Chapitre 12

Intégration sur un intervalle quelconque

12.1 Introduction

La définition $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ est donnée par Gauss en 1812. Euler (1755) s'intéressa toute sa vie à trouver une fonction factorielle valable pour tout x et en 1781 trouva $n! = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$.

L'intégrale de Riemann date de 1854, celle de Darboux de 1875. Il a fallu attendre 1902 pour que Lebesgue donne une théorie plus générale. Le côté novateur de Lebesgue est de ne plus considérer l'intégrale comme une limite par exemple de sommes de Riemann mais comme l'expression d'une fonction sur un domaine. C'est ainsi qu'il s'intéresse plus aux ensembles qu'aux fonctions. C'est la notion d'ensembles mesurables. La classe de fonctions intégrables s'élargit et de nombreuses portes sont ouvertes (probalités...).

12.2 Intégrales impropres

Définition 1 *Soit f une fonction, continue par morceaux sur l'intervalle $[a, b[$, $(a \in \mathbb{R})$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$ à valeurs dans K. On dit que l'intégrale de la fonction f est convergente en b si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_a^x f$ admet une limite finie lorsque x tend vers b. Par définition*

$$\int_{[a,b[} f = \lim_{x \to b} \int_a^x f$$

Sinon on dit que l'intégrale diverge. Mêmes définitions pour les intervalles du type $]a, b]$ ou $]a, b[$

12.3 Fonctions intégrables à valeurs positives

Définition 2 *Soit f une fonction continue par morceaux et **POSITIVE** sur l'intervalle $I = [a, b[$ à valeurs dans K. On dit que f est intégrable sur I si et seulement si son intégrale converge. La notion d'intégrabilité est réservée aux fonctions positives.*

Proposition 1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, POSITIVE. Se valent :*

1)f est intégrable sur I.

2)il existe un réel M tel que, pour tout intervalle fermé borné J inclus dans I, $\int_J f \leq M$. On a alors

$$\int_I f = \sup_J \int_J f$$

[Ind] Tout repose sur le fait que l'intégrale d'une fonction positive est une fonction croissante par rapport au domaine d'intégration.

[Dem] Posons $I = [a, b[$, les autres cas se traitent de la même façon en séparant l'intervalle. Si f est intégrable alors $\int_I |f| = M$ existe et pour tout $J \subset I$, J compact on a $\int_J |f| \leq M$. Réciproquement s'il existe M tel que pour tout J compact de I on ait $\int_J |f| \leq M$, alors en prenant $J = [a, x]$ la suite $\left(\int_{[a,x]} |f|\right)$ est croissante et majorée donc $\lim_{x\to b} \int_{[a,x]} |f|$ existe et f est intégrable.

Remarque: Si $I = [a, b]$ est un segment et f une fonction continue par morceaux, positive définie sur I, les deux notions d'intégrale coïncident, il suffit de prendre $J = [a, b]$. En outre, f est intégrable sur $]a, b[$, $[a, b[$ et $]a, b]$ et les quatres intégrales sont égales.

Proposition 2 *Soient f et g deux fonctions réelles continues par morceaux sur un intervalle I à valeurs positives. Si $f \leq g$ et si g est intégrable sur I alors f est intégrable sur I et $\int_I f \leq \int_I g$, et si f n'est pas intégrable sur I alors g non plus.*

[Ind] Les fonctions sont positives on a donc des suites croissantes qui convergent si et seulement si elles sont bornées.

[Dem] Si $f \leq g$ alors $\int_{[a,x]} f \leq \int_{[a,x]} g$. Comme g est intégrable $\int_{[a,x]} g$ est bornée et donc $\int_{[a,x]} f$ aussi et f est intgrable. Il suffit alors de passer à la limite dans l'inégalité. De même pour le cas de la non intégrabilité.

Exercice 1 Montrer que la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x+\sin x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

[Ind] Appliquer la proposition 3.

[Dem] On a pour tout $x \geq 0$: $\mathrm{e}^{-x+\sin x} \leq \mathrm{e}^{-x+1}$. Nous connaissons une primitive de e^{-x+1} ce qui donne son intégrabilité sur $\mathbb{R}_+$. $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x+1} = [-\mathrm{e}^{-x+1}]_0^{+\infty} = e$. D'où l'intégrabilité de f.

Proposition 3 *Soient f et g des fonctions continues par morceaux, positives et définies sur $I = [a, b[$.*
Si $f = O_b(g)$ et si l'intégrale de g converge en b alors l'intégrale de f converge en b.

[Ind] Utiliser que les fonctions sont positives et traduire les hypothèses.

[Dem] Les fonctions étant positives le point essentiel est que $\phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ est croissante en x. Ainsi l'intgrale converge si et seulement si ϕ est bornée. L'hypothèse se traduit par : $\exists \nu > 0, M > 0$: $\forall t\, |b - t| < \nu \Rightarrow |f(t)| \leq M\, |g(t)|$. On a $\int_a^{b-\varepsilon} f = \int_a^{b-\nu} f + \int_{b-\nu}^{b-\varepsilon} f \leq \int_a^{b-\nu} f + M \int_{b-\nu}^{b-\varepsilon} g$. Cette toute dernière intégrale est convergente par hypothèse donc bornée, il en est donc de même de $\int_a^{b-\varepsilon} f$ quand ε tend vers zéro et l'intégrale de f converge.

Proposition 4 *Soient f et g des fonctions réelles continues par morceaux, positives et définies sur $I = [a, b[$. Si $f \sim g$ alors f et g sont simultanément intégrables sur I (les intégrales de f et de g sont de même nature).*

[Ind] Écrire une double inégalité.

[Dem] Dans ce cas on a $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$: $\forall t\, |b - t| < \eta \Rightarrow g(t)\,(1 - \varepsilon) \leq f(t) \leq g(t)\,(1 + \varepsilon)$. En prenant $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ on obtient $\dfrac{1}{2}g(t) \leq f(t) \leq \dfrac{3}{2}g(t)$. Ainsi si l'intégrale de g converge l'inégalité de droite donne la convergence de l'intégrale de f. Si l'intégrale de g diverge l'inégalité de gauche donne que l'intégrale de f diverge (car elle ne peut pas être bornée).

Proposition 5 Intégrales de Riemann *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a > 0$. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $]0, a]$ si et seulement si $\alpha < 1$ et elle est intégrable sur $[a, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.*

[Ind] Écrire des primitives.

[Dem] Faisons la démonstration pour $]0, a]$. Si $\alpha \neq 1$ on a $\displaystyle\int_{]\varepsilon,a]} \frac{1}{x^\alpha} = \left[\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_\varepsilon^a$ et la limite existe quand ε tend vers 0 si et seulement si $\alpha < 1$. Si $\alpha = 1$ alors $\displaystyle\int_{]\varepsilon,a]} \frac{1}{x} = [lnx]_\varepsilon^a$ qui ne converge pas en 0.

On en déduit que si $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $\mapsto \dfrac{1}{|x - x_0|^\alpha}$ est intégrable sur $[x_0 - 1, x_0[$ et $]x_0, x_0 + 1]$ si et seulement si $\alpha < 1$ et qu'elle est intégrable sur $] - \infty, x_0 - 1]$ et $[x_0 + 1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 2 Déterminer les valeurs des reéls α et β telles que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}$ soit intégrable sur $[2, +\infty[$.

[Ind] Comparer à une intégrale de Riemann en discutant suivant la place de α par rapport à 1.

[Dem] Il s'agit des intégrales de Bertrand.
Si $\alpha > 1$ on peut choisir $\gamma \in]1, \alpha[$ et avoir $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x^\gamma \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^{\gamma-\alpha}}{\ln^\beta x} = 0$ ce qui donne que $\dfrac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} = o\left(\frac{1}{x^\gamma}\right)$ et donc la fonction est intégrable en $+\infty$.
Si $\alpha < 1$ on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{\ln^\beta x} = +\infty$ et donc pour x assez grand on aura $\dfrac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} \geq \dfrac{1}{x}$. La fonction n'est pas itégrable.
Si $\alpha = 1$ il s'agit de calculer une primitive car $\displaystyle\int_2^A \frac{1}{x \ln x} = \ln(\ln A) - \ln(\ln 2)$ tend vers l'infinie avec A. La fonction n'est pas intégrable.

Exercice 3 Montrer que, pour tout entier positif n, la fonction $x \mapsto x^n e^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} x^n e^{-x} dx$.

[Ind] Pour l'existence, comparer à une intégrale de Riemann. Pour le calcul faire des intégrations par parties sur des compacts puis passer á la limite.

[Dem] Une intégration par parties donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = \left[-x^n e^{-x}\right]_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$. En appelant I_n l'intégrale proposée on a donc $I_n = nI_{n-1} = n!I_1 = n!$ car $I_1 = 1$.

12.4 Intégrales absolument convergentes

Définition 3 *Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans K, on dit que f est intégrable ou sommable, ou à une intégrale absolument convergente si* *et seulement si $|f|$ est intégrable ou encore l'intégrale de la fonction $|f|$ définie par $t \longmapsto |f|(t)$ est convergente.*

Exercice 4 La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est intégrable sur [-1, 1]. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. La fonction exponentielle n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$ et est intégrable sur $\mathbb{R}_-$.

[Ind] Dans ces premiers exemples on connait des primitives.

[Dem] $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \left[-\frac{1}{2}\sqrt{1-x}\right]_{-1}^{+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
$\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2} = [\text{Arctan}\, x]_{-\infty}^{+\infty} = \pi$.
$\displaystyle\int_{-A}^{+A} \mathrm{e}^x dx = \mathrm{e}^A - \mathrm{e}^{-A} \to +\infty$ quand $A \to +\infty$ mais $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^x dx = 1$

Proposition 6 *Si f est sommable ou intégrable (au sens que son intégrale est absolument convergente) alors l'intégrale de f est convergente.*

[Ind] Utiliser f^+ et f^-.

[Dem] Il s'agit de montrer au sens des limites qu'une intégrale absolument convergente est convergente. On pose $I = [a, b[$, les autres cas s'y ramenant.
Supposons d'abord que f est réelle (de signe non constant, sinon il n'y a rien à démontrer). On pose $f^+ = sup(0, f)$ et $f^- = sup(0, -f)$.
Si f est intégrable les majorations $0 \le f^+ \le |f|$ et $0 \le f^- \le |f|$ prouve que $\displaystyle\int_I f^+$ et $\displaystyle\int_I f^-$ existent.
Ensuite comme $f = f^+ - f^-$ on a $\displaystyle\lim_{x\to b}\int_{[a,x]} f^+$ et $\displaystyle\lim_{x\to b}\int_{[a,x]} f^-$ existent et donc $\displaystyle\lim_{x\to b}\int_{[a,x]} f$ existe.
Dans le cas où f est à valeurs complexes, on utilise les in'egalités : $|Re(f)| \le |f|$ et $|Im(f)| \le |f|$, puis $f = Re(f) + iIm(f)$.

Exercice 5 Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin^2 x}{x^3}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et est intégrable sur $[1, +\infty[$.

[Ind] Pour l'intégrabilité en $+\infty$ majorer, pour la non intégrabilité en 0, trouver un équivalent.

[Dem] La fonction $x \longrightarrow \dfrac{\sin^2 x}{x^3}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $\dfrac{\sin^2 x}{x^3} \overset{0}{\sim} \dfrac{1}{x}$, la fonction n'est donc pas intégrable en 0. En $+\infty$ on a $\dfrac{\sin^2 x}{x^3} \le \dfrac{1}{x^2}$ ce qui prouve l'intégrabilité

Cette proposition est une reformulation de la proposition 2 pour les fonctions sommables.

Proposition 7 *Soient f et φ des fonctions continues par morceaux et définies sur $I = [a, b[$. Si $f = O_b(\varphi)$ et si φ est positive et intégrable sur I alors f est intégrable sur I.*

[Ind] Cela revient à des fonctions positives.

[Dem] C'est directement la proposition démontrée pour les fonctions positives.

Exercice 6 Soit n un entier naturel. Prouver l'intégrabilité de la fonction $x \mapsto x^n \mathrm{e}^{-x^2} \sin x$ sur $\mathbb{R}$.

[Ind] Comparer à une intégrale de Riemann.

[Dem] La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ et en $+\infty$ on a $\left|x^n \mathrm{e}^{-x^2} \sin x\right| \le \frac{1}{x^2}$ car $\displaystyle\lim_{+\infty} x^2 \left(x^n \mathrm{e}^{-x^2} \sin x\right) = 0$, d'où l'intégrabilité.

12.5 Propriétés de l'intégrale

Proposition 8 *L'ensemble $\mathcal{I}_{pm}(I,K)$ des fonctions continues par morceaux et sommables sur l'intervalle I à valeurs dans K est un K-espace vectoriel et l'application intégrale est une forme linéaire qui vérifie*

$$\forall f \in \mathcal{I}_{pm}(I,K) \qquad \left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$$

[Ind] Montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_{pm}(I,K)$, puis vérifier.

[Dem] $\mathcal{I}_{pm}(I,K)$ n'est pas vide car il contient 0. Soit $f,g \in \mathcal{I}_{pm}(I,K)$ et $\lambda \in K$, l'inégalité : $|f+\lambda g| \leq |f| + |\lambda||g|$ donne que $f+\lambda g$ est dans $\mathcal{I}_{pm}(I,K)$. Montrons que l'intégrale est linéaire : Posons par exemple $I=[a,b[$ on sait que pour $f,g \in \mathcal{I}_{pm}(I,K)$: $\displaystyle\int_a^x f+\lambda g = \int_a^x f + \lambda \int_a^x g$. En passant à la limite quand x tend vers b, puisque toutes les intégrales existent, nous obtenons : $\displaystyle\int_I f+\lambda g = \int_I f + \lambda \int_I g$. De la même façon on a : $\displaystyle\left|\int_a^x f\right| \leq \int_a^x |f|$ et en passant à la limite on trouve l'inégalité de la moyenne :$\displaystyle\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$.

Proposition 9 *Soient I et J des intervalles de $\mathbb{R}$ tels que $I \cup J$ est un intervalle et $I \cap J$ est vide ou réduit à un point. Soit une fonction réelle ou complexe f continue par morceaux sur $I \cup J$ f est sommable sur I et J si et seulement si f est sommable sur $I \cup J$ et on a*

$$\int_{I\cup J} f = \int_I f + \int_J f$$

[Ind] Partie directe et réciproque, utiliser le critère de convergence des intégrales de fonctions positives.

[Dem] Si $\displaystyle\int_{I\cup J} f$ existe alors pour tout compact K inclus dans I (ou inclus dans J) K est un compact inclus dans $I \cup J$ et donc $\displaystyle\int_K |f| \leq \int_{I\cup J} |f|$ donc f est sommable sur I (respectivement sur J). Réciproquement écrivons que $\forall x \in I \cup J\ :\ f(x) = \chi_{|I}(x)f(x) + \chi_{|J}(x)f(x)$ ou $\chi_{|I}$ est la fonction caractéristique de I.Comme $\chi_{|I}f$ et $\chi_{|J}f$ sont sommables sur $I \cup J$ leur somme aussi donc f est sommable sur $I \cup J$. En intégrant on obtient

$$\int_{I\cup J} f = \int_I f + \int_J f$$

car $\displaystyle\int_{I\cup J} \chi_{|I} f = \int_I f$. On a utilisé que si $I' \subset I$ et si f est intégrable sur I' alors $\chi_{|I'}f$ est intégrable sur I. On peut se ramener au cas où I' est fermé en remplaçant I' par son adhérence $\overline{I'}$ (I' étant un intervalle on sait que l'intégrabilité sur I' est équivalente à l'intégrabilité sur $\overline{I'}$. Dans ce cas pour tout fermé borné K contenu dans I, $K \cap I'$ est un fermé borné de I' donc $\displaystyle\int_K \chi_{|I'}|f| \leq \int_{K\cap I'} \chi_{|I'}|f| \leq \int_{I'} \chi_{|I'}|f|f$ ce qui prouve que $\chi_{|I'}f$ est intégrable sur I

Exercice 7 Soit f une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que la série de terme général $\displaystyle\int_n^{n+1} f$ converge et que sa somme est $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$.

[Ind] Penser à l'absolue convergence et majorer.

[Dem] Comme la fonction est intégrable on a que $\int_0^{n+1} |f|$ admet pour limite $\int_0^{+\infty} |f|$ donc $\sum_{k=0}^{n} \left| \int_n^{n+1} f \right| \leq \int_0^{n+1} |f|$ admet une limite ce qui prouve que la série est absolument convergente. On a alors $\sum_{k=0}^{n} \int_n^{n+1} f \leq \int_0^{n+1} f$ qui tend vers $\int_0^{+\infty} f$.

Exercice 8 Soit f une fonction continue par morceaux et intégrable sur $[a,b[$. Montrer que $\lim_{x\to b} \int_x^b f = 0$.

[Ind] Reprendre la définition d'une intégrale convergente et faire un passage à la limite.

[Dem] $\int_a^b f$ existe la relation de Chasles donne $\int_a^x f + \int_x^b f = \int_a^b f$. Puisque $\lim_{x\to b} \int_0^x f = \int_a^b f$ on a bien $\lim_{x\to b} \int_x^b f = 0$.

Proposition 10 *Soit f une fonction réelle continue par morceaux sur un intervalle I et $I_1, \ldots, I_p$ des intervalles constituant une partition de I. La fonction f est intégrable sur I si et seulement si elle est intégrable sur chaque intervalle I_k ($k \in [1,p]$), on a alors*

$$\int_I f = \sum_{k=1}^{p} \int_{I_k} f$$

[Ind] C'est la généralisation de la proposition précédente.

[Dem] Par récurrence c'est vrai si $p = 1$ si c'est vrai jusq'au rang $p-1$ on écrit $I = (I_1 \cup \ldots \cup I_{p-1}) \cup I_p$ et on applique la proposition précédente au deux intervalles $(I_1 \cup \ldots \cup I_{p-1})$ et I_p.

Proposition 11 *Soit f une fonction continue, positive et intégrable sur un intervalle I non réduit à un point. La fonction f est nulle si et seulement si son intégrale sur I est nulle.*

[Ind] Passer par les intégrales sur des compacts.

[Dem] Si f est positive on pour tout compact $K \subset I$: $0 \leq \int_K f \leq \int_I f = 0$ donc f étant continue sur tout K elle est nulle sur tout compact $k \subset I$. Elle est donc nulle sur I.

Exercice 9 Que peut-on dire d'une fonction f continue par morceaux, positive, intégrable sur un intervalle I telle que $\int_I f = 0$?

[Ind] Penser aux points de discontinuité.

[Dem] En se plaÃ§ant sur des intervalles où f est continue on obtient que f est nulle sauf peut-être aux points de discontinuité de f.

Proposition 12 *Soit f une fonction réelle ou complexe continue par morceaux définie sur l'intervalle I et φ un* **difféomorphisme** *de classe C^1 de l'intervalle J sur l'intervalle I. On a*

$$f \text{ sommable sur } I \iff f \circ \varphi \cdot \varphi' \text{ sommable sur } J$$

et que, dans ce cas

$$\int_I f = \int_J f \circ \varphi \cdot |\varphi'|$$

[Ind] Il s'agit d'un changement de variable que l'on effectue sur des compacts, on passe après à la limite.

[Dem] Pour tout compact $K \subset I$ φ réalise un C^1difféomorphisme d'un compact K' sur K et on a $\int_K |f| = \int_K^{\prime} |f| \circ \varphi \cdot |\varphi'|$. En passant au *sup* pour $K \subset I$ d'un côté puis de l'autre on montre que f intégrable sur $I \Longleftrightarrow f \circ \varphi \cdot \varphi'$ intégrable sur J, puis l'égalité $\int_I f = \int_J f \circ \varphi \cdot |\varphi'|$ en passant à la limite en posant par exemple $I = [a, b[$.

Exercice 10 Soient a et b des réels ($a < b$). Montrer que la fonction définie sur $]a, b[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ est intégrable sur $]a, b[$ et calculer son intégrale (on fera le changement de variable $t = \dfrac{x-a}{b-x}$).

[Ind] Le changement de variable convient.

[Dem] f est intégrable car en a ou en b elle a le même comportement que $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ en 0. Le changement proposé donne $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)}$. En effectuant le changement $u = \sqrt{t}$ on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)} = \int_0^{+\infty} \frac{2du}{(1+u^2} = \pi$.

Exercice 11 Soit f une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ et tout $b \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(ax+b)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = |a| \int_{-\infty}^{+\infty} f(at+b)dt$$

[Ind] Faire un changement de variable.

[Dem] Le changement de variable $u = ax+b$ donne $\displaystyle\int_{-A}^{+B} f(ax+b) = \frac{1}{a} \int_{-aA+b}^{aB+b} f(u)du = \frac{\operatorname{sign}(a)}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du$. D'où le résultat.

Exercice 12 Soit f une fonction continue par morceaux et bornée sur un intervalle borné I. Montrer que f est intégrable sur I.

[Ind] Le module sera borné, majorer.

[Dem] f est bornée il existe donc M tel que $\forall x \in I \ : \ |f(x)| \leq M$. La fonction constante M est intégrable sur I donc par comparaison f aussi.

Exercice 13 Montrer que la fonction sinus n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

[Ind] On connait une primitive se plaÃ§er sur un compact puis passer à la limite.

[Dem] $\displaystyle\int_0^A \sin x dx = 1 - \cos A$. Or $\cos A$ n'a pas de limite quand A tend vers $+\infty$, la fonction sin n'est donc pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 14 Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x^2 + \cos x}$ est intégrable sur $[1 + \infty[$.

[Ind] Le problème est en $+\infty$, majorer et minorer.

[Dem] La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x^2 + \cos x}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et en $+\infty$ on a la majoration : $\left|\dfrac{\sin x}{x^2 + \cos x}\right| \leq \dfrac{1}{x^2 - 1}$ cette dernière fonction est intégrable en $+\infty$.

Exercice 15 Montrer que la fonction $x \mapsto \ln x$ est intégrable sur $]0,2]$ et calculer $\displaystyle\int_{]0,2]} \ln t dt$.

[Ind] On connait une primitive.

[Dem] $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{2} \ln t dt = 2\ln 2 - 2 - \varepsilon \ln \varepsilon + \varepsilon$ or $\lim\limits_{0} \varepsilon \ln \varepsilon = 0$ donc la fonction ln est intégrable en 0 et $\displaystyle\int_{0}^{2} \ln t dt = 2(\ln 2 - 1)$.

Exercice 16 Une fonction f à valeurs complexes, continue par morceaux sur un intervalle I est intégrable sur I si et seulement si les fonctions $\Re f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont. On a alors

$$\int_I f = \int_I \Re f + i \int_I \operatorname{Im} f$$

.

[Ind] Vous pouvez majorer par une fonction intégrable pour démontrer les résultats, les comparaisons existent.

[Dem] Si f est intégrable sur I alors les majorations : $|\Re(f)| \leq |f|$ et $|\operatorname{Im}(f)| \leq |f|$ donnent l'intégrabilité de $\Re f$ et $\operatorname{Im} f$ puisque ces fonctions sont continues par morceaux sur I. De plus en prenant une suite de compact K_n tendant vers I on a par le chapitre intégration sur un compact d'une fonction continue par morceaux $\displaystyle\int_{K_n} f = \int_{K_n} \Re f + i \int_{K_n} \operatorname{Im} f$ en passant à la limite puisque nous avons prouvé l'existence des limites on a le résultat sur I.
Réciproquement en utilisant $|f| = \sqrt{|\Re f|^2 + |\operatorname{Im} f|^2} \leq (|\Re f| + |\operatorname{Im} f|)$ on obtient l'intégrabilité de f à partir de l'intégrabilité de $\Re f$ et $\operatorname{Im} f$.

ATTENTION : La limite $\displaystyle\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)dt$ peut exister alors que la fonction f n'est pas intégrable sur $[a, b[$. Dans ce cas, on dit que l'intégrale est semi-convergente.

Exercice 17 Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt$ existe mais que la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

[Ind] Pour l'existence de l'intégrale une intégration par parties fait l'affaire (augmenter la puissance du dénominateur). Pour la non intégrabilité minorer par une série divergente en découpant l'intervalle .

[Dem] $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt = \cos 1 - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt$ par une intégration par parties en posant $u = \frac{1}{t}$ pour augmenter la puissance de t. On a d'une part $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\cos x}{x} = 0$ et d'autre part la majoration $\left|\dfrac{\cos t}{t^2}\right| \leq \dfrac{1}{t^2}$ donne la convergence de l'intégrale. Donc $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt$ existe.
Maintenant $\displaystyle\int_1^{n\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt \geq \sum_{k=1}^{n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| \, dt$. Or $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| \, dt$ vaut toujours 2 que k soit pair ou impair. D'où $\displaystyle\int_1^{n\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{(k+1)\pi}$. Cette dernière somme tend vers l'infini donc l'intégrale diverge.

12.6 Compléments

Comparaison d'une série à une intégrale

Soit f une fonction continue par morceaux définie sur $\mathbb{R}_+$ décroissante et à valeurs positives.Soit

$n \in \mathbb{N}^*$, pour réel $t \in [n-1, n]$, on a $f(n) \leq f(t) \leq f(n-1)$ donc

$$f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)dt \leq f(n-1)$$

soit

$$0 \leq \int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n) \leq f(n-1) - f(n)$$

On en déduit que la série de terme général $u_n = \int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n)$ est une série à termes positifs et convergente car la série de terme général $f(n-1)-f(n)$ est une série telescopique convergente: f étant décroissante et minorée, la limite de f en $+\infty$ existe et vaut l. On obtient donc

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_0^n f(t)dt - \sum_{k=1}^{n} f(k) \right) \in [0, f(0) - l]$$

On en déduit alors:

Proposition 13 *Soit f une fonction continue par morceaux définie sur $\mathbb{R}_+$ décroissante et à valeurs positives. La série $\sum_{k=1}^{+\infty} f(k)$ est convergente si et seulement si la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.*

[Ind] Relire ce qui précède.

[Dem] Elle est faîte.

La méthode est plus générale et s'applique aux fonctions monotones pour trouver des équivalents de sommes partielles divergentes.
Supposons maintenant que f est monotone et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_{n-1}^{n} f(t)dt \in [f(n-1), f(n)]$$

et donc

$$u_n = \int_{n-1}^{n} f(t) - f(n) \in [0, f(n-1) - f(n)]$$

Pour obtenir des résultats plus précis sur le terme u_n, on peut écrire

$$u_n = \int_{n-1}^{n} (f(t) - f(n))\, dt$$

et si f est de classe C^1, à l'aide d'une intégration par parties:

$$\begin{aligned} u_n &= -\int_{n-1}^{n} (t-n+1)f'(t)dt \\ &= -\int_0^1 uf'(u+n-1)du \end{aligned}$$

Exercice 18 Retrouver la convergence de la suite $-\ln n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ vers un réel γ.

[Ind] Utiliser les inégalités de la démonstration de la proposition ci-dessus avec la fonction $\frac{1}{x}$.

Exemple d'application: la formule de Stirling

Utilisons la fonction $x \mapsto \ln x$:
on obtient, pour tout entier $n \geq 1$

$$\ln(n+1) - \int_n^{n+1} \ln t dt = \int_0^1 \frac{u}{u+n} du$$

Mais, pour tout $u \in [0,1]$ et pour $n \geq 2$ le terme $\frac{u}{u+n}$ est la somme de la série alternée convergente de terme général $(-1)^{k-1}\frac{u^k}{n^k}$ ainsi

$$-\frac{u^2}{n^2} \leq \frac{u}{u+n} - \frac{u}{n} \leq 0$$

et donc

$$\int_0^1 \frac{u}{u+n} du - \frac{1}{2n} = O(\frac{1}{n^2})$$

Ainsi, la série de terme général $\ln(n+1) - \frac{1}{2n} - \int_n^{n+1} \ln t dt$ converge et donc la suite des sommes partielles:

$$S_{n-1} = \ln(n!) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \int_1^n \ln t dt$$

converge vers un réel l.
Transformons le terme général de cette suite: on sait que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \ln(n-1) + \gamma + o(1)$$

où γ désigne la constante d'Euler, ainsi

$$\begin{aligned} S_{n-1} &= \ln n! - \frac{1}{2}\ln(n-1) - \frac{1}{2}\gamma - n\ln n + n - 1 + o(1) \\ &= \ln n! - \frac{1}{2}\ln(n) - n\ln n + n - \frac{1}{2}\gamma - 1 + o(1) \\ &= \ln \frac{n! e^n}{n^n\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\gamma - 1 + o(1) \end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe un réel $c = 1 + l + \frac{1}{2}\gamma$ tel que

$$n! \sim \mathrm{e}^c \sqrt{n}\frac{n^n}{e^n}$$

On sait, par ailleurs, qu'à l'aide des intégrales de Wallis, on prouve la formule :

$$\frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!} \sim \sqrt{\pi}$$

et on trouve

$$\frac{2^{2n}\mathrm{e}^{2c} n \cdot n^{2n} e^{-2n}}{\sqrt{n}\sqrt{2n} \cdot \mathrm{e}^c (2n)^{2n} e^{-2n}} \sim \frac{e^c}{\sqrt{2}} \sim \sqrt{\pi}$$

La formule de Stirling s'en déduit alors:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Une autre forme de la formule est

$$\sum_{k=1}^{n} \ln k = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \ln 2\pi + o(1)$$

donnant un développement limité de $\ln n!$.

Exercice 19 Trouver un équivalent en $+\infty$ de $\sup_{p \in [0,n]} \binom{n}{p}$.

[Ind] Appliquer la formule de Stirling en écrivant un coefficient de Pascal avec les factoriels.

[Dem] Le plus grand des coefficients binomiaux est au milieu c'est $\binom{n}{[\frac{n}{2}]}$ et en utilisant la formule de stirling on trouve comme équivalent : $\dfrac{2^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi n}}$.

12.7 Convergence en moyenne, convergence quadratique

Théorème 1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. L'ensemble $L^1_c(I)$ des fonctions continues et intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel et l'application N_1 qui, à un telle fonction f, associe $N_1(f) = \int_I |f|$ en constitue une norme appelée norme de la convergence en moyenne.*

[Ind] Montrer que c'est un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}(I)$. Le vérifier.

[Dem] $L^1_c(I)$ n'est pas vide (0 est dedans). Si f, g sont dans $L^1_c(I)$ et $\lambda \in K$, l'inégalité : $|f + \lambda g| \leq |f| + |\lambda||g|$ prouve que $f + \lambda g$ est dans L^1. La linéarité, la possibilité d'intégrer les inégalités donne la pseudo homogénéité et l'inégalité triangulaire de la norme. L'axiome de séparabilité provient que l'intégrale d'une fonction continue et positive est nulle si et seulement si la fonction est nulle.

Ainsi, si la suite $(f_n) \in L^1_c(I)^{\mathbb{N}}$ est une suite convergente vers une fonction $f \in L^1_c(I)$ pour la norme N_1 , alors $\lim_{n \to +\infty} \int_I f_n = \int_I f$.

Exercice 20 Montrer que la convergence en moyenne n'entraine pas la convergence simple.

[Ind] Donner un contre exemple.

[Dem] La suite de fonctions $f_n(x) = \sin nx$ ne converge pas sur $]0, \pi[$ et pourtant $\int_0^\pi \sin nx = \dfrac{1 - (-1)^n}{n}$ tend vers 0.

Définition 4 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On note $L^2_c(I)$ l'ensemble des fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{C}$ dont le carré du module est intégrable sur I.*

Proposition 14 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si f et g appartiennent à $L^2_c(I)$ alors $fg \in L^1_c(I)$.*

[Ind] Majorer.

[Dem] Il suffit d'écrire que $|fg| \leq \frac{1}{2}\left(|f|^2 + |g|^2\right)$ donc pour tout compact $K \subset I$ on a $\int_K |fg| \leq \frac{1}{2}\left(\int_K |f|^2 + \int_K |g|^2\right)$. On passe alors au *sup* pour $K \subset I$ à droite $\int_K |fg| \leq \frac{1}{2}\left(\int_I |f|^2 + \int_I |g|^2\right)$ ce qui assure $\int_K |fg|$ est bornée pour tout $K \subset I$ et donc que l'intégrale $\int_I |fg|$ existe. fg est donc bien dans $L^1_c(I)$.

Théorème 2 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. L'ensemble $L_c^2(I)$ est un espace vectoriel et l'application $(\cdot|\cdot)$ définie sur $L_c^2(I)\times L_c^2(I)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui, à deux fonctions f et g associe $(f|g) = \int_I \overline{f}g$ est un produit scalaire dont la norme N_2 associée s'appelle norme de la convergence en moyenne quadratique.*

[Ind] Utiliser ce que vous savez sur un compact.

[Dem] Montrons que c'est un sous espace vectoriel de $C^0(I)$. $L_c^2(I)$ est non vide (0 est de carré sommable) et si $f, g \in L_c^2(I)$ la proposition précédente assure que $|(f+g)|^2 \le |f|^2 + |g|^2 + 2|f||g|$ est intégrable sur I. Pour l'opération externe il n'y a pas de problème. La fonction $(f,g) \longmapsto (f|g) = \int_I \overline{f}g$ est bien une forme sesqui linéaire hermitienne et définie positive.

Exercice 21 Calculer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (x^2-ax-b)^2 \mathrm{e}^{-2x} dx$

[Ind] L'inf sera atteint pour le projeté orthogonal ! Trouver un produit scalaire, un sous-espace de dimension finie, appliquer le théorème de projection.

[Dem] Mettons sur $\mathbb{R}[X]$ le produit scalaire bien défini par $\langle f, g\rangle = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)e^{-2x}dx$. Considèrons le sous espace vectoriel $F = \text{Vect }(1, X)$ de dimesion finie 2. Le minimum cherché est alors la distance de X^2 à F. Il est atteint pour la projection orthogonale de X^2 sur F. On peut éviter de chercher une base orthonormale en posant $P_F^\perp(X^2) = \alpha X + \beta 1$ et en écrivant que $X^2 - P_F^\perp(X^2)$ est orthogonal à F, ou : $\begin{cases} \int_0^{+\infty} (x^2-\alpha x-\beta)e^{-2x}dx = 0 \\ \int_0^{+\infty} (x^2-\alpha x-\beta)xdx = 0 \end{cases}$, ce qui donne : $\begin{cases} \frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{4}\beta = \frac{3}{8} \end{cases}$. On trouve $\alpha = 2$ et $\beta = -\dfrac{1}{2}$.

Le minimum est donc atteint pour $2X - \frac{1}{2}$ et il vaut alors : $\dfrac{9}{8}$. (On calcule par intégration par parties : $\int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-2x}dx = \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-2x}dx = \dfrac{1}{4}$, $\int_0^{+\infty} x^3\mathrm{e}^{-2x}dx = \dfrac{3}{8}$, $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2x}dx = \dfrac{1}{2}$.)

Exercice 22 Montrer que $L_c^1(I)$ et $L_c^2(I)$ ne sont pas en général emboités et que sur $L_c^1(I)\cap L_c^2(I)$, N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes: en général, la convergence en moyenne n'entraine pas la convergence en moyenne quadratique et réciproquement.

[Ind] Trouver des contre exemples.

[Dem] Par contre exemple sur $[1, +\infty[$ la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ appartient à L^2 mais pas à L^1.
La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est dans $L^1([0,1])$ et pas dans $L^2([0,1])$.
Pour $I = [0,1]$ on a $N_1(\sin nx)$ qui tend vers 0, alors que $N_2(\sin nx)$ tend vers $\dfrac{1}{2}$.

Proposition 15 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si f et g appartiennent à $L_c^2(I)$,*

$$|(f|g)| \le N_1(fg) \le N_2(f)N_2(g)$$

[Ind] Écrire ce que cela veut dire.

[Dem] $|(f|g)| = \left|\int_I \overline{f}g\right| \le \int_I |f|\,|g| \le \left(\int_I |f|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I |g|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le N_2(f)N_2(g)$. Nous avons utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Proposition 16 *Le produit scalaire est une application sesquilinéaire continue sur $L_c^2(I)$.*

[Ind] Traduire la continuité par les suites.

[Dem] Nous aurons besoin de ce résultat dans la synthèse de Fourier. La proposition précédente donne que si $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ tend vers 0 pour la norme N_2, par encadrement on a $|(f_n|g_n)|$ qui tend vers 0.

Exercice 23 Soit $f \in L^2_c([0,+\infty[)$. Montrer que la fonction g définie pour $x>0$ par $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

Montrer que, pour tout réel $a>0$ et tout $x \in [a+,\infty[$: $|g(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}\displaystyle\int_0^a |f(t)|\,dt + \left(\int_a^x \left|f^2(t)\right|dt\right)^{\frac{1}{2}}$.
En déduire que $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$.

[Ind] Utiliser Cauchy-Schwarz sur des "bons" intervalles, pour la suite découper votre intevalle.

[Dem] Cauchy-Schwarz avec $g=1$ donne $|g(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{\displaystyle\int_0^x f^2}\sqrt{x}$ ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ :\ g(x) \leq N_2(f)$.
En découpant l'intervalle et en faisant la majoration précédente juste sur $[a,x]$ on obtient bien $|g(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^a |f(t)|\,dt + \left(\int_a^x \left|f^2(t)\right|dt\right)^{\frac{1}{2}}$.
En faisant tendre x vers l'infini on a : $\forall a>0\ :\ \lim\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\displaystyle\int_0^a |f(t)|\,dt + \left(\int_a^x \left|f^2(t)\right|dt\right)^{\frac{1}{2}}\right) \leq \left(\displaystyle\int_a^\infty \left|f^2(t)\right|dt\right)^{\frac{1}{2}}$. Maintenant en faisant tendre a vers l'infini on obtient que la limite de g en 0 existe par encadrement et $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ car $\lim\limits_{a\to\infty}\displaystyle\int_a^{+\infty} |f|^2 = 0$.

12.8 Convergence dominée

Le théorème suivant permet sous des hypothèses assez générales d'intervertir les symboles limite et intégrale.

Théorème 3 Convergence dominée. *Soit (f_n) une suite de fonctions réelles ou complexes continues par morceaux et intégrables sur l'intervalle I qui converge simplement vers une fonction f continue par morceaux. S'il existe une fonction φ continue par morceaux, positive intégrable sur I telle que, pour tout entier n, $|f_n| \leq \varphi$, alors f est intégrable et $\displaystyle\int_I f = \lim_n \int_I f_n$.*

[Ind] Ce théorème est admis.

[Dem] On trouve des démonstrations utilisant la convergence uniforme sur tout compact. En effet les théorèmes de Dini prouvent que une suite monotone convergeant simplement sur un compact converge uniformément. Mais il est à regretter que le théorème de convergence monotone ne soit pas au programme. Il est la clef de voute du théorème de Lebesgue. Nous la faisons seulement dans l'hypothèse où la suite (f_n) converge vers f uniformément sur tout compact de I. Remarquons que la condition de domination donne que chaque f_n est intégrable sur I.

- Soit J un segment inclus dans I, par la convergence uniforme sur J on peut intervertir donc $\int_J |f| = \lim\limits_n \int_J |f_n| \leq \int_J \varphi \leq \int_I \varphi$ donc f est intégrable sur I.
- Soit $\varepsilon>0$ et J_ε un segment inclus dans I tel que $\int_I \varphi \leq \int_{J_\varepsilon}\varphi + \frac{\varepsilon}{3}$. En utilisant maintenant que $\int_{J_\varepsilon} f = \lim\limits_n \int_{J_\varepsilon} f_n$ on a un rang n_ε à partir du quel : $\left|\int_{J_\varepsilon} f - f_n\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Maintenant $\left|\int_I f - f_n\right| \leq \int_I |f-f_n| = \int_{J_\varepsilon}|f-f_n| + \int_{I\setminus J_\varepsilon}|f-f_n| \leq \int_{J_\varepsilon}|f-f_n| + \int_{I\setminus J_\varepsilon}|f| + \int_{I\setminus J_\varepsilon}|f_n| \leq \varepsilon$ ce qui donne que $\int_I f = \lim\limits_n \int_I f_n$.

Remarque: Une suite (f_n) croissante de fonctions réelles continues par morceaux peut converger simplement vers une fonction f qui n'est pas continue par morceaux.

Exercice 24 L'ensemble des rationnels inclus dans [0,1] est dénombrable, c'est à dire qu'il existe une bijection φ de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction caractéristique de $\varphi([0..n]$.

Montrer que f_n converge simplement vers la fonction caractéristique de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ qui n'est pas continue par morceaux.

[Ind] La convergence simple se fait en x fixé. Pour la non continuité par morceaux recenser les discontinuités.

[Dem] On admet que $[0,1]$ est dénombrable. Les fonctions sont définies sur le compact $[0,1]$. À x fixé, si $x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ $f_n(x) = 1$ pour n asez grand et la limite est donc 1, si $x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1]$ alors pour tout n on a $f_n(x) = 0$ et la limite est 0. Ainsi f_n converge vers la fonction caractéristique de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ qui n'est pas continue par morceaux car elle a une infinité de discontinuités.

Remarque: Une suite (f_n) non croissante de fonctions réelles continues par morceaux peut converger simplement vers une fonction f continue par morceaux sans que l'une ou l'autre des implications du théorème ne s'applique.

Exercice 25 Trouver une suite (f_n) de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ qui converge simplement vers une fonction continue non intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et telle que la suite $(\int_{\mathbb{R}_+} f_n)$ soit bornée.

[Ind] Vous pouvez définit une suite de fonctions en changeant l'ensemble de définition. Penser à la semi-convergence.

[Dem] Prenons $f_n(x) = \chi_{[0,n\pi]} \dfrac{\sin x}{x}$, où $\chi_{[0,n\pi]}$ est la fonction caractéristique de $[0, n\pi]$. Ces fonctions sont continuessur $\mathbb{R}_+$, la suite converge vers la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ qui n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$. La suite $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} f_n$ est bornée car la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est semi intégrable. En effet $0 \leq \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} f_n \leq \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin x}{x} dx.$

Exercice 26 Trouver une suite de fonctions (f_n) positives et continues sur $[0,1]$ qui converge simplement vers 0 sans que la suite $(\int_0^1 f_n)$ soit majorée.

[Ind] Penser aux contre-exemples classiques de non convergence uniforme.

[Dem] Prenons la suite de fonctions définies par : $f_n(x) = \begin{cases} nx \text{ si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ -\frac{n}{n-1}x + \frac{n}{n-1} \text{ si } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$ cette suite tend vers 0 et l'intégrale de f_n vaut toujours $\frac{1}{2}$.

On a déjà vu sur des exemples où si l'hypothèse de domination des modules des fonctions f_n par une fonction intégrable n'est pas vérifiée alors la conclusion n'est pas assurée.

Théorème 4 *Soit $(\sum u_n)$ une série de fonctions réelles ou complexes continues par morceaux et intégrables sur un intervalle I telles que la série $(\sum u_n)$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux. Alors, si la série $(\sum \int_I |u_n|)$ converge, f est intégrable sur I, de plus, on a $\displaystyle\int_I f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n$ et $\displaystyle\int_I |f| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |u_n|$.*

[Ind] Se ramener à une suite de fonctions.

[Dem] admis Posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} |u_k|$ la suite des sommes partielles de la série des valeurs absolues de u_k. Cette suite de fonctions, continue par morceaux est croissante donc converge éventuelement dans $\overline{\mathbb{R}}$. D'après le théorème de convergence monotone, nous pouvons intervertir $\int$ et $\sum$. Ainsi d'après l'hypothèse "la série $(\sum \int_I |u_n|)$ converge" on a que S_n converge vers S, fonction intégrable. En effet

$\displaystyle\int_I \sum_{k=0}^{k=n} |u_k| = \sum_{k=0}^{k=n} \int_I |u_k|$, cette denière suite étant convergente il en est de même de celle de gauche. On a donc obtenu que la série est absolument convergente et en utilisant S comme fonction dominante de $\displaystyle\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right|$ on obtient que f est intégrable et on peut intervertir.

Remarque: L'hypothèse: $(\sum \int_I u_n)$ convergente ne suffit pas pour assurer l'intégrabilité de la somme de la série.

Exercice 27 Montrer que la fonction f définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nx^2+n^3}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

[Ind] Appliquer le théorème 4. Pour cela on coupera l'intégrale en deux pour pouvoir faire des majorations différentes dont les séries convergent.

[Dem] La série des intégrales : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{nx^2+n^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2n^2}$ est bien convergente. f est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 28 Trouver une série de fonctions continues, intégrables et d'intégrales nulles sur $\mathbb{R}_+$, convergeant simplement vers la fonction sinus sur $\mathbb{R}_+$.

[Ind] Penser à définir f_n en tronquant la fonction sinus sur des périodes.

[Dem] Soit $f_n(x) = \chi_{|[2n\pi, 2(n+1)\pi]} \sin x$. On a bien $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} f_n = 0$ et la série $\sum f_n$ converge vers sin car à x fixé tous les termes sont nuls sauf 1.

Exercice 29 Montrer que la fonction f définie pour $x \in \mathbb{R}_+$ par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx} \frac{\sin nx}{x^2+n^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

[Ind] Majorer, puis intégrer et vérifier que la série des intégrales convergent.

[Dem] Posons $f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx} \dfrac{\sin x}{x^2+n^2}$ on a que f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de plus pour tout $x \geq 0$ on a $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{n^2}$, ce qui donne la convergence uniforme de la série sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}_+$. Ensuite pour tout n on a $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\mathrm{e}^{-nx} \sin x|}{x^2+n^2} \leq \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^2} = \frac{1}{n^3}$. La série des intégrales converge donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. De plus $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} f = \sum_n \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\mathrm{e}^{-nx} \sin x}{x^2+n^2} dx$.

Exercice 30 Montrer que la fonction f définie pour $x \in \mathbb{R}_+$ par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+n^2}$ bien que l'on ne puisse pas appliquer le théorème.

[Ind] On peut calculer les intégrales de f_n et vérifier à la main que la série alternée converge. Pour démontrer l'interversion on utilisera la majoration des restes de séries alternées. Pour montrer que l'on ne peut pas appliquer le théorème on montrera que la série des intégrales des modules ne converge pas

[Dem] Posons $f_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{x^2+n^2}$, on a que les f_n sont continues sur $\mathbb{R}_+$ et de plus il y a convergence normale car $\forall x \in \mathbb{R}_+ \ : \ |f_n(x)| \leq \dfrac{1}{n^2}$. Malheureusement $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+n^2} = \frac{\pi}{2n}$ donne le terme général

d'une série divergente.
Écrivons $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n^2} = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n^2} + R_n$. On a d'après la majoration du reste d'une série alternée dont le module du terme général décroit vers 0 : $|R_n| \leq \frac{1}{x^2+(N+1)^2}$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi $\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n^2} dx = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n^2} dx + \sum_0^{+\infty} R_N(x)dx = \sum_{n=0}^{N} \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n^2} dx + \int_0^{+\infty} R_N(x)dx$.
Or $\left| \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n^2} dx - \sum_{n=0}^{N} \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n^2} dx \right| \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{N+1}$. On obtient donc le résultat en faisant tendre N vers l'infini.

Exercice 31 Appliquer le théorème aux séries de fonctions et montrer que

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

[Ind] Application fine du théorème : $ln 2 = \lim_1 ln(1+x)$

[Dem] $\ln 2 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$. Posons $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$, on a que (S_n) converge simplement vers $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ sur $[0,1[$, S_n et sa limite sont bien continues sur $[0,1[$. De plus $\forall x \in [0,1[$: $|S_n(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k\right| = \left|\frac{1-(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}\right| \leq \frac{2}{1+x} \in L^1([0,1[)$. On peut donc appliquer le théorème et $\lim_n \int_0^1 S_n(x)dx = \int_0^1 \lim_n S_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 = \lim_n \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k x^k = \lim_n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

Exercice 32 Soit f une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
a) Montrer que $\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt} f(t)dt = 0$
b) Montrer que, $\lim_{n\to\infty} n \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt} f(t)dt = f(0)$

[Ind] a) Justifier l'interversion en appliquant le théorème de convergence dominée.
b) Faire un changement de variable.

[Dem] Toutes les fonctions sont continues. On a $f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx} f(x) \overset{\text{CVS}}{\longrightarrow} 0$ sur $]0,+\infty[$. Ensuite $\forall x \in]0,+\infty[$: $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ d'où $\lim_n \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt} f(t)dt = 0$.
De plus les f_n sont intégrables sur $]0,+\infty[$ et avec $u = nt$ on a $n \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt} f(t)dt = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} f(\frac{u}{n})du$.
Posons $g_n(u) = e^{-u} f(\frac{u}{n})$, fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$, g_n converge simplement vers $g : u \mapsto \mathrm{e}^{-u} f(0)$, fonction continue, on a la majoration $|g_n| \leq \varphi$, avec $\varphi(u) = ||f||_\infty \mathrm{e}^{-u}$, car f étant continue et intégrable est bornée. Ainsi $\int_0^{+\infty} g_n \longrightarrow \int_0^{+\infty} g = f(0) \int_0^{+\infty} e^{-u} du = f(0)$.

Exercice 33 Posons $f_n(x) = \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}$. Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$$

Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}dt = 2\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-2}(x)dx$ et en déduire que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$$

[Ind] Appliquer le théorme 3, utiliser la parité, faire le changement de variable $t = \sqrt{n}tanu$, utiliser les intégrales de Wallis.

[Dem] $f_n(x) = \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} = \mathrm{e}^{-n\ln\left(1+\frac{x^2}{n}\right)} \xrightarrow{n} \mathrm{e}^{-x^2}$. Posons $g : x \mapsto t\ln\left(1+\frac{x^2}{t}\right)$ on a successivement $g'(t) = \ln\left(1+\frac{x^2}{t}\right) - \frac{x^2}{t+x^2}$ et $g''(t) = -\frac{x^4}{t(t+x^2)^2} \leq 0$. En remontant g' décroit de 0 à $+\infty$ et sa limite en $+\infty$ est 0, donc $g' \geq 0$ et g croit. Ainsi La suite $(f_n)_n$ décroit vers e^{-x^2}. Ce qui donne $\forall n : f_n(x) \leq f_1(x) = \frac{1}{1+x^2} \in L^1(\mathbb{R})$. On peut donc intervertir. En posant $t = \sqrt{n}\tan u$ on calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}dt = 2\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\tan^2 u\right)^{-n}\sqrt{n}\frac{1}{\cos^2 u}du = 2\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-2}udu.$

En utilisant Wallis : $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ on trouve $\displaystyle\int_R e^{-t^2}dt = \lim_n 2\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-2}udu = \sqrt{\pi}$.

12.9 Intégrales dépendant d'un paramètre

Moyennant des hypothèse supplémentaires de domination, on peut généraliser les résultats déjà vu.

Théorème 5 *Soient A et I des intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle ou complexe définie sur $A\times I$ continue par rapport à la première variable sur A et continue par morceaux par rapport à la seconde variable sur I.*

• *S'il existe une fonction continue par morceaux φ intégrable sur I telle que, pour tout (x,t) de $A\times I$, $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$* ***(hypothèse de domination)***
alors , pour tout $x \in A$, la fonction continue par morceaux $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I et la fonction $F : x \mapsto \int_I f(x,t)dt$ est continue sur A.

[Ind] Admis

[Dem] Dans un espace métrique la continuité se traduit séquentiellement. Soit un point $a \in A$ et $(x_n)_n$ une suite tendant vers a. Posons $g_n(t) = f(x_n,t)$. Nous avons, car f est continue en sa première variable en a, g_n converge vers $g(t) = f(a,t)$. La suite g_n de fonctions continues par morceaux converge simplement vers g. On a une hypothèse de domination $|g_n(t)| \leq \varphi(t)$, avec φ continue par morceaux et intégrable sur I. Ainsi par le théorème de convergence dominée : $\int_I f(x_n,t)dt$ converge vers $\int_I f(a,t)dt$. Ce qui prouve que $\lim_{x\to a} F(x) = F(a)$

Exercice 34 Soit f une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ixt}f(t)dt$ est continue sur $\mathbb{R}$.

[Ind] Appliquer le thórème 5.

[Dem] On a bien entendu la majoration : $\forall x \in \mathbb{R} : \left|\mathrm{e}^{-ixt}f(t)\right| \leq |f(t)|$, ce qui permet d'appliquer le théorème car f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Remarque: Sous les hypothèses du théorème, on peut donc intervertir, pour $x_0 \in A$, les symboles $\lim_{x\to x_0}$ et $\int_I$. La question qui se pose naturellement est alors la possibilité de calculer la limite de l'intégrale en un point a adhérent à A.

Exercice 35 Soient A et I des intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle ou complexe continue sur $A \times I$. On suppose qu'il existe une fonction continue par morceaux φ intégrable sur I telle que, pour tout (x,t) de $A \times I$, $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$. Soit a un réel adhérent à A. On suppose qu'il existe une fonction g continue par morceaux définie sur I telle que, pour tout $t \in I$:

$$\lim_{x \to a} f(x,t) = g(t).$$

Monter que g est intégrable sur I et que

$$\lim_{x \to a} \int_I f(x,t)dt = \int_I g(t)dt.$$

[Ind] Utiliser la caractérisation des limites par les suites et le théorème de convergence dominée. On construit ainsi une suite de fonctions.

[Dem] Pour toute suite $(x_n)_n$ convergeant vers a. On pose $f_n(t) = f(x_n,t)$. Nous sommes dans les hypothèses du théorème de convergence dominée qui donne $\lim_{n \to +\infty} \int_I f_n(t)dt = \int_I g(t)dt$. Par la caractérisation séquentielle de la limite on obtient le résultat.

Exercice 36 Montrer que $\lim_{x \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{x^2+t^2} dt = 0$

[Ind] Interversion limite et intégrale en prenant une suite (x_n tendant vers $+\infty$, on pourra définir la fonction φ selon que l'on ait au voisinage de 0 ou en dehors.

[Dem] Soit une suite (x_n) tendant vers $+\infty$ on peut supposer $\forall n : x_n \geq 1$, posons $f_n(t) = \frac{\sin t}{x_n^2+t^2}$. La suite des f_n, fonctions continues converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}$. De plus on a $\left|\frac{\sin t}{x_n^2+t^2}\right| \leq \varphi(t)$ où $\varphi(t) = \frac{1}{t^2}$ pour $|t| \geq 1$ et $\varphi(t) = \sin t$ si $|t| \leq 1$. La fonction φ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$. Le théorème de convergence dominée permet d'intervertir ce qui donne : $\lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{x_n^2+t^2} dt = 0.$

Théorème 6 *formule de Leibniz Soient A et I des intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle ou complexe définie sur $A \times I$, telle que pour tout $x \in A$ la fonction $f(x,\cdot)$ est continue par morceaux et intégrable sur I, vérifiant les hypothèses du théorème précédent, possédant une dérivée partielle par rapport à x, continue en x et continue par morceaux en t.*

- *S'il existe une fonction ψ continue par morceaux et intégrable sur I telle que, pour tout (x,t) de $A \times I$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \psi(t)$* ***(nouvelle hypothèse de domination)***

alors, pour tout $x \in A$, les fonctions $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sont intégrables sur I et la fonction $F : x \mapsto \int_I f(x,t)dt$ est de classe C^1 sur A. On a alors

$$\forall x \in A \quad F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$$

[Ind] Admis

[Dem] Soit h_n une suite tendant vers 0. Posons $f_n(t) = \frac{f(x+h_n,t) - f(x,t)}{h_n}$. Cette suite de fonctions continues par morceaux converge simplement vers $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$. En appliquant les accroissements finis on a $|f_n(t)| \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(y,t)\right| \leq \psi(t)$. Nous pouvons alors appliquer le théorème de convergence dominée pour intervertir $\lim \int$ et $\int \lim$ et en déduire que F est dérivable. La continuité de la dérivée résulte directement du théorème précédent.

Exercice 37 Soit f une fonction continue telle que la fonction $x \mapsto xf(x)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction $F\ x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ixt} f(t)dt$ est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1. Calculer sa fonction dérivée.

[Ind] On fait juste les bonnes hypothèses.

[Dem] On a d'une part pour tout x $\left|\mathrm{e}^{-ixt} f(t)\right| \leq |f(t)|$ et f est intégrable sur $\mathbb{R}$ car pour $t \geq 1$ on a $|f(t)| \geq |tf(t)|$. Et d'autre part pour tout x : $\left|\frac{\partial \mathrm{e}^{-ixt} f(t)}{\partial dx}\right| = |tf(t)|$ et $t \mapsto tf(t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. On a donc que F est $C^1(\mathbb{R})$ et on peut dériver sous le signe somme pour obtenir $F'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -it\mathrm{e}^{-ixt} f(t)dt$.

Remarque: Soient A et I des intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle ou complexe continue sur $A \times I$ et n un entier naturel. Si pour tout entier $k \in [0, n]$ $f(x, t)$ admet une dérivée partielle par rapport à x d'ordre k continue sur $A \times I$ et qu'il existe une fonction ψ_k continue par morceaux et intégrable sur I telle que, pour tout (x, t) de $A \times I$, $\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)\right| \leq \psi_k(t)$, alors la fonction $F : x \mapsto \int_I f(x, t)dt$ est de classe C^n sur A et

$$\forall x \in A \quad F^{(n)}(x) = \int_I \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t)dt$$

Remarque: La continuité et la dérivation étant des propriérés locales nous pouvons appliquer ces théorèmes dans le cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment de l'intervalle I.

Exercice résolu du cours

La généralisation qui reste à faire est celle du théorème de Fubini. Montrons-la en utilisant le théorème de convergence dominée moyennant des hypothèses de domination.

Soient J et I des intervalles quelconques de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle ou complexe continue sur $J \times I$. Supposons que:

- Il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I tel que, pour tout (x, t) de $J \times I$, $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$
- Il existe une fonction ψ continue par morceaux et intégrable sur J tel que, pour tout (x, t) de $J \times I$, $|f(x, t)| \leq \psi(x)$

On en déduit tout d'abord que les fonctions $x \mapsto \int_I f(x, t)dt$ et $x \mapsto \int_I |f(x, t)|\, dt$ sont continues sur J et que les fonctions $t \mapsto \int_J f(x, t)dx$, et $t \mapsto \int_J |f(x, t)|\, dx$ sont continues sur I.

Supposons de plus que:

- La fonction (continue) $x \mapsto \int_I |f(x, t)|\, dt$ est intégrable sur J
- La fonction (continue) $t \mapsto \int_J |f(x, t)|\, dx$ est intégrable sur I

Soit (I_n) une suite croissante de segments dont l'union est I et (J_p) une suite croissante de segments dont l'union est J, on a, pour tout entier n et p,

$$\int_{J_p} \int_{I_n} f(x, t)dtdx = \int_{I_n} \int_{J_p} f(x, t)dxdt$$

La suite de fonctions continues $\left(x \mapsto \int_{I_n} f(x, t)dt\right)$ converge simplement sur J_p vers la fonction continue $x \mapsto \int_I f(x, t)dt$ et est dominée par la fonction continue et intégrable sur J_p : $x \mapsto$

$\displaystyle\int_I |f(x,t)|\,dt$, on en déduit que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{J_p}\int_{I_n} f(x,y)dt = \int_{J_p}\int_I f(x,t)dt$$

Pour tout $t\in I$

$$\left|\int_{J_p} f(x,t)dx\right| \leq \int_{J_p} |f(x,t)|\,dx \leq \int_J |f(x,t)|\,dx$$

donc la fonction continue $t\mapsto \displaystyle\int_{J_p} f(x,t)dx$ est intégrable sur I, ainsi

$$\lim_{n\to\infty}\int_{I_n}\int_{J_p} f(x,t)dt = \int_I\int_{J_p} f(x,t)dt$$

On obtient donc

$$\int_{J_p}\int_I f(x,t)dt = \int_I\int_{J_p} f(x,t)dxdt$$

ce qui est déjà la version du théorème de Fubini lorsque J est un segment et I est un intervalle quelconque et permet de trouver des primitives de fonctions du type $x\mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)dt$.

La fonction continue $x\mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)dt$ est intégrable sur J donc

$$\lim_{p\to\infty}\int_{J_p}\int_I f(x,t)dtdx = \int_J\int_I f(x,t)dtdx$$

La suite de fonctions continues $\left(t\mapsto \displaystyle\int_{J_p} f(x,t)dx\right)$ converge simplement sur I vers la fonction continue $t\mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)dx$ et est dominée par la fonction continue et intégrable sur I :$t\mapsto \displaystyle\int_J |f(x,t)|\,dx$, on en déduit que

$$\lim_{p\to\infty}\int_I\int_{J_p} f(x,t)dxdt = \int_I\int_J f(x,t)dxdt$$

et finalement, on obtient

$$\int_J\int_I f(x,t)dtdx = \int_I\int_J f(x,t)dxdt$$

Exercice 38 Soit $\boxed{f_n : x\longmapsto \dfrac{(-1)^n x^{n-1}}{n} \text{ et } I=[0,1]}$ le terme général d'une série montrer que :

$$\int_0^1 \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{n}dx = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

- f_n est le terme général de la série obtenue en développant en série entière $\ln(1+x)$ pour la fonction $g : x\longmapsto \begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x} \text{ si } x\neq 0\\ 1 \text{ si } x=0\end{cases}$ dont le rayon de convergence est 1. Il y a convergence normale sur $I_\alpha = \{x, |x|\leq\alpha\}$ pour $0<\alpha<1$.

- $1^{\text{ère}}$ méthode : Pour tout n entier f_n est continue, intégrable sur $I = [0,1]$. La série $\sum f_n$ converge simplement sur I et sa somme est continue sur I, la série $\sum_{n\geq 1} \int_I f_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n+1)^2}$ converge. On peut donc intégrer termes à termes :

$$\int_0^1 \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{n} dx = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

- $2^{\text{ème}}$ méthode : La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{n}$ est une série alternée convergente car la suite $\left(\left|\frac{x^{n-1}}{n}\right|\right)_n$ est décroissant vers 0. De plus le reste d'ordre n vérifie : $|R_n|(x) \leq \frac{|x|^n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$ sur I et tend uniformément vers 0. La série est donc uniformément convergente et on peut intégrer termes à termes.

[Dem] Résolu dans le cours.

Exercice 39 Soit $\boxed{w_n = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} x^{\frac{1}{n}} dx}$. Montrer que la suite converge et que :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$$

- Posons $g_n : x \longmapsto \frac{\ln(1+x)}{x} x^{\frac{1}{n}}$. Pour tout entier n non nul, g_n est continue, intégrable sur $[0,1]$. La suite (g_n) converge simplement vers g sur $[0,1]$ et pour tout n entier non nul on a sur I : $|g_n| \leq g$ où $g : x \longmapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$. La fonction g est positive continue et intégrable sur $[0,1]$ donc d'après le théorème de convergence dominée la suite (w_n) converge et $\lim_{n\to+\infty} w_n = \int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} g_n\right)(x)\, dx = \int_0^1 g(x)\, dx$.
- Ce coup-ci nous avons la convergence uniforme de g_n vers g sur tout compact contenu dans $]0,1[$ mais pas sur $[0,1]$ pour démontrer le résultat il faudrait couper en deux l'intégrale...

[Dem] Résolu dans le cours.

Exercice 40 Considèrons $I = [0,1]$ et $h_k : x \longmapsto \frac{(-1)^{k-1} x^{k-1}}{k}\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right)$ pour tout k entier non nul.

- Pour tout k la fonction h_k est continue, intégrable sur I. La série $\sum h_k$ converge simplement sur I et sa somme est continue sur I. La série $\sum \int_0^1 |h_k(x)|\, dx$ converge, en effet $\int_0^1 |h_k(x)|\, dx = \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k\left(k+\frac{1}{n}\right)}\right) = \frac{\frac{1}{n}}{k^2\left(k+\frac{1}{n}\right)}$. On peut donc intégrer termes à termes sur I et donc

$$\int_0^1 \sum_{k\geq 1} h_k(x)\, dx = \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k^2\left(k+\frac{1}{n}\right)}$$

- Il y a aussi convergence uniforme de $\sum h_k$ sur I. Car $|R_n| \leq \dfrac{1}{n+1}$.

[Dem] Résolu dans le cours.

Exercice 41 Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ où $0 \leq a < b < 1$. On considère $\varphi_n : t \longmapsto \dfrac{t^n \varphi(t)}{1+t^n}$ pour t dans $[a,b]$. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(t)\, dt = 0$$

- Pour tout t, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n(t) = 0$ car $|t| < 1$. D'autre part φ_n et $|\varphi|$ sont continues et donc intégrables sur $[a,b]$ et pour tout n entier et pour tout t de $[a,b]$ on a $0 \leq \dfrac{t^n}{1+t^n} \leq 1$ ou $|\varphi_n(t)| \leq |\varphi(t)|$. D'après le théorème de convergence dominée on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^b \frac{t^n\varphi(t)}{1+t^n} dt = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(t)\, dt = 0$

[Dem] Résolu dans le cours.

Exercice 42 Etude de la fonction Gamma

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

- La fonction gamma est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. la fonction $(t,x) \overset{\Phi}{\longmapsto} t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[\times \mathbb{R}_+^*$. D'autre part au voisinage de 0 on a $t^{x-1}e^{-t} \sim t^{x-1}$ il y a convergence ssi $x > 0$. Au voisinage de $+\infty$: $\int^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}$ converge.
- La fonction Gamma est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet soit $x_0 > 0$, ainsi $\beta \geq x_0 \geq \alpha > 0$ et $\left|t^{x_0-1}e^{-t}\right| \leq t^{\alpha-1}e^{-t}$ sur $[0,1]$ et $\left|t^{x_0-1}e^{-t}\right| \leq t^{\beta-1}e^{-t}$ sur $[1,+\infty[$. Ceci définit une fonction φ continue par morceaux dont l'intégrale converge sur $[0,+\infty[$ et $t \longmapsto \Phi(t,x)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ pour tout $x > 0$. Par le théorème de convergence dominée Γ est continue en x_0 donc sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Dérivabilité de Gamma :
- Si $f(t,x) = t^{x-1}e^{-t} = e^{(x-1)\ln t}e^{-t}$ on a $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \ln t e^{(x-1)\ln t}e^{-t}$ et même $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(t,x) = (\ln t)^n e^{(x-1)\ln t}e^{-t}$. Prenons un point x_0 et choisissons a,b tels que $0 < a < x_0 < b$ on a: $\left|\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(t,x)\right| \leq \begin{cases} |\ln t|^n\, t^{a-1}e^{-t} \text{ sur } [0,1] \\ |\ln t|^n\, t^{b-1}e^{-t} \text{ sur } [1,+\infty[\end{cases}$ Or $|\ln t|^n\, t^{a-1}$ est intégrable sur $[0,1]$ car $|\ln t|^n\, t^{a-1}e^{-t} \leq t^{a'-1}$ et si $a \geq a' > 0$ ($|\ln t|^n\, t^{a-a'} \overset{t\to 0^+}{\to} 0$). de même pour l'autre sur $[1,+\infty[$.
- Ainsi Γ est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ en outre $\Gamma'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)\, t^{x-1}e^{-t}dt$
- On peut en déduire que Γ est convexe car $\Gamma''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t}dt > 0$.
- Une intégration par parties donnent pour tout $x > 0$: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ en outre sur $\mathbb{N}$ on a : $\Gamma(n) = (n-1)!$
- Pour l'étude aux bornes : en 0 : $\Gamma(x+1) \to \Gamma(1) = 1$ donc $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$ en 0^+.

- En $+\infty$ si on a la convergence dominée on peut écrire sur $[0,1]$, $e^{(x-1)\ln t} \to 0$ mais sur $[1,+\infty[$ on a $e^{(x-1)\ln t - t} = e^{-t(1-(x-1)\frac{\ln t}{t}} \to +\infty$ et donc par convergence monotone $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ croit vers $+\infty$.

- On montre que Γ est décroissante sur $[0,x_0]$ et croissante aprés. $\Gamma'(x) = \displaystyle\int_0^1 (\ln t)\, t^{x-1}e^{-t}dt + \int_1^{+\infty} (\ln t)\, t^{x-1}e^{-t}dt$, en partant de $x_1 < x_2$ on montre la monotonie de chaque fonction et donc $\lim\limits_0 \Gamma'(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} \Gamma'(x) = +\infty$

En prolongement si $B(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ on montrerait que $B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

[Dem] Résolu dans le cours.

Exercice 43 Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$

On remarque que $\dfrac{1}{x} = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xy}dy$ on pose alors $F(T) = \displaystyle\int_0^T \sin x\frac{dx}{x} = \int_0^T \sin x dx \int_0^{+\infty} e^{-xy}dy$.
Considèrons $g(x,y) = \sin x e^{-xy}$ sur $[0,T]\times[0,+\infty[$, fonction continue sur cet ensemble, d'intégrale convergente c'est à dire : $\displaystyle\int_0^T \int_0^{+\infty} |g(x,y)dydx| = \int_0^T |\sin x|\,\frac{dx}{x}$ converge.
Deux intégrations par parties donnent $\displaystyle\int_0^T e^{-xy}\sin x dx = \frac{1-e^{-yT}\,(\cos T + y\sin T)}{1+y^2}$ et $F(T) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-yT}\,(\cos T + y\sin T)}{1+y^2}dy$ par interversion des intégrales (Fubini).
Maintenant $\displaystyle\lim_{T\to+\infty} \frac{1-e^{-yT}\,(\cos T + y\sin T)}{1+y^2} = \frac{1}{1+y^2}$ et avec $\dfrac{e^{-yT}\,(\cos T + y\sin T)}{1+y^2} \leq \dfrac{e^{-y}(1+y)}{1+y^2}$ si $T \geq 1$ par application de la convergence dominée on a $\displaystyle\lim_{T\to+\infty} F(T) = \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$.

- Cet exercice est un cas particulier du résultat suivant : Soit f intégrable sur $[0,+\infty[$ telle que $\displaystyle\lim_{T\to+\infty}\int_1^T f(x)\frac{dx}{x}$ existe. Soit a et b des réels strictement positifs.

  1) Si on suppose que $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\frac{dx}{x}$ existe, en définissant $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)dt$, on montre que $\displaystyle\int_0^{+\infty} (F(ax) - F(bx))\,\tfrac{dx}{x^2}$ existe et s'exprime à l'aide de a, b et K.

  2) En supposant que $L = \lim\limits_{\epsilon\to 0} f(x)$ existe, on montre que $\displaystyle\int_0^{+\infty} (f(ax) - f(bx))\,\frac{dx}{x}$ existe et on l'exprime à l'aide de a, b et L.
  On peut alors en déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\cos ax - \cos bx)\,\frac{dx}{x^2} = (b-a)\frac{\pi}{2}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\cos ax - \cos bx)\,\frac{dx}{x} = \ln\frac{b}{a}$. En effet posons $F(x) = \int_1^x \sin t dt = \cos 1 - \cos x$ on a $F(ax) - F(bx) = \cos bx - \cos ax$.

[Dem] Résolu dans le cours.

Exercice 44 Etude de $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}dt$

- On montre que f est définie continue pour $x \geq 0$: en posant $g(t,x) = \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ on définit une fonction g C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. En $+\infty$ on a : $|g(t,x)| < \dfrac{1}{1+t^2} < \dfrac{1}{t^2}$ et on a donc l'intégrabilité sur $[0,+\infty[$. Ainsi f est bien définie sur $\mathbb{R}^+$ La même majoration donne par le théorème de domination que f est continue sue le même domaine.

- On montre que f est dérivable pour $x > 0$: en effet $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x) = -t^2\dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ la majoration ci-dessus ne convient plus car la fonction dominante n'a plus une intégrale convergente, en un point x_0 encadrons-le $0 < a \leq x_0 \leq b$ et écrivons $\left|-t^2\dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\right| \leq \left|t^2\dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\right| \leq \dfrac{t^2}{1+t^2}e^{-at^2} \leq e^{-at^2}$ ceci nous procure une fonction dominante qi nous permet de conclure par le théorème de dérivation sous le signe somme.

- On peut montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$: On applique le théorème de convergence dominée avec $\dfrac{e^{-x_nt^2}}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2}$. Sinon $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}dt = \int_0^a \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}dt + \int_a^{+\infty}\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}dt = A + B$. Pour B on écrit : $B \leq e^{-xa^2}\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt \leq \frac{\pi}{2}e^{-xa^2}$ dont la limite est 0. Pour A on écrit : $A \leq Ma$ où $M = \sup\limits_{[0,1]}\dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ il suffit alors de choisir a suffisament petit puis x suffisament grand.

- f est solution d'une équation différentielle : il est facile de voir que $f(x) - f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt^2}dt = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{K}{\sqrt{x}}$. La résolution de cette équation donne $f(x) = e^x\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\displaystyle\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt\right)$ ce qui permet de voir que f n'est pas dérivable en 0.

[Dem] Résolu dans le cours.

Exercice 45 Etude de $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin tx}{t\,(1+t^2)}dt$. g est définie et C^1 sur $\mathbb{R}$. g' est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. On peut montrer que $g''(0^+)$ et $g''(0^-)$ existent (pour cela on fait une intégration par parties avant la domination). Pour $x > 0$: $g(x) - g''(x) = \frac{\pi}{2}$ on a ainsi l'expression de g cequi permet de montrer que g' n'est pas dérivable en 0.

Exercice 46 Etude de $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}ch(xt)dt$.

Exercice 47 Etude de $H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}dt$.

12.10 Exercices

Exercice 48 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et positive. Montrer que f est intégrable sur I si et seulement s'il existe deux suites (a_n) et (b_n) d'éléments de I telles que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf I$, $lim_{n\to\infty}b_n = \sup I$ et $\displaystyle\int_{a_n}^{b_n} f$ converge. Montrer alors que $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_{a_n}^{b_n} f = \int_I f$

[Ind] Séparer les bornes et appliquer la définition de l'intégrabilité d'une fonction.

[Dem] Si f est intégrable, pour $\alpha \in I$ on a que $\int_{a_n}^{\alpha} f$ et $\int_{\alpha}^{b_n} f$ admettent des limites. Réciproquement, appelons M la limite de $\int_{a_n}^{b_n} f$ soit J un compact contenu dans I alors il existe n tel que $J \subset [a_n, b_n]$. Donc $\int_J f \leq M$ et f est intégrable. Dans ce cas $\lim_{n\to+\infty} \int_{a_n}^{b_n} f = \int_I f$.

Exercice 49 Etudier l'intégrabilité des fonctions suivantes:
a) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$ sur $[0, 1[$
b) $x \mapsto \dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$
c) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$ sur $\mathbb{R}_+$
d) $x \mapsto (x^2+x)\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}_-$
e) $x \mapsto \dfrac{1}{\ln x}$ sur $]0, 1[$
f) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1, 1[$.

[Ind] Majorer ou minorer, prendre des équivalents si c'est possible.

[Dem] a) La fonction est continue et positive sur $[0, 1[$ et en 1 elle a le même comportement que $\dfrac{1}{t^{\frac{1}{3}}}$ en 0, elle est donc intégrable.
b) La fonction est continue positive sur $[0, \frac{\pi}{2}$. En $\frac{\pi}{2}$ posons $x = \frac{\pi}{2} - t$ ce qui donne $\dfrac{\sin t}{\sqrt{1-\cos t}}$ qui est équivalent en $t = 0$ à $\sqrt{2}$, la fonction est donc prolongeable par continuité et donc intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
c) La fonction est continue (le dénominateur ne s'annule pas) sur $\mathbb{R}_+$ et en $+\infty$ elle est équivalente à $\dfrac{1}{x^2}$, intégrable de Riemann convergente, la fonction est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
d) La fonction est continue positive sur $\mathbb{R}_-$ et en $-\infty$ elle est négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$, elle est donc intégrable.
e) La fonction est continue négative sur $]0, 1[$. En 1 elle est équivalente à $\dfrac{1}{x-1}$ qui a le même comportement que $\dfrac{1}{x}$ en 0 donc la fonction n'est pas intégrable.
f) La fonction est continue et positive sur $]-1, +1[$. En -1 elle est équivalente à $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}$, elle est donc intégrable, de même en $+1$ avec $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$.

Exercice 50 Soient P et Q des polynômes premiers entre eux ($Q \neq 0$). A quelles conditions la fonction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$ prolongée par 0 en un pôle est intégrable sur $\mathbb{R}$.

[Ind] P et Q étant premiers entr'eux, ils n'ont pas de zéro en commun. En un pÃ´le, c'est comme si on était en $x = 0$.

[Dem] Ainsi prolongée la fonction $\dfrac{P}{Q}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, en un pôle on a $\dfrac{P}{Q} \sim C \dfrac{1}{(x-a)^{\alpha}}$ qui n'est jamais intégrable sauf si $\alpha = 0$. Il faut donc qu'il n'y ait pas de pôle. En l'infini la fonction est équivalente au rapport des termes de plus haut degré qui doit être en $\dfrac{1}{x^n}$ avec $n \geq 2$.

Exercice 51 Etudier l'intégrablilité de la fonction $x \to \dfrac{\mathrm{e}^{-\sin x} \sin x}{x^2 \ln x}$ sur des intervalles inclus dans son ensemble de définition.

[Ind] Trouver l'ensemble de définition, prendre un équivalent de la valeur absolue pour connaÃ®tre une primitive d'une part et d'autre part majorer par une fonction intégrable.

[Dem] La fonction est définie et continue sur $]0,+\infty[$. En 0 on a $\left|\dfrac{e^{-\sin x}\sin x}{x^2\ln x}\right| \sim \dfrac{1}{x\ln x}$ qui n'est pas intégrable (une primitive de $\dfrac{1}{x\ln x}$ est $\ln\ln x$. En $+\infty$ $\left|\dfrac{e^{-\sin x}\sin x}{x^2\ln x}\right| \leq \dfrac{e}{x^2\ln x}$ qui est intégrable. La fonction est donc intégrable sur tout intervalle de la forme : $[\alpha,+\infty[$ avec $\alpha > 0$.

Exercice 52 Etudier l'intégrabilité des fonctions suivantes sur $]0,1[$:
a) $x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$
b) $x \mapsto (1+\dfrac{1}{x})^x$
c) $x \mapsto (1+x)^{\ln x}$
d) $x \mapsto |\ln x|^{\ln x}$

[Ind] Trouver le comportement des fonctions aux points qui vous interessent au besoin par un D.L. au voisinage des points où cela est possible.

[Dem] Toutes ces fonctions sont continues et positives sur $]0,1[$.
a) $(1+x)^x = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$ qui est équivalente à e en 0. Elle est donc prolongeable par continuité en 0. En 1 elle vaut $\sqrt{2}$. Elle est intégrable sur $[0,1]$.
b) En 1 elle vaut 2 en 0 on a $(1+\frac{1}{x})^x = e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} = e^{x\ln(1+x)-x\ln x}$ qui est prolongeable en 0 par 1. Elle est intégrable sur $[0,1]$.
c) Pas de problème en 1 elle vaut 1. En 0 on a $(1+x)^{\ln x} = e^{\ln x\ln(1+x)} \sim e^{x\ln x} \to 1$. Elle est prolongeable par continuité et donc intégrable sur $[0,1]$.
d) En 0 elle tend vers 0. En 1 on a $\ln x\ln|\ln x| = t\ln t$ qui tend vers 0 quand x tend vers 1 c'est à dire quand t tend vers 0 elle est encore prolongeable par continuité par 1, donc intégrable.

Exercice 53 Pour quelles valeurs de α, la fonction

$$x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}$$

est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+$?

[Ind] En 0 prendre un équivalent, en $+\infty$ discuter suivant que α est plus grand ou pas de 1.

[Dem] En 0 on a $\ln(1+x) \sim x$ donc $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x^\alpha} \sim \dfrac{1}{x^{\alpha-1}}$ et l'intégrale converge si et seulement si $\alpha < 2$. En $+\infty$ on a si $\alpha > 1$ en choisissant $1 < \gamma < \alpha$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\gamma f(x) = 0$ donc $f(x) = o\left(\frac{1}{x^\gamma}\right)$ et l'intégrale converge. Si $\alpha leq 1$ alors $f(x) \geq \frac{\ln(1+x}{x} \geq \frac{1}{x}$ et l'intégrale diverge. Finalement l'intégrale converge si et seulement si $1 < \alpha < 2$.

Exercice 54 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue par morceaux. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si la suite $(\displaystyle\int_0^n f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Que peut-on dire si f n'est plus supposée positive ?

[Ind] Dans un sens c'est la définition, dans l'autre toute suite croissante majorée est convergente. Si la fonction n'est plus positive regarder dans chaque sens, et éventuellement pour l'un des deux trouver un contre-exemple.

[Dem] Si f est intégrable alors la suite $(\displaystyle\int_0^n f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Réciproquement soit J un compact de $\mathbb{R}_+$ il existe n tel que $J \subset [0,n]$ et donc $\displaystyle\int_J f \leq \int_0^n f \leq \lim_{n\to+\infty}\int_0^n f$ ainsi $\displaystyle\int_J f$ est borné et f est intégrable. Si l'on ne suppose plus f positive si f est intégrable cela signifie que $|f|$ et la suite converge. Mais la réciproque est fausse, prenons $\dfrac{\sin x}{x}$ fonction non intégrable sur $\mathbb{R}_+$ mais $\displaystyle\lim_n \int_0^n \frac{\sin x}{x}dx$ existe.

Exercice 55 Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction :

$$x \mapsto \frac{dx}{(x^2+1)^\alpha}$$

est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$?
Pour ces valeurs de α, on note I_α l'intégrale de cette fonction sur $\mathbb{R}$. Etablir une relation de récurrence entre les différentes valeurs I_α.
En déduire l'expression de I_n pour $n \in \mathbb{N}^*$
Exprimer l'intégrale:

$$J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2px+q)^n}$$

en fonction de I_n, lorsque p et q sont deux réels vérifiant l'inégalité $q - p^2 > 0$.
En déduire l'expression de J_n pour $n \in \mathbb{N}^*$

[Ind] Les seules problèmes sont en ∞. Faire des intégrations par parties. C'est une décomposition en éléments simples, mettre le dénominateur sous la forme bicarré.

[Dem] La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(x^2+1)^\alpha}$ est continue, positive sur $\mathbb{R}$, en ∞ elle est équivalente à $\dfrac{1}{x^{2\alpha}}$ et donc intégrable si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$. Une intégration par parties donne $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(1+x^2)^\alpha} = \left[\frac{x}{(x^{2+1})^\alpha}\right] + 2\alpha \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{(x^{2+1})^{\alpha+1}}$. Le crochet est nul car $\alpha > \frac{1}{2}$ et donc $I_\alpha = 2\alpha I_\alpha - 2\alpha I_{\alpha+1}$, ce qui donne $I_{\alpha+1} = \dfrac{2\alpha-1}{2\alpha} I_\alpha$. Si $\alpha = n$ on obtient $I_n = \dfrac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} = \dfrac{(2n-3)(2n-5)\cdots 3.1}{(2n-2)(2n-4)\cdots 4.2}\pi$. En écrivant : $\dfrac{1}{(x^2+2px+q)^n} = \dfrac{1}{[(x+p)^2+q-p^2]^n} = \left(\frac{1}{q-p^2}\right)^n \dfrac{1}{\left[\left(\frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}}\right)^2+1\right]^n}$ il n'y a plus qu'à faire un changement de variable $u = \dfrac{x+p}{\sqrt{q-p^2}}$ pour trouver $J_n = \left(\frac{1}{q-p^2}\right)^n \sqrt{q-p^2} I_n$.

Exercice 56 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

[Ind] hors programme.

[Dem] hors programme.

Exercice 57 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue par morceaux, décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que la fonction $x \mapsto x(f(x) - f(x+1))$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer la valeur de son intégrale.

[Ind] On se place sur un compact $[0, A]$, à l'aide de changement de variables on étudie la limite en $+\infty$ de $\int_A^{A+1} xf(x)dx$. On démontre alors que $\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$ en utilisant la décroissance de f et en comparant l'expression à une intégrale.

[Dem] En utilisant la décroissance de f on a $\forall x \in \mathbb{R}_+$: $\displaystyle\int_{\frac{x}{2}}^{x} f \geq \frac{x}{2} f(x) \geq 0$. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$ car f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Ensuite on a $\displaystyle\int_0^A x(f(x)-f(x+1))dx = \int_0^1 xf(x)dx - \int_A^{A+1} xf(x)dx + \int_1^{A+1} f(x)dx$. Et quand A tend vers $+\infty$ on a $\displaystyle\int_A^{A+1} xf(x)dx \leq (A+1)f(A)$ qui tend vers 0. Finalement $\displaystyle\int_0^{+\infty} x(f(x)-f(x+1))dx = \int_0^1 xf(x)dx + \int_1^{+\infty} f(x)dx$.

Exercice 58 Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n! \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\prod_{k=1}^n (x+k)}$.

[Ind] majorer $\dfrac{n!}{\prod_{k=1}^n (x+k)}$ en faisant intervenir $S_n = \sum_{k=2}^n \dfrac{1}{k}$ puis calculer l'intégrale.

[Dem] On a la majoration $0 \leq \dfrac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(x+k)} \leq \dfrac{1}{(x+1)((1+S_n x)}$ en regardant le coefficient de x où on a posé $S_n = \sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k}$. D'autre part en faisant une décomposition en éléments simples et en passant à la limite on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)(1+H_n x)} = \frac{\ln H_n}{H_n - 1}$, expression qui tend vers 0.

Exercice 59 Montrer que, pour $x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos 2kx = \frac{\sin(2n+1)x}{2\sin x}$$

En déduire $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{2\sin x} dx = \frac{\pi}{2}$.
Vérifier que l'application $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} & \text{si} x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est de classe C^1. En déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{x} = \frac{\pi}{2}$.
En conclure que la valeur de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est $\frac{\pi}{2}$.

[Ind] Se servir d'une suite géométrique. Vérifier aux points délicats. Utiliser tout ce qui précède.

[Dem] Pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$ on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{2ikx} = \frac{e^{2i(n+1)x} - 1}{e^{2ix} - 1} = \frac{e^{i(n+1)x}\left(e^{i(n+1)x} - e^{-i(n+1)x}\right)}{e^{ix}(e^{ix} - e^{-ix})} = e^{inx} \frac{\sin(n+1)x}{\sin x}$.
Ce qui donne $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos 2kx = \cos nx \frac{\sin(n+1)x}{\sin x} = \frac{\sin(2n+1)x + \sin x}{2\sin x}$ puis $\displaystyle\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos 2kx = -\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{n} \cos 2kx = \frac{\sin(2n+1)x}{2\sin x}$.
La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(2n+1)x}{\sin x}$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}$ et est prolongeable en 0 par $2n+1$, elle est donc intégrable et on a $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos 2kx\right) = \frac{\pi}{2} + 2\sum_{k=1}^{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2kx dx = \frac{\pi}{2} + 2\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\sin 2kx}{2k}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$.
f est de classe C^1 sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. En 0 on a $f(x) \sim -\frac{x}{6}$ et on peut prolonger par continuité en posant $f(0) = 0$. Pour la dérivé on a $f'(x) = \dfrac{x^2 \cos x - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \dfrac{x^2\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right)}{x^4 + o(x^4)} \to -\dfrac{1}{6}$.
Comme la limite de $f'(x)$ existe en 0 on a que f est C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
On a $\forall n\ \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}]$: $\dfrac{\sin(2n+1)x}{x} = f(x)\sin(2n+1)x + \dfrac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx$. Or f et $x \mapsto \dfrac{\sin(2n+1)x}{\sin x}$ sont intégrables sur $]0, \frac{\pi}{2}$ donc aussi $x \mapsto \dfrac{\sin(2n+1)x}{x}$. On a $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(2n+1)x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx$. En utilisant le lemme de Lebesgue on a $\displaystyle\lim_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{x} = \frac{\pi}{2}$.
Le changement de variable $u = (2n+1)x$ donne $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{x} dx = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{u} du$. L'intégrale étant convergente on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 60 Soit $f :]0, 1] \to \mathbb{R}_+$ continue, décroissante et intégrable. Montrer que :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f.$$

Calculer $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$

[Ind] C'est une somme de Riemann, chercher f.

[Dem] C'est la définition des sommes de Riemann. En passant par la forme exponentielle on a $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}}$. Or $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}$ tend vers $\int_0^1 \ln x dx = [x\ln x - x]_0^1 = -1$. L'expression proposée tend vers e^{-1}.

Comportements asymptotiques de primitives

Exercice 61 Montrer que la fonction $x \mapsto \int_1^x \frac{\sin^2 t}{t}dt$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. Montrer que $x \mapsto \int_1^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$ tend vers une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. En déduire qu'il existe des fonctions équivalentes à $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$ dont les primitives divergent au voisinage de $+\infty$.

[Ind] Comparer à une série comme la référence du cours.

[Dem] $\int_1^{(N+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x}dx \geq \sum_{k=1}^{N}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x}dx \geq \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\sin^2 x dx \geq \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{(k+1)\pi}\frac{\pi}{2}$ ce qui prouve que l'intégrale diverge puisque la série (harmonique) diverge.
Pour la seconde faisons une intégration par parties : $\int_1^A \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt = \left[-\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\right]_1^A - \frac{1}{2}\int_1^A \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}}dt$. Le crochet admet une limite car $\lim_{A\to+\infty}\frac{\cos t}{\sqrt{t}} = 0$ et l'intégrale converge car $\left|\frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}}\right| \leq \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$. Cette intégrale converge. Enfin on remarque que

Exercice 62 Etudier le comportement au voisinage de $+\infty$ des primitives de $x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\cos x}$ et $x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}$

[Ind] Prendre des développement limités.

[Dem] Pour la première on a $\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin^2 x}{x} + O\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$. L'intégrale de $x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ converge en $+\infty$, mais $x \mapsto \frac{\sin^2 x}{x}$ a une intégrale divergente, $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ a une intégrale absolument convergente. Le tout diverge.
Pour la seconde on a $\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\cos x} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin x\cos x}{x} + O\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$. L'intégrale de $x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ converge en $+\infty$, celle de $x \mapsto \frac{\sin 2x}{2x}$ aussi et le O aussi le tout converge.

Exercice 63 Soit f et g des fonctions réelles continues par morceaux sur $[a,b[$ et supposons g POSITIVE. Montrer que, si g est intégrable sur $[a,b[$

$$f = o_b(g) \implies \int_x^b f = o_b(\int_x^b g)$$

$$f \sim_b g \implies \int_x^b f \sim_b \int_x^b g.$$

[Ind] Hors programme, le faire à la main.

[Dem] Hors programme.

Exercice 64 Soit f et g des fonctions réelles continues par morceaux sur $[a,b[$ et supposons g POSITIVE. Montrer que, si g n'est pas intégrable sur $[a,b[$ alors

$$f = o_b(g) \implies \int_a^x f = o_b(\int_a^x g)$$

$$f \sim_b g \implies \int_a^x f \sim_b \int_a^x g.$$

[Ind] Application de l'exercice précédent.

[Dem] Hors programme.

Exercice 65 Trouver un équivalent, lorsque x tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\int_x^{\infty} \frac{\operatorname{Arctan} x}{1+x^2} dx$.

[Ind] Application de l'exercice précédent.

[Dem] Hors programme.

Exercice 66 Montrer que, pour tout $\alpha < 2$

$$x^\alpha \ll_{+\infty} \int_2^x \frac{tdt}{\ln t} \ll_{+\infty} x^2$$

[Ind] Application de l'exercice précédent, on peut le faire à la main.

[Dem] Hors programme.

Quelques fonctions définies par des intégrales

Exercice 67 Montrer la fonction $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{p-1} dt$ est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que, pour tout $p > 0$,

$$\Gamma(p+1) = (p)\Gamma(p)$$

En déduire $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que $\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} dx$ $(= \sqrt{\pi})$ et en déduire les valeurs $\Gamma(n + \frac{1}{2})$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

[Ind] Pour le début c'est l'application du théorème de convergence dominée, on peut définir la fonction φ sur des intervalles différents.

[Dem]

- La fonction gamma est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. la fonction $(t,x) \overset{\Phi}{\longmapsto} t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[\times\mathbb{R}_+^*$. D'autre part au voisinage de 0 on a $t^{x-1}e^{-t} \sim t^{x-1}$ il y a convergence ssi $x > 0$. Au voisinage de $+\infty$: $\int^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}$ converge.
- La fonction Gamma est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet soit $x_0 > 0$, ainsi $\beta \geq x_0 \geq \alpha > 0$ et $\left|t^{x_0-1}e^{-t}\right| \leq t^{\alpha-1}e^{-t}$ sur $[0,1]$ et $\left|t^{x_0-1}e^{-t}\right| \leq t^{\beta-1}e^{-t}$ sur $[1,+\infty[$. Ceci définit une fonction φ continue par morceaux dont l'intégrale converge sur $[0,+\infty[$ et $t \longmapsto \Phi(t,x)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ pour tout $x > 0$. Par le théorème de convergence dominée Γ est continue en x_0 donc sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Dérivabilité de Gamma :

- Si $f(t,x) = t^{x-1}e^{-t} = e^{(x-1)\ln t}e^{-t}$ on a $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \ln t e^{(x-1)\ln t}e^{-t}$ et même $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(t,x) = (\ln t)^n e^{(x-1)\ln t}e^{-t}$. Prenons un point x_0 et choisissons a, b tels que $0 < a < x < b$ on a: $\left|\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(t,x)\right| \leq \begin{cases} |\ln t|^n t^{a-1}e^{-t} \text{ sur } [0,1] \\ |\ln t|^n t^{b-1}e^{-t} \text{ sur } [1,+\infty[\end{cases}$ Or $|\ln t|^n t^{a-1}$ est intégrable sur $[0,1]$ car $|\ln t|^n t^{a-1}e^{-t} \leq t^{a'-1}$ et si $a \geq a' > 0$ ($|\ln t|^n t^{a-a'} \overset{t\to 0^+}{\to} 0$). de même pour l'autre sur $[1,+\infty[$.
- Ainsi Γ est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ en outre $\Gamma'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)\, t^{x-1}e^{-t}dt$
- On peut en déduire que Γ est convexe car $\Gamma''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t}dt > 0$.
- Une intégration par parties donnent pour tout $x > 0$: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ en outre sur $\mathbb{N}$ on a : $\Gamma(n) = (n-1)!$
- Le changement de variable $t = x^2$ donne $\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\frac{1}{x}xdx = \sqrt{\pi}$.
  On en déduit à l'aide de la formule de récurrence que : $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = (n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\cdots\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Exercice 68 Soit f une fonction continue définie sur $\mathbb{R}_+$. On suppose qu'il existe un réel γ tel que la fonction $x \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-\gamma x}$ soit bornée sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que la fonction $\mathcal{L}(f)(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}dt$ est définie et de classe C^∞ sur $]\gamma, +\infty[$.

[Ind] C'est la transformation de Laplace, appliquer le théorème de convergence dominée.

[Dem] Montrons d'abord que l'intégrale existe. En effet on a pour $p \in]\gamma, +\infty[$: $\left|f(t)\mathrm{e}^{-pt}\right| = \left|f(t)\mathrm{e}^{-\gamma t}\right|\mathrm{e}^{-(p-\gamma)t} \leq M\mathrm{e}^{-(p-\gamma)t}$ où M est une borne de $x \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-\gamma x}$ sur $\mathbb{R}_+$. Pour montrer que $\mathcal{L}(f)$ est C^∞ on calcule la dérivé : $\dfrac{\partial^k}{\partial p^k}f(t)\mathrm{e}^{-pt} = (-t)^k f(t)\mathrm{e}^{-pt}$. On se place sur $[\alpha, +\infty[$ pour $\alpha > \gamma$ pour obtenir la majoration $\left|(-t)^k f(t)\mathrm{e}^{-pt}\right| \leq t^k |f(t)|\mathrm{e}^{-\alpha t} \leq t^k |f(t)|\mathrm{e}^{-\gamma t}\mathrm{e}^{-(\alpha-\gamma)t} \leq Mt^k\mathrm{e}^{-(\alpha-\gamma)t}$ cette dernière fonction est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Par application d'un théorème de domination on en déduit que $\mathcal{L}(f)$ est C^∞ sur tout $[\alpha, +\infty[$ donc sur $]\gamma, +\infty[$.

Exercice 69 Soit p et q deux réels.
a) Montrer que la fonction $t \mapsto t^{p-1}(1-t)^{q-1}$ est intégrable sur $]0,1[$ si et seulement si $p > 0$ et $q > 0$.
On pose, dans ce cas $B(p,q) = \displaystyle\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$
b) Montrer que, pour $p > 0$ et $q > 0$:

$$B(p,q) = B(q,p)$$

$$B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}x\sin^{2q-1}xdx \quad (\text{ Poser } t = \cos^2 x)$$

$$B(p,q) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{q-1}}{(1+u)^{p+q}}du \quad (\text{ Poser } u = \tan^2 x)$$

c) En déduire la valeur, pour tout entier $n \geq 1$ de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)^n}$ en fonction des intégrales de Wallis.

[Ind] C'est la fonction bêta. Théorème de convergence dominée.

[Dem] $B(p,q)$ existe ssi $(p-1) > -1$ et $(q-1) > -1$ c'est à dire $p > 0$ et $q > 0$, par comparaison avec l'intégrale de Riemann.
Pour tous p, q strictement positifs on a $B(q,p) = \int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt$ soit en posant $t' = 1-t$: $B(q,p) = \int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt = -\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}(-dt) = B(p,q)$. Il faut remarquer que q, p sont toujours dans le domaine de définition dès que (p,q) y est.

Le changement de base est licite et il donne $B(p,q) = -2\int_{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-2} x \sin^{2q-2} x \cos x \sin x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1} x \sin^{2q-1} x dx$.
L'autre changement de variable, tout aussi licite donne
$B(p,q) = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+u)^p}\sqrt{1+u}\frac{u^q}{(1+u)^q}\sqrt{\frac{1+u}{u}}\frac{du}{2\sqrt{u}(1+u)} = \int_0^{+\infty} \frac{u^{q-1}}{(1+u)^{p+q}}du.$
posons $u = v^2$ on obtient $2\int_0^{+\infty} \frac{v^{2q-1}}{(1+v^2)^{p+q}}dv = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1} x \sin^{2q-1} x dx$ ou avec $q = \frac{1}{2}$ $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+v^2)^{p+\frac{1}{2}}}dv =$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1} x dx$ puis avec $p = n - \frac{1}{2}$ on obtient $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+v^2)^n}dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(n-1)} x dx$ ou $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+v^2)^n}dv =$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)^{n-1}dx = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} (-1)^k J_{2k}$ avec $J_{2k} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x dx$ les intégrales de Wallis.

Exercice 70 Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x^2+t^2}dt$.
a) Montrer que la fonction F est de classe C^∞.
b) Trouver les limites en 0 et en $+\infty$ de F. c) Étudier le signe et les variations de F sur $\mathbb{R}_+^*$.
(Indication: Pour $x > 0$ fixé Étudier la suite $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{x^2+t^2}dt$).

[Ind] Théorème de convergence dominée.

12.11 Travaux Dirigés

Exercice 71 Intégrales généralisées, facile....
Calculer, si elle existe : $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$; $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$; $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$; étudier la convergence de $\int_0^{+\infty} \sin t dt$.
Montrer que $\int_{-1}^{+1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \pi$; calculer $\int_{-1}^{+1} \frac{dt}{|t|^{\frac{1}{2}}}$.

[Dem] Pour ces intégrales nous connaissons des primitives, il suffit donc de regarder s'l y a une limite. Pour $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1$, pour $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$, pour $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t}\right]_0^1 = 2$, pour $\int_0^{+\infty} \sin t dt = -\lim\limits_{+\infty} \cos t + 1$ et l'intégrale est divergente. Pour $\int_{-1}^{+1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = [\arcsin t]_{-1}^{+1} = \pi$. Pour $\int_{-1}^{+1} \frac{dt}{|t|^{\frac{1}{2}}}$, nous connaissons une primitive mais le problème se pose en 0, néanmoins une primitive $\sqrt{t}$ est définie en 0 et donc $\int_{-1}^{+1} \frac{dt}{|t|^{\frac{1}{2}}} = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{|t|}}dt + \int_0^{+1} \frac{1}{\sqrt{|t|}}dt = \left[-2\sqrt{-t}\right]_{-1}^{0} + \left[2\sqrt{t}\right]_0^{+1} = 4$.

Exercice 72 I.G. du travail
Déterminer la nature de l'intégrale généralisée :
a) $\int_0^{+\infty} \left(x+2-\sqrt{x^2+4x+1}\right) dx$; b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x+e^{-x}}dx$; c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{cox\left(\frac{1}{x}\right)}}dx$; d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{x^2-x}}dx$; e) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{(\ln x)^{\ln x}}dx$; f) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{dx}{(\ln\ln x)^{\ln x}}$; g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+|\sin x|}$;
Calculer, en montrant la convergence : h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$; i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1}$; j) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2(x+2)^2}$; k) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x\ln x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$; convergence et calcul l) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)}$; m) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^n}dx$.

[Dem]

- $\left(x+2-\sqrt{x^2+4x+1}\right) = \dfrac{3}{\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+1}\right)} \sim \dfrac{3}{2x}$. La fonction à intégrer étant continue sur $[0,+\infty[$ on a que l'intégrale diverge.
- $\dfrac{\ln x}{x+e^{-x}} \sim \dfrac{\ln x}{x} \geq \dfrac{1}{x}$ en $+\infty$ et l'intégrale diverge, la fonction est bien continue sur l'intervalle d'intégration.
- $\frac{1}{x^{cox\left(\frac{1}{x}\right)}} = e^{-\cos\frac{1}{x}\ln x} = e^{-\left(1-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\ln x} = e^{-\ln x + o(1)} \sim \dfrac{1}{x}$. La fonction à intégrer étant continue sur l'intervalle d'intégration, l'intégrale diverge.
- $e^{-\sqrt{x^2-x}}$: on a $\lim\limits_{+\infty} x^2 e^{-\sqrt{x^2-x}} = 0$ et l'intégrale converge.
- $\frac{1}{(\ln x)^{\ln x}} = e^{-\ln x \ln(\ln x)} \leq e^{-2\ln x} = \dfrac{1}{x^2}$ pour $x > e^{e^2}$ et l'intégrale de cette fonction continue converge.
- $\frac{1}{(\ln\ln x)^{\ln x}} = e^{-\ln x \ln\ln\ln x} \leq \dfrac{1}{x^2}$ et l'intégrale converge.
- $\dfrac{dx}{1+|\sin x|} \geq \dfrac{1}{2}$ et l'intégrale diverge.
- $\displaystyle\int_0^X \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(X+1)(X+3)}{X+2}\right) + \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3$ et l'intégrale converge vers $\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3$.
- $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1} = \int_0^{+\infty} \frac{ydy}{y^3+1}$ avec $y = \frac{1}{x}$ et $2I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(x+1)\,dx}{x^3+1} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2-x+1} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.

- $\displaystyle\int_0^X \frac{dx}{(x+1)^2(x+2)^2} = \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x+1)} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{2}{x+2}\right)dx = -\frac{1}{X+1} + 1 - 2\ln(X+1) - \frac{1}{X+2} + \frac{1}{2} + 2\ln(X+2) - 2\ln 2$ et cela converge vers $\dfrac{3}{2} - 2\ln 2$.
- $\displaystyle\int \frac{x\ln x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\ln x + \ln\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)$, en intégrant par parties. Ainsi en 0^+ cette primitive tend vers $\ln 2$ et en 1^- vers 0. On a donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\ln x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = -\ln 2$.
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)} = \int_0^{+\infty} \frac{dy}{y^2\left(1+\frac{1}{y^2}\right)\left(1+\frac{1}{y^{2a}}\right)} = \int_0^{+\infty} \frac{dy}{(1+y^2)\left(1+\frac{1}{y^{2a}}\right)}$
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^n}dx = \left[\frac{-\ln x}{(n-1)\,x^{n-1}}\right]_1^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{(n-1)\,x^n}dx$, cette dernière intégrale ne converge jamais.

Exercice 73 Pour quelles valeurs de (α, β), l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta}$ est-elle convergente ?

[Dem] Si $\alpha > \beta$ alors $\dfrac{1}{x^\alpha + x^\beta} = \dfrac{1}{x^\alpha\left(1+x^{\beta-\alpha}\right)} \sim \dfrac{1}{x^\alpha}$ en $+\infty$, et il y a convergence ssi $\alpha > 1$.
et $\dfrac{1}{x^\alpha + x^\beta} = \dfrac{1}{x^\beta\left(1+x^{\alpha-\beta}\right)} \sim \dfrac{1}{x^\beta}$ en 0 et il y a convergence ssi $\beta < 1$.
Si $\alpha < \beta$ alors $\dfrac{1}{x^\alpha + x^\beta} = \dfrac{1}{x^\beta\left(1+x^{\alpha-\beta}\right)} \sim \dfrac{1}{x^\beta}$ en $+\infty$, et il y a convergence ssi $\beta > 1$.
et $\dfrac{1}{x^\alpha + x^\beta} = \dfrac{1}{x^\alpha\left(1+x^{\beta-\alpha}\right)} \sim \dfrac{1}{x^\alpha}$ en 0 et il y a convergence ssi $\alpha < 1$.
Si $\alpha = \beta$ alors il n'y a pas convergence en même temps en 0 et en $+\infty$.
Finalement il y a convergence ssi $\alpha > 1 > \beta$ et $\beta > 1 > \alpha$.

Exercice 74 Convergence et calcul de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2 - x^3}}$

[Dem] Posons $y = \sqrt[3]{\dfrac{1}{x} - 1}$ on a : $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-x^3}} = \int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt[3]{\frac{1}{x}-1}} = 3\int_0^{+\infty}\frac{ydy}{y^3+1}$ en reprenant un exercice précédent : $\displaystyle I = \int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^3+1} = \int_0^{+\infty}\frac{ydy}{y^3+1}$ avec $y = \frac{1}{x}$ et $\displaystyle 2I = \int_0^{+\infty}\frac{(x+1)\,dx}{x^3+1} = \int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2-x+1} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$. On trouve $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

Exercice 75 calculer $\displaystyle I(x) = \int_x^{\frac{\pi}{2}-x} \sin t\cos t\ln\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right)dt$

[Dem] Le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$ donne $\displaystyle I(x) = \int_{\frac{\pi}{2}-x}^{x} \sin u\cos u\ln\left(\frac{\cos u}{\sin u}\right)(-du) = -I(x)$ d'où $I(x) = 0$.

Exercice 76 convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}\,(1-x)^{\frac{3}{2}}}dx$

[Dem] Une intégration par parties en posant $u = \ln(x)$ et $v' = \dfrac{1}{\sqrt{x}\,(1-x)^{\frac{3}{2}}}$ avec $v = 2\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$ on trouve $\displaystyle I = \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}\,(1-x)^{\frac{3}{2}}}dx = -\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{x\sqrt{1-x}}}dx$ puis des changements de variables: $u = \sqrt{x}$ qui donne $\displaystyle I = -\int_0^1 \frac{4}{\sqrt{1-u^2}}du$ et enfin $u = \sin t$ donne $\displaystyle I = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4dt = -2\pi$.

Exercice 77 Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2, \alpha\beta\neq 0$ et $I(\alpha,\beta)=\displaystyle\int_0^1 |1-t^\alpha|^\beta\,dt$. Etudier la convergence de l'intégrale $I(\alpha,\beta)$.

[Dem] Si $\alpha>0$ alors $(1-t^\alpha)\overset{0}{\sim}1$ et la fonction $f(t)=|1-t^\alpha|^\beta$ est prolongeable par continuité en 0. En 1 on a $\lim\limits_{1}|1-t^\alpha|=0$ et la fonction est intégrable en 1 si et seulement si $\beta>-1$.

Si $\alpha<0$ alors $1-t^\alpha\overset{0}{\sim}t^\alpha$ et la fonction $f(t)\overset{0}{\sim}t^{\alpha\beta}$ il y a convergence si et seulement si $\alpha\beta>-1$. En 1 il y a convergence ssi $\beta>-1$.
Finalement il y a convergence ssi $\alpha>0$ et $\beta>-1$ et $\alpha<0,\beta>-1$ et $\alpha\beta>-1$.

Exercice 78 Tiens Taylor
Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f''\geq 3$. Montrer que $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+|f(x)|}$ converge.

[Dem] Quitte à remplacer f par $f(x)-f(0)$ puis f en $-f$ on peut supposer $f(0)=0$ et $f'(0)\geq 0$. Une formule de Taylor donne $f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{1}{2}x^2f''(c)$ pour un $c\in]0,x[$. Ainsi cette formule prouve que $\lim\limits_{+\infty}f(x)=\infty$. Donc $\dfrac{1}{1+|f(x)-f(0)|}\leq\dfrac{1}{1+||f(x)|-|f(0)||}\leq\dfrac{1}{1+|f(x)|-|f(0)|}\sim\dfrac{1}{1+f(x)}$.
Ce qui donne $f(x)\geq\frac{3}{2}x^2$ et donc l'intégrale converge.

Exercice 79 Tiens les A.F.
Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ de classe C^1 telle qu'il existe $\alpha\in\mathbb{R}^+$ tel que : $\forall x\in\mathbb{R}^+, f'(x)\geq\alpha$. Montrer que $\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x^2}dx$ diverge.

[Dem] Les accroissements finis donnent pour tout $x>0$: $\dfrac{f(x)}{x^2}\geq\dfrac{f(0)}{x^2}+\dfrac{\alpha}{x}$ en effet $f(x)=f(0)+xf'(c)\geq f(0)+\alpha x$. il en résulte que $\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x^2}dx$ diverge.

Exercice 80 attention

$$\text{On pose: } B(u,v)=\int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}dt$$

1) Pour quelles valeurs de $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ cette intégrale est-elle définie ? On note D l'ensemble de ces valeurs.
2) Calculer $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.
3) Prouver que : $\forall(u,v)\in D: B(v,u)=B(u,v)$.
4) Prouver que : $\forall(u,v)\in D: B(u,v)=B(u+1,v)+B(u,v+1)$.
5) Au moyen d'une intégration par parties, prouver que : $\forall(u,v)\in D: B(u+1,v)=\frac{u}{u+v}B(u,v)$.
6) En déduire l'expression de $B(u+n,v)$ en fonction de $B(u,v)$ pour tout entier naturel non nul n.
7) Calculer $B(n,p),(n,p)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$.
8) Calculer $B\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$. On pourra chercher une paramétrisation de la courbe $y^3=t^2(1-t)$ pour $t\in[0,1]$.
(Ensieta math 1 90)

[Dem]

- $B(u,v)$ existe ssi $(u-1)>-1$ et $(v-1)>-1$ c'est à dire $u>0$ et $v>0$, par comparaison avec l'intégrale de Riemann.
- $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\lim\limits_{a\to0,b\to0}\displaystyle\int_a^b\frac{1}{\sqrt{t}}\frac{1}{\sqrt{1-t}}dt$, posons $u=\sqrt{t}$ on a $\displaystyle\int_a^b\frac{dt}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}}=2\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ en posant $u=\sin t$ on a $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\lim\limits_{x\to0,y\to\frac{\pi}{2}}\displaystyle\int_x^y\frac{\cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}dt=\lim\limits_{x\to0,y\to\frac{\pi}{2}}2\int_x^y dt=\pi$.
- Pour tous u,v strictement positifs on a $B(v,u)=\int_0^1 t^{v-1}(1-t)^{u-1}dt$ soit en posant $t'=1-t$: $B(v,u)=\int_0^1 t^{v-1}(1-t)^{u-1}dt=-\int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}(-dt)=B(u,v)$. Il faut remarquer que v,u sont toujours dans le domaine de définition dès que (u,v) y est.

- Pour tous u, v dans D on a $B(u+1,v)+B(u,v+1) = \int_0^1 t^u (1-t)^{v-1}\,dt + \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^v\,dt = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}(t+(1-t))\,dt = B(u,v)$. Encore une fois toutes les intégrales écrites existent.

- $B(u+1,v) = \int_0^1 t^u (1-t)^{v-1}\,dt = \left[t^u \frac{1}{v}(1-t)^v\right]_0^1 + \frac{u}{v}\int_0^1 t^{u-1}(1-t)^v\,dt = \frac{u}{v}B(u,v+1)$. En utilisant la formule précédente : $\left(1+\frac{u}{v}\right)B(u+1,v) = \frac{u}{v}B(u,v)$ on obtient $B(u+1,v) = \frac{u}{u+v}B(u,v)$.

- On a la formule de récurrence : $B(u+n,v) = \frac{u+n-1}{u+n-1+v}B(u+n-1,v)$ qui donne $B(u+n,v) = \frac{(u+n-1)(u+n-2)\cdots(u+n-n)}{(u+n-1+v)(u+n-2+v)\cdots(u+v)}B(u,v)$.

- $B(n,p) = B(1+(n-1),p) = \frac{(n-1)!}{(n+p-1)(n+p-2)\cdots(p+1)}B(1,p) = \frac{(n-1)!}{(n+p-1)\cdots(p)}$ car $B(1,p) = \frac{1}{p}$.

- Pour $B\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) = \int_0^1 t^{-\frac{2}{3}}(1-t)^{-\frac{1}{3}}\,dt$ on cherche $y^3 = t^2(1-t) = t^2 - t^3$ ou $\left(\frac{y}{t}\right)^3 + 1 = \frac{1}{t}$ ou $\frac{y}{t} = u$ et $\frac{1}{t} = 1+u^3$. On pose $y = \frac{u}{1+u^3}$ et $t = \frac{1}{1+u^3}$ nous avons paramétré la courbe d'équation $y^3 = t^2(1-t) = t^2 - t^3$. Ainsi $B\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) = 3\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{udu}{1+u^3} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{-du}{1+u} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{(u+1)\,du}{1-u+u^2} = -\left[\ln(1+u)\right]_{\frac{1}{2}}^1 + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{(2u-1)\,du}{1-u+u^2} + \frac{3}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{du}{1-u+u^2}$
$= -\ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left[\ln\left(1-u+u^2\right)\right]_{\frac{1}{2}}^1 + \frac{3}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{u-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^1 = -\ln 2 + \ln\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{3}{4} + \sqrt{3}\left(\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Exercice 81 1) Vérifier que la dérivée d'ordre n de e^{-t^2} est de la forme $(-1)^n H_n(t)e^{-t^2}$, où H_n est un polynôme de degré n. (polynôme d'Hermitte)
2) Montrer que les polynômes H_n sont orthogonaux dans l'espace E_p associé au poids $p(t) = e^{-t^2}$ sur $[0,+\infty[$.
3) Vérifier la relation de récurrence : $H_n = 2tH_{n-1} - 2(n-1)H_{n-2}$; $H_0 = 1$ et $H_1(t) = 2t$.
4) Montrer que H_n satisfait à l'équation différentielle : $H_n'' - 2tH_n' + 2nH_n = 0$ et que $H_n' = 2nH_{n-1}$.

[Dem]

- Par récurrence c'est vrai au rang $n = 0$ avec $H_0 = 1$. Pour montrer que la propriété est récurrente on a $\left(e^{-t^2}\right)^{(n+1)} = (-1)^n\left(H_n' - 2tH_n\right)e^{-t^2} = (-1)^{n+1}\left(2tH_n - H_n'(t)\right)e^{-t^2}$ d'où $H_{n+1} = 2tH_n - H_n'$ d'où H_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$.

- Supposons $m < n$: $\int_{\mathbb{R}} H_m(t)H_n(t)e^{-t^2}dt = \int_{\mathbb{R}}(-1)^n H_m(t)\,d^{(n)}\left(e^{-t^2}\right)dt = \left[(-1)^n H_m \frac{d^{(n-1)}}{dx^{n-1}}\left(e^{-t^2}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} + (-1)^{n-1}\int_{\mathbb{R}} H_m'(t)\,d^{(n-1)}\left(e^{-t^2}\right)dt$ le crochet de dualité est nul et donc en récidivant on obtient $\int_{\mathbb{R}} d^{(n)}H_m(t)\,e^{-t^2}dt = 0$. Remarquons que $t \longmapsto e^{-t^2}$ est paire et donc toutes les dérivées impaires sont impaires et donc nulle en 0.

- $H_n = 2tH_{n-1} - 2(n-1)H_{n-2} \Longleftrightarrow (-1)^n d^{(n)}\left(e^{-t^2}\right) = 2t(-1)^{n-1}d^{(n-1)}\left(e^{-t^2}\right) - 2(n-1)\,d^{(n-2)}\left(e^{-t^2}\right)(-1)^{n-2}$
$\Longleftrightarrow d^{(n)}\left(e^{-t^2}\right) = -2td^{(n-1)}\left(e^{-t^2}\right) - 2(n-1)\,d^{(n-2)}\left(e^{-t^2}\right) = -\left(d^{(n-1)}\left(2te^{-t^2}\right)\right) = -d^{(n)}\left(e^{-t^2}\right)$
en utilisant la formule de Leibniz.

- $\begin{cases} H_{n+1} = 2tH_n - H_n' \\ H_n = 2tH_{n-1} - 2(n-1)H_{n-2} \end{cases}$ d'où $H_n' = 2tH_n - H_{n+1}$ et $H_n'' = 2H_n + 2tH_n' - H_{n+1}' = 2H_n + 4t^2H_n - 2tH_{n+1} - 2tH_{n+1} + H_{n+2}$ cela donne $H_n'' - 2tH_n' + 2nH_n = 2H_n + 4t^2H_n - 4tH_{n+1} + H_{n+2} - 4t^2H_n + 2tH_{n+1} + 2nH_n = H_{n+2} - 2tH_{n+1} + 2(n+1)H_n$ c'est la deuxième formule au rang $n+2$ d'où $H_n' = 2tH_n - H_{n+1} = 2tH_n - 2tH_n + 2nH_{n-1} = 2nH_{n-1}$.

Exercice 82 Polynômes de Laguerre
Soit E l'espace préhilbertien E_p obtenu pour $p(t) = e^{-t}$ sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$. On pose : $L_n(t) = \frac{1}{n!}e^t \frac{d^n}{dx^n}(e^{-t}t^n)$. Vérifier que L_n est un polynôme de degré n et que les L_n forment un système orthogonal dans E_p, calculer $\langle L_n, L_n\rangle$.

[Dem] Ici on peut écrire $L_n(t) = \frac{1}{n!}e^t \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{-t}\right)^{(n-k)} (t^n)^{(k)} = \dfrac{1}{n!}e^t \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} e^{-t} t^{n-k} n(n-1)\cdots(n-k+1)$
$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n!} \binom{n}{k} t^{n-k}$ et c'est bien un polynôme de degré n.
Si $m < n$ alors $\int_0^{+\infty} L_m L_n e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} L_m \dfrac{1}{n!} d^{(n)}\left(e^{-t}t^n\right) dt = \dfrac{1}{n!}\int_0^{+\infty} L_m d^{(n)}\left(e^{-t}t^n\right) dt$
$= \frac{1}{n!}\left[L_m(t)\, d^{(m-1)}\left(e^{-t}t^n\right)\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} L'_m(t)\, d^{(m-1)}\left(e^{-t}t^n\right) dt$. Le crochet de dualité est nul nous pouvons réitérer et trouver $\int_0^{+\infty} L_n(t) L_m(t) e^{-t} dt = 0$
Tandis que $\int_0^{+\infty} L_n(t) L_n(t) e^{-t} dt = \dfrac{1}{(n!)^2}\int_0^{+\infty} e^t \left(\dfrac{d^{(n)}}{dx^n}\left(e^{-t}t^n\right)\right)^2 dt = \int_0^{+\infty} L_n(t) \dfrac{1}{n!} e^t d^{(n)}\left(e^{-t}t^n\right) e^{-t} dt =$
$= \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} L_n(t)\, d^{(n)}\left(e^{-t}t^n\right) dt = \dfrac{(-1)^n}{n!}\int_0^{+\infty} d^{(n)} L_n e^{-t} t^n dt = \dfrac{(-1)^n}{n!}(-1)^n \int_0^{+\infty} e^{-t} t^n dt = 1.$

Exercice 83 D'après concours communs math.appli. 94
1°) Montrer que, pour tout x réel, les intégrales généralisés :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\cos(tx)}{\sqrt{t}} dt, \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(tx)}{\sqrt{t}} dt, \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-1+ix)t}}{\sqrt{t}} dt$$

convergent.
On définit alors 2 applications u et v de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et une application z de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$u : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\cos(tx)}{\sqrt{t}} dt,$$

$$v : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(tx)}{\sqrt{t}} dt,$$

$$z : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-1+ix)t}}{\sqrt{t}} dt,$$

Etudier la parité des applications u et v et justifier la relation $z = u + iv$.
On pose $\lambda = u(0)$; montrer que $\lambda > 1 - \frac{1}{e}$.
2°) Montrer que les applications z, u, v sont continues.
3°) Montrer que, pour tout réel x, l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{(-1+ix)t} dt$ converge.
4°) Montrer que les applications z, u, v sont dérivables.
5°) Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R} : Z'(x) = \dfrac{-1}{2(x+i)} z(x)$. (On pourra utiliser une intégration par parties, que l'on justifiera). En déduire que les applications z, u, v sont indéfiniment dérivables.

Exercice 84 Définition et continuité de $x \to f(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\sin xt}{1+t} dt$ (caculer $\lim\limits_{0^+} f(x)$, équivalent de f en $+\infty$)

Exercice 85 Définition et continuité de $x \mapsto f(x) = \int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t^{x+1}+t+1} dt$

Exercice 86 On définit $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\left(1+t^2\right)x^2}}{1+t^2} dt$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$

1°) Montrer que f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2°)Montrer que $f + g^2$ est constante.

3°) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

[Dem]

- La fonction de deux variables $(x,t) \longmapsto \dfrac{e^{-\left(1+t^2\right)x^2}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0,1]$, ainsi que $(x,t) \longmapsto -2xe^{-\left(1+t^2\right)x^2}$ donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. La fonction g est continue comme intégrale d'une fonction continue dépendant de sa borne et $g'(x) = e^{-x^2}$.
- Calulons $f'(x) + 2g(x)g'(x) = \displaystyle\int_0^1 -2xe^{-\left(1+t^2\right)x^2} dt + 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-t^2x^2} dt + 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$ faisons le changement de variable $u = tx$ pour $x \neq 0$ dans la première : $-2e^{-x^2} \displaystyle\int_0^x e^{-u^2} du + 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt = 0$. Par continuité on a que $f + g^2$ est constante sur $\mathbb{R}$.
- Il en résulte que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f + g^2 = f(0) + g^2(0)$. Or on a $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\left(1+t^2\right)x^2}}{1+t^2} dt \leq e^{-x^2} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4} e^{-x^2}$ et donc $\displaystyle\lim_{+\infty} f = 0$. D'où $\left(\displaystyle\lim_{+\infty} g\right)^2 = f(0) = \dfrac{\pi}{4}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 87 Soit $g_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$, $n \geq 1$, $x \in \mathbb{R}^+$.

1°) Montrer que la série de fonctions $\sum g_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction G continue.

2°) Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Que vaut G'?

3°) Montrer que G n'est pas dérivable en zéro.

[Dem] Pour tout $x \in \mathbb{R}_+ : |g_n(x)| \leq \dfrac{1}{1+n^2}$ il y a donc convergence normale sur $\mathbb{R}_+$. Les fonctions g_n étant continues on a que G est continue sur $\mathbb{R}_+$.

$g_n'(x) = -\dfrac{ne^{-nx}}{1+n^2}$ plaçons-nous sur $I_a = [a, +\infty[$ avec $a > 0$ ainsi $|g_n'(x)| \leq \dfrac{n}{1+n^2} e^{-na} = u_n$ d'où puisque $\sum u_n$ converge on a la convergence normale de $\sum g_n'$ sur tout I_a, la fonction G est donc dérivable sur tout I_a donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

Si $x > 0$ on a $\dfrac{G(x) - G(0)}{x} = \displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{e^{-nx}}{x(1+n^2)} - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{x(1+n^2)} = \sum_{n \geq 1} \frac{e^{-nx} - 1}{x(1+n^2)}$ or si $x > 0$ on a $\dfrac{e^{-nx} - 1}{x} \leq 0$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{G(x) - G(0)}{x} \leq \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{e^{-nx} - 1}{x(1+n^2)} = h_N(x)$ et $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} h_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-nx} - 1}{x(1+n^2)} = -\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{1+n^2}$. Si la limite de $\dfrac{G(x) - G(0)}{x}$ existe alors $\lim \dfrac{G(x) - G(0)}{x} \leq \lim h_N(x) \leq \displaystyle\sum_{n=1}^{N} -\frac{n}{1+n^2} = -\infty$. D'où si G est dérivable en 0 son nombre dérivée est $-\infty$ donc G n'est pas dérivable, on peut montrer que sa pente est vertivale en prenant la limsup. Ici il n'y a pas de primitive facile.

Exercice 88 Etude de la fonction Γ définie par : $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. Ensemble de définition, continuité, dérivabilité, classe, convexité, étude aux bornes, variations, représentation graphique.

[Dem] La fonction gamma est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. la fonction $(t,x) \overset{\Phi}{\longmapsto} t^{x-1} e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}_+^*$. D'autre part au voisinage de 0 on a $t^{x-1} e^{-t} \sim t^{x-1}$ il y a convergence ssi $x > 0$. Au voisinage de $+\infty$: $\int^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}$ converge.

- La fonction Gamma est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet soit $x_0 > 0$, ainsi $\beta \geq x_0 \geq \alpha > 0$ et $\left|t^{x_0-1}e^{-t}\right| \leq t^{\alpha-1}e^{-t}$ sur $[0,1]$ et $\left|t^{x_0-1}e^{-t}\right| \leq t^{\beta-1}e^{-t}$ sur $[1,+\infty[$. Ceci définit une fonction φ continue par morceaux dont l'intégrale converge sur $[0,+\infty[$ et $t \longmapsto \Phi(t,x)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ pour tout $x>0$. Par le théorème de convergence dominée Γ est continue en x_0 donc sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Dérivabilité de Gamma :

Si $f(t,x) = t^{x-1}e^{-t} = e^{(x-1)\ln t}e^{-t}$ on a $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \ln t e^{(x-1)\ln t}e^{-t}$ et même $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(t,x) = (\ln t)^n e^{(x-1)\ln t}e^{-t}$. Prenons un point x_0 et choisissons a,b tels que $0<a<x<b$ on a: $\left|\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(t,x)\right| \leq \begin{cases} |\ln t|^n\, t^{a-1}e^{-t} \text{ sur } [0,1] \\ |\ln t|^n\, t^{b-1}e^{-t} \text{ sur } [1,+\infty[\end{cases}$

Or $|\ln t|^n\, t^{a-1}$ est intégrable sur $[0,1]$ car $|\ln t|^n\, t^{a-1}e^{-t} \leq t^{a'-1}$ et si $a \geq a' > 0$ ($|\ln t|^n\, t^{a-a'} \overset{t\to 0^+}{\to} 0$). de même pour l'autre sur $[1,+\infty[$.

- Ainsi Γ est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ en outre $\Gamma'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)\, t^{x-1}e^{-t}dt$
- On peut en déduire que Γ est convexe car $\Gamma''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t}dt > 0$.
- Une intégration par parties donnent pour tout $x>0$: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ en outre sur $\mathbb{N}$ on a : $\Gamma(n) = (n-1)!$
- Pour l'étude aux bornes : en 0 : $\Gamma(x+1) \to \Gamma(1) = 1$ donc $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$ en 0^+.
- En $+\infty$ si on a la convergence dominée on peut écrire sur $[0,1]$, $e^{(x-1)\ln t} \to 0$ mais sur $[1,+\infty[$ on a $e^{(x-1)\ln t - t} = e^{-t(1-(x-1)\frac{\ln t}{t})} \to +\infty$ et donc par convergence monotone $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ croit vers $+\infty$.
- On montre que Γ est décroissante sur $[0,x_0]$ et croissante aprés. $\Gamma'(x) = \displaystyle\int_0^1 (\ln t)\, t^{x-1}e^{-t}dt + \int_1^{+\infty} (\ln t)\, t^{x-1}e^{-t}dt$, en partant de $x_1 < x_2$ on montre la monotonie de chaque fonction et donc $\lim\limits_{0} \Gamma'(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} \Gamma'(x) = +\infty$

Exercice 89 Un calcul original de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$. En remarquant que $\frac{1}{x} = \int_0^{+\infty} e^{-xy}dy$ et en étudiant $F(T) = \int_0^T \sin x \frac{dx}{x}$ trouver la valeur de I.

[Dem] Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$

On remarque que $\dfrac{1}{x} = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xy}dy$ on pose alors $F(T) = \displaystyle\int_0^T \sin x\frac{dx}{x} = \int_0^T \sin x dx \int_0^{+\infty} e^{-xy}dy$. Considèrons $g(x,y) = \sin x e^{-xy}$ sur $[0,T] \times [0,+\infty[$, fonction continue sur cet ensemble, d'intégrale convergente c'est à dire : $\displaystyle\int_0^T \int_0^{+\infty} |g(x,y)dydx| = \int_0^T |\sin x| \frac{dx}{x}$ converge.

Deux intégrations par parties donnent $\displaystyle\int_0^T e^{-xy}\sin x dx = \frac{1-e^{-yT}(\cos T + y\sin T)}{1+y^2}$ et $F(T) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-yT}(\cos T + y}{1+y^2}$ par interversion des intégrales (Fubini).

Maintenant $\lim\limits_{T\to+\infty} \dfrac{1-e^{-yT}(\cos T + y\sin T)}{1+y^2} = \dfrac{1}{1+y^2}$ et avec $\dfrac{e^{-yT}(\cos T + y\sin T)}{1+y^2} \leq \dfrac{e^{-y}(1+y)}{1+y^2}$ si $T \geq 1$ par application de la convergence dominée on a $\lim\limits_{T\to+\infty} F(T) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$.

Exercice 90 Etude de la fonction f définie par : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}dt$. Continuité, dérivabilité pour $x>0$, limite en $+\infty$, équation différentielle vérifiée par f, non dérivabilité en 0.

[Dem] On montre que f est définie continue pour $x \geq 0$: en posant $g(t,x) = \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ on définit une fonction g C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. En $+\infty$ on a : $|g(t,x)| < \dfrac{1}{1+t^2} < \dfrac{1}{t^2}$ et on a donc l'intégrabilité sur $[0,+\infty[$.

Ainsi f est bien définie sur $\mathbb{R}^+$ La même majoration donne par le théorème de domination que f est continue sur le même domaine.

- On montre que f est dérivable pour $x > 0$: en effet $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x) = -t^2\dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ la majoration ci-dessus ne convient plus car la fonction dominante n'a plus une intégrale convergente, en un point x_0 encadrons-le $0 < a \leq x_0 \leq b$ et écrivons $\left|-t^2\dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\right| \leq \left|t^2\dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\right| \leq \dfrac{t^2}{1+t^2}e^{-at^2} \leq e^{-at^2}$ ceci nous procure une fonction dominante qi nous permet de conclure par le théorème de dérivation sous le signe somme.
- On peut montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$: On applique le théorème de convergence dominée avec $\dfrac{e^{-x_n t^2}}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2}$. Sinon $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}dt = \int_0^a \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}dt + \int_a^{+\infty}\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}dt = A + B$. Pour B on écrit : $B \leq e^{-xa^2}\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt \leq \frac{\pi}{2}e^{-xa^2}$ dont la limite est 0. Pour A on écrit : $A \leq Ma$ où $M = \sup\limits_{[0,1]}\dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ il suffit alors de choisir a suffisament petit puis x suffisament grand.
- f est solution d'une équation différentielle : il est facile de voir que $f(x) - f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt^2}dt = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{K}{\sqrt{x}}$. La résolution de cette équation donne $f(x) = e^x\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\displaystyle\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt\right)$ ce qui permet de voir que f n'est pas dérivable en 0.