_n^{n+1} f \leq f(n) - f(n+1)$. La suite $(f(n))_n$ est convergente donc la série $\sum f(n) - \displaystyle\int_n^{n+1} f$ converge.
Maintenant si f n'est pas intégrable alors

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^n f \leq -f(n+1) + f(0) \leq f(0).$$

Ce qui donne

$$0 \leq \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k)}{\displaystyle\int_0^n f} - 1 \leq \frac{f(0)}{\displaystyle\int_0^n f}$$

et les deux suites $\left(\int_{k=0}^{n} f(k)\right)_n$ et $\left(\int_0^n f\right)_n$ sont bien équivalentes.

6.3.4 Comparaison à une série de Riemann

Définition 5 *On appelle séries de Riemann les séries* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposition 16 *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$. *La série de Riemann* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ *est convergente si et seulement si* $\alpha > 1$.

[Ind] Comparer la série à l'intégrale de la fonction $x \mapsto 1/x^\alpha$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$

[Dem] Si α est négatif, le terme général de la série ne tend pas vers 0, la série est donc divergente.
Si $\alpha > 0$, la série est convergente si et seulement si la fonction $x \mapsto 1/x^\alpha$ est intégrable sur l'intervalle $[1, +\infty[$, on vérifie, en utilisant un primitive de cette fonction que c'est le cas si et seulement si $\alpha > 1$.

Proposition 17 *Soit* $(\sum u_n)$ *une série à termes positifs telle qu'il existe* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $l \in \overline{\mathbb{R}}_+$ *vérifiant* $\lim_{n\to\infty} n^\alpha u_n = l$.
1) Si $l \in R_+^*$, *la série* $(\sum u_n)$ *est convergente si et seulement si* $\alpha > 1$.
2) Si $l = +\infty$ *et* $\alpha \leq 1$, *la série* $(\sum u_n)$ *est divergente.*
3) Si $l = 0$ *et* $\alpha > 1$, *la série* $(\sum u_n)$ *est convergente.*

[Ind] Comparer la série à une série de Riemann.

[Dem] 1) Dans ce cas $u_n \sim l \times n^{-\alpha}$, donc la série est convergente si $\alpha > 1$
2) Ici $u_n >> n^{-\alpha}$, donc si $\alpha \leq 1$, la série $\sum u_n$ est divergente.
3) On a alors $u_n << n^{-\alpha}$, donc si $\alpha > 1$, la série $\sum u_n$ est convergente.

6.4 Séries à termes réels ou complexes

6.4.1 Séries alternées

Définition 6 *Soit* $(\sum u_n)$ *une série à termes réels. On dit que la série est alternée s'il existe une série* $(\sum v_n)$ *à termes réels de signe constant telle que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$: $u_n = (-1)^n v_n$.

Théorème 3 (Règle de convergence des séries alternées) *Soit* $(\sum v_n)$ *une série à termes positifs.*
Si la suite (v_n) *est décroissante et si* $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ *alors la série alternée* $(\sum(-1)^n v_n)$ *est convergente.*

[Ind] Montrer que la suite des sommes partielles est une suite de Cauchy.

[Dem] Soit p et n des entiers, notons $R_p^n = \left|\sum_{k=p}^{p+n}(-1)^k v_k\right|$, on a $R_p^n = \left|\sum_{k=p}^{p+n}(-1)^{k-p} v_k\right|$.

Montrons que $A_n^p = \sum_{k=p}^{p+n}(-1)^{k-p} v_k$ est positif. Si $n = 0$, $A_n^0 = v_p \geq 0$. Si n est impair: $n = 2m+1$ avec $m \geq 0$, $A_n^{2m+1} = \sum_{k=0}^{m}(v_{p+2k} - v_{p+2k+1})$ est positif car, pour tout entier q, $v_q \geq v_{q+1}$ enfin si n est pair et supérieur à 2: $n = 2m+2$ avec $m \geq 0$, $A_n^{2m+2} = A_n^{2m+1} + v_{p+2m+2}$ est positif comme somme de nombres positifs.
On a ainsi $R_n^0 = v_p$ et $R_p^n = A_n^p = v_p - A_{p+1}^{n-1} \leq v_p$ si $n > 0$, et on peut conclure, puisque la suite (v_n) converge vers 0, que la série de terme général $(-1)^n v_n$ vérifie le critère de Cauchy et est donc convergente.

Proposition 18 *Soit (u_n) une suite de réels de signe constant telle que la suite $(|u_n|)$ est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. En notant respectivement (S_n) et (R_n) les suites des sommes partielles et des restes de la série alternée $\sum(-1)^n u_n$, on a :*
1) Les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes de limite la somme de la série alternée $(\sum(-1)^n u_n)$.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: R_n est du signe de u_{n+1} et $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

[Ind] Calculer ...

[Dem] Quitte à multiplier toute la série par -1, on peut supposer que la suite (v_n) est positive.
1) Pour tout entier n, on a $S_{2n+2} = S_{2n} - v_{2n+1} + v_{2n+2} \leq S_{2n}$ car $v_{2n+2} \leq v_{2n+1}$ et $S_{2n+3} = S_{2n+1} + v_{2n+2} - v_{2n+1} \geq S_{2n+1}$ car $v_{2n+3} \leq v_{2n+2}$, d'autre part $S_{2n+1} - S_{2n} = -v_{2n+1} \leq 0$ et, puisque la suite (v_n) converge vers 0, les deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes et convergent vers la même limite S et la suite (S_n) converge aussi vers S.2) Pour tout entier n, $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$ donc $-v_{2n+1} \leq S_{2n+1} - S_{2n} \leq R_{2n} \leq 0$ et $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2}$ donc $0 \leq R_{2n+1} \leq S_{2n+2} - S_{2n+1} \leq v_{2n+2}$.

Remarque: Le théorème précédent présente une règle et non un critère. En effet, il existe des séries alternées convergentes ne vérifiant ni la règle, ni la proposition qui suit.

Exercice 11 Étudier, pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, les séries $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$.

[Ind] Chercher un équivalent.

[Dem] Comme $\alpha > 0$ on peut écrire $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\left(1 - \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} + o\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)\right)$. Ainsi $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} - \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} \sim \dfrac{1}{n^{2\alpha}}$. Comme la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge on a que la série est de mÃªme nature que $\sum \dfrac{1}{n^{2\alpha}}$. Elle converge si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

6.4.2 Série produit

Définition 7 *Soient $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ deux séries à termes réel ou complexes. On appelle série produit des deux séries, la série dont le terme général est $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.*

Proposition 19 *Soient $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ deux séries à termes réels positifs. Si les deux séries sont convergentes de sommes S et T, la série produit est convergente et sa somme est le produit ST.*

[Ind] Encadrer la somme partielle de la série produit par des sommes partielles des deux séries de départ.

[Dem] Notons $\sum w_n$ la série produit et (W_n) la suite des sommes partielles.
Pour tout entier n, $W_n = \sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{i} u_j v_{i-j}$. Notons T_n la partie de $\mathbb{N}^2$ constituée des couples (p,q) qui vérifient $p+q \leq n$. On a $W_n = \sum\limits_{(p,q)\in T_n} u_p v_q$, or $[0,[n/2]] \times [0,[n/2]] \subset T_n \subset [0,n] \times [0,n]$ et puisque les réels de la forme $u_p v_q$ sont positifs, on en déduit

$$\sum_{(p,q)\in[0,[n/2]]\times[0,[n/2]]} u_p v_q \leq W_n \leq \sum_{(p,q)\in[0,n]\times[0,n]} u_p v_q$$

Ainsi, en notant (S_n) et (T_n) les suites des sommes partielles des deux séries, on a

$$S_{[n/2]}T_{[n/2]} \leq W_n \leq S_n T_n$$

.
Si les suites (S_n) et (T_n) sont convergentes, les suites $(S_{[n/2]})$ et$(T_{[n/2]})$ le sont vers les mêmes limites respectives, ainsi la série produit est bien convergente et sa somme est le produit ST.

Proposition 20 *Soient* $(\sum u_n)$ *et* $(\sum v_n)$ *deux séries à termes réels ou complexes. Si les deux séries sont* **absolument** *convergentes de sommes* S *et* T*, la série produit est absolument convergente et sa somme est le produit* ST*.*

[Ind] Pour montrer que la somme de la série produit est ST, montrer $(W_{2n} - S_nT_n)$ converge vers 0, S_n, T_n et W_n représentant les sommes partielles des séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et de la série produit.

[Dem] Sous les hypothèses du théorème, le module du terme général de la série produit est majoré par le terme général de la série produit des séries des modules, on en déduit que la série produit possède une série majorante convergente et donc est absolument convergente. Pour tout entier n, notons respectivement S_n , T_n et W_n les sommes partielles des séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et de la série produit, S_a et T_a les sommes des séries des modules.L'ensemble T_{2n} des couples d'entiers vérifiant (p,q) vérifiant $p+q \leq 2n$ peut se partitionner en trois parties, l'ensemble C_n des couples (p,q) où p et q appartiennent à $[0,n]$, l'ensemble $P_n = \{(p,q) \mid p \in [n{+}1, 2n], q \in [0, 2n{-}p]\}$ et enfin l'ensemble $Q_n = \{(p,q) \mid q \in [n{+}1, 2n], p \in [0, 2n{-}q]\}$ Avec ces notations, on a $W_{2n} = \displaystyle\sum_{(p,q)\in T_{2n}} u_pv_q$ et $S_nT_n = \displaystyle\sum_{(p,q)\in C_n} u_pv_q$. Ainsi

$$\begin{aligned}
|W_{2n} - T_nS_n| &= \left| \sum_{(p,q)\in P_n} u_pv_q + \sum_{(p,q)\in Q_n} u_pv_q \right| \\
&\leq \sum_{(p,q)\in P_n} |u_p|\,|v_q| + \sum_{(p,q)\in Q_n} |u_p|\,|v_q| \\
&\leq \sum_{p=n+1}^{2n} \sum_{q=0}^{2n-p} |u_p|\,|v_q| + \sum_{q=n+1}^{2n} \sum_{p=0}^{2n-q} |u_p|\,|v_q| \\
&\leq \sum_{p=n+1}^{2n} |u_p|\, T_a + \sum_{q=n+1}^{2n} |v_q|\, S_a
\end{aligned}$$

Mais puisque les séries $\sum |u_n|$ et $\sum |v_n|$ convergent, les suites $(\displaystyle\sum_{p=n+1}^{2n} |u_p|)$ et $(\displaystyle\sum_{q=n+1}^{2n} |v_q|)$ convergent vers 0, ainsi la suite $(W_{2n} - T_nS_n)$ converge vers 0 et la somme de la suite produit est bien le produit ST.

Exercice 12 Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série de terme général $\frac{z^n}{n!}$ est convergente. On note $\exp(z)$ sa somme. Montrer que, pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$: $\exp(z+z') = \exp(z)\exp(z')$.

[Ind] Faire le produit.

[Dem] La convergence pour tout z se fait par exemple par D'Alembert : $\lim \dfrac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \dfrac{n!}{|z|^n} = \lim \dfrac{|z|}{n+1} = 0$. Le produit est la série de terme général c_n avec $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} z^k \frac{1}{(n-k)!} z'^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (z+z')^n$. Les séries étant absolument convergente dans $\mathbb{C}$ on obtient le résultat.

Remarque: La série produit de deux séries convergentes peut être divergente.

Exercice 13 Soit $(\sum u_n)$ la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Montrer que la série produit de cette série avec elle-même est divergente.

6.4.3 Développement décimal d'un réel

Nous posons $\mathcal{S} = \left\{ (d_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ telle que pour tout } k, d_k \in [0,9], d_0 \neq 0 \text{ et } (d_k)_k \text{ ne stationne pas en } 9 \right\}$

Théorème 4 *Un réel x positif strictement possède un et un seul développement décimal illimité, c'est à dire : il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ et une unique suite (d_k) de $\mathcal{S}$ telle que $x = 10^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} d_k 10^{-k}$.*

[Ind] Utiliser les séries.

[Dem]

- Tout d'abord un tel développement défini bien un réel positif strictement. En effet $\sum_{k=0}^{\infty} d_k 10^{-k}$ esxiste car dominé par $\sum_{k=0}^{\infty} 9\cdot 10^{-k} = 10$ et est supérieur à $d_0 > 0$.
- Démontrons l'unicité : si on a deux tels développements pour un réel on aurait : $0 = 10^n \sum_{k=0}^{\infty} d_k 10^{-k}$ avec $d_k \in [-9,+9]$ par suite $1 \leq |d_0| \leq \left| -\sum_{k=1}^{\infty} d_k 10^{-k} \right| < 9\sum_{k=0}^{\infty} 10^{-k} = 1$. L'inégalté stricte provient du fait qu'il existe au moins un k tel que $d_k < 9$. D'où la contradiction $1 < 1$. Remarque : $(10^m x)$ est une suite croissante de 0 à $+\infty$, il existe donc un n : $10^{-n-1}x < 1 \leq 10^{-n}x$. On pose $y = 10^{-n}x$ et ainsi $1 \leq y < 10$. Il suffit donc de développer y. L'unicité se démontre aussi par analyse : Si $y = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k 10^{-k}$ alors $y = \sum_{k=0}^{m} d_k 10^{-k} + \sum_{k=p+1}^{+\infty} d_k 10^{-k}$ et pour tout m on a $y < \sum_{k=0}^{m} d_k 10^{-k} + 10^{-m}$ ou $0 \leq 10^m(y - \sum_{k=0}^{m} d_k 10^{-k}) < 1$ ou encore $E(10^m x) = 10^m \sum_{k=0}^{m} d_k 10^{-k}$. Cela donne $d_0 = E(x)$ et pour tout $m \neq 0$: $d_m = E(10^m x) - 10E(10^{m-1}x)$. Ceci prouve l'unicité des (d_k).
- Pour l'existence
  - $(10^n x)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite croissante de 0 à $+\infty$ il existe donc un n tel que $10^{-n-1}x < 1 \leq 10^{-n}x$. ($x = 36,752$ et $10^{-2}x < 1 \leq 10^{-1}x$ et $y = 3,6752$) on pose $y = 10^{-n}x$ et ainsi $1 \leq y < 10$.
  - On considère alors pour tout p de $\mathbb{N}$: $a_p = 10^{-p}E[10^p y]$ ou $10^p a_p \leq 10^p y < 10^p a_p + 1$ ($a_o = 3, a_1 = 3,6, a_2 = 3,67...$) on a : $a_p \leq y < a_p + 10^{-p}$ et $y - 10^{-p} \leq a_p \leq y$ ce qui prouve que (a_p) converge vers y.
    Enfin on a $10^{p+1}a_p \leq 10^{p+1}y < 10^{p+1}a_p + 10$ et $10^{p+1}a_p \leq E\left[10^{p+1}y\right] = 10^{p+1}a_{p+1} < 10^{p+1}a_p + 10$ cela prouve que pour tout p de $\mathbb{N}$, $0 \leq 10^{p+1}(a_{p+1} - a_p) \leq 9$ en posant $d_{p+1} = 10^{p+1}(a_{p+1} - a_p)$ élément de $[0,9] \cap \mathbb{N}$ et $d_0 = a_0 = E[y]$ il nous reste à montrer que tout cela convient. ($a_1 - a_0 = 0,6, a_2 - a_1 = 0,07....$)
    * Nous avons $10^{-p}d_p = (a_p - a_{p-1})$ et donc $\sum_{k=0}^{p} d_k 10^{-k} = a_p$ et donc $x = 10^n \lim_{p\to+\infty} a_p = 10^n \sum_{k=0}^{+\infty} d_k 10^{-k}$.
    * Montrons que la suite ne peut stationner à 9. En effet si tel était le cas il existerait p entier tel que $y - a_p = \sum_{k=p+1}^{+\infty} d_k 10^{-k} = 9\sum_{k=p+1}^{+\infty} 10^{-k} = 10^{-p}$ ce qui contredit $a_p \leq y < a_p + 10^{-p}$.
- Nous avons ainsi que $\Phi : \mathcal{S} \to]0,10[, (d_k)_k \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} d_k 10^{-k}$.est une bijection.

6.5 Exercices

Exercice 14 Étudier la convergence et la somme des séries dont les termes généraux sont:

$$\frac{1}{n(n+1)},\quad \frac{1}{n(n+1)(n+2)},\quad \frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)}$$

[Ind] Décomposer en éléments simples.

[Dem] Faisons le cas général. La décomposition en éléments simples de la fraction donne : $\frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)} = \frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n+1}+\cdots+\frac{a_p}{n+p-1}$. Remarquons tout de suite que la fraction n'ayant pas de terme en n^{p-1} au numérateur on a $a_1+a_2+\cdots+a_p=0$ (imaginer une réduction au mÃªme dénominateur). Une somme partielle pour n assez grand $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)\cdots(k+p-1)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{a_1}{k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_2}{k+1}+\cdots\sum_{k=1}^{n}\frac{a_p}{k+p-1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{a_1}{k}+\sum_{k=2}^{n+1}\frac{a_2}{k}+\cdots+\sum_{k=p}^{n+p-1}\frac{a_p}{k} = \sum_{k=p}^{n}\frac{a_1+\cdots+a_p}{k}+\sum_{1}^{p-1}\frac{a_1}{k}+\sum_{2}^{p-1}\frac{a_2}{k}+\cdots+\sum_{k=p-1}^{p-1}\frac{a_{p-1}}{k}+\sum_{k=n+1}^{n+1}\frac{a_2}{k}+\cdots+\sum_{k=p+1}^{n+p-1}\frac{a_p}{k}$. En faisant tendre n vers l'infini on trouve que S_n tend vers $S=\sum_{1}^{p-1}\frac{a_1}{k}+\sum_{2}^{p-1}\frac{a_2}{k}+\cdots+\sum_{k=p-1}^{p-1}\frac{a_{p-1}}{k}$. En effet le gros de la troupe vaut 0 car $a_1+\cdots+a_p=0$ et les derniers termes sont en nombre fini et tendent vers 0.

Exercice 15 Étudier la convergence des séries dont les termes généraux sont:
$\frac{n!}{n^n}$, $\quad n^{-(1+n^{-1})}$, $\quad n^{-1}-\ln(n-1)+\ln n$, $\quad (1+\sqrt{n})^{-n}$, $\quad (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^{\sqrt{n}}$, $\quad \frac{1}{\ln(n!)}$, $\quad n^{-1}\cos\ln n$.

[Ind] Majorer, minorer, équivalents, développement limité du terme général.

[Dem] La règle de D'Alembert donne : $\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ qui tend vers e car $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$. La série diverge. La formule de Stirling permet de coclure plus rapidement.
$n^{-(1+\frac{1}{n})}=\frac{1}{n}e^{-\frac{\ln n}{n}}\sim\frac{1}{n}$. La série diverge.
$\frac{1}{n}-\ln(n-1)+\ln n=\frac{1}{n}-\ln(1-\frac{1}{n)})\sim\frac{2}{n}$. La série diverge.
Pour $n\geq 2$ on a $(1+\sqrt{n})>2$ donc $(1+\sqrt{n})<2^{-n}$, la série converge.
On a : $n^2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{\sqrt{n}}=e^{2\ln n+\sqrt{n}\ln\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}$. Or $\ln\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=-\ln\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\sim-\ln(2\sqrt{n})\sim-\frac{1}{2}\ln n$ (identité remarquable). D'où $2\ln n+\sqrt{n}\ln\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\to-\infty$. Par suite la série converge.
On a $n!<n^n$ donc $\frac{1}{\ln n!}>\frac{1}{n\ln n}$. Cette dernière série diverge donc la série proposée aussi.
Essayons de minorer : $\cos\ln n\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$ si et seulement si il existe un entier k non nul tel que $e^{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}\leq n\leq e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}$. Posons $p_k=\left[e^{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}\right]$ et $q_k=\left[e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}\right]$ on a alors pour $S_k=\sum_{n=p_k+1}^{q_k-1}\frac{\cos(\ln n)}{n}$ la minoration $S_k\geq(q_k-p_k-1)\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{q_k-1}\geq\left(e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}-e^{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}-2\right)\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}-2k\pi}=\left(2\,\mathrm{sh}(\frac{\pi}{4})e^{2k\pi}-2\right)\frac{\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}}{2}e^{-2k\pi}$ qui tend vers $\sqrt{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi}{4}e^{-\frac{\pi}{4}}$ qui n'est pas nul. La série diverge.

Exercice 16 Étudier les séries de terme général:
a) $\mathrm{Arcsin}\,\frac{n^2}{n^2+1}-\mathrm{Arcsin}\,\frac{n^2}{n^2+2}$
b) $\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.
c) $(\sqrt{n}+2^{(-1)^n}n)^{-1}$.

d) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$.

[Ind] Utiliser sin $Arcsin$, majore, minorer, équivalents, développement limité.

[Dem] a) $\sin\left(\text{Arcsin}\,\frac{n^2}{n^2+1}-\text{Arcsin}\,\frac{n^2}{n^2+2}\right)=\frac{n^2}{n^2+1}\sqrt{1-\left(\frac{n^2}{n^2+2}\right)^2}-\frac{n^2}{n^2+1}\sqrt{1-\left(\frac{n^2}{(n^2+1)^2}\right)}=$
$\frac{n^2}{(n^2+1)(n^2+2)}\left(\sqrt{4n^2+4}-\sqrt{2n^2+1}\right)=\frac{n^2(2n^2+3)}{(n^2+1)(n^2+2)\left(\sqrt{4n^2+4}+\sqrt{2n^2+1}\right)}\sim\frac{2}{(2+\sqrt{2})n}$.
Et la série diverge.
b) La règle de Riemann : $n^2\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}=e^{2\ln n+(\ln n)^2-n\ln(\ln n)}$ expression qui tend vers 0, la série converge.
c) $(\sqrt{n}+2^{(-1)^n}n)^{-1}\geq\frac{1}{\sqrt{n}+2n}\sim\frac{1}{2n}$, la série diverge.
d) Le reste de la série $\sum\frac{1}{k^2}$, par comparaison avec une intégrale est équivalent à $\displaystyle\int_{n+1}^{+\infty}\frac{dt}{t^2}=\left[-\frac{1}{t}\right]_{n+1}^{+\infty}=$
$\frac{1}{n+1}$, la série diverge.

Exercice 17 Étudier la convergence des séries dont les termes généraux sont:
$(-1)^n\frac{\ln n}{n}$, $\ln(n)\ln(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$, $(-1)^nR(n)$ où $R\in\mathbb{R}(X)$, $\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$.

[Ind] MÃªme combat avec de l'alterné !

[Dem] La fonction $x\mapsto\frac{\ln x}{x}$ est positive et décroit sur $[e,+\infty[$ donc d'après le théorème spécial des séries alternées la série converge.
Un développement limité donne $\ln(n)\ln(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})=\ln n\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)-\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)=\frac{(-1)^n\ln n}{\sqrt{n}}-$
$\frac{\ln n}{2n}+O\left(\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}\right)$. Or la fonction $x\mapsto\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ est positive et décroissant sur $[e,+\infty[$. La série de terme général $\frac{(-1)^n\ln n}{\sqrt{n}}$ converge, la série de terme général $O\left(\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}\right)$ aussi mais la série de terme général $\frac{\ln n}{n}$ diverge, donc l'ensemble diverge.
Posons $R(X)=\frac{P(x)}{Q(X)}$ où P,Q sont des polynÃ´mes. Si $\deg(P)\geq\deg(Q)$ alors le terme général ne tend pas vers 0. Si $\deg(P)\leq\deg(Q)-2$ alors la série est absolument convergente. Si $\deg(P)=\deg(Q)-1$ alors $(-1)^n\frac{P(n)}{Q(n)}=a\frac{(-1)^n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, comme $a\neq0$ la série est semi convergente.
Pour montrer que l'on a une série alternée dont la valeur absolue décroit on prend le ln : $\frac{1}{n+1}\ln(n+1)!-\frac{1}{n}\ln(n!)=\frac{1}{n(n+1)}\ln\left(\frac{(n+1)^n}{n!}\right)>0$, ains $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ décroit. Ensuite $\sqrt[n]{n!}$ tend vers $+\infty$ car si $n=2p$ on a $\sqrt[n]{n!}\geq\sqrt[2p]{(p+1)(p+2)(\cdots(2p)}\geq\sqrt[2p]{(p+1)^p}=\sqrt{p+1}$. La série converge donc par le théorème des séries alternées.

Exercice 18 Calculer les sommes des séries suivantes, après avoir montrer leur convergence:
$\ln(1+(-1)^nn^{-1})$, $\ln(1-n^{-2})$, $\frac{1}{n^3-n}$, $(-1)^n\frac{n+1}{3^n}$.

[Ind] On peut calculer les sommes.

[Dem] On regroupe deux à deux les termes pairs et les termes impairs. $\ln(1+\frac{1}{2p})+\ln(1-\frac{1}{2p+1})=$
$\ln(1+\frac{1}{2p})(1-\frac{1}{2p+1})=0$ et comme $\ln(1+\frac{(-1)^n}{n})$ tend vers 0 la somme de la série est 0.
On passe par le produit : $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k^2})=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)}=\frac{n+1}{2n}$. La série vaut donc $-\ln 2$.
Décomposons en éléments simples : $\frac{1}{n^3-n}=\frac{1}{(n-1)n(n+1)}=\frac{\frac{1}{2}}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{\frac{1}{2}}{n+1}$. Les sommes

partielles donnent $S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} + \frac{1}{n} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{3}^{n+1}\frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n+1)}$ qui tend vers $\frac{1}{4}$.

Posons $S_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} 3^{-n} = \frac{3}{2}$ et $S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} n3^{-n}$ on a $3^{-1}S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} n3^{-(n+1)} = \sum_{p=1}^{+\infty}(p-1)3^{-p} = S_1 - 3^{-1}S_0$ d'où $S_1 = \frac{3}{4}$ et la somme est $\frac{9}{4}$.

Exercice 19 Étudier la suite de terme général:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^\alpha}{n^{\alpha+1}}$$

et en déduire un équivalent de la suite de terme général:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \quad \alpha \leq 1$$

[Ind] Utiliser une intégrale.

[Dem] La suite : $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^\alpha}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha$ et tend donc vers $\int_0^1 x^\alpha = \frac{1}{\alpha+1}$ si $\alpha > -1$, elle diverge sinon. On en déduit que si $\alpha < 1$ le rapport $\dfrac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}}{\frac{1}{(1-\alpha)n^{\alpha-1}}}$ tend vers 1. Ainsi un équivalent de $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$ est $(1-\alpha)n^{1-\alpha}$.

Exercice 20 Séries de Bertrand. Soient α, β_1, β_2, …, β_p des réels. Montrer que la série de terme général

$$\frac{1}{n^\alpha \ln^{\beta_1} n \ln^{\beta_2}(\ln n)\cdots\ln^{\beta_p}(\ln(\cdots\cdots(\ln n)\cdots))}$$

converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta_1 > 1$) ou … ou ($\alpha = \beta_1 = \cdots = \beta_{p-1} = 1$ et $\beta_p > 1$).

[Ind] Faire la démonstration pour la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$, puis généraliser.

[Dem] Séparons les cas :
Si $\alpha > 1$ alors en posant $\alpha = 1 + 2\varepsilon$ on a $\lim_{n\to+\infty} n^{1+\varepsilon}u_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^\varepsilon \ln^\beta n} = 0$ et il y a convergence.
Si $\alpha < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} nu_n = \lim_{n\to+\infty} n^{1-\alpha}\frac{1}{\ln^\beta n} = +\infty$ et la série diverge.
Si $\alpha = 1$ et $\beta \leq 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} nu_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln^\beta n} = \begin{cases} 1 \text{ si } \beta = 0 \\ +\infty \text{ si } \beta < 0 \end{cases}$ et la série diverge.
Si $\alpha = 1$ et $\beta > 0$ alors on considère $f(x) = \frac{1}{x\ln^\beta x}$ qui est une fonction positive, continue, décroissante sur $[2, +\infty[$ et dont l'intégrale $\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ converge si $\beta > 1$ et diverge $\beta \leq 1$. En utilisant le théorème de comparaison des séries avec les intégrales on a que la série converge si $\beta > 1$ et diverge si $\beta \leq 1$. Pour la convergence de l'intégrale il suffit de poser $t = \ln x$.

Exercice 21 Soit (P_k) la suite de polynômes définie par: $P_k = X(X-1)\ldots(X-(k-1))$. Montrer que cette suite forme une base de $\mathbb{R}[X]$. En déduire une méthode pour trouver la somme de la série convergente:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{P(n)}{n!}$$

où P est un polynôme.
Calculer: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+2n+1}{n!}$.

[Ind] Un peu d'algèbre, regarder les degrés. Remarquer que : $P_{k+1}(X+1)-P_{k+1}(X)=P_k(X)$.

[Dem] Les polynÃ´mes P_k ont des degrés étagés plus précisément $\deg(P_k)=k$, ils forment donc une base de $\mathbb{R}[X]$. Ce sont les polynÃ´mes d'Hilbert. Ils vérifient : $P_{k+1}(X+1)-P_{k+1}(X)=kP_k(X)$. Ici nous utilisons : $P_k(n)=n(n-1)\cdots(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$. Étant donné un polynÃ´me P on peut le décomposer dans la base (P_k) : $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{p}P_k$. Ainsi $\displaystyle\sum\frac{P(n)}{n!}=\sum_{k=0}^{p}\sum a_k\frac{P_k(n)}{n!}=\sum_{k=0}^{p}\sum_{n\geq k}\frac{a_k}{(n-k)!}=\sum_{k=0}^{p}e^{a_k}$.
Par exemple $n^2+2n+1=n(n-1)+3n+1$ et $\frac{n^2+2n+1}{n!}=\frac{1}{(n-2)!}+\frac{3}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}$ et la somme de la série vaut $2e+e^3$.

Exercice 22 a) Étudier la convergence de la série de terme général: $\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.
b) Rappeler brièvement pourquoi $e=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$, en déduire la nature de la série de terme général $\sin(n!e\pi)$.

[Ind] Faire un développement limité du terme général assez loin.
utiliser deux suites adjacentes.

[Dem] On a $\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=\sin(\pi n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}})=\sin(\pi n(1+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{8n^3}+o(\frac{1}{n^3}))=\sin(\pi n+\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi}{8n^2}+o(\frac{1}{n^2}))=(-1)^n\sin(\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi}{8n^2}+o(\frac{1}{n^2}))=(-1)^n(\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi}{8n^2}+o(\frac{1}{n^2}))=(-1)^n(\frac{\pi}{2n})-(-1)^n\frac{\pi}{8n^2}+o(\frac{1}{n^2})$ chaque terme général donne la convergence de la série correspondante. La première par le théorème des séries alternées et les deux dernières par comparaison avec Riemann.
On peut rappeler que $u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ et $v_n=u_n+\frac{1}{nn!}$ sont deux suites adjacentes. Ce qui donne que $0\leq e-u_{n+1}\leq v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+1)!}$ d'où $0\leq\pi n!e-\pi n!u_{n+1}\leq\frac{\pi}{(n+1)^2}$. Ainsi $\pi n!e=\pi n!u_{n+1}+O(\frac{1}{n^2})$. Et pour $n\geq 2$ on a : $\pi n!u_{n+1}=\pi\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2}\frac{n!}{k!}+\pi n+\pi+\frac{\pi}{n+1}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2}\frac{n!}{k!}$ est un entier pair. Donc $\sin(\pi n!e)=(-1)^{n+1}\sin(\frac{\pi}{n+1}+O(\frac{1}{n^2}))=\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}+O(\frac{1}{n^2})$. La série est semi-convergente.

Exercice 23 a) Soit (u_n) une suite de réels positifs décroissante, montrer que si la série de terme général u_n converge, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}nu_n=0$.
b) Trouver une suite (u_n) de réels positifs décroissante telle que la série de terme général u_n diverge alors que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}nu_n=0$.
c) Trouver une suite (u_n) de réels positifs telle que la série de terme général u_n converge alors que la suite (nu_n) n'admet pas de limite.

[Ind] Étudier les suites de terme général $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n}u_k$ et $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n+1}u_k$.

[Dem] Prenons $\varepsilon>0$ il existe n_0 etl que $\forall p,q\ q>p>n_0\Rightarrow\displaystyle\sum_{k=p+1}^{q}u_k<\frac{\varepsilon}{2}$ par le critère de Cauchy.
Maintenant pour $n\geq n_0$: $0\leq nu_n\leq u_{n_0+1}+\cdots+u_n+n_0u_n<\frac{\varepsilon}{2}+n_0u_n$ par décroissance de la suite u_n. Comme la suite $(u_n)_n$ décroit vers 0 on peut rendre n_0u_n plus petit que $\frac{\varepsilon}{2}$ pour $n>n_1$. Ainsi $(nu_n)_n$ tend vers 0.
Autre méthode : En considèrant le reste R_n qui tend vers 0, puisque la série converge on peut écrire : $0\leq 2nu_{2n}\leq 2\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}u_k\leq 2R_n$ et $0\leq(2n+1)u_{2n+1}\leq 2(n+1)u_{2n+1}\leq 2\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n+1}u_k\leq 2R_n$. Ainsi $(2nu_{2n})$ et $((2n+1)u_{2n+1})$ convergent vers 0 et donc (nu_n) tend vers 0.

La série à termes positifs décroissante $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge et pourtant $nu_n = \frac{1}{\ln n}$ tend vers 0.
La série de terme général $u_n = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{n} \text{ si } n = 2^p \\ \frac{1}{n^2} \text{ sinon} \end{array} \right.$ est convergente et (nu_n) n'admet pas de limite.

Exercice 24 Soit (u_n) une suite réelle décroissante, de limite 0; montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum 2^n u_{2^n}$ sont de même nature.

[Ind] Démontrer l'équivalence, majorer et minorer.

[Dem] Posons $v_n = 2^n u_{2^n}$. Supposons que $\sum u_n$ converge, en remarquant que pour tout n : $\frac{1}{2} v_n = 2^{n-1} u_{2^n} \leq u_{2^{n-1}+1} + u_{2^{n-1}+2} + \cdots + u_{2^n}$ on en déduit que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k \leq 2 \sum_{i=2}^{2^n} u_i$ et donc $\sum v_n$ converge.
Réciproquement si $\sum v_n$ converge, alors pour tout n : $\displaystyle\sum_{k=0}^{2^n - 1} u_k = u_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=2^i}^{2^{i+1}-1} u_k = u_0 + \sum_{i=0}^{n-1} v_i$ et donc $\sum u_n$ converge.

Exercice 25 Soit (u_n) une suite réelle décroissante, de limite 0 et telle que la suite $(nu_n - \sum_{k=1}^{n} u_k)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

[Ind] Traduire les hypothèses regarder la cible.

[Dem] Par hypothèse il existe M tel que pour tout n : $0 \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k - nu_n \leq M$. Ainsi pour tout n, p on a : $0 \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n+p} u_k - (n+p)u_{n+p} \leq M$ d'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \leq M + nu_{n+p}$ par décroissance de $(u_n)_n$. Or u_n tend vers 0, il existe donc p tel que $nu_{n+p} \leq 1$. On a ainsi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \leq M + 1$ et donc $\sum u_n$ converge.

Exercice 26 Montrer que la série obtenue à partir de la série harmonique en supprimant les termes $\frac{1}{n}$ où n contient le chiffre 9 dans son écriture décimale, converge.

[Ind] Majorer et dénombrer le nombre de termes.

[Dem] En regroupant les termes dont le dénominateur est inférieur à $10, 100, 1000, \cdots$ et en notant a_n la somme du $n^{\text{ème}}$ groupe par exemple $a_3 = \frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{888}$ on a que les termes sont tous inférieurs au premier à savoir $\dfrac{1}{10^{n-1}}$. Combien y en a -t-il ? Dans a_1 il y en a 8, dans a_2 il y en a 72...et $a_1 \leq \dfrac{8}{10}$, $a_2 \leq \dfrac{72}{100}$ on postule $a_n \leq \dfrac{9^n}{10^{n-1}}$. Par récurrence si a_n contient moins de 9^n termes alors a_{n+1} en supprimant simplement le premier chiffre n'en contient pas plus de $8(9 + 9^2 + 9^3 + \cdots + 9^n) = 8x9x\dfrac{9^n - 1}{9 - 1} = 9^{n+1} - 9 < 9^{n+1}$. Les sommes partielles sont donc majorées par $\sum \dfrac{9^p}{10^{p-1}}$, somme qui converge, la série converge. On peut faire le mÃªme raisonnement pour la série extraite de la série harmonique ne contenant pas un chiffre donnée. La limite est difficilement calculable.

Exercice 27 Règle de Raabe-Duhamel. Soit (u_n) une série à termes strictement positifs telle que $\displaystyle\lim_{n \to \infty} n \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = \beta \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Montrer que si $\beta > 1$ alors $\sum u_n$ converge et que si $\beta < 1$, la série $\sum u_n$ diverge.

[Ind] Utiliser la comparaison géométrique.

[Dem] L'hypothèse peut s'écrire $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\beta}{n} + o(\frac{1}{n})$. Soit $\alpha > 0$ et posons $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$ on a : $\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\beta - \alpha}{n} + o(\frac{1}{n}$. Si $\beta \neq \alpha$ on a dons que la différence $\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n}$ est du signe de $\beta - \alpha$.
Si $\beta > 1$ on peut choisir α tel que $\beta > \alpha > 1$ la série $\sum v_n$ converge et donc l'inégalité $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$

donne la convergence de $\sum u_n$.
Si $\beta < 1$ alors on peut choisir α tel que $\beta < \alpha < 1$ la série $\sum v_n$ est alors divergente et l'inégalité $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ donne la divergence de $\sum u_n$.

Exercice 28 Règle de Gauss. Soit (u_n) une série à termes strictement positifs telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Montrer que la série $\sum u_n$ diverge.

[Ind] Prendre le ln.

[Dem] On a $\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln(1 - \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \geq -\frac{1}{n} - \frac{C}{n^2}$ pour une constante C. Cela donne que $\ln u_{n+1} \geq \ln u_1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - C \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Mais $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \mathcal{O}(1)$ et la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ converge ainsi il existe une constante D telle que pour tout n : $\ln u_{n+1} \geq -\ln n + D$ et la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 29 Règle de Cauchy. Soit (u_n) une série à termes positifs telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \beta$. Montrer que si $\beta < 1$ alors $\sum u_n$ converge et que si $\beta > 1$, la série $\sum u_n$ diverge.

[Ind] Comparaison avec une série géométrique.

[Dem] Si $\beta < 1$ alors il existe n_0 tel que si $n \geq n_0$ on a $u_n \leq \left(\beta + \frac{1-\beta}{2}\right)^n = \left(\frac{1+\beta}{2}\right)^n$. Or $\frac{1+\beta}{2} < 1$ et la série converge.
Si $\beta > 1$ alorsil existe n_0 tel que si $n \geq n_0$ alors $u_n \geq \left(\beta - \frac{\beta-1}{2}\right)^n \geq \left(\frac{1+\beta}{2}\right)^n$. Or $\frac{1+\beta}{2} > 1$ et donc la série diverge.

Exercice 30 Règle d'Abel. Soient (a_n) et (b_n) deux suites d'éléments de K telles que:
a) $\exists \beta \in \mathbb{R}_+ \quad \forall p, q \in \mathbb{N} \quad \left|\displaystyle\sum_{k=p}^{p+q} b_k\right| \leq \beta$
b) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$
c) la série de terme général $|a_n - a_{n+1}|$ converge.
Montrer que la série de terme général $b_n a_n$ converge et que:

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \left|\sum_{n=p+1}^{+\infty} b_n a_n\right| \leq \beta \sum_{n=p+1}^{+\infty} |a_n - a_{n+1}|.$$

Retrouver ainsi la règle de convergence des séries alternées.

[Ind] Remplacer b_n par $S_n - S_{n-1}$ où $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k$.

[Dem] Si $S_n = \displaystyle\sum_{k=p}^{n} a_k$ alors S_n est bornée par β. On a $\left|\displaystyle\sum_{n=p+1}^{q} b_n a_n\right| = \left|\displaystyle\sum_{n=p+1}^{q} a_n(S_n - S_{n-1})\right| = \left|\displaystyle\sum_{n=p+1}^{q} a_n S_n - \sum_{n=p+1}^{q} a_n S_{n-1}\right| = \left|\displaystyle\sum_{n=p+1}^{q} a_n S_n - \sum_{n=p}^{q-1} a_{n+1} S_n\right| = \left|a_q S_q + \displaystyle\sum_{n=p+1}^{q-1} (a_n - a_{n+1}) S_n\right| \leq |a_q S_q| + \displaystyle\sum_{n=p+1}^{q-1} |a_n - a_{n+1}| S_n \leq \beta \left(|a_q| + \displaystyle\sum_{n=p+1}^{q-1} |a_n - a_{n+1}|\right)$. En faisant tendre q vers l'infini on obtient (a_q tend vers 0) : $\left|\displaystyle\sum_{n=p+1}^{+\infty} b_n a_n\right| \leq \beta \displaystyle\sum_{n=p+1}^{+\infty} |a_n - a_{n+1}|$. En effet l'hypothèse c) donne que la limite à droite existe et vaut 0 donc celle de gauche aussi et la série converge.

Exercice 31 Soit (a_n) et (b_n) deux suites d'éléments de K telles que:
a') la série de terme général b_n converge.

b') $\exists \gamma \in \mathbb{R}_+ \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq \gamma$.
c) la série de terme général $|a_n - a_{n+1}|$ converge.
Montrer que la série de terme général $b_n a_n$ converge et que:

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \left| \sum_{n=p+1}^{+\infty} b_n a_n \right| \leq \left(\gamma + \sum_{n=p+1}^{+\infty} |a_n - a_{n+1}| \right) \sup_{n \in [p+1,+\infty]} \left| \sum_{k=p}^{n} b_k \right|$$

[Ind] Reprendre la démonstration précédente.

[Dem] Ce coup-ci (on pouvait le faire aussi pour l'exercice précédent) remplaçons b_n par $S_n^p - S_{n-1}^p$ on obtient $\left| \displaystyle\sum_{n=p+1}^{q} a_n b_n \right| = \left| a_q S_q^p + \displaystyle\sum_{n=p+1}^{q-1} (a_n - a_{n+1}) S_n^p \right| \leq \left(\gamma + \sum_{n=p+1}^{+\infty} |a_n - a_{n+1}| \right) \sup_{n \in [p+1,+\infty]} \left| \sum_{k=p}^{n} b_k \right|$.
Cette majoration prouve que le membre de gauche admet une limite d'où l'inégalité voulue et la convergence de la série.

Exercice 32 Soit $\sum u_n$ une série à termes complexes qui converge. Montrer que $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{n}$ converge.

[Ind] Utiliser la règle d'Abel.

[Dem] La suite à termes réels $\left(\dfrac{1}{n} \right)_n$ décroit vers 0 et la suite $(u_n)_n$ a toutes ses sommes partielles bornées puisque la série converge, on peut donc appliquer le théorème d'Abel.

Exercice 33 Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs.

a) On suppose que la série de terme général u_n diverge. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que la série de terme général $\dfrac{u_n}{S_n}$ diverge .

b) On suppose que la série de terme général converge et on pose $T_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k$. Montrer que la série de terme général $\dfrac{u_n}{\sqrt{T_n}}$ converge.

[Ind] Raisonner par l'absurde et comparer la série à la série de terme général $\ln \dfrac{S_n}{S_{n+1}}$.
Comparer la série à la série de terme général $\displaystyle\int_{T_{n+1}}^{T_n} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

[Dem] On suppose que $\sum \dfrac{u_n}{S_n}$ converge. Ainsi $\dfrac{u_n}{S_n}$ tend vers 0. Donc $0 < \dfrac{u_n}{S_n}$, mais $-\ln \left(1 - \dfrac{u_n}{S_n} \right) = \ln \dfrac{S_n}{S_{n-1}} \sim \dfrac{u_n}{S_n}$. Mais la série $\sum \ln \dfrac{S_n}{S_{n-1}}$ diverge puisque $(S_n)_n$ tend vers $+\infty$ d'où la contradiction. Donc $\sum \dfrac{u_n}{S_n}$ diverge.
Posons $\alpha = \frac{1}{2}$ on a $\displaystyle\int_{T_{n+1}}^{T_n} \frac{dx}{x^\alpha} \geq \int_{T_{n+1}}^{T_n} \frac{dx}{T_n^\alpha} = \frac{u_n}{T_n^\alpha}$ d'où $\displaystyle\sum_{n=2}^{N} \frac{u_n}{T_n^\alpha} \leq \sum_{n=2}^{N} \int_{T_{n+1}}^{T_n} \frac{dx}{x^\alpha} = \int_{T_N}^{T_3} \frac{dx}{x^\alpha} \leq \int_0^{T_3} \frac{dx}{x^\alpha}$ et la série $\sum \dfrac{u_n}{T_n^\alpha}$ converge. En fait le raisonnement va pour $\alpha \in]0, 1[$.

Exercice 34 Soit α un réel strictement compris entre 0 et 1. On définit la suite x_n par son premier terme $x_0 = \alpha$ et la relation:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = x_n - x_n^2$$

a) Étudier cette suite.

b) Trouver un équivalent de la suite de terme général $\dfrac{1}{x_{n+1}} - \dfrac{1}{x_n}$.
c) En déduire que, lorsque n tend vers $+\infty$, x_n équivaut à $\frac{1}{n}$

[Ind] Utiliser l'équivalence des sommes partielles en cas de séries divergentes à termes généraux équivalents.

[Dem] On a $x_{n+1} - x_n = -x_n^2$ et donc la suite est décroissante. On montre par récurrence que les termes sont positifs car $\alpha \in]0,1[$. Elle converge donc et la seule limite possible est $\ell = \ell - \ell^2$, c'est à dire 0.
$u_n = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{x_n - x_{n+1}}{x_n x_{n+1}} = \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{x_n}{x_n - x_n{}^2} \sim 1$ car x_n^2 est négligeable devant x_n. Nous sommes en présence de deux séries divergentes donc leurs sommes partielles sont équivalentes. D'où $\dfrac{1}{x_n} - \dfrac{1}{\alpha} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_n \sim n$. Ce qui donne $x_n \sim \frac{1}{n}$.

Exercice 35 Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et la relation:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$$

a) Étudier la suite (u_n).
b) Pour quelle valeur du réel α, la série de terme général u_n^α converge-t-elle ?

[Ind] Trouver un équivalent simple de la suite $(u_{n+1} - u_n)$

[Dem] La suite (u_n) est croissante, la seule limite possible est $\ell = 0$, ce qui ne se peut pas, donc (u_n) croit vers $+\infty$. Il en résulte que la série de terme général u_n diverge. On a $u_{n+1} = u_n\sqrt{1 + \frac{1}{u_n}} = u_n(1 + \frac{1}{2u_n} + o(\frac{1}{u_n}))$ ou en core $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} + o(1) \sim \frac{1}{2}$. La série de terme général $u_{n+1} - u_n$ est donc divergente et on a en écrivant que les sommes partielles sont équivalentes : $u_n - u_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) \sim \dfrac{n}{2}$. Les séries étant à termes positifs on a $u_n^\alpha \sim \left(\frac{n}{2}\right)^\alpha$ et elle converge si et seulement si $\alpha < -1$.

Exercice 36 Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente de réels non nuls. On construit la suite x_n par son premier terme $x_0 = 0$ et la relation

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \sqrt{x_n^2 + u_n^2}\right)$$

Montrer que la suite (x_n) converge.

[Ind] Étudier la série de terme général $x_{n+1} - x_n$.

[Dem] Vues les circonstances on peut supposer les $u_n \geq 0$. On a $0 \leq x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x_n^2 + u_n^2} - x_n\right) = \dfrac{u_n^2}{2\left(\sqrt{x_n^2 + u_n^2} + x_n\right)} \leq \dfrac{u_n}{2}$. Ainsi la série $\sum(x_{n+1} - x_n)$ converge et la suite $(x_n)_n$ aussi.

6.6 Travaux Dirigés

Exercice 37 Soit $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ pour $n \geq 1$. Calculer $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ et en déduire la convergence de la série de terme général u_n et la valeur de la somme. De même avec $\frac{1}{n(n+1)}$ ou $\frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)}$.

[Dem] En écrivant $u_n = \dfrac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)} = \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{2\,(n+2)}$ on a $S_n = \frac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2\,(n+2)} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$ ce qui donne $S_n \to \frac{1}{4}$.

Ceci se généralise avec $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_0 f(n) + a_1 f(n+1) + \cdots + a_{p-1} f(n+p-1)$ avec la condition $a_0 + a_1 + \cdots + a_{p-1} = 0$. En effet les changements d'indice donne $S_n = a_0 \sum_{k=1}^{n} f(k) + a_1 \sum_{k=2}^{n+1} f(k) + a_2 \sum_{k=3}^{n+2} f(k) + \cdots + a_{p-1} \sum_{k=p}^{n+p-1} f(k)$

$$S_n = \overbrace{\underbrace{a_0 \sum_{k=1}^{p-1} f(k) + a_1 \sum_{k=2}^{p-1} f(k) + a_2 \sum_{k=3}^{p-1} f(k) + \cdots + a_{p-2} f(p-1)}_{}}^{Fixe}$$

$$+ \underbrace{a_1 f(n+1) + a_2 \sum_{k=n+1}^{n+2} f(k) + \cdots + a_{p-1} \sum_{k=n+1}^{n+p-1} f(k)}_{\to 0}$$ ce qui prouve la convergence de S_n. Ici dans l'exemple on a $\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+p-1)} = \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n+1} + \cdots + \frac{a_{p-1}}{n+p-1}$ et $a_0 + a_1 + \cdots + a_{p-1} = 0$.

Exercice 38 Soit $S_n(a,\theta) = \sum_{k=0}^{n} a^k \cos(k\theta)$ où $a \in]-1,+1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $S_n(a,\theta)$, en déduire la convergence de la série de terme général $a^k \cos(k\theta)$ et la valeur de la somme.

[Dem] $S_n(a,\theta) = \Re\left(\sum_{k=0}^{n} \left(ae^{i\theta}\right)^k\right) = \Re\left(\frac{1-\left(ae^{i\theta}\right)^{n+1}}{1-ae^{i\theta}}\right) = \frac{\Re\left(\left(1-a^{n+1}e^{i(n+1)\theta}\right)\left(1-ae^{-i\theta}\right)\right)}{1+a^2-2a\cos\theta}$

$S_n(a,\theta) = \frac{1-a^{n+1}\cos((n+1)\theta) - a\cos\theta + a^{n+2}\cos(n\theta)}{1+a^2-2a\cos\theta}$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} S_n(a,\theta) = \frac{1-a\cos\theta}{1+a^2-2a\cos\theta}$ et la série converge.

C'est l'occasion de réviser les calculs avec des complexes dont le conjugué.

Exercice 39 Soient deux séries convergentes de termes généraux respectifs u_n et v_n positifs, étudier la nature de la série de trerme général $w_n = \sqrt{u_n v_n}$.

[Dem] Nous sommes dans les conditions pour appliquer les théorèmes de comparaison avec l'inégalité $\sqrt{u_n v_n} \le \frac{u_n+v_n}{2}$.

Exercice 40 Etudier la nature des séries suivantes : $u_n = \frac{\ln n}{1+n^2}$; $u_n = e^{-\sqrt{n}}$; $u_n = \sin\frac{1}{n^2}$; $u_n = \sqrt{\frac{n-\ln n}{n^2+2n^3}}$; $u_n = \left(\frac{n^2-5n+1}{n^3+4n+2}\right)^{n^2}$; $u_n = \sqrt{n\arctan\frac{1}{n^2}}$; $u_n = n^{-\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$.

Etudier suivant les valeurs de a et b la nature de la série de terme général : $u_n = a\sin\frac{1}{n} + b\tan\frac{1}{n}$, $n \ge 1$.

Etudier suivant les valeurs de α et β la nature de la série de Bertrand : $u_n = \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$, $n \ge 2$.

[Dem]

- Pour la première on a $n^{\frac{3}{2}} u_n = \frac{n^{\frac{3}{2}}\ln n}{1+n^2} \le \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ et donc $\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{3}{2}} u_n = 0$. Ce qui permet de conclure car en utilisant la définition de la limite pour n assez grand on a $u_n \le n^{\frac{3}{2}}$ ce dernier terme est le terme général d'une série convergente.
- Pour la seconde on a $\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n = \lim n^2 e^{-\sqrt{n}} = 0$.
- Pour celle-ci on a : $0 \le u_n = \sin\frac{1}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$.
- On a $u_n \ge 0$ et $u_n = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{1-\frac{\ln n}{n}}{2+\frac{1}{n}}} \sim \frac{1}{n\sqrt{2}}$ donc la série diverge.

- Pour n assez grand le dénominateur n^2-5n+1 et n^3+4n+2 est toujours positif et donc u_n est défini et positif. On a $n^2u_n = n^2 e^{n^2 \ln\left(\frac{1}{n}\frac{1-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{4}{n^2}+\frac{2}{n^3}}\right)} \sim n^2 e^{-n^2\ln n}$ et ainsi $\lim n^2 u_n = 0$. La série converge.
- u_n est positif et $u_n \sim \sqrt{n \times \dfrac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et il y a divergence.
- On a $nu_n = e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}\ln n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 1$ la série diverge.
- En utilisant les développements limités on a $u_n = \dfrac{a+b}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ainsi si $a+b \neq 0$ on a $u_n \sim \dfrac{a+b}{n}$ ce qui donne que pour n assez grand u_n est du signe de $a+b$ et puis que la série diverge. Si $a+b=0$ alors la série est absolument convergente.
- Il s'agit des séries de Bertrand.

  Si $\alpha > 1$ alors en posant $\alpha = 1+2\varepsilon$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{1+\varepsilon}u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^{\varepsilon}\ln^{\beta} n} = 0$ et il y a convergence.

  Si $\alpha < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^{1-\alpha}\dfrac{1}{\ln^{\beta} n} = +\infty$ et la série diverge.

  Si $\alpha = 1$ et $\beta \leq 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\ln^{\beta} n} = \begin{cases} 1 \text{ si } \beta = 0 \\ +\infty \text{ si } \beta < 0 \end{cases}$ et la série diverge.

  Si $\alpha = 1$ et $\beta > 0$ alors on considère $f(x) = \dfrac{1}{x\ln^{\beta} x}$ qui est une fonction positive, continue, décroissante sur $[2, +\infty[$ et dont l'intégrale $\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ converge si $\beta > 1$ et diverge $\beta \leq 1$. En utilisant le théorème de comparaison des séries avec les intégrales on a que la série converge si $\beta > 1$ et diverge si $\beta \leq 1$. Pour la convergence de l'intégrale il suffit de poser $t = \ln x$.

Exercice 41 Nature de la série de terme général : $u_n = \arccos\left(\frac{2}{\pi}\arctan n^2\right)$.

[Dem] On remarque que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{\pi} Arc\tan n^2 = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ avec $u_n \in [0,\pi]$. D'autre part $\cos u_n = \frac{2}{\pi}Arc\tan n^2 = 1 - \frac{2}{\pi}Arc\tan\frac{1}{n^2}$ en utilisant $Arc\tan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$. Ce qui donne $1-\cos u_n = \frac{2}{\pi}\arctan\frac{1}{n^2}$ et $\dfrac{u_n^2}{2} \sim \dfrac{2}{\pi n^2}$ et donc $u_n \sim \dfrac{2}{n\sqrt{\pi}}$ et la série diverge.

Exercice 42 Etudier la série de terme général : $u_n = \left(\dfrac{n+1}{n+3}\right)^{n^{\alpha}}$.

[Dem]

- Pour $\alpha < 0$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ la série diverge.
- Pour $\alpha = 0$ on a $u_n = \dfrac{n+1}{n+3}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ la série diverge
- Pour $\alpha > 0$ on a $e^{n^{\alpha}\ln\left(\frac{n+1}{+3}\right)} = e^{n^{\alpha}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)\right)} = e^{n^{\alpha}\left(-\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-2n^{\alpha-1}+o\left(n^{\alpha-1}\right)}$ ainsi
  - Si $\alpha < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ et il y a divergence
  - Si $\alpha = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^{-2}$ et il y a divergence
  - Si $\alpha > 1$ alors $\ln n = o\left(n^{\alpha-1}\right)$ et $n^2u_n = e^{-2n^{\alpha-1}+o\left(n^{\alpha-1}\right)}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2u_n = 0$ ce qui prouve que la série converge.

Exercice 43 Etudier la série de terme général : $u_n = \left(1-\frac{n}{\ln n}\right)^{-n}$ pour $n \geq 2$.

[Dem] On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\ln n} = +\infty$ et $\dfrac{n}{\ln n} > 1$ et par suite nous avons à faire à une série alternée. D'autre part $|u_n| = \left(\dfrac{n}{\ln n} - 1\right)^{-n} = \left(\dfrac{\ln n}{n}\right)^{n} \dfrac{1}{\left(1-\dfrac{\ln n}{n}\right)^{n}}$ et par suite $\ln n^2\,|u_n| = 2\ln n + n\ln(\ln n) - n\ln n -$

$n\ln\left(1-\dfrac{\ln n}{n}\right)$ ce qui donne $\ln n^2|u_n| = -n\ln n + n\ln(\ln n) + 3\ln n + o(\ln n)$ au voisinage de $+\infty$ on a $\ln(\ln n) = o(\ln n)$ et $\ln n^2|u_n| = -n\ln n + o(n\ln n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2|u_n| = 0$ par suite $|u_n| = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et la série est absolument convergente.

Exercice 44 Etudier la série de terme général : $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}\left((n+1)^{1+\frac{1}{n}} - (n-1)^{1-\frac{1}{n}}\right)$.

[Dem] Développons $n^\alpha u_n = (n+1)^{1+\frac{1}{n}}\left(1-\dfrac{n-1}{n+1}\left(n^2-1\right)^{-\frac{1}{n}}\right)$ or $\ln\left(n^2-1\right)^{-\frac{1}{n}} = -\frac{1}{n}\left(\ln n^2 + \ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = -\dfrac{2}{n}\ln n + o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$ et par suite $\left(n^2-1\right)^{-\frac{1}{n}} = 1 - \dfrac{2}{n}\ln n + o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$ et $\dfrac{n-1}{n+1} = 1 - \dfrac{2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Récapitulons $\dfrac{n-1}{n+1}\left(n^2-1\right)^{-\frac{1}{n}} = 1 - \dfrac{2\ln n}{n} + o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$ et $n^\alpha u_n = (n+1)^{1+\frac{1}{n}}\left(\dfrac{2\ln n}{n} + o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)\right) \sim 2\ln n$ car $(n+1)^{1+\frac{1}{n}} \sim n$ et finalement $u_n \sim \dfrac{2\ln n}{n^\alpha}$ et la série converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 45 Soit $\alpha > 0$, étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ avec $a_n = \left(\cos\dfrac{1}{n^\alpha}\right)^n$. On pose $l = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$, étudier la série de terme général $u_n = a_n - l$.

[Dem] On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^\alpha} = 0$ et $\cos\dfrac{1}{n^\alpha} = 1 - \dfrac{1}{2n^{2\alpha}} + \left(\dfrac{1}{2n^\alpha}\right)$. Ainsi

- Si $\alpha > \dfrac{1}{2}$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln a_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$
- Si $\alpha = \dfrac{1}{2}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln a_n = -\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.
- Si $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln a_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Maintenant pour la série cela donne

- Si $\alpha > \dfrac{1}{2}$ alors $u_n = e^{-\frac{1}{2n^{2\alpha-1}}+o\left(\frac{1}{2n^{2\alpha-1}}\right)} - 1 = \dfrac{1}{2n^{2\alpha-1}} + o\left(\dfrac{1}{n^{2\alpha-1}}\right) \sim -\dfrac{1}{2n^{2\alpha-1}}$ et la série converge si et seulement si $\alpha > 1$.
- Si $\alpha = \dfrac{1}{2}$ alors $u_n = e^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} - e^{-\frac{1}{2}} \sim -\dfrac{1}{12n\sqrt{e}}$ et la série diverge.
- Si $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = 0$.

Exercice 46 Nature de la série de terme général : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$, $n \geq 1$. Donner la nature de chacune des séries suivantes : $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$; $v_n = \dfrac{(-1)^n\sqrt{n}+1}{n+1}$.

[Dem] Pour la première on a à faire à une série alternée convergente par le théorème classique. Il s'agit d'une série alternée et $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est une suite décroissante vers 0. Par suite la série converge. pour (v_n) on a $v_n = \dfrac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n+1} = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1} = \dfrac{1}{1+n} + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 - \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = z_n + t_n$.
Maintenat on a $\sum z_n$ est divergente et $t_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ qui est le terme d'une série sem convergente, donc $\sum v_n$ diverge.

Exercice 47 Discuter en fonction de $(\alpha,\beta) \in R^2$, la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta}$.

[Dem] Si $\alpha=\beta$ alors la suite n'est pas définie. Si $\alpha<\beta$ alors $u_n \sim \dfrac{1}{n^\beta}$ et il y a absolue convergence si et seulement si $\beta>1$. Si $\beta<\alpha$ alors $u_n \sim \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ et il y a absolue convergence si et seulement si $\alpha>1$. On a si $\alpha\leq 0$ la série diverge sinon on a $\left(\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}-u_n\right)\sim \dfrac{1}{n^{2\alpha-\beta}}$. Ainsi si $\alpha<0$ la série $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge donc u_n et $\dfrac{1}{n^{2\alpha-1}}$ sont de même nature c'est à dire converge si et seulement si $2\alpha-\beta>1$. On peut représenter les domaines deconvergence dans un plan rapporté au couple (α,β).

Exercice 48 Nature de la série de terme général : $u_n=\sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)$ $a>0$.

[Dem] On écrit fort justement $u_n=\sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}-n\pi+n\pi\right)=(-1)^n\sin\left(\pi\left(\sqrt{n^2+a^2}-n\right)\right)=(-1)^n\sin\left(\pi\dfrac{a^2}{n+\sqrt{n^2+a^2}}\right)$. Ensuite il existe un rang n_0 tel que pour tout $n\geq n_0$, $\dfrac{\pi a^2}{n+\sqrt{n^2+a^2}}\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ ce qui prouve que $\sum u_n$ est alternée à partir d'un certain rang. Toujours pour n assez grand on a $|u_n|\leq\dfrac{\pi a^2}{n+\sqrt{n^2+a^2}}$ et donc $\lim u_n=0$ puisque enfin $(|u_n|)$ est décroissante on a par le théorème des séries alternées la convergence de la série. Ici le plus difficile était de ne pas faire l'erreur fatale : prendre des équivalents $u_n=(-1)^n\sin\left(\pi\dfrac{a^2}{2n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ et dire que puisque $\dfrac{1}{n}$ est le terme général d'une suite décroissante on aurait (u_n) décroissante. En effet la décroissance provient du calcul $a_n=\pi\dfrac{a^2}{2(n+1)}-\pi\dfrac{a^2}{2n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)=o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ ne prouve rien il faut aller en $\dfrac{1}{n^3}$ car l'hypothèse $u_n\sim v_n$ et (v_n) décroissante ne prouve pas que (u_n) est décroissante, la monotonie ne se transmet pas par équivalence comme le prouve l'exemple $v_n=1$ et $u_n=1+\dfrac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 49 Calculer $S=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ à 10^{-3} près.

Exercice 50 Etude et calcul de la série de terme général : $u_n=\arctan\left(\dfrac{1}{1+n+n^2}\right)$.

[Dem] La convergence ne pose pas de problème puisque $u_n\sim\dfrac{1}{n^2}$. Pour le calcul on pose $\theta_n=\arctan n$ ou $n=\tan\theta_n$ ainsi $\dfrac{1}{n^2+n+1}=\dfrac{n+1-n}{1+n(n+1)}=\dfrac{\tan\theta_{n+1}-\tan\theta_n}{1+\tan\theta_n\tan\theta_{n+1}}=\tan(\theta_{n+1}-\theta_n)$. D'autre part $0\leq\theta_n\leq\dfrac{\pi}{2}$ et donc $-\dfrac{\pi}{2}\leq\theta_{n+1}-\theta_n\leq\dfrac{\pi}{2}$ et $arctan\dfrac{1}{n^2+n+1}=\theta_{n+1}-\theta_n$, ce qui donne pour les sommes partielles $S_n=\theta_{n+1}-\theta_0=\theta_{n+1}$ et $\lim S_n=\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 51 Etude de la série de terme général : $u_n=\sin\left(\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}+\dfrac{k}{n^{5\alpha}}\right)$ avec $k\neq 0,\alpha>0$ (de l'utilisation d'un D.L.).

[Dem] On a $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}+\dfrac{k}{n^{5\alpha}}-\dfrac{(-1)^n}{6n^{3\alpha}}+\dfrac{(-1)^n}{120n^{5\alpha}}+o\left(\dfrac{1}{n^{6\alpha}}\right)=a_n+b_n$ avec $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}-\dfrac{(-1)^n}{6n^{3\alpha}}+\dfrac{(-1)^n}{120n^{5\alpha}}$ qui est le terme général d'une série convergente par le théorème sur les séries alternées. La série $\sum b_n$ converge si et seulement si $\alpha>\dfrac{1}{5}$, il en va de même de $\sum u_n$.

Exercice 52 a et b étant deux nombres réels donnés, on considère la suite définie par $x_0\in\mathbb{R}$ et $x_{n+1}=a\sin x_n+b$. Démontrer que si $|a|<1$, (x_n) est une suite convergente.

[Dem] La suite (x_n) est lié à la série $\sum(x_{n+1}-x_n)$ or $|x_{n+1}-x_n|=|a|\,|\sin x_n-\sin x_{n-1}|\leq|a|\,|x_n-x_{n-1}|$ en appliquant les accroissements finis, ainsi $|x_{n+1}-x_n|\leq|a|^n\,|x_1-x_0|=k\,|a_n|$. La série géométrique converge donc la suite proposée converge vers une limite vérifiant $\ell=a\sin\ell+b$, si $b=0$ l'unique point fixe est $\ell=0$.

Exercice 53 Utiliser les critères de comparaison pour étudier la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants :
$u_n = \dfrac{2+\cos n}{n^\alpha}$; $u_n = \dfrac{5^n+n}{3^n-1}$; $u_n = \exp\left(\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}}\right) - 1$; $u_n = \arctan \dfrac{2n}{3n^2+1}$; $u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2}\dfrac{n^2}{n^2+pn+q}\right)$ où p et q sont des entiers ; $u_n = \dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.

[Dem] Nous allons donner juste des indications

- $u_n = \dfrac{2+\cos n}{n^2}$ on a $\dfrac{1}{n^\alpha} \leq |u_n| \leq \dfrac{3}{n^\alpha}$. Il y a convergence si et seulement si $\alpha > 1$.
- $u_n = \dfrac{5^n+n}{3^n-1} \sim \left(\dfrac{5}{3}\right)^n$.
- $u_n = e^{\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}}} - 1$ on a que $\lim u_n = 0$ et $e^{\dfrac{1}{\sqrt{2n}\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)^{1/2}}} - 1 = e^{\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\left(1+\dfrac{1}{4n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)} - 1 \sim 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2n}} - 1 \sim \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$ il y a divergence.
- $u_n = \arctan \dfrac{2n}{3n^2+1}$ on a $\lim u_n = 0$ et $u_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$, $u_n \geq 0$ il y a divergence de la série.
- $u_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\dfrac{n^2}{n^2+pn+q}\right) = \cos\dfrac{\pi}{2}\left(1 - \dfrac{pn+q}{n^2+pn+q}\right) = \sin \dfrac{pn+q}{n^2+pn+q}\dfrac{\pi}{2} \sim \dfrac{p\pi}{2n}$ si $p \neq 0$, il y a divergence et $u_n \sim \dfrac{q\pi}{2n^2}$ si $p = 0$ et $q \neq 0$ et il y a convergence, si $p = q = 0$ alors $u_n = 0$ et il y a convergence. On remarquera que u_n a ub signe constant d'après les équivalents si n est assez grand.
- $u_n = \dfrac{1}{n^{1+\dfrac{1}{n}}} = e^{-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\ln n} = \dfrac{1}{n}e^{-\dfrac{1}{n}\ln n} \sim \dfrac{1}{n}$ et il y a divergence.

Exercice 54 Etudier la nature de la série $\sum \frac{1}{n \ln n}$ et plus généralement celle de $\sum \frac{1}{n(\ln n)^p}$ où p est un entier.

[Dem] Faisons le cas général : Si $n \leq x \leq n+1$ alors $\dfrac{1}{(n+1)\ln^p(n+1)} \leq \dfrac{1}{x\ln^p x} \leq \dfrac{1}{n \ln^p n}$ et $\displaystyle\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{(n+1)\ln^p(n+1)} \leq \int_2^N \frac{1}{x \ln^p x} \leq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n\ln^p n}$. Lecalcul de l'intégrale donne $\displaystyle\int_2^N \frac{dx}{x\ln^p x} = [\ln(\ln x)]_2^N$ si $p = 1$ intégrale qui tend vers $+\infty$ et il y a divergence de la série. Si $p > 1$ alors $\displaystyle\int_2^N \frac{dx}{x \ln^p x} = \left[\frac{(\ln x)^{-p+1}}{1-p}\right]_2^N = \frac{(\ln 2)^{-p+1}}{p-1}$ et par la minoration la série converge.

Exercice 55 $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries à termes strictement positifs vérifiant : $\forall n : \dfrac{u_{n+2}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+2}}{v_n}$. Montrer que si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

[Dem] On a pour tout p : $u_{p+2} \leq \dfrac{u_0}{v_0} v_{p+2}$ et $u_{2p+1} \leq \dfrac{u_1}{v_1} v_{2p+1}$ d'où $u_n = O(v_n)$.

Exercice 56 Etudier la suite (S_n) définie par : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \ln k} - \ln(\ln n)$.

[Dem] $S_n + \dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \leq \dfrac{1}{2\ln 2} - \ln(\ln 2)$ et $-\ln(\ln 2) \leq S_n$ ce qui prouve que $S_n \geq 0$ ensuite $S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)} + \ln \dfrac{\ln n}{\ln(n+1)}$ or $\dfrac{\ln n}{\ln(n+1)} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\ln n}} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{n \ln n} + o\left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)} =$

$1-\dfrac{1}{n\ln n}+o\left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)$ donc $\ln\left(\dfrac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)=\ln\left(1-\dfrac{1}{n\ln n}+o\left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)\right)=-\dfrac{1}{n\ln n}+o\left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)$ et donc $S_{n+1}-S_n=\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}-\dfrac{1}{n\ln n}+o\left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)$ par suite S_n est une suite décroissante à partie d'un certain rang et minorée donc convergente.

Exercice 57 De l'intégration

Montrer, pour tout entier k non nul : $\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{1+t^k}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{nk+1}$. Trouver la partie principale à $\frac{1}{n}$ près de $R_n=\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{1+t^k}-\sum_{p=0}^{n-1}\frac{(-1)^p}{pk+1}$. Etudier la série $\sum R_n$.

[Dem] Pour tout $n\geq 1$ et pour tout x de $[0,1]$ on a $\dfrac{1}{1+x^k}=\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1}(-1)^p x^{pk}+(-1)^n\frac{x^{nk}}{1+x^k}$ donc $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1+x^k}=\sum_{p=0}^{n-1}\frac{(-1)^p}{pk+1}+R_n$. Posons $R_n=(-1)^n I_n$ avec $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^{nk}}{1+x^k}dx$ et pour tout n on a $0\leq I_n\leq\displaystyle\int_0^1 x^{nk}dx=\frac{1}{nk+1}$. nOn en déduit que $\lim I_n=0$ et $\lim R_n=0$ avec $|R_n|=I_n$. Maintenant $I_{n+1}-I_n\leq 0$ donc (I_n) est décroissante et $I_{n+1}+I_n=\displaystyle\int_0^1 x^{nk}dx=\frac{1}{nk+1}$ donc $2I_{n+1}\leq\dfrac{1}{nk+1}\leq 2I_n$ et $\dfrac{1}{2(nk+1)}\leq I_n\leq\dfrac{1}{2((n-1)k+1)}$ ce qui prouve que $I_n\sim\dfrac{1}{2nk}$ et $R_n\sim\dfrac{(-1)^n}{2nk}$ donc $\sum R_n$ est une série alternée convergente.

Exercice 58 Soit (u_n) une série réelle positive. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum\frac{u_n}{u_n+1}$ sont de même nature.

[Dem] En posant $v_n=\dfrac{u_n}{u_n+1}$.Si u_n tend vers 0 alors $u_n\sim v_n$ et $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature. Si (u_n) ne tend pas vers 0 alors en inversant on a $u_n=\dfrac{v_n}{1-v_n}$ ainsi (v_n) ne tend pas vers 0 et il y a pas convergence.

Exercice 59 De l'utilisation de Césaro

Soit $u_0\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et (u_n) la suite définie par $u_{n+1}=\sin u_n$. Montrer que la série $\sum u_n^2$ diverge, étudier $\sum u_n^3$.

[Dem] En étudiant la fonction $x-\sin x$ la seule limite éventuelle est $\ell=0$. D'autre part on a pour tout n, $0<u_n<1$ et $u_{n+1}=\sin u_n<u_n$. Donc (u_n) est décroissante et minorée, elle converge et ce ne peut être que vers 0.

On pose $v_n=u_{n+1}^\beta-u_n^\beta$ et on cherche β tel que v_n ait une limite. On a $v_n=u_n^\beta\left(\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)^\beta-1\right)$, or $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{\sin u_n}{u_n}=1-\dfrac{u_n^2}{6}+o\left(u_n^3\right)$ et $v_n\sim u_n^\beta-\dfrac{\beta u_n^2}{6}\sim-\beta\dfrac{u_n^{\beta+2}}{6}$ on choisit $\beta=-2$ et $v_n\sim\dfrac{1}{3}$. Maintenant $v_0+v_1+\cdots+v_{n-1}=u_n^\beta-u_0^\beta$ et $\dfrac{v_0+v_1+\cdots+v_{n-1}}{n}=\dfrac{u_n^\beta}{n}-\dfrac{u_0^\beta}{n}$ ce dernier terme tend vers 0. Par le théorème de Césaro on a $\dfrac{u_n^{-2}}{n}\to\dfrac{1}{3}$ et $u_n\sim\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\right)$ ou $u_n^2\sim\dfrac{3}{n}$ la série diverge mais $\sum u_n^3$ converge.

Remarquons que pour u_n^3 on a $u_{n+1}-u_n=-\dfrac{u_n^3}{6}+o\left(u_n^3\right)$ la série de terme général négatif $(u_{n+1}-u_n)$ converge comme étant demême nature que la suite $(u_n)\to 0$ donc la érie de terme général $-\dfrac{u_n^3}{6}$ converge et $\sum u_n^3$ converge.

Exercice 60 Etudier les séries de terme général : $u_n=\frac{\cos(\ln n)}{n}$; $u_n=\dfrac{n^n e^{-n}e^{i\alpha n}}{n!}$; $u_n=\dfrac{1}{n^{\alpha+i\beta}}$ où α et β sont réels.

[Dem]

- Soit $f(x) = \sin \ln x$ on a $v_n = f(n+1) - f(n)$ et $u_n = f'(n)$ d'autre part $v_n - u_n = \dfrac{1}{2} f''(n + \theta_n) = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{n+\theta_n}(\sin\ln(n+\theta_n) + \cos\ln(n+\theta_n))\right)$ ce qui donne $|v_n - u_n| \leq \dfrac{1}{n^2}$. Ainsi $\sum v_n - u_n$ converge, $\sum v_n$ diverge et donc $\sum u_n$ diverge (f n'a pas de limite en $+\infty$).
- Pour la seconde on a $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n e^{-1}$ qui admet pour limite 1.
- Pour $u_n = \dfrac{1}{n^{\alpha+i\beta}}$ on a $|u_n| = \dfrac{1}{n^\alpha}$ ainsi si $\alpha > 1$ alors la série converge absolument et si $\alpha \leq 0$ la série diverge car le terme général ne tend pas vers 0. Si $0 < \alpha \leq 1$ alors on pose $f(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha-1+i\beta}}$ et on a $f'(x) = -(\alpha - 1 + i\beta)\dfrac{1}{x^{\alpha+i\beta}}$ et $f''(x) = (\alpha-1+i\beta)(\alpha+i\beta)\dfrac{1}{x^{\alpha+1+i\beta}}$. Ainsi $v_n = f(n+1) - f(n)$ et $\left|v_n + \dfrac{1}{\alpha-1+i\beta} u_n\right| = \dfrac{K}{x^{\alpha+1}}$ qui est le terme général d'une série convergeante, $\sum v_n$ a le même comportement que $(f(n))$ qui n'a pas de limite il en résulte la divergence de $\sum u_n$.

Exercice 61 Montrer que la série $\sum \ln \dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}$ est convergente et calculer sa somme.

[Dem] $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \ln \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^{N} 2\ln(n+1) - \ln n - \ln(n+2) = 2\sum_{n=2}^{N+1} \ln n - \sum_{n=1}^{N} \ln n - \sum_{n=3}^{N+2} \ln n =$ $\ln(N+1) - 0 + \ln 2 - \ln(N+2)$
$= \ln 2 + \ln \dfrac{N+1}{N+2}$ qui tend vers $\ln 2$.

Exercice 62 Soit la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}\right)$. Faire un développement limité de u_n à l'ordre 2. En déduire, suivant la valeur de α, la nature de la série.

[Dem] Si $\alpha \leq 0$ alors le terme général ne tend pas vers 0 et il y a divergence. Si $\alpha > 0$ alors $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} - \dfrac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\dfrac{1}{n^{2\alpha}}\right)$. Ainsi si $\alpha > \dfrac{1}{2}$ alors $\sum\left(u_n - \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}\right)$ est convergente et $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ converge car $\alpha > 0$ et donc $\sum u_n$ converge. Si $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$ alors $\sum\left(u_n - \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}\right)$ diverge et enfin de comptes $\sum u_n$ diverge.

Exercice 63 On définit u_n par $u_0 = a, a \geq 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{n} e^{-u_n}$. Etudier la série de terme général u_n.

[Dem] On a $u_n > 0$ et $u_n \to 0$ car $e^{-u_n} < 1$ ainsi $u_{n+1} \sim \dfrac{1}{n}$ et la série diverge.

Exercice 64 Etudier la convergence des séries suivantes : $u_n = \sin\left(\dfrac{n^2+n+1}{n+1}\pi\right)$; $u_n = \sin \pi\sqrt{n^2+a^2}$; $u_n = (-1)^n \sin \frac{\sqrt{n+1}}{n}$; $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-\sqrt{x}} \sin x dx$.

[Dem] $u_n \sin\left(\dfrac{n^2+n+1}{n+1}\pi\right) = \sin\left((n+1)\pi - \dfrac{n}{n+1}\pi\right) = (-1)^n \sin \dfrac{n}{n+1}\pi$ on a à faire à une série alternée et $|u_n| = \sin \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}\pi > 0$ nous sommes dans $]0,\pi[$ ainsi $\sin \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}\pi$ décroit vers 0 il y a convergence.
Si $a \neq 0$ alors $\sqrt{n^2+a^2} = n\left(1 + \dfrac{a^2}{n^2}\right)^{1/2} = n\left(1 + \dfrac{a^2}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right) = n + \dfrac{a^2}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$. Et $u_n = \sin\left(n\pi + \dfrac{a^2\pi}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^n \sin\left(\dfrac{a^2\pi}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^n\left(\dfrac{a^2\pi}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = a_n + b_n$ avec $\sum a_n$ converge en temps que série alternée, et $\sum b_n$ est absolument convergente. Donc $\sum u_n$ est semi convergente.

$u_n=(-1)^n\sin\dfrac{\sqrt{n+1}}{n}$ on a $\dfrac{\sqrt{n+1}}{n}=\sqrt{\dfrac{n+1}{n^2}}=\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et $\sin\dfrac{\sqrt{n+1}}{n}$ décroit vers 0, car sin est croissant sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. La série converge.

Pur cette dernière $u_n=\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-\sqrt{x}}\sin xdx$ on somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k=\int_0^{(n+1)\pi}e^{-\sqrt{x}}\sin xdx$ et cette intégrale converge.

Exercice 65 Soit (u_n) une série convergente à termes positifs.
a) Montrer que si la suite (u_n) est décroissante, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}nu_n=0$.
b) Montrer que ce résultat n'est plus vraie si l'on ne suppose plus la suite décroissante.

[Dem] Nous allons montrer plus : Si (un) est une suite décroissante et positive tel que $\sum u_n$ converge alors $u_n=o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. En effet posons $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k$ on a $S_{2p}-S_p=u_{p+1}+\cdots+u_{2p}$ et $0\le pu_{2p}\le S_{2p}-S_p$ ce qui prouve que $(2pu_{2p})$ converge. Ensuite on a $0\le(2p+1)\,u_{2p+1}=u_{2p+1}+2pu_{2p+1}\le u_{2p+1}+2u_{2p}$ et $((2p+1)\,u_{2p+1})$ est une suite convergente. Il en résulte que (nu_n) est convergente vers 0. D'où le résultat.

On montre aussi Si $\sum u_n$ est une série à termes positifs convergeante, en posant $R_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty\infty}u_k$ on a que $\sum nu_n$ et $\sum R_n$ sont de même nature. En effet $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}ku_k=\sum_{k=1}^{n}k\left(R_{k-1}-R_k\right)=\sum_{k=1}^{n}kR_{k-1}-\sum_{k=1}^{n}kR_k=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,R_k-\sum_{k=1}^{n}kR_k$ soit $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}ku_k=\sum_{k=0}^{n-1}R_k-nR_n$. Ainsi si $\sum ku_k$ converge alors $\sum R_k$ converge et si $\sum R_k$ converge alors $\lim(nR_n)=0$ et la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}ku_k\right)_n$ converge et de plus les limites sont égales.

Exercice 66 Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ sont convergentes. Montrer que $\sum u_nv_n$ est absolument convergente.

[Dem] C'est un redîte $|u_nv_n|\le\dfrac{1}{2}\left(u_n^2+v_n^2\right)$.

Exercice 67 Etudier la série de terme général : $u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\dfrac{dt}{\left(1+t^2\left|\sin t\right|^{\frac{3}{2}}\right)}$.

[Dem] Le changement de variable $u=t-n\pi$ donne $u_n=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{du}{\left(1+(u+n\pi)^2\sin u\right)^{3/2}}\le\int_0^{\pi}\frac{du}{(1+n^2\pi^2\sin u)^{3/2}}$.

Posons $h(u)=\dfrac{1}{(1+n^2\pi^2\sin u)^{3/2}}$. Encore une simplification : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}h(u)\,du=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}h(u)\,du$ et en faisant $u'=\pi-u$ on a $u_n\le2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{(1+n^2\pi^2\sin u)^{3/2}}$. Sur $[0,\pi]$ on a $\sin u\ge\dfrac{2}{\pi}u$ Considèrer $\varphi(u)=\sin u-\dfrac{2}{\pi}u$ et étudier ses variations à partir de φ''. Donc $u_n\le2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{\left(1+n^2\pi^2\frac{2}{\pi}u\right)^{3/2}}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{(1+2n^2\pi u)^{3/2}}=$

$$-\frac{2}{n^2\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{1+2n^2\pi u}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{n^2\pi}\left[1-\lambda n\right]<\frac{2}{n^2\pi}$$ et la série converge.

Exercice 68 Montrer qu'il existe K réel tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^{\frac{1}{k}}=n+\frac{\ln^2 n}{2}+K+o(1)$.

[Dem] On pose $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^{\frac{1}{k}}-n-\frac{\ln^2 n}{2}$, la convergence de la suite (u_n) équivaut à celle de la série $\sum a_n$ où $a_n=u_n-u_{n-1}=n^{\frac{1}{n}}-1-\dfrac{\ln^2 n}{2}+\dfrac{\ln^2(n-1)}{2}$ or $\ln(n-1)=\ln n+\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$ et

$\ln^2(n-1) = \ln^2 n - 2\dfrac{\ln n}{n} + o\left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right)$ ce qui donne $\dfrac{\ln^2(n-1)}{2(n-1)} = \dfrac{1}{2n}\left(\ln^2 n + \dfrac{\ln^2 n}{n} + o\left(\dfrac{\ln^2 n}{n}\right)\right)$ on en déduit que $\sum a_n$ converge et donc aussi la suite (u_n) d'où l'existence de K.

Exercice 69 D.L.

Etude de la série de terme général $u_n = \left(\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - a.$

[Dem] On a $u_n = e^{n\ln\cos\frac{1}{\sqrt{n}}}$ en développant $\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 1 - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{24n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $\ln\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}} = -\dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4n^2}\right) + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = -\dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{12n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ en reportant $e^{n\ln\cos\frac{1}{\sqrt{n}}} = e^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}\left(1 - \dfrac{1}{12n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ et par suite $u_n = \left(\dfrac{1}{\sqrt{e}} - a\right) - \dfrac{1}{12\sqrt{e}n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ la série diverge toujours, si $a \neq \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ alors u_n ne tend pas vers 0, et si $a = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ on a $u_n \sim \dfrac{-1}{12\sqrt{e}n}$.

Exercice 70 D.L.

Suivant $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{x^n}{1+y^{2n}}$.

[Dem] $\begin{cases} \text{Si } |y| < 1 \text{ alors } u_n \sim x^n \text{ qui converge si et seulement si } |x| < 1 \\ \text{Si } |y| = 1 \text{ alors } u_n = \dfrac{x^n}{2} \text{ converge si et seulement si } |x| < 1 \\ \text{Si } |y| > 1 \text{ alors } u_n \sim \left(\dfrac{x}{y^2}\right)^n \text{ converge si et seulement si } |x| < y^2 \end{cases}.$

Exercice 71 Nature de la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^{3n}}$

[Dem] On a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^{3n}} \geq \int_0^1 \frac{dt}{1+t^{3n}} \geq \int_0^1 \frac{dt}{1+1} = \frac{1}{2}$ et u_n ne tend pas vers 0.