

## Chapitre 7

# Dérivation d'une fonction d'une variable réelle; Arcs paramétrés

### 7.1 Introduction

Le calcul différentiel est postérieur au calcul intégral. Il a été source de beaucoup de polémiques et est étroitement lié aux problèmes de limites donc d'infiniment petits.

Voyons d'où provient le calcul différentiel. Dès 1637 Descartes en s'intéressant au calcul de l'angle d'intersection de deux courbes, Galilée pour la construction de lunettes astronomiques, Huygens (1673) pour les horloges, Galilée et Newton (1686) pour le calcul de la vitesse et l'accélération d'un mouvement, enfin Képler et Newton, pour la vérification des lois de la gravitation en astronomie sont amenés à définir la dérivée.

Tout se passe par petit accroissement :  $y = ax + b$  et  $y + \Delta y = ax + a\Delta x + b$  d'où  $\Delta y = a\Delta x$  et enfin  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$ . Le même raisonnement vaut pour  $x^2 = y$ .

Leibniz (1684) énonce que  $\Delta x$  et  $\Delta y$  deviennent infiniment petits et sont notés  $dx$  et  $dy$ . Pour Newton (1671) les notations sont  $\dot{x}$  et  $\dot{y}$ . Les avis sont divergents : Pour Bernoulli (1691) maître de Euler et du marquis de l'Hospital ce sont des "quantités infiniment petites qui, additionnées à des quantités finies ne changent pas leur valeur. Berkeley (1734) est contre l'infiniment petit. Euler (1755) après 6 pages adopte la notation  $dx$ . Lagrange (1797) rejette les infiniment petits et fonde l'analyse sur les séries de Taylor mais introduit le nom de dérivée qu'il note  $f'(x)$ . Cauchy (1823) réintroduit les infiniment petits mais comme limite. Bolzano (1817) et Weierstrass (1861) perfectionnent la définition avec les  $\varepsilon$  et les  $\delta$ . Klein (1908) défend la valeur pédagogique des infiniment petits.

Enfin l'étude des mouvements et des courbes a beaucoup contribué à la notion moderne de dérivée.

### 7.2 Dérivation

Dans tous le chapitre, l'intervalle  $I$  sans autre précision désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$ , ouvert, fermé ou semi-ouvert mais non réduit à un point

**Définition 1** Soit  $F$  un espace vectoriel normé et  $f$  définie sur l'intervalle  $I$  à valeurs dans  $F$ . Soit  $x_0 \in I$ , on dit que  $f$  est dérivable en  $x_0$  de dérivée  $l \in F$  si

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{1}{x - x_0} (f(x) - f(x_0)) = l$$

On dit que  $f$  est dérivable à droite en  $x_0$  de dérivée à droite  $l_d \in F$  si  $x_0$  n'est pas le bord droit de  $I$  et que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{1}{x - x_0} (f(x) - f(x_0)) = l_d$$

On dit que  $f$  est dérivable à gauche en  $x_0$  de dérivée à droite  $l_g \in F$  si  $x_0$  n'est pas le bord gauche de  $I$  et que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{1}{x - x_0} (f(x) - f(x_0)) = l_g$$

On note aussi, lorsque la fonction est dérivable,  $f'(x)$  la dérivée de  $f$  en  $x$  et  $f'_d(x)$  ou  $f'_g(x)$  les dérivées à droite ou à gauche de  $f$  en  $x$ .

**Remarque:** L'écriture du symbole  $f'(x)$  ne peut se faire que si la fonction est dérivable: on ne présente pas le symbole  $f'(x)$  sans s'être assuré que la fonction est dérivable en  $x$ .

**Remarque: interprétation géométrique** Si une fonction est dérivable en un point  $a$ , la droite affine passant par le point  $(a, f(a))$  et de vecteur directeur  $(1, f'(a))$  est la tangente en ce point au graphe de  $f$ .

**Remarque: interprétation cinématique** Si la fonction  $f$  représente la position d'un mobile, le vecteur  $(1, f'(a))$  est le vecteur vitesse du mobile en  $(a, f(a))$ .

**Proposition 1** Une fonction dérivable (resp à droite) (resp à gauche) en un point  $x_0$  est continue (resp à droite) (resp à gauche) en ce point.

[Ind] Traduire la définition de la limite.

[Dem]  $f$  est dérivable en  $x_0$  de dérivée  $f'(x_0)$  si  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{1}{x - x_0} (f(x) - f(x_0)) = f'(x_0)$ . C'est à dire en posant  $\varepsilon(x) = \frac{1}{x - x_0} (f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0))$  on obtient pour tout  $x \in I$  :  $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$  avec  $\varepsilon$  continue en  $x_0$  de limite nulle en ce point. C'est un développement limité d'ordre 1. Ceci prouve que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , donc que  $f$  est continue en  $x_0$ .

**Proposition 2** Une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$  est dérivable en un point  $x \in I$  si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en  $x$  et que les vecteurs dérivés à gauche et à droite sont égaux.

[Ind] C'est une propriété des limites.

[Dem] La partie directe est évidente. La réciproque si  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{1}{x - x_0} (f(x) - f(x_0)) = l$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{1}{x - x_0} (f(x) - f(x_0)) = l$  alors on a  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x - x_0} (f(x) - f(x_0)) = l$ . (au besoin l'écrire avec les  $\varepsilon$ )

**Proposition 3 Dérivation et développement limité d'ordre 1.** Soit  $f$  une fonction définie sur l'intervalle  $I$  à valeurs dans l'espace vectoriel  $F$  de dimension finie. La fonction  $f$  est dérivable en  $x_0 \in I$  de dérivée  $l \in F$  si et seulement si, pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)l + o_{x_0}(x - x_0)$ .

[Ind] C'est la démonstration de la proposition 1.

[Dem]  $f$  est dérivable en  $x_0$  de dérivée  $f'(x_0)$  si  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{1}{x - x_0} (f(x) - f(x_0)) = f'(x_0)$ . C'est à dire en posant  $\varepsilon(x) = \frac{1}{x - x_0} (f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0))$  on obtient pour tout  $x \in I$  :  $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$  avec  $\varepsilon$  continue en  $x_0$  de limite nulle en ce point. Réciproquement si nous avons un développement limité d'ordre 1 alors la limite  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{1}{x - x_0} (f(x) - f(x_0))$  existe et vaut  $f'(x_0)$

**Définition 2** Soit  $f$  une fonction définie sur l'intervalle  $I$  à valeurs dans l'espace vectoriel  $F$  de dimension finie. Si  $f$  est dérivable en tout point  $x \in I$ , on dit que  $f$  est dérivable et la fonction  $f'$  (notée aussi  $Df$ ) définie sur  $I$ , qui à un réel  $x$  de  $I$  associe la dérivée de  $f$  en  $x$  est appelée fonction dérivée. On note  $D^1(I, F)$  l'ensemble des fonctions dérivables définies sur  $I$  à valeurs dans  $F$ .

**Définition 3** Soit  $f \in D^1(I, F)$ , si  $f'$  est continue, on dit que  $f$  est de classe  $C^1$  et on note  $C^1(I, F)$  l'ensemble des fonctions ainsi définies.

**Remarque:**  $C^1(I, F) \subset D^1(I, F)$

## 7.3 Propriétés des fonctions dérivables

**Proposition 4** Soit  $\lambda \in K$  et  $f$  et  $g$  de fonctions définies sur l'intervalle  $I$  à valeurs dans l'espace vectoriel  $F$  de dimension finie. Si  $f$  et  $g$  sont dérivables en un point  $x \in I$ , la somme  $f + g$ , le produit par un scalaire  $\lambda f$  sont dérivables en  $x$  et on a  $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ ,  $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$ .

[Ind] Passer aux limites ou aux D.L.

[Dem] Par exemple si  $f, g$  sont dérivables en  $x_0$  on peut écrire :  $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x - x_0)$  et  $g(x) = g(x_0) + (x - x_0)g'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon'(x - x_0)$  d'où  $(f + g)(x) = (f + g)(x_0) + (f'(x_0) + g'(x_0))(x - x_0) + (x - x_0)(\varepsilon(x - x_0) + \varepsilon'(x - x_0))$ . Or si on pose  $\eta(x - x_0) = \varepsilon(x - x_0) + \varepsilon'(x - x_0)$  on a  $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta(x - x_0) = 0$  ce qui prouve que  $f + g$  est dérivable en  $x_0$  de dérivée  $f'(x_0) + g'(x_0)$ . De même pour l'opération externe.

**Remarque:**  $D^1(I, F)$  et  $C^1(I, F)$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{F}(I, F)$ .

**Exercice 1** Que peut-on dire de l'opérateur  $D$  qui à une fonction dérivable  $f$  associe sa dérivée  $Df$  ?

[Ind] penser à l'algèbre linéaire

[Dem] La proposition 4 donne justement que  $D$  est une application linéaire de  $D^1(I, F)$  vers  $\mathcal{F}(I, F)$ .

**Proposition 5** Soit  $u$  une application linéaire de  $F$  dans  $G$ ,  $F$  et  $G$  étant des espaces de dimension finie et  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $F$ . Si  $f$  est dérivable en  $x \in I$ ,  $u(f)$  est dérivable en  $x$  de dérivée  $u(f'(x))$ .

[Ind] Utiliser les D.L. d'ordre 1.

[Dem] Si  $f$  est dérivable en  $x_0$  alors on peut écrire  $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x - x_0)$  avec  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$  en composant par l'application linéaire  $u$  on obtient  $u(f(x)) = u(f(x_0)) + (x - x_0)u(f'(x_0)) + (x - x_0)u(\varepsilon(x - x_0))$ . Or  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(\varepsilon(x - x_0)) = 0$  car  $u$  est linéaire entre des espaces vectoriels de dimension finie, donc continue. Donc  $u \circ f$  est dérivable en  $x_0$  et sa dérivée est  $u(f'(x_0))$ .

**Exercice 2** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(K)$  (matrice constante) et  $X$  une fonction dérivable, définie d'un intervalle  $I$  à valeurs dans  $K^n$  dérivable. Montrer que la fonction  $AX$  est dérivable et calculer sa dérivée.

[Ind] Traduire la proposition ci-dessus en termes de matrices

[Dem] En prenant l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$  dans  $K^n$  la proposition précédente nous dit que  $u(f)$  est dérivable et on a la relation  $(u(f))' = u(f')$ . Ce qui se traduit par le fait que  $AX$  est dérivable et  $(AX)' = AX'$ .

**Proposition 6** Soit  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$  une base de  $F$  et  $f$  une fonction définie sur l'intervalle  $I$  à valeurs dans  $F$ . La fonction  $f$  est dérivable en  $x \in I$  si et seulement si les fonctions coordonnées  $(f_1, \dots, f_n)$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  sont dérivables en  $x$  et on a alors

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n f'_k(x)e_k$$

[Ind] Utiliser la proposition précédente avec les applications linéaires coordonnées.

[Dem] Si  $f$  est dérivable en  $x$  alors considérons les applications  $p_i : F \rightarrow F$  qui au vecteur  $x \in F$  associe  $x_i e_i$  si  $x = \sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i$ . Ainsi les  $p_i$  sont linéaires et donc les  $p_i \circ f$  sont continues en  $x$ . Maintenant l'application  $t \mapsto tv$  où  $v \in F$  est linéaire donc aussi continue. Ce ci prouve que les  $f_i$  sont continues en  $x$ . Réciproquement si les  $f_i$  sont continues en  $x$  alors les  $f_i e_i$  aussi (en écrivant  $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x - x_0)$  on a  $f(x)e_i = f(x_0)e_i + (x - x_0)f'(x_0)e_i + (x - x_0)\varepsilon(x - x_0)e_i$ ). Et donc  $f = \sum_{i=1}^{i=n} f_i e_i$  aussi.

**Exercice 3** Soit  $f$  une fonction complexe d'une variable réelle définie sur l'intervalle  $I$ . Montrer que  $f$  est dérivable en un point  $x$  de  $I$  si et seulement si  $\bar{f}$  est dérivable en  $x$  et si et seulement si  $\Re(f)$  et  $\Im(f)$  sont dérivables en ce point.

[Ind]  $\mathbb{C}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2, passer par les coordonnées.

[Dem] Regardons  $\mathbb{C}$  comme un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni de la base  $(1, i)$ . Les coordonnées de  $f$  dans cette base sont  $\Re(f)$  et  $\Im(f)$ . Donc  $f$  est dérivable en  $x$  si et seulement si  $\Re(f)$  et  $\Im(f)$  sont dérivables en ce point.  $\Re(f)$  et  $\Im(f)$  sont dérivables en  $x$  si et seulement si  $\bar{f}$  est dérivable en ce point car, au signe près ce sont les coordonnées de la fonction.

**Exercice 4** Soit  $A$  une application d'un intervalle  $I$  dans  $\mathcal{M}_n(K)$ . On écrit, pour tout  $x \in I$ ,  $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j \in [1,n]}$ . Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que  $A$  soit dérivable et calculer sa dérivée.

[Ind]  $\mathcal{M}_n(K)$  peut être vu comme un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie.

[Dem] En effet si nous considérons  $\mathcal{M}_n(K)$  comme un  $K$ -espace vectoriel de dimension  $n^2$ , dans la base canonique de  $K^{n^2}$  les coordonnées de  $A$  sont  $(a_{ij})_{i,j}$ . Ainsi  $A$  est dérivable sur  $I$  si et seulement si pour tout  $i, j$  on a  $a_{ij}$  dérivable sur  $I$ .

**Proposition 7 Dérivée d'un " produit "**. Soient  $f$  et  $g$  des fonctions définies sur l'intervalle  $I$  à valeurs dans  $F$  et  $G$  des espaces de dimension finie et  $B$  une application bilinéaire de  $F \times G$  dans  $H$  espace vectoriel de dimension finie. Si les fonctions  $f$  et  $g$  sont dérivables en  $x \in I$ , la fonction  $B(f, g)$  est alors dérivable en  $x$  de dérivée  $B(f'(x), g(x)) + B(f(x), g'(x))$ .

[Ind] Utiliser la bilinéarité.

[Dem] En traduisant la dérivabilité de  $f, g$  par l'existence d'un D.L. on a  $B(f(x), g(x)) = B(f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x - x_0), g(x_0) + (x - x_0)g'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon'(x - x_0))$  ce qui donne  $B(f(x), g(x)) = B(f(x_0), g(x_0)) + (x - x_0)(B(f'(x_0), g(x_0)) + B(f(x_0), g'(x_0))) + (x - x_0)\eta(x - x_0)$  avec  $\eta(x - x_0) = B(f'(x_0), (x - x_0)\varepsilon'(x - x_0)) + B(\varepsilon(x - x_0), (x - x_0)\varepsilon'(x - x_0)) + B(f'(x_0), (x - x_0)g'(x_0)) + B(\varepsilon(x - x_0), g(x_0)) + B(\varepsilon(x - x_0), (x - x_0)g'(x_0)) + B(\varepsilon(x - x_0), (x - x_0)\varepsilon'(x - x_0)) + B(f'(x_0), \varepsilon'(x - x_0))$ . Il est facile en utilisant la bilinéarité donc la continuité de montrer que  $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta(x - x_0) = 0$ . ceci prouve le résultat.

**Exercice 5** Quelles sont les situations usuelles couvertes par cette proposition ?

[Ind] A vous de trouver, le produit et le produit ...

[Dem] Si nous considérons des fonctions de  $I$  dans  $K$ , le produit (multiplication) est une application bilinéaire de  $\mathcal{F}(I, K) \times \mathcal{F}(I, K)$  dans  $\mathcal{F}(I, K)$ .

Le produit scalaire est une forme bilinéaire de  $E \times E$  dans  $K$ .

Le produit vectoriel dans un espace vectoriel de dimension 3,  $E$ , est une application bilinéaire de  $E \times E$  dans  $E$ .

**Proposition 8 (Dérivée d'une composée)** Soit  $\varphi$  une fonction réelle définie sur l'intervalle  $I$  et  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $J$  non réduit à un point. Si  $\varphi(I) \subset J$ , si  $\varphi$  est dérivable en un point  $x$  de  $I$  et si  $f$  est dérivable en  $\varphi(x)$ , alors  $f \circ \varphi$  est dérivable en  $x$  de dérivée  $(f \circ \varphi)'(x) = \varphi'(x)f'(\varphi(x))$ .

[Ind] Ou bien suivre la composée des D.L. ou bien se ramener au cas d'une variable par les coordonnées.

[Dem] Si on pose avec les notations de la proposition 6 :  $f = \sum_{i=1}^n f_i e_i$  on a alors  $f \circ \varphi = \sum_{i=1}^n f_i \circ \varphi$ . Les  $f_i \circ \varphi$ , fonctions de  $I \subset \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  sont dérivables en  $x$  de dérivées  $(f_i \circ \varphi)'(x) = \varphi'(x)f'_i(\varphi(x))$ . En reportant dans la somme on obtient le résultat.

**Exercice 6** La fonction  $x \mapsto \cos \sqrt{x}$  est-elle dérivable sur  $\mathbb{R}_+$ ?

[Ind] Écrire cette fonction comme la composée de plusieurs fonctions et appliquer la proposition ci-dessus.

[Dem]  $x \mapsto \sqrt{x}$  est une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , pour  $x \in \mathbb{R}_+^*$  la fonction  $\cos \sqrt{x}$  est bien définie. La fonction  $\cos$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , ici l'image de  $\mathbb{R}_+^*$  par la fonction racine est  $\mathbb{R}_+^*$ . Par composition la fonction  $x \mapsto \cos \sqrt{x}$  est donc dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Il reste en 0 : on a  $\frac{\cos \sqrt{h} - 1}{h} = \frac{1 - \frac{h}{2} + o(h) - 1}{h}$  qui tend vers  $-\frac{1}{2}$ . La fonction est dérivable en 0 également. La réponse est oui.

## 7.4 Fonctions de classe $C^k$

$I$  étant un intervalle de  $\mathbb{R}$  non réduit à un point et  $F$  un espace vectoriel de dimension finie, on construit par récurrence la notion de fonction  $n$  fois dérivable et de dérivée  $n^{\text{ième}}$  à partir de la définition d'une fonction dérivable.

**Définition 4** Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Si  $k = 0$ , par convention, on dit qu'une fonction  $f$  de  $I$  dans  $F$  est 0 fois dérivable si elle est simplement définie et on note  $f^{(0)} = f = D^0 f$ . Pour  $k > 0$ , on dit qu'une fonction  $f$  de  $I$  est  $k$  fois dérivable si et seulement s'il existe des fonctions  $f_0, f_1, \dots, f_k$  définies sur  $I$  à valeurs dans  $F$  telles que:  $f_0 = f$ , pour tout  $i \in [0, k-1]$ ,  $f_i$  est dérivable et  $f'_i = f_{i+1}$ . La suite  $(f_i)$  étant unique, on note  $f^{(i)} = f_i$  ou en utilisant l'opérateur  $D$ ,  $D^i f = f_i$ .

**Proposition 9** Soit  $p$  un entier naturel. Si une fonction  $f$  est  $p$  fois dérivable:

elle est  $q$  fois dérivable pour tout entier naturel  $q \leq p$ ,  
 $f^{(q)}$  est  $p - q$  fois dérivable et on a  $(f^{(q)})^{(p-q)} = f^{(p)}$ .

Réciproquement, si une fonction est  $q$  fois dérivable pour un entier  $q \leq p$  et que  $f^{(q)}$  est  $p - q$  fois dérivable alors  $f$  est  $p$  fois dérivable.

[Ind] C'est amusant.

[Dem] Qui peut le plus peut le moins. Et si  $f^{(q)}$  est  $p - q$  fois dérivable il existe alors  $p - q$  fonctions telles que  $f^{(q)(i)} = f^{(q+i)}$ .

On construit par récurrence les ensembles de fonctions de classe  $C^k$  à partir de la notion de fonction  $k$  fois dérivable:

**Définition 5** Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Si  $k = 0$ , on dit qu'une fonction  $f$  de  $I$  dans  $F$  est de classe  $C^0$  si et seulement  $f$  est continue et si  $k > 0$ , on dit qu'une fonction  $f$  de  $I$  dans  $F$  est de classe  $C^k$  si et seulement  $f$  est  $k$  fois dérivable et que  $f^{(k)}$  est continue. On note  $C^k(I, F)$  l'ensemble constitué de telles fonctions.

**Proposition 10** Soit  $k$  un entier naturel supérieur ou égal à 1.

$$f \in C^k(I, F) \iff f \text{ est dérivable et } f' \in C^{k-1}(I, F)$$

[Ind] C'est amusant.

[Dem]  $f$  est  $C^k(I, F)$  ssi  $f$  est  $k$  fois dérivable et  $f^{(k)}$  continue ssi  $f$  est dérivable et  $f'$  est  $k-1$  fois dérivable et  $f'^{(k-1)}$  est continue ssi  $f$  est dérivable et  $f'$  est  $C^{k-1}(I, F)$ . On vérifie bien que chaque ssi correspond à une équivalence, dans un sens et la réciproque.

**Proposition 11** Soit  $p$  un entier naturel. Pour tout entier naturel  $q \leq p$ , on a  $C^p(I, F) \subset C^q(I, F)$

[Ind] Qui peut le plus peut le moins.

[Dem] Si  $f$  est  $C^p(I, F)$  alors  $f$  est  $p$  fois dérivable donc  $f$  est  $q$  fois dérivable et  $f^{(q)}$  est continue comme fonction dérivable.

On appelle  $C^\infty(I, F) = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} C^p(I, F)$  et on a

**Proposition 12** La fonction  $f$  appartient à  $C^\infty(I, F)$  si et seulement si  $f$  est  $n$  fois dérivable pour tout entier  $n$ .

[Ind] Que signifie qu'une fonction est  $C^\infty(I, F)$ .

[Dem]  $f$  est  $C^\infty(I, F)$  ssi  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f \in C^n(I, F)$  donc ssi  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f$  est  $n$  fois dérivable et  $f^{(n)}$  est continue ssi  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f$  est  $n$  fois dérivable.

**Proposition 13** Soient  $f$  et  $g$  des fonctions définies sur l'intervalle  $I$  à valeurs dans  $F$  et  $G$  des espaces de dimension finie et  $B$  une application bilinéaire de  $F \times G$  dans  $H$  espace vectoriel de dimension finie. Si les fonctions  $f$  et  $g$  de classe  $C^k$ , la fonction  $B(f, g)$  est de classe  $C^k$  et on a la formule de Leibniz:

$$B(f, g)^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} B(f^{(i)}, g^{(k-i)})$$

[Ind] Démontrer la formule de Leibniz par récurrence.

[Dem] Il suffit de montrer la formule pour  $p \leq k$   $\mathcal{P}_\checkmark$ :  $B(f, g)$  est  $C^p$  et  $B(f, g)^{(p)} = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} B(f^{(i)}, g^{(p-i)})$ .

Elle est vraie au rang 1, nous l'avons montrée. Supposons la vraie au rang  $p-1$  alors  $B(f, g)^{(p)} = B(f, g)^{(p-1)'} = \left( \sum_{i=0}^{p-1} -1 \binom{p-1}{i} B(f^{(i)}, g^{(p-1-i)}) \right)'$ . Ce qui donne  $B(f, g)^{(p)} = \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p-1}{i} (B(f^{(i+1)}, g^{(p-1-i)}) + B(f^{(i)}, g^{(p-i)}))$ .

Faisons un changement d'indice dans la première somme:  $B(f, g)^{(p)} = \sum_{i=1}^p \binom{p-1}{i-1} B(f^{(i)}, g^{(p-i)}) +$

$\sum_{i=0}^{p-1} \binom{p-1}{i} B(f^{(i)}, g^{(p-i)})$  et en regroupant:  $B(f, g)^{(p)} = B(f, g)^{(p)} + \sum_{i=1}^{p-1} \left( \binom{p-1}{i-1} + \binom{p-1}{i} \right) B(f^{(i)}, g^{(p-i)}) +$

$B(f^{(p)}, g)$ . En utilisant  $\binom{p-1}{i-1} + \binom{p-1}{i} = \binom{p}{i}$  et en regroupant les termes pour  $i=0$  et  $i=p$  on trouve la

formule au rang  $p$ :  $B(f, g)^{(p)} = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} B(f^{(i)}, g^{(p-i)})$  qui prouve que  $B(f, g)$  est  $C^p$ .

**Exercice 7** La fonction  $x \mapsto x^2 e^x$  est classe  $C^\infty$ . Calculer sa dérivée  $n^{\text{ième}}$  pour tout entier  $n$ .

[Ind] Appliquer la formule de Leibniz, un polynôme de degré 2 n'a pas beaucoup de dérivées non nulles.

[Dem]  $(x^2 e^x)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^2)^{(k)} e^x = x^2 e^x + 2n x e^x + n(n-1) e^x$ .

**Proposition 14 Classe d'une composée.** Soit  $\varphi$  une fonction réelle définie sur l'intervalle  $I$  de classe  $C^k$  et  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $J$  non réduit à un point de classe  $C^k$ . Si  $\varphi(I) \subset J$  alors la composée  $f \circ \varphi$  existe et est de classe  $C^k$ .

[Ind] Par récurrence.

[Dem] On a déjà montré le résultat pour  $k = 0$ . En la supposant vraie pour  $k \geq 1$ , si  $\varphi, f$  sont  $C^{k+1}$  alors  $(f \circ \varphi)' = (f' \circ \varphi)\varphi'$  et l'application de la formule de Leibniz et l'hypothèse de récurrence donnent que  $(f \circ \varphi)'$  est  $C^k$  donc  $f \circ \varphi$  est  $C^{k+1}(I, E)$ .

**Exercice 8** Soit  $f$  une fonction réelle ou complexe de classe  $C^k$  qui ne s'annule pas. Montrer que  $\frac{1}{f}$  est de classe  $C^k$ .

[Ind] Utiliser la composée.

[Dem] La fonction  $\frac{1}{f}$  est la composée de  $f$  et de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  qui est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ . Ainsi si  $f$  ne s'annule pas on peut composer et  $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{1}{f^2}f'$ .

### 7.4.1 $C^k$ -difféomorphismes

**Définition 6** Soit  $k \in \mathbb{N}$ ,  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$  non réduit à un point et  $\varphi$  une application de  $I$  dans  $J$ . Si  $\varphi$  est de classe  $C^k$ , si  $\varphi$  est bijective et si  $\varphi^{-1}$  est de classe  $C^k$ , on dit que  $\varphi$  est un  $C^k$ -difféomorphisme de  $I$  sur  $J$ .

**Théorème 1** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  non réduit à un point et  $\varphi$  une fonction de classe  $C^k$  de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ . La fonction  $\varphi$  est un  $C^k$ -difféomorphisme de  $I$  sur l'intervalle  $\varphi(I)$  si et seulement si, pour tout réel  $x$  appartenant à  $I$ ,  $\varphi'(x) \neq 0$ .

[Ind] Rassembler ce que l'on sait.

[Dem] Si  $\varphi$  est un  $C^k$ -difféomorphisme alors elle est injective, donc strictement monotone et par suite sa dérivée ne s'annule pas.

Réciproquement si pour tout réel  $x$  de  $I$ ,  $\varphi'(x) \neq 0$ , alors  $\varphi'$  étant continue, elle garde un signe constant et  $\varphi$  est strictement monotone donc injective et bijective de  $I$  dans  $\varphi(I)$ . Ainsi  $\varphi^{-1}$  existe et est continue si  $k = 0$  nous avons un  $C^0$  difféomorphisme et si  $k \geq 1$  alors  $\varphi^{-1}$  est dérivable de dérivée :  $\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))}$ . Ceci montre que  $(\varphi^{-1})'$  est  $C^{k-1}$  comme composée et opération de fonctions  $C^{k-1}$ , donc  $\varphi^{-1}$  est  $C^k$  et  $\varphi$  est un  $C^k$  difféomorphisme de  $I$ .

**Exercice 9** Soient  $a$  et  $b$  deux réels. Construire un difféomorphisme de classe  $C^\infty$  de  $]a, b[$  dans  $\mathbb{R}$ .

[Ind] Penser à la fonction  $\tan$ , puis comment envoyer  $]a, b[$  dans  $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$

[Dem] L'application  $x \mapsto -\frac{\pi}{2} \frac{x-b}{a-b} + \frac{\pi}{2} \frac{a-x}{a-b}$  réalise un  $C^\infty$  difféomorphisme de  $]a, b[$  dans  $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ , il n'y a plus qu'à le composer avec le  $C^\infty$  difféomorphisme  $\tan$ .

**Exercice 10** Soit  $f$  une fonction réelle définie sur  $\mathbb{R}$  et dérivable telle que les limites  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  existent, sont réelles et égales. Montrer que la fonction  $f \circ \tan$  définie sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  est prolongeable par continuité sur les bords de l'intervalle. En déduire qu'il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $f'(c) = 0$ .

[Ind] Pour le prolongement il suffit d'appliquer la définition de la continuité  $\tilde{\text{A}}\text{C}$ , puis appliquer Rolle à  $f \circ \tan$  et conclure.

[Dem] Posons  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ . La fonction  $g = f \circ \tan$  est prolongeable en  $\pm \frac{\pi}{2}$  par continuité en posant  $g(\frac{\pi}{2}) = \ell$  et  $g(-\frac{\pi}{2}) = \ell$ . Nous avons donc une fonction continue et dérivable sur le

compact  $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$  et  $g(-\frac{\pi}{2}) = g(\frac{\pi}{2})$ . D'après Rolle il existe un point  $d \in ]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$  tel que  $g'(d) = 0$ . Or  $g'(d) = f'(\tan(d)) \frac{1}{1+d^2}$ . Ainsi en posant  $c = \tan(d)$  on a  $f'(c) = 0$ .

## 7.4.2 Fonctions de classe $C^1$ par morceaux

**Définition 7** Soit  $f$  une fonction définie sur l'intervalle  $[a, b]$  à valeurs dans  $F$ . La fonction  $f$  est dite de classe  $C^1$  par morceaux sur  $[a, b]$  s'il existe une subdivision  $S: a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$  telle que, pour tout  $i \in [0, n-1]$ , la restriction de  $f$  à l'intervalle ouvert  $]a_i, a_{i+1}[$  soit prolongeable en une fonction  $\tilde{f}_i$  de classe  $C^1$  sur  $[a_i, a_{i+1}]$ . La subdivision  $S$  est dite adaptée ou subordonnée à la fonction  $f$ .

**Définition 8** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . une fonction  $f$  définie sur  $I$  est de classe  $C^1$  par morceaux sur  $I$  si sa restriction à tout segment inclus dans  $I$  est de classe  $C^1$  par morceaux sur ce segment.

**Proposition 15** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  non réduit à un point et. L'ensemble des fonctions de classe  $C^1$  par morceaux définies sur  $I$  à valeurs dans un espace vectoriel normé  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(I, F)$  noté  $C_{pm}^1(I, F)$ .

[Ind] Le vérifier en prenant une subdivision commune.

[Dem] Prenons le cas où  $I$  est fermé.  $C_{pm}^1(I)$  est non vide car contient 0, si  $f, g$  sont dedans et  $\lambda$  un scalaire, prenons une subdivision commune à  $f, g$ , disons  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ . Pour tout  $i \in [0, n-1]$ , la restriction de  $f + \lambda g$  à l'intervalle ouvert  $]a_i, a_{i+1}[$  est prolongeable en une fonction  $\tilde{f}_i + \lambda \tilde{g}_i$  de classe  $C^1$  sur  $[a_i, a_{i+1}]$ , donc  $f + \lambda g$  est  $C^1$  par morceaux.

Dans le cas où  $I$  est quelconque on raisonne sur chaque fermé contenu dans  $I$ .

**Proposition 16** Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $F, G$  et  $H$  trois espaces vectoriels normés,  $B$  une application bilinéaire continue de  $F \times G$  dans  $H$ . Si  $f \in C_{pm}^1(I, F)$  et  $g \in C_{pm}^1(I, G)$  alors  $B(f, g) \in C_{pm}^1(I, H)$ .

[Ind] Prendre encore une subdivision commune et utiliser ce que vous savez.

[Dem] D'abord pour les intervalles fermés. En prenant une subdivision adaptée à  $f$  et  $g$ , disons  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ . Pour tout  $i \in [0, n-1]$ , les restrictions de  $f$  et  $g$  à l'intervalle ouvert  $]a_i, a_{i+1}[$  sont prolongeables en des fonctions  $\tilde{f}_i$  et  $\tilde{g}_i$  de classe  $C^1$  sur  $[a_i, a_{i+1}]$ . Ainsi les  $B(\tilde{f}_i, \tilde{g}_i)$  sont  $C^1$  sur  $]a_i, a_{i+1}[$  (résultat déjà montré). Donc  $B(f, g)$  est  $C_{pm}^1$ . Ensuite pour  $I$  quelconque on fait la même chose que pour la proposition précédente.

Soit  $f$  une fonction  $f$  de classe  $C^1$  par morceaux définie sur un segment  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  et  $S_1$  l'ensemble des points de  $[a, b]$  où  $f$  n'est pas dérivable.  $S_1$  est un ensemble fini et la fonction  $\tilde{D}f$  définie sur  $[a, b]/S_1$  par  $\tilde{D}f(x) = f'(x)$  pour tout  $x \in [a, b]/S_1$  s'appelle encore dérivée de la fonction  $f$ . Exemple: La fonction  $f$  définie sur  $[-1, 1]$  par  $f(x) = x|x|$  est de classe  $C^1$   $[-1, 1]$ . La fonction  $f'$  est définie sur  $[-1, 1]$  par

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

**Proposition 17** Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1$  par morceaux définie sur un intervalle  $[a, b]$  à valeurs dans  $F$ .  $f$  est une fonction en escalier si et seulement si  $\tilde{D}f$  est nulle sur son ensemble de définition.

[Ind] Que signifie être en escalier ?

[Dem]  $f$  est en escalier si et seulement si il existe une subdivision à l'intérieur de laquelle la fonction est constante c'est à dire si et seulement si  $\tilde{D}f$  est nulle.

**Remarque:** Une fonction continue et de classe  $C^1$  par morceaux dont la dérivée est nulle est donc constante.



## 7.5 Arcs Paramétrés.

### 7.5.1 introduction

Les courbes ont toujours fasciné les mathématiciens mais aussi les artistes. La folium de Dürer (1471)  $\rho = a \sin \frac{\vartheta}{2}$  a été peinte et gravée par lui. Nous pouvons remonter loin dans l'histoire, la cissoïde de Dioclès  $\rho = a \left( \frac{1}{\cos \vartheta} - \cos \vartheta \right)$  date de -180. Il y a eu donc l'étude pure (géométrique et cinématique) des courbes par leurs descriptions multiples. C'est ainsi que la plupart des courbes proviennent de la description d'un lieu de points liés. Les cycloïdales : courbes étudiée par Charles Bouvelles en 1501, Mersenne et Galilée en 1599, Roberval en 1634, Toricelli en 1644 etc... (Cette courbe n'était donc pas connue des Grecs) sont des courbes décrites par un point d'un cercle de rayon  $R$  roulant sans glisser sur une droite ( $D$ ) ; c'est donc un cas particulier de roulette. Son équation  $z = R(t + i - e^{-it})$ .

Mais l'étude des courbes a permis de faire progresser les théories mathématiques. L'histoire des courbes planes est intimement liée à l'histoire et au développement du calcul infinitésimal. Il faut néanmoins attendre Riemann (1854) pour avoir une définition globale et mathématiquement satisfaisante des courbes. Par exemple la caustique du cercle : des rayons lumineux parallèles sont réfléchis par un cercle. On a une famille de droites dont on souhaite trouver l'enveloppe (courbe tangente à chacune des droites). L'enveloppe de courbes logistiques : un canon tire des obus dans toutes les directions à une vitesse constante  $v_0 = 1$ . Trouver l'enveloppe de ces paraboles (Toricelli 1644). Le mouvement de la parabole peut-être décrit par  $x(t) = \frac{t}{\sqrt{1+a^2}}, y(t) = \frac{at}{\sqrt{1+a^2}} - \frac{t^2}{2}$  ce qui donne en éliminant  $t = x\sqrt{1+a^2}$  et en reportant  $y = ax - \frac{x^2(1+a^2)}{2}$  et en dérivant partiellement par rapport à  $a$  :  $\frac{\partial y}{\partial a} = x - ax^2$  d'où  $a = \frac{1}{x}$  et en reportant dans l'équation de départ :  $y = \frac{(1-x^2)}{2}$  c'est une parabole de foyer le canon. Que de calcul différentiel ! Enfin si on veut déterminer le cercle approchant le mieux possible une courbe en un point, nous tombons sur le centre de courbure et le rayon de courbure. L'isochrome de Leibniz, la tractrice, la caténaire, la brachystochrome ont permis par la recherche de la longueur de faire progresser le calcul intégral; la recherche de leur équation, les équations différentielles. Même plus tard certaines belles courbes comme celles de Peano (1890), Hilbert (1878) ou de Von Koch (1906) sur les ensembles négligeables montrent à quel point les courbes sont fascinantes.

### 7.5.2 Courbes paramétrées

#### Définition tangente.

Nous travaillons dans un espace affine  $A$  attaché à un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ , euclidien  $E$ . Il nous suffit de considérer  $\mathbb{R}^n$  muni de sa structure habituelle.

**Définition 9** On appelle courbe paramétrée ou arc paramétré  $\Gamma$  toute fonction  $f$  de classe  $C^k$  avec  $1 \leq k \leq +\infty$  d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  dans l'espace euclidien  $E$ . ( $E$  sera  $\mathbb{R}^n$  avec  $1 \leq n \leq 3$ ).  $(I, f)$  est un paramétrage de  $\Gamma$ .

On dit que  $(I, f)$  et  $(J, g)$  sont deux paramétrages  $C^k$ -équivalents si et seulement si il existe un  $C^k$  difféomorphisme  $\theta : J \mapsto I$  tel que  $g = f \circ \theta$ .

Un arc géométrique est l'ensemble des arc paramétrés définis à un paramétrage  $C^k$ -équivalent près.

Un paramétrage admissible d'un arc géométrique  $\Gamma$  est un paramétrage  $(I, f)$   $C^k$  tel que  $\Gamma = (I, f)$ .

Le support de l'arc  $\Gamma = (I, f)$  est l'ensemble  $\{M \in E : \exists \epsilon \in I ; M = f(\epsilon)\}$

Ainsi par exemple l'application définie sur  $\mathbb{R}$  par  $M(t) = (0, 1) + t(\vec{i} + \vec{j}) + t^2 \frac{\vec{j}}{2}$  définit une courbe paramétrée que l'on peut écrire aussi : 
$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} \end{cases} .$$

**Remarque:** Nous partons de l'aspect cinématique où la courbe est donnée avec son paramétrage. C'est à dire qu'un arc est donné avec son mode de parcours.

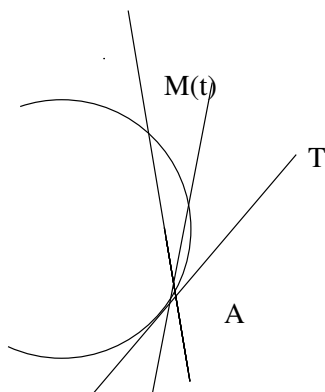
**Définition 10** Soit un arc paramétré  $\Gamma = (I, f)$  et  $A(t_0)$  un point de l'arc. On dit que  $\Gamma$  admet en  $A$  une tangente  $D_0$  si la droite  $D(t, t_0)$  passant par  $A$  et  $M(t)$  admet une limite lorsque  $t \rightarrow t_0$ . 
$$D_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} D(A, M(t))$$

**Remarque:** Cela suppose qu'il existe un voisinage de  $t_0$   $]t_0 - h, t_0 + h[$  dans lequel  $M(t) \neq M(t_0)$  car sinon la droite  $D(t, t_0)$  n'existe pas.

**Remarque:** Pour la limite de droites : On a  $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathcal{D}(\vec{u}(t)) = \mathcal{D}(\vec{u})$  ( $\vec{u}(t)$  et  $\vec{u}$  étant normés) si et seulement si la distance entre les droites tend vers 0. Ceci se traduit par l'angle entre les deux droites tend vers 0. Ou encore  $\lim_{t \rightarrow t_0} \sqrt{1 - \langle \vec{u}(t), \vec{u} \rangle^2} = 0$ .

La limite peut être prise par les vecteurs directeurs : pour que la tangente existe il suffit que, pour chaque  $t$  il existe un vecteur directeur de  $D(A, M(t))$ ,  $\lambda(t) \overrightarrow{AM}(t)$  ayant une limite non nulle par exemple par les coordonnées. On peut aussi regarder la limite sur les équations de la droite par les coefficients:  $a(t)X + b(t)Y + c(t) = 0$ . On démontre que l'existence et la limite ne dépendent pas du mode de définition choisie.

Si on prend pour chaque droite,  $\mathcal{D}(A, M(t))$  le vecteur directeur normé associé à  $\overrightarrow{AM}(t)$  on définit alors les demi-tangentes. La tangente existe si les deux demi-tangentes définissent la même droite.



**Théorème 2** Soit un arc paramétré  $\Gamma : (I, f)$  de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ . Si en un point  $A(t_0)$  il existe un entier  $p$  tel que  $f^{(p)}(t_0) \neq 0$  alors en considérant le plus petit entier  $p_1$  vérifiant  $f^{(p_1)}(t_0) \neq 0$  la tangente en  $A$  est la droite passant par  $A$  et de base  $\overrightarrow{f^{(p_1)}(t_0)}$ .

[Dem] on suppose implicitement que  $k \geq p_1$  le développement de Taylor-young en  $t_0$  donne :

$$\overrightarrow{AM}(t) = f(t) - f(t_0) = \frac{(t - t_0)^{p_1}}{p_1!} \left( f^{(p_1)}(t_0) + \epsilon(t) \right)$$

avec  $\lim_{t \rightarrow t_0} \epsilon(t) = 0$ . Comme  $f^{(p_1)}(t_0) \neq 0$  il existe un voisinage de  $t_0$  tel que  $(f^{(p_1)}(t_0) + \epsilon(t)) \neq 0$  et la droite  $D(A, M(t))$  existe, a pour vecteur directeur  $f^{(p_1)}(t_0) + \epsilon(t)$  (on a pris  $\lambda(t) = \frac{p_1!}{(t - t_0)^{p_1}}$ ) et possède une limite non nulle.

**Définition 11** Pour un arc paramétré,  $\Gamma = (I, f)$ , on appelle vecteur unitaire tangent  $\vec{T}$  un vecteur unitaire porté par la tangente.

**Exercice 11** Soit  $(\Gamma, f)$  un arc de classe  $C^k$  de  $\mathbb{R}^n$ , choisissons un repère  $(O, e_1, \dots, e_n)$ . Ainsi  $f(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t) \cdot e_i$  et le point  $M(t)$  a pour coordonnées dans ce repère les  $x_i(t)$ . Si  $p_1$  est le premier entier dont la dérivée en  $t_0$  est non nulle, la tangente en ce point admet pour paramétrisation :  $X_i = x_i(t_0) + \lambda x_i^{(p_1)}(t_0)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

**Définition 12** Un point  $M(t)$  d'un arc paramétré  $(I, f)$  est dit régulier si  $f'(t) \neq 0$ . Sinon il est dit stationnaire. Un point est dit birégulier si  $f'(t) \neq 0$  et  $(f'(t), f''(t))$  libre.

### 7.5.3 Etude pratique :

Dans le cas d'une courbe définie par :  $y = f(x)$  on a en un point  $x_0$  la tangente  $T$  définie par :  $Y - y_0 = f'(x_0)(X - x_0)$ . En effet la fonction  $F$  correspondant au paramétrage est :  $\begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases}$  et donc le premier vecteur dérivée est :  $\begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix}$  qui n'est jamais nul.

## 7.6 Position d'un arc plan par rapport à sa tangente.

Soit un arc plan  $\Gamma = (I, f)$  de classe  $C^k$ . On suppose qu'en  $t_0$  le point  $A$  a pour premiers entiers  $p$  et  $q$ . C'est à dire  $p$  est le premier entier tel que  $f^{(p)}(t_0) \neq 0$  et  $q$  est le premier entier tel que  $(f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$  est libre.

En écrivant un développement de Taylor-young à l'ordre  $q$  en  $t_0$  on a :

$$\overrightarrow{AM}(t) = \frac{(t - t_0)^{(p)}}{p!} (1 + \lambda(t)) f^{(p)}(t_0) + \frac{(t - t_0)^{(q)}}{q!} (f^{(q)}(t_0) + \epsilon(t))$$

En effet de  $p+1$  à  $q-1$  les vecteurs dérivées sont colinéaires à  $f^{(p)}(t_0)$  et de plus ils ont au moins une fois  $(t - t_0)$  en facteur, nous pouvons donc affirmer que  $\lim_{t \rightarrow t_0} \lambda(t) = 0$ , de même  $\lim_{t \rightarrow t_0} \epsilon(t) = 0$ .

Nous travaillons maintenant dans le repère  $(A, f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$  si  $\zeta(t)$  et  $\sigma(t)$  sont les coordonnées de  $M(t)$  dans ce repère on a :

$$\begin{cases} \zeta(t) = \frac{(t - t_0)^p}{p!} \left( 1 + \lambda(t) + \frac{p!}{q!} (t - t_0)^{q-p} \epsilon_1(t) \right) \\ \sigma(t) = \frac{(t - t_0)^q}{q!} (1 + \epsilon_2(t)) \end{cases} \quad (\epsilon_1(t), \epsilon_2(t)) \text{ sont simplement les coordonnées}$$

de  $\epsilon(t)$  dans le repère. On a donc  $\begin{cases} \zeta(t)_{t \rightarrow t_0} \sim \frac{(t - t_0)^p}{p!} \\ \sigma(t)_{t \rightarrow t_0} \sim \frac{(t - t_0)^q}{q!} \end{cases}$  ainsi  $\zeta(t)$  change de signe quand  $p$  est

impair et  $\sigma(t)$  change de signe quand  $q$  est impair. D'où les définitions de point d'inflexion, de rebroussement.

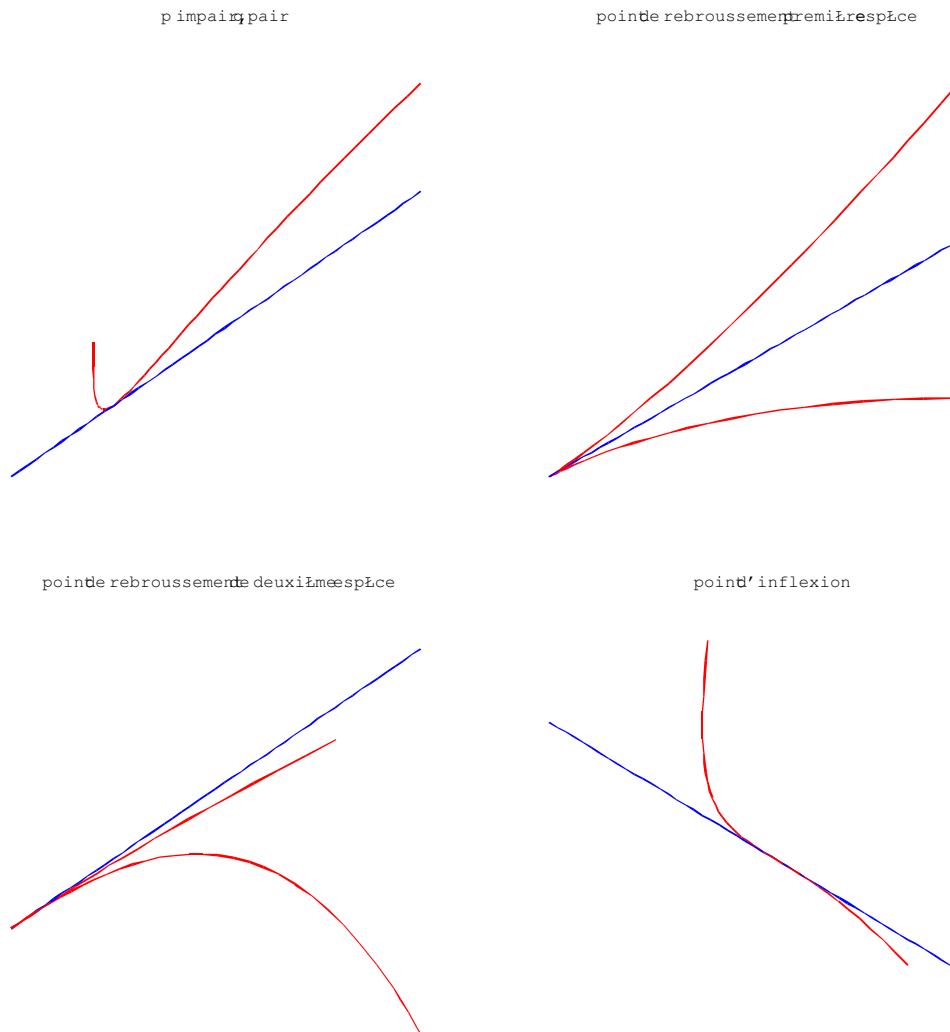
Dans la figure 2-1 on a  $p$  impair et  $q$  paire :  $\begin{cases} x(t) = 1 + t^2 \\ y(t) = t \ln t \end{cases}$  dans la figur 2-2 on a le cas

d'un point de rebroussement de première espèce  $p$  paire et  $q$  impair  $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}(t^2 - 2t) \\ y(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 \end{cases}$  en

$t=0$ . En 2-3 on a le cas du point de rebroussement de deuxième espèce  $p$  pair et  $q$  paire :

$\begin{cases} x(t) = e^{t-1} - t \\ y(t) = t^3 - 3t \end{cases}$  en  $t=1$ . Et enfin en 2-4 on le cas d'un point d'inflexion  $p$  impair et  $q$  impair

$$\begin{cases} x(t) = \ln \left( \frac{t^4}{(t-2)^2} \right) \\ y(t) = \frac{t^2(t-6)}{5} \end{cases} \quad \text{en } t = \frac{4}{3}.$$



Concavité : en un point birégulier  $M(t_0)$  la concavité est déterminé par le demi-plan  $\mathcal{P}(M_0, f'(t_0), f''(t_0))$ .

En un point d'inflexion la concavité change. Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  le repère considéré.

Pour étudier la concavité, on veut savoir si la courbe est dans le demi-plan défini par la tangente et contenant le point  $M_0 + \vec{j}$ . On a  $f'(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j}$  et  $f''(t_0) = x''(t_0)\vec{i} + y''(t_0)\vec{j}$  ce qui donne en un point où  $x'(t_0) \neq 0$  on obtient :  $f''(t_0) = \frac{x''(t_0)}{x'(t_0)} (f'(t_0) - y'(t_0)\vec{j}) + y''(t_0)\vec{j}$

la coordonnée sur  $\vec{j}$  donne  $x'(t_0)(y'(t_0)x''(t_0) - y''(t_0)x'(t_0))$  si cette expression est positive cela signifie que  $f''(t_0)$  et  $\vec{j}$  sont du même côté que la tangente. La courbe tourne sa concavité vers les  $y$  positifs. Si  $x'(t_0) = 0$  alors  $y'(t_0) \neq 0$  et il faut regarder la concavité par rapport aux  $x$ .

## 7.7 Branche infinies. (Révision)

### 7.7.1 Définitions

**Définition 13** Soit  $\Gamma = (I, f)$  un arc paramétré et  $t_0$  une borne de  $I$ , on dit que  $\Gamma$  admet en  $t_0$  une branche infinie si  $\lim_{t \rightarrow t_0} \|f(t)\| = +\infty$ .

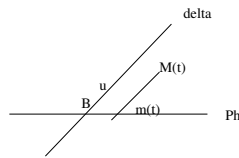
**Définition 14** Soit  $\Gamma = (I, f)$  un arc paramétré admettant en  $t_0$ , borne de  $I$ , une branche infinie. Si pour un point  $A$  fixé la droite  $\mathcal{D}(A, M(t))$  admet une limite  $\Delta_A$ , lorsque  $t$  tend vers  $t_0$ ,

la direction de  $\Delta_A$  est indépendante du point  $A$ , et on appelle celle-ci la direction asymptotique de la branche infinie.

**Remarque:** Comme il y a une branche infinie on a  $\lim_{t \rightarrow t_0} \|\overrightarrow{AM}(t)\| = +\infty$  et pour voir s'il y a une direction asymptotique on regarde si un vecteur directeur de  $\mathcal{D}(A, M(t))$  admet une limite en  $t_0$  c'est à dire si  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\overrightarrow{AM}(t)}{\|\overrightarrow{AM}(t)\|}$  existe.

**Définition 15** Soit un arc paramétré  $\Gamma = (I, f)$  admettent en  $t_0$ , borne de  $I$ , une branche infinie de direction asymptotique  $\delta = \mathbb{R}\vec{u}$ . On dit que  $\Gamma$  possède une asymptote en  $t_0$  si la droite  $\mathcal{D}(M(t), \vec{u})$  admet une limite en  $t_0$ .

**Remarque:** Si cette limite existe cela donne une droite  $\Delta = \mathcal{D}(B, \vec{u})$ . Soit un sev supplémentaire  $\Phi$  de cette droite  $\Delta$ , passant par  $B$ . Alors le projeté de  $M(t)$  sur  $\Phi$  admet pour limite en  $t_0$  le point  $B$ . On a donc que la distance de  $M(t)$  à  $\Delta$  tend vers 0 en  $t_0$ .



### 7.7.2 Etude pratique.

**Cas où l'arc est défini par une équation cartésienne:**

$\Gamma$  est défini par  $y = f(x)$ . On suppose que  $f$  est une fonction continue sur  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$ . On a alors  $\|\overrightarrow{OM}(x)\|^2 = x^2 + (f(x))^2$  et cette norme devient infinie en  $x_0$  dans les cas suivants :

$$\begin{cases} x_0 = +\infty \\ x_0 = -\infty \\ x_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty \end{cases}$$

**Si  $x_0 = b \in \mathbb{R}$  et  $I = ]a, b[$  avec  $\lim_{x \rightarrow b} |f(x)| = +\infty$**  La droite  $\mathcal{D}(O, M(t))$  admet pour vecteur directeur  $\vec{V}(x) = \frac{x}{f(x)}\vec{i} + \vec{j}$  et a pour limite  $\vec{j}$  donc on a une direction asymptotique dans la direction  $\vec{j}$ . (On remarque que pour tout  $x$  assez grand ce vecteur  $\vec{V}(x)$  est bien défini et jamais nul). Ensuite la droite  $\mathcal{D}(M(x), \vec{j})$  a pour équation  $(X - x) = 0$  qui admet pour limite en  $x_0$  la droite  $X = x_0$  qui est donc asymptote.

**Si  $x_0 = \pm\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0} f = a$**  Notons que cette limite peut ne pas exister même dans  $\overline{\mathbb{R}}$ . Dans ce cas la droite  $y = a$  est asymptote. La position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par l'étude du signe de  $(f(x) - a)$ .

**Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$**  Nous supposons que la limite est  $+\infty$ . (pour l'autre cas il suffit de changer  $f$  en  $-f$ ) Pour la direction asymptotique on regarde  $\mathcal{D}(O, M(x))$  qui admet pour vecteur directeur  $x\vec{i} + f(x)\vec{j}$ , pour étudier la limite, comme  $x$  est grand et donc non nul on peut étudier  $\vec{i} + \frac{f(x)}{x}\vec{j}$ . Nous pouvons interpréter  $\frac{f(x)}{x} = \tan \theta(x)$  avec  $\theta(x)$  l'angle que fait cette droite avec l'axe des  $x$ . (ce qui revient à prendre comme vecteur directeur  $\cos \theta(x)\vec{i} + \sin \theta(x)\vec{j}$ ).

**Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$**  alors il y a une direction asymptotique de vecteur directeur  $(1, \ell)$  ou pour équation  $y = \ell x$ .

Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  alors  $\lim \theta(x) = \frac{\pi}{2}$  et la droite  $\mathbb{R}\vec{j}$  est direction asymptotique.

Pour la recherche d'asymptote on regarde  $\lim \mathcal{D} (M(x), \vec{j})$

**Dans le cas où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$**  . Cette droite a pour équation  $X = x$  et comme  $x$  tend vers  $+\infty$  il n'y a pas d'asymptote. On parle alors de branche parabolique (c'est en effet le cas de la parabole).

**Dans l'autre cas où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$**  la droite  $\mathcal{D} (M(x), \vec{i} + \ell\vec{j})$  apour équation  $Y - f(x) = \ell(X - x)$  elle admettra une limite si  $(f(x) - \ell x)$  en admet une donc :

- Si  $\lim y - \ell x = m$  alors la droite  $y = \ell x + m$  est asymptote, l'étude du signe de  $y - \ell x - m$  donnant la position de la courbe par rapport à celle-ci.
- Si  $\lim y - \ell x = \pm\infty$  on dit que la courbe admet une branche parabolique dans la direction  $y = \ell x$ .

Précisons bien que l'étude n'est pas exhaustive on peut très bien avoir l'inexistence de ces limites.

### Cas des arcs paramétrés $\Gamma = (I, f)$

Prenons le cas  $I = ]a, b[$  avec  $f(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ , nous sommes dans le cas où il y a une branche infinie et donc  $\lim (x(t)^2 + y(t)^2) = +\infty$ . On a alors les résultats suivants :

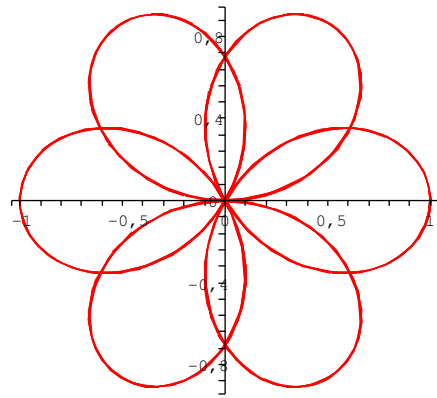
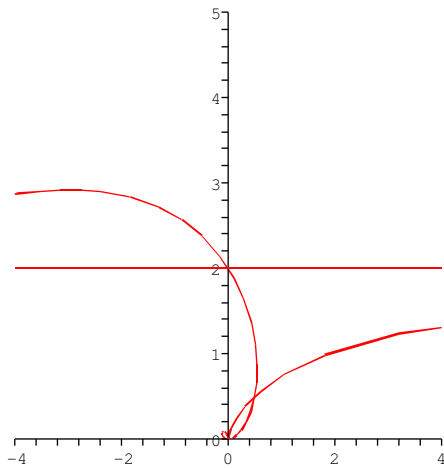
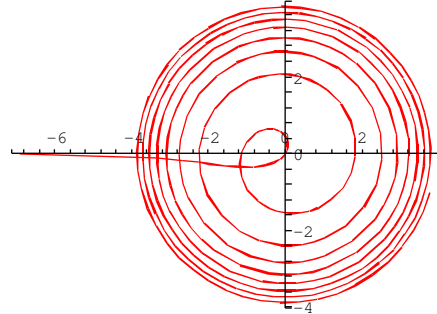
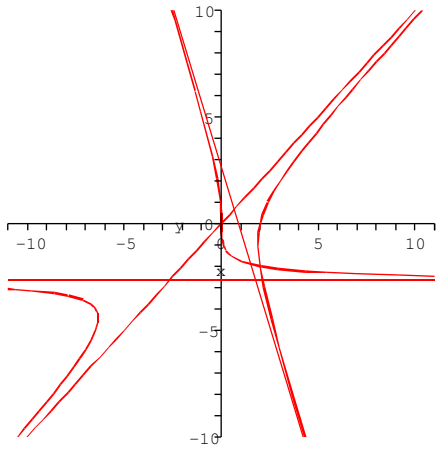
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \lim_b x(t) = x_0 \text{ et } \lim_b y(t) = \pm\infty \text{ alors } \mathcal{D} |x = x_0 \text{ est asymptote (*)} \\ \text{si } \lim_b x(t) = \pm\infty \text{ et } \lim_b y(t) = y_0 \text{ alors } \mathcal{D} |y = y_0 \text{ est asymptote} \\ \text{si } \lim_b x(t) = \pm\infty \text{ et } \lim_b y(t) = \pm\infty \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \lim_b \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty \text{ alors il y a une direction asymptotique } Oy \text{ et une BP de direction } Oy \\ \text{si } \lim_b \frac{y(t)}{x(t)} = \ell \text{ la droite } y = \ell x \text{ est direction asymptotique et} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \lim_b y(t) - \ell x(t) = m \text{ alors } \Delta |y = \ell x + m \text{ est asymptote et (**)} \\ \text{si } \lim_b y(t) - \ell x(t) = \pm\infty \text{ on a une BP de direction } y = \ell x \\ \text{si la limite n'existe pas on ne peut rien dire.} \end{array} \right.$$

(\*) la position de la courbe par rapport à l'asymptote est donné par le signe de  $x(t) - x_0$

(\*\*) la position de la courbe par rapport à l'asymptote est donné par le signe de  $y(t) - \ell x(t) - m$



Dans la figure 3-1 :  $\begin{cases} x(t) = \frac{t^3}{(t-1)(t+2)} \\ y(t) = \frac{t^2 - 2t}{t-1} \end{cases}$  on a deux asymptotes et un point double.

Dans la figure 3-2 :  $r = \ln \theta$  on a une asymptote et une branche spirale, et quelques points doubles.

Dans la figure 3-3 :  $r = (1 - \sin \theta) \cot an \frac{\theta}{2}$  une asymptote et un petit bout à l'origine.

Dans la figure 3-4 :  $r = \sin \frac{3\theta}{2}$

## 7.8 Diverses modes de représentation des arcs

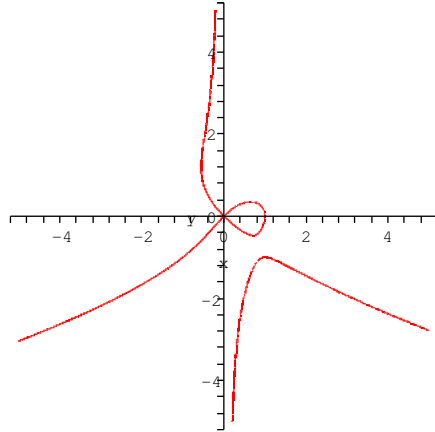
Nous avons vu les courbes paramétrées, les courbes en polaire il nous reste à voir les courbes définies par une équation implicite  $f(x, y) = 0$ . On démontre que localement sous certaines conditions ces divers modes de définition sont équivalents : Si  $f$  est  $C^1$  sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  dans un voisinage de  $M_0(x_0, y_0)$  tel que  $f(x_0, y_0) = 0$  et  $df(x_0, y_0) \neq 0$  il existe un réel  $\varepsilon$ , une fonction  $\varphi$  définie sur l'intervalle  $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$  et un intervalle  $]y_0 - \eta, y_0 + \eta[$  tels que l'équation  $f(x, y) = 0$  avec  $(x, y) \in ]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[ \times ]y_0 - \eta, y_0 + \eta[$  équivaut à  $y = \varphi(x)$  ( ou  $x = \varphi(y)$ ) avec  $x \in ]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$  (ou  $y \in ]y_0 - \eta, y_0 + \eta[$ ). Regarder ce qui se passe pour le cercle unité d'équation  $x^2 + y^2 = 1$ .

Pour une courbe définie implicitement :

La tangente en un tel point a pour équation  $(X - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (Y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$  un

vecteur normal est  $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$ .

ci-dessous  $xy^3 + x^3 + y^2 - x^2 = 0$



## 7.9 Interprétation cinématique

Un arc paramétré  $\Gamma = (I, f)$  représente un mouvement ponctuel. Pour tout  $t$  de  $I$  :  $\vec{V}(t) = \frac{df}{dt}(t)$  s'appelle la vitesse à l'instant  $t$  et le nombre  $v(t) = \|\vec{V}(t)\|$  s'appelle la vitesse numérique. De même  $\vec{\Gamma}(t) = \frac{d^2f}{dt^2}(t)$  s'appelle l'accélération, l'énergie cinétique est  $T = \frac{1}{2}mv^2(t)$  où  $m$  est la masse de la particule en mouvement. Un mouvement est dit rectiligne si sa trajectoire est contenue dans une droite; il est dit uniforme si sa vitesse numérique  $v(t)$  est constante; il est à accélération centrale s'il existe un point  $O$  tel qu'à chaque instant  $t$  le vecteur  $\vec{OM}$  et le vecteur accélération sont colinéaires (on démontre qu'un mouvement à accélération centrale admet une trajectoire décrite par une équation en polaire  $\rho = f(\theta)$ ).

Dans le cas d'un mouvement plan : La vitesse et l'accélération ont pour coordonnées :  $\begin{cases} \vec{V}(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} \\ \vec{\Gamma}(t) = x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j} \end{cases}$

et en coordonnées polaires :  $\begin{cases} \vec{V}(\theta) = r'(\theta)\vec{u} + r(\theta)\vec{v} \\ \vec{\Gamma}(\theta) = (r''(\theta) - r(\theta))\vec{u} + 2r'(\theta)\vec{v} \end{cases}$

## 7.10 Propriétés métriques des courbes planes paramétrées.

### 7.11 Longueur d'un arc, abscisse curviligne

#### 7.11.1 Définitions

**Définition 16** Soit  $\Gamma = (I, f)$ ,  $I = [a, b]$  un arc paramétré de classe  $C^1$ . La longueur de l'arc est le réel  $L = \int_a^b \|f'(t)\| dt$

**Remarque:** Pour répondre à l'éternelle question : Pourquoi la norme de  $f'$ , on peut sans entrer dans le détail considérer une ligne polygonale :  $a = t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$  et



les points correspondant  $M_i = M(t_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Cette ligne a pour longueur  $\sum_{i=1}^{n-1} \left\| \overrightarrow{M_i M_{i+1}} \right\| = \sum_{i=1}^{n-1} \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\| = \sum_{i=1}^{n-1} \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t) dt \right\| \leq \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t)\| dt$  nous admettons, mais on démontre, que la borne supérieure des longueurs des lignes polygonales ainsi construites est égale au majorant  $\int_a^b \|f'(t)\| dt$ .

**Définition 17** Soit un arc régulier  $\Gamma = (I, f)$  on définit l'abscisse curviligne de l'arc  $\Gamma$  orienté suivant les  $t$  croissants, ayant le point  $M(t_0)$  comme origine par  $s(t) = \int_{t_0}^t \|f'(u)\| du$ .

Ainsi on a que  $s$  est dérivable et  $s'(t) = \|f'(t)\| > 0$  donc  $s$  est croissante, de plus si  $I = [a, b]$  la longueur de  $\Gamma$  est  $L = s(b) - s(a)$ .

Si  $J = s(I)$  on a que  $s$  est une bijection bicontinue ( $s$  et  $s^{-1}$  sont continues), si  $s$  est  $C^k$  alors  $s^{-1}$  est  $C^k$  ( $s$  est une application continue strictement croissante sur un intervalle). On peut alors définir  $\Gamma$  par le paramètre  $s$  c'est à dire  $\Gamma = (J, g)$ , avec  $g = f \circ s^{-1}$ . On dit alors que  $\Gamma$  est paramétré par l'abscisse curviligne.

Calcul de l'abscisse curviligne :

Si on pose  $f(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$  on a alors  $\frac{ds}{dt}(t) = \|f'(t)\| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$  ce que l'on note  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ .

### 7.11.2 Repère de Frenet

Soit  $\Gamma$  un arc paramétré par  $(I, f)$ , régulier, on regarde l'arc  $\Gamma$  paramétré aussi par l'abscisse curviligne  $(J, g)$ . On a donc  $\overrightarrow{OM} = f(t) = g(s)$  et  $\frac{dM}{ds} = \frac{dM}{dt} \frac{dt}{ds} = f'(t) \frac{dt}{ds}$  d'où  $\left\| \frac{dM}{ds} \right\| = \|f'(t)\| \frac{1}{\|f'(t)\|} = 1$  car  $\frac{ds}{dt}(t) = \|f'(t)\|$ .

**Définition 18** Le vecteur normé  $\vec{T} = \frac{dM}{ds}$  est appelé vecteur tangent unitaire orienté. On définit  $\vec{N}$  le vecteur directement orthogonal à  $\vec{T}$ . Le repère  $(M(s), \vec{T}(s), \vec{N}(s))$  s'appelle repère de Frenet de  $\Gamma$  en  $M(s)$ .

**Définition 19** Soit  $\Gamma$  un arc, on dit que  $M : I \rightarrow \mathcal{E}$  est une représentation normale si et seulement si : pour tout  $t$  de  $I$  :  $\|M'(t)\| = 1$ . L'arc est alors régulier.

**Proposition 18** Si  $M$  est une représentation normale, alors l'abscisse curviligne au point  $t$  est  $s(t) = t - t_0$ .

### 7.11.3 Courbure

**Théorème 3** Soit  $\Gamma = (I, f)$  un arc paramétré de classe  $C^k$ ,  $k \geq 2$ , régulier. il existe une fonction  $\alpha$  de classe  $C^{k-1}$  sur  $I$  telle que pour tout  $t$  de  $I$  :  $\vec{T} = \vec{u}(\alpha(t)) = \cos(\alpha(t))\vec{i} + \sin(\alpha(t))\vec{j}$ .

**Remarque:** l'angle  $\alpha(t)$  n'est autre  $\left( \vec{i}, \vec{T} \right)$  et on montre en utilisant la fonction Arcos que  $\alpha$  est dérivable si  $f$  est  $C^2$ .

Ainsi  $\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{d\alpha} \frac{d\alpha}{ds} = \left( -\sin \alpha \vec{i} + \cos \alpha \vec{j} \right) \frac{d\alpha}{ds} = \left( \cos \left( \alpha + \frac{\pi}{2} \right) \vec{i} + \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{2} \right) \vec{j} \right) \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{ds} \vec{N}$ .

**Définition 20** Avec les hypothèses précédentes on définit la courbure de  $\Gamma$  en  $M(s)$  :  $\gamma(s) = \frac{d\alpha}{ds}$ .

Ainsi  $\frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma(s) \vec{N}$ , le rayon de courbure est  $R(s) = \frac{1}{\gamma(s)} = \frac{ds}{d\alpha}$

**Proposition 19** *Un point est birégulier si et seulement si  $\gamma(s) \neq 0$ .*

Il s'agit de voir à quelle condition  $\frac{d^2M}{ds^2}$  et  $\frac{dM}{ds}$  sont colinéaires, mais la représentation étant normale ce cas ne peut se produire si et seulement si  $\frac{d^2M}{ds^2} = 0$  car  $\left\| \frac{dM}{ds} \right\| = 1$  et par dérivation  $\frac{d^2M}{ds^2} \cdot \frac{dM}{ds} = 0$ .

Ainsi  $\vec{T} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$  et  $\vec{N} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$  et  $\frac{d\vec{N}}{d\alpha} = \begin{pmatrix} -\cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{pmatrix} = -\vec{T}$  ceci nous permet de calculer  $\frac{d\vec{N}}{ds} = \frac{d\vec{N}}{d\alpha} \frac{d\alpha}{ds} = -\gamma \vec{T}$  On appelle ces relations les relations de Frenet :

$$\frac{d\vec{T}}{ds}(s) = \gamma(s)\vec{N}(s) \text{ et } \frac{d\vec{N}}{ds}(s) = -\gamma(s)\vec{T}(s)$$

Expression de la courbure :

Soit un arc  $\Gamma = (I, f)$  régulier on a  $f'(t) = \|f'(t)\| \vec{T}$  et  $f''(t) = \frac{\langle f'(t), f''(t) \rangle}{\|f'(t)\|^3} \vec{T} + \|f'(t)\| \frac{ds}{dt} \gamma \vec{N} = \frac{\langle f'(t), f''(t) \rangle}{\|f'(t)\|^3} \vec{T} + \|f'(t)\|^2 \gamma \vec{N}$  et  $\det(f'(t), f''(t)) = \|f'(t)\|^3 \gamma$  d'où :

$$\gamma = \frac{\det(f', f'')}{\|f'\|^3}$$

Application : cas des courbes paramétrées.

$\gamma = \frac{\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$  ou  $R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'y'' - x''y'}$  dans le cas particulier de la courbe définie par  $y = f(x)$  on a  $R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$ .

**Définition 21** *Soit  $\Gamma = (I, f)$  un arc paramétré, birégulier, on appelle centre de courbure le point  $C(s)$  défini par la relation  $\overrightarrow{M(s)C(s)} = R(s)\vec{N}(s)$  où  $R(s)$  est le rayon de courbure et  $\vec{N}(s)$  la normale en  $M(s)$ .*

**Remarque:** On appelle l'ensemble des centres de courbure d'un arc  $\Gamma$  la développée on a que pour un arc de classe  $C^3$  birégulier, la tangente en  $C(s)$  à la développée est la normale à  $\Gamma$  en  $M(s)$  si cette tangente existe.

**Définition 22** *Soit un arc birégulier  $\Gamma$ . On appelle cercle de courbure en  $M_0$  le cercle de centre le centre de courbure en  $M_0$  et de rayon, le rayon de courbure.*

**Remarque:** Le cercle de courbure en un point  $M_0$  est aussi le cercle osculateur c'est à dire la limite des cercles tangents en  $M_0$  à  $\Gamma$  passant par  $M(s)$  quand  $s$  tend vers  $s_0$ . (la limite est pris par exemple par les limites des coefficients des équations des cercles)

- Dans une interprétation cinématique :

on a  $\vec{V} = v\vec{T}$  et  $\vec{\Gamma} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}$  on remarquera l'accélération tangentielle et normale, ceci permet d'obtenir :  $R = \frac{\|\vec{V}\|^3}{\|\vec{V} \wedge \vec{\Gamma}\|}$ .

### 7.11.4 Propriétés métriques des courbes paramétrées de l'espace.

De la même façon que dans le plan on définit l'abscisse curviligne

**Définition 23** Soit  $\Gamma = (I, f)$  un arc dans  $\mathbb{R}^3$  on dit que  $f$  est une représentation normale si pour tout  $t$  de  $I$  on a  $\|f'(t)\| = 1$  l'arc est alors régulier.

**Définition 24** Pour un arc régulier on définit l'abscisse curviligne par  $s(t) = \int_{t_0}^t \|f'(u)\| du$  l'origine est en  $f(t_0)$  et l'abscisse est comptée dans le sens des  $t$  croissant.  $s$  est un paramètre admissible au sens que  $s$  est continue,  $C^1$  et pour tout  $t$  de  $I$   $s'(t) \neq 0$ .

**Remarque:** Si la représentation est normale on a  $s(t) = t - t_0$ . On a  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ .

**Exercice 12 :** Prenons l'arc défini par  $\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-t} \\ z = t\sqrt{2} \end{cases}$   $ds = 2cht$  et  $s = 2sht$  on obtient comme représentation  $x = \frac{s}{2} + \sqrt{1 + \frac{s^2}{4}}$ ,  $y = -\frac{s}{2} - \sqrt{1 + \frac{s^2}{4}}$ ,  $z = \sqrt{2} \ln\left(\frac{s}{2} + \sqrt{1 + \frac{s^2}{4}}\right)$

**Définition 25** Soit  $\Gamma = (I, f)$ ,  $I = [a, b]$  un arc paramétré de classe  $C^1$  de  $I$  dans  $\mathbb{R}^3$ . La longueur de l'arc est le réel  $L = \int_a^b \|f'(t)\| dt$

**Exercice 13** Calcul de la longueur de l'hélice entre deux points.

## 7.12 Exercices : Courbes remarquables

Tentez de résoudre les problèmes suivants:- Paramétrisation.

- Points doubles.
- Branches infinies.
- Tracé.
- Rectification.
- Courbure.
- Aire des boucles ou de la courbe.

**Exercice 14** Cissoïde droite

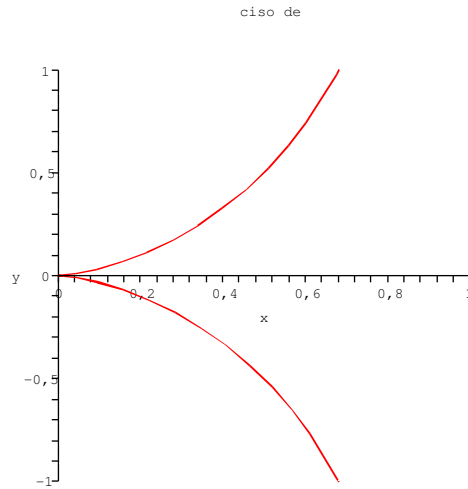
$$x(x^2 + y^2) = ay^2$$

[Dem] Une équation polaire est  $\rho = a \left( \frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta \right)$ . En coupant par  $y = tx$  ce qui ne perd pas de

points car le seul point de la courbe sur l'axe des  $y$  est  $O$  on obtient  $\begin{cases} x = a \frac{t^2}{1+t^2} \\ y = a \frac{t}{1+t^2} \end{cases}$ . D'où les variations

sur  $[0, +\infty[$  par symétrie avec  $\begin{cases} x'(t) = a \frac{2t}{(1+t^2)^2} \\ y'(t) = a \frac{t^2(3+t)}{(1+t^2)^2} \end{cases}$ .

$t$	0		$+\infty$
$x'$	0	+	
$y'$	0	+	
$x$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$\frac{y'}{x'}$	0		



Le nom vient du grec kissos signifiant lierre, sans doute pour les nervures de la feuille qui ressemble à cette courbe. Une construction se fait par double projection. Soit deux droites parallèles  $T, T'$  et  $O$  un point de  $T'$  un point courant  $P$  de  $T$  se projette orthogonalement en  $Q$  sur  $T'$  et  $Q$  se projette en  $M$  sur  $OP$ . Le lieu des points  $M$  est la cissoïde droite. Comme toute cubique circulaire rationnelle droite, on peut lui appliquer la méthode de l'équerre de Newton : étant donné un point fixe  $S$  et une droite fixe ( $T''$ ), si un segment  $[PQ]$  de longueur constante égale à la distance entre  $S$  et ( $T''$ ) se déplace de sorte que  $Q$  décrive ( $T''$ ) et que l'angle  $SPQ$  soit droit, le milieu  $M$  de  $[PQ]$  trace une cissoïde de Dioclès (tandis que  $P$  trace une strophoïde droite). La droite ( $T''$ ) est ici la droite  $x = a/2$  et  $S(-a/2, 0)$ .

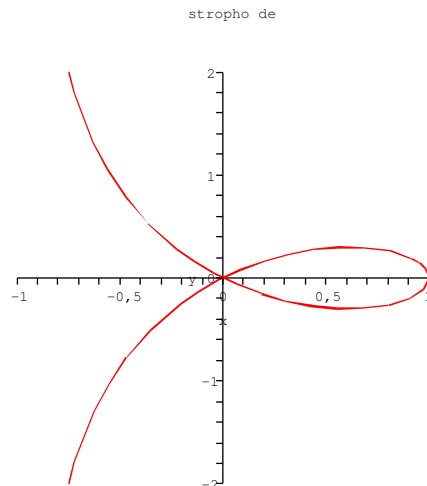
### Exercice 15 Strophoïde droite

$$x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2)$$

[Dem] Une équation polaire est :  $\rho = a \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta} = a \left( 2 \cos \theta - \frac{1}{\cos \theta} \right)$ . L'équation cartésienne donne

aussi  $y = \pm x \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ . Une paramétrisation est  $\begin{cases} x = a \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = a \frac{t(1-t^2)}{1+t^2} \end{cases}$  ou encore  $\begin{cases} x = a \sin t \\ y = a \tan t(1 - \sin t) \end{cases}$

avec  $t = \frac{\pi}{2} - 2\theta$ . Une représentation graphique est :



Si on prend le sommet de la boucle comme origine une équation polaire est  $\rho = a \tan \frac{\theta}{2}$ .

Le nom vient de strophos en grec ceinture, cordon, torsade. Deux points  $O$  et  $F$  étant donnés, la strophoïde droite de sommet (ou foyer)  $\hat{A}$   $F$  et de centre  $O$  est le lieu des points  $M$  d'une droite variable  $(D)$  passant par  $F$  tels que  $PM = PO$  où  $P$  est le point d'intersection de la droite  $(D)$  avec la perpendiculaire  $(D0)$  en  $O$  à  $(OF)$  (appelée axe de la strophoïde) ; autrement dit, c'est la courbe strophoïdale de  $(D0)$  relativement à  $O$  et  $F$  (ici,  $O$  est l'origine du repère et  $F$  est le point  $(a, 0)$ ). Le point  $F$  est appelé foyer car c'est le foyer singulier de cette cubique.

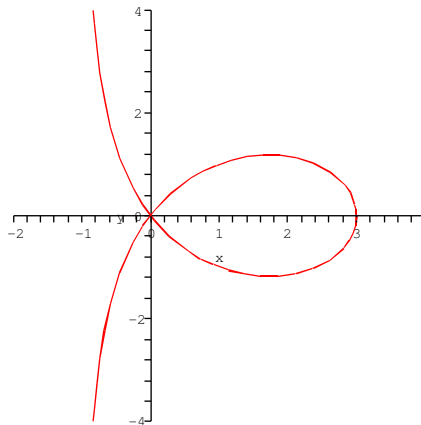
Autre construction simple, directement issue de la définition : une droite variable  $(D')$  passant par  $O$  coupe la parallèle  $(D1)$  à  $(D0)$  passant par  $F$  en  $Q$  ; la strophoïde droite est le lieu du point  $M$  où le cercle centré en  $F$  passant par  $Q$  recoupe  $(D')$ .

### Exercice 16 Trissectrice de Mac-Laurin

$$x(x^2 + y^2) = a(3x^2 - y^2)$$

[Dem] Mac Laurin est un mathématicien écossais (1698-1746). L'équation cartésienne donne  $y = \pm \sqrt{\frac{3a-x}{a+x}}$ . Et en polaire  $\rho = 2a \frac{\sin 3\theta}{\sin 2\theta} = a \left( 4 \cos \theta - \frac{1}{\cos \theta} \right)$ . En  $t$  on obtient  $\begin{cases} x = a \frac{3-t^2}{1+t^2} \\ y = tx \end{cases}$

trissectrice



Il y a une asymptote en  $x = -a$ .

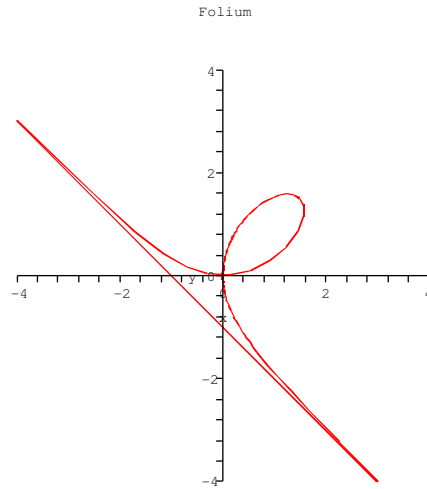
Deux points  $O$  et  $S$  étant donnés, la trissectrice de Maclaurin de sommet  $S$  (ici  $S(3a, 0)$ ) et de point double  $O$  est le lieu des points  $M$  tels que  $OP = PA = AM$  où  $A$  est défini par  $\vec{OA} = \frac{2}{3}\vec{OS}$  et tels que  $O, P$  et  $M$  sont alignés. L'angle  $SOM$  est le tiers de l'angle  $SAM$  d'où le nom de trissectrice. Dans le repère ayant pour origine  $A(2a, 0)$  une équation polaire est  $\rho = \frac{a}{\cos \frac{\theta}{3}}$ .

### Exercice 17 Folium de Descartes

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

[Dem] Du latin folium feuille. Une paramétrisation est  $\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = tx \end{cases}$ . En polaire une équation est

$\rho = \frac{3a \sin \theta \cos \theta}{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta}$ . Sa représentation est :



Il y a une asymptote  $x + y = -a$  et on a que l'aire de la boucle est égale à celle de la partie entre la courbe et son asymptote  $3\frac{a^2}{2}$ . La folium n'est autre que la trissectrice ayant subi une dilatation d'axe  $Ox$  et de rapport  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

### Exercice 18 Lemniscate de Bernoulli

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

[Dem] Équation bipolaire :  $\hat{A} MF \times MF' = d^2$  (où  $d$  est la demi-distance entre les p $\hat{A}$ 'les  $F$  et  $F'$ , foyers de la lemniscate).

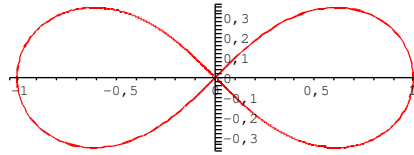
Équation tripolaire :  $\hat{A} MF - MF' = \pm\sqrt{2}OM\hat{A}$  ( $O$  milieu de  $F$  et  $F'$ ).

Équation polaire :  $\hat{A} \rho^2 = a^2 \cos 2\theta$  (avec  $a = d\sqrt{2}\hat{A}$ ,  $F(d, 0)$ ,  $F'(-d, 0)$ ).

$$\text{Paramétrisation cartésienne : } \left\{ \begin{array}{l} x = a \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} \\ y = a \frac{\sin t \cos t}{1 + \cos^2 t} \end{array} \right\} \quad (\cos t = \tan \theta).$$

$$\text{Paramétrisation cartésienne rationnelle : } \left\{ \begin{array}{l} x = a \frac{u + u^3}{1 + u^4} \\ y = a \frac{u - u^3}{1 + u^4} \end{array} \right. \quad (u = \tan \frac{t}{2})$$

Lemniscate



C'est le lieu des milieux des segments de longueur  $2d$  dont les extrémités décrivent deux cercles de rayon  $a$  centrés en  $F$  et  $F'$ .

Â

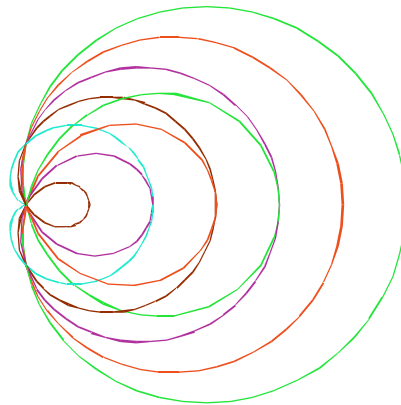
### Exercice 19 Limaçon de Pascal

$$(x^2 + y^2 - eax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

Si  $a = b$  on obtient une cardioïde.

[Dem] Courbe étudiée par Dürer en 1525, Étienne Pascal a donné le nom à la courbe) en 1650. Étienne Pascal (1588 -1651) : magistrat et mathématicien amateur, père de Blaise. Équation polaire :  $\rho = a(1 + e \cos \theta)$  (  $a, e > 0$  ).

lima onde Pascal



Ce sont donc les enveloppes de cercle de diamètre d'extrémités un point fixe  $O$  et un point d'un cercle ( cercle de centre  $A$  et de rayon  $a$ ). La paramétrisation complexe  $z = a \left( \frac{e}{2}(1 + e^{2it}) + e^{it} \right)$  montre que les limaçons de Pascal sont les épitrochoïdes engendrées par un point lié à un cercle roulant sans glisser autour d'un cercle de même rayon (ici le cercle fixe est le cercle de diamètre  $[OA]$  et le point traceur est situé à une distance  $a$  du centre du cercle mobile).

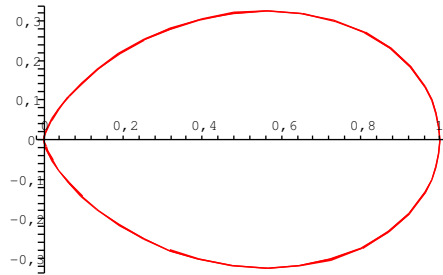
### Exercice 20 Folium simple (ou ovoïde)

$$(x^2 + y^2)^2 = ax^3$$

[Dem] Folium ou ovoïde ou oeuf de Képler.

$$\text{Équation polaire : } \rho = a \cos^3 \theta, \text{ équation paramétrique : } \begin{cases} x = \frac{a}{(1+t^2)^2} \\ y = \frac{at}{(1+t^2)^2} \end{cases}$$

Folium



Étant donnés deux points  $O$  et  $A$ , et une droite variable  $(D)$  passant par  $O$ , le folium simple est le lieu du projeté  $M$  sur  $(D)$  du projeté  $Q$  sur  $(OA)$  du projeté  $P$  sur  $(D)$  de  $A$ .

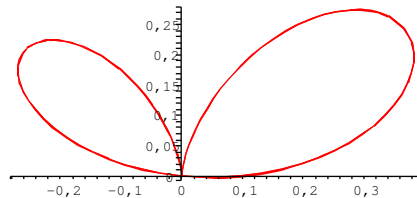
**Exercice 21** Bifolium

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2(ax + by)$$

[Dem] Une équation polaire  $\rho = (a \cos \theta + b \sin \theta) \cos^2 \theta = c \sin(\theta + \omega) \cos^2 \theta$ . Une équation paramétrique

$$: \begin{cases} x = \frac{a + bt}{(1+t^2)^2} \\ y = \frac{at + bt^2}{(1+t^2)^2} \end{cases}$$

bifolium



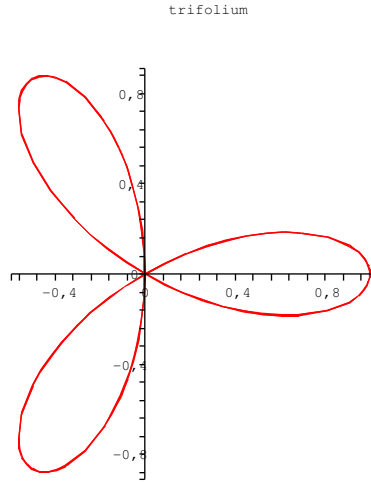
$(C)$  étant le cercle passant par  $O$ ,  $A(a, 0)$  et  $B(0, b)$ , et une droite variable passant par  $O$  recoupant  $(C)$  en  $P$ , de projeté  $H$  sur  $Ox$ , le bifolium associé est le lieu du projeté  $M$  de  $H$  sur la droite  $(OP)$ .



**Exercice 22** Trifolium

$$(x^2 + y^2)^2 = 2ax(x^2 - y^2) - 4bxy^2$$

[Dem] Trifolium, du latin trèfle. Une équation polaire  $\rho = a \cos 3\theta$ .

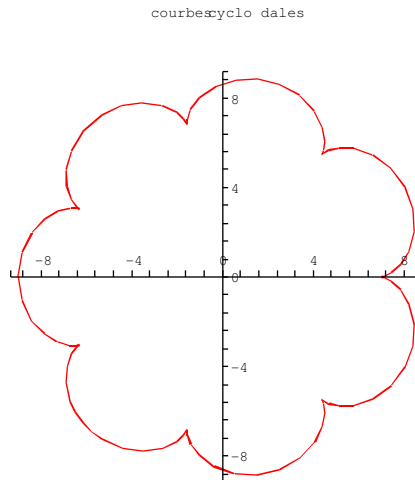


On peut l'obtenir comme trajectoire du deuxième point d'intersection d'une droite et d'un cercle tournant autour d'un de leurs points, soit dans le même sens, le cercle tournant  $\tilde{A}$  une vitesse quadruple de la droite, soit en sens contraire le cercle tournant  $\tilde{A}$  une vitesse double de la droite. On l'obtient aussi comme trajectoire du deuxième point d'intersection de deux cercles identiques tournant autour d'un de leurs points, en sens contraire l'un tournant  $\tilde{A}$  une vitesse double de l'autre.

**Exercice 23** Courbes cycloïdales (en représentation complexe),  $n$  est un entier relatif,

$$z = a(ne^{it} - e^{int})$$

[Dem] Du grec kuklos cercle roue. C'est la trajectoire d'un point d'un cercle roulant sur un autre cercle.



Une représentation paramétrique est : 
$$\begin{cases} x = a(n \cos t - \cos nt) \\ y = a(n \sin t - \sin nt) \end{cases}$$

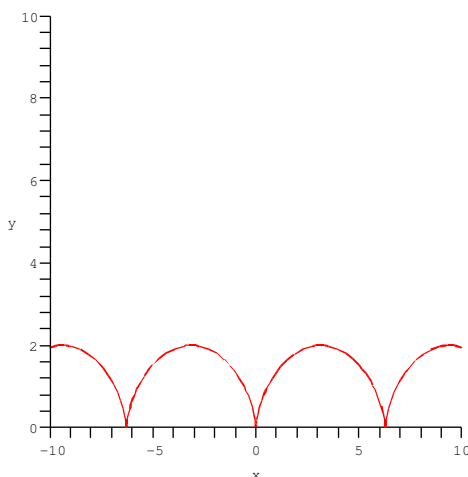
**Exercice 24** Cycloïdes droites

$$z = a(t - ke^{it})$$

[Dem] Paramétrisation cartésienne :  $\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) = 2R \sin^2 \frac{t}{2} \end{cases}$  Paramétrisation complexe :  $\hat{A} z =$

$R(t + i - ie^{-it})$ . La cycloïde est la courbe décrite par un point d'un cercle de rayon  $R$  roulant sans glisser sur une droite ( $D$ ); c'est donc un cas particulier de roulette. On peut aussi définir la cycloïde comme la trajectoire d'un mouvement composé d'un mouvement rectiligne uniforme et d'un mouvement circulaire uniforme de même vitesse (de paramétrisation complexe :  $z = vt + Re^{i\frac{v}{R}t}$ ); autrement dit, si vous avancez régulièrement le long d'un tableau tenant une craie  $\hat{A}$  la main d'un mouvement circulaire régulier de même vitesse que votre mouvement propre (d'un sens ou d'un autre), vous tracez une cycloïde (sans la condition d'égalité des vitesses, on obtient une trochoïde).

cyclo droite



### 7.13 Travaux dirigés : COURBES

#### 7.13.1 Enoncés

**Exercice 25** Construire la courbe  $\begin{cases} x = \frac{t^3}{3t+1} \\ y = \frac{3t^2}{3t+1} \end{cases}$

[Dem] L'ensemble de définition est  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$ , les dérivées sont  $x' = \frac{3t^2(2t+1)}{(3t+1)^2}$ ;  $y' = \frac{3t(3t+2)}{(3t+1)^2}$ ,

ce qui donne les variations.

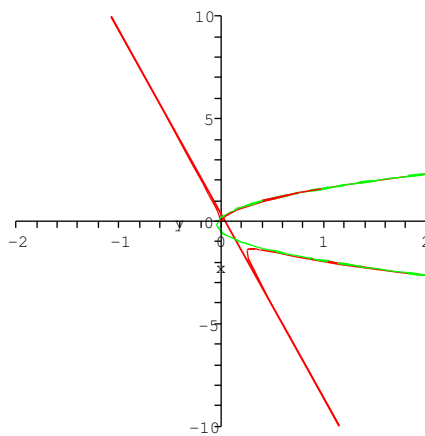
$t$	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
$x'$		-		-	0	+		+		+	
$y'$		+	0	-		-		-	0	+	
$x$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{8}{27}$	$\searrow$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty    -\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{4}{3}$	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\searrow$	$-\infty    +\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$\frac{y}{x'}$			0		$\infty$				PS		

En  $t = 0$  on a un point stationnaire et  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y'}{x'} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t+2}{t(2t+1)} = \pm\infty$ . Le tableau de variations donne que l'on a un point de rebroussement de 1<sup>ère</sup> espèce à tangente parallèle à  $Oy$ .

Branches infinies : quant  $t \rightarrow +\infty$  on a  $x \sim \frac{t^2}{3}$  et  $y \sim t$  donc  $\lim_{\pm\infty} \frac{y}{x} = 0$ . On a une branche parabolique dans la direction de  $Ox$ . La parabole asymptote est donnée par :  $x = \frac{t^2}{3} \frac{1}{1 + \frac{1}{3t}} =$

$\frac{t^2}{3} \left( 1 - \frac{1}{3t} + \frac{1}{9t^2} - \frac{1}{27t^3} + o\left(\frac{1}{t^3}\right) \right) = \frac{t^2}{3} - \frac{t}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81t} + o\left(\frac{1}{t}\right)$  et  $y = t \frac{1}{1 + \frac{1}{3t}} = t \left( 1 - \frac{1}{3t} + \frac{1}{9t^2} - \frac{1}{27t^3} + o\left(\frac{1}{t^3}\right) \right) = t - \frac{1}{3} + \frac{1}{9t} + o\left(\frac{1}{t}\right)$  et  $y^2 = t^2 \left( 1 - \frac{2}{3t} + \frac{1}{3t^2} - \frac{2}{27t^3} + o\left(\frac{1}{t^3}\right) \right)$  et par élimination on obtient  $9x - 3y^2 - y = -\frac{1}{3} + \frac{2}{9t} + o\left(\frac{1}{t}\right)$  la parabole  $9x - 3y^2 - y = -\frac{1}{3}$  est asymptote et l'on a sa position par rapport à la courbe eb l'infinie.  
 Quand  $t \rightarrow -\frac{1}{3}$  on pose  $t = -\frac{1}{3} + u$  et on a  $x = -\frac{1}{81u} + \frac{1}{9} - \frac{u}{3} - \frac{1}{243u^2} + o(u^2)$  avec  $y = \frac{1}{9u} - \frac{2}{3} + u$  donc  $y + 9x = \frac{1}{3} - 2u + o(u)$  et la droite  $y + 9x = \frac{1}{3}$  est asymptote, quand  $t \rightarrow -\frac{1}{3} + 0$  la courbe est en-dessous et quand  $t \rightarrow -\frac{1}{3} - 0$  la courbe est au-dessus de l'asymptote.

exercice\_1



**Exercice 26** Dans un plan euclidien  $P$  on considère l'arc  $(\gamma)$  défini par :  $] -1, +1[ \rightarrow P$ ,  $t \rightarrow M = O + 2 \arctan t \vec{i} + \ln \left( \frac{1+t^2}{1-t^2} \right) \vec{j}$ , dans un repère orthonormé du plan  $P$ . Tracer  $(\gamma)$ .

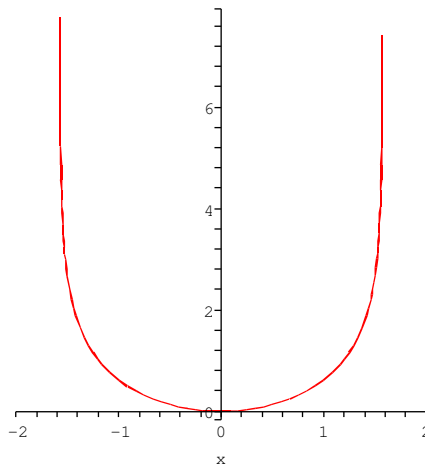
[Dem] L'abscisse de  $M$  est  $x = 2 \arctan t$  est un paramètre admissible de  $(\gamma)$  et donc  $M = O + x \vec{i} -$

$\ln(\cos x) \vec{j}$  avec  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$  [on a  $y = -\ln(\cos x) = f(x)$  et  $f'(x) = \tan x$  d'où

	$-\frac{\pi}{2}$		0		$+\frac{\pi}{2}$
$x$		$\searrow$		$\searrow$	
$y$		$\searrow$		$\nearrow$	

et la représentation :

exercice\_2



**Exercice 27** On considère la courbe  $(\gamma) : \begin{cases} x = 3 \cos t + 3 \cos 2t + \cos 3t \\ y = 3 \sin t + 3 \sin 2t + \sin 3t \end{cases}$ , construire  $(\gamma)$ , calculer sa longueur.

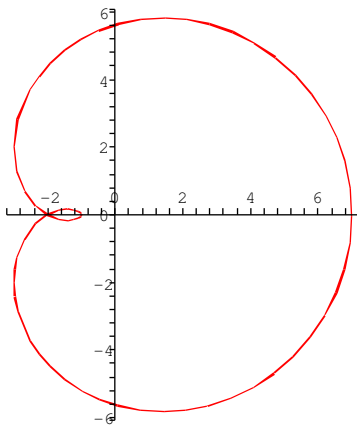
[Dem] On a  $M(t + 2\pi) = M(t)$  et  $M(-t)$  et  $M(t)$  sont symétriques par rapport à  $Ox$  on se contentera

donc de  $t \in [0, \pi]$ . Pour les dérivées  $\begin{cases} x' = -6 \sin 2t (1 + \cos t) \\ y' = 6 \cos 2t (1 + \cos t) \end{cases}$  ce qui donne

$t$	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$	
$x'$	0	-		-		+		0
$y'$		+	0	-		-		0
$x$		$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$-\sqrt{2}$	
$y$	0	$\nearrow$	$3 + 2\sqrt{2}$	$\searrow$	2	$\searrow$	$2\sqrt{2} - 3$	
$\frac{y'}{x'}$	$\infty$		0		$\infty$		0	

, la longueur est donnée par  $ds = 6(1 + \cos t) dt$  pour les  $t$  croissants et  $\ell(\Gamma) = 12 \int_0^\pi (1 + \cos t) dt = 12\pi$ .

exercice\_3



**Exercice 28** 1°) Construire la courbe  $(C) : \begin{cases} x = \cos t (\sqrt{2} \cos t + 1) \\ y = \sin t (\sqrt{2} \cos t - 1) \end{cases}$

2°) Déterminer les points doubles.

3°) Montrer que  $(C)$  est invariante par trois rotations de même centre  $\Omega$  (dont l'identité).

[Dem] On peut se ramener à  $t \in [0, \pi]$  car  $x, y$  sont  $2\pi$ -périodique et  $x$  est paire et  $y$  est impair, il y aura une symétrie par rapport à  $Ox$ . Pour les variations  $\begin{cases} x' = -\sin t (2\sqrt{2} \cos t + 1) \\ y' = 2\sqrt{2} \cos^2 t - \cos t - \sqrt{2} \end{cases}$  sur  $[0, \pi]$

on a que  $x'$  s'annule en  $0, \pi$  et  $t_0 = \arccos\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$  et pour  $y'$  en posant  $\rho(u) = 2\sqrt{2}u^2 - u - \sqrt{2}$

on a deux solutions  $u' = \frac{1 + \sqrt{17}}{4\sqrt{2}}$  et  $u'' = \frac{1 - \sqrt{17}}{4\sqrt{2}}$  comme  $\rho(1) = \sqrt{2} - 1$  et  $\rho(-1) = \sqrt{2} + 1$  et

$u'u'' = -\frac{1}{2}$  on a  $-1 < u'' < u' < 1$ . Les valeurs numériques sont  $u' \simeq 0,91$  et  $u'' \simeq -0,55$  et ainsi  $y'$  s'annule en  $t_1 = \arccos u'$  et en  $t_2 = \arccos u''$ . Pour la position de ces deux valeurs par rapport à  $t_0$  on a

$\rho\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} < 0$  et donc  $u'' < \cos t_0 < u'$  en fait  $t_1 \simeq 25,09^\circ, t_0 \simeq 110,70^\circ, t_2 \simeq 123,51^\circ$ . Le

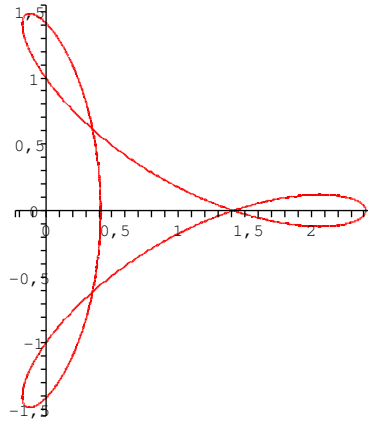
tableau de variations	$t$	0		$t_1$		$t_0$		$t_2$		$\pi$
	$x'$	0	-		-	0	+		+	0
	$x$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	
	$y$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$y'$		+	0	-		-	0	+	
	$\frac{y'}{x'}$	$\infty$		0		$\infty$		0		$\infty$

Pour les valeurs numériques

elles se calculent :  $\sin^2 t_1 = 1 - \frac{(1 + \sqrt{17})^2}{32} = \frac{7 - \sqrt{17}}{16}$  et  $\sin t_1 = \frac{\sqrt{7 - \sqrt{17}}}{4}$  et  $\sin^2 t_0 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

et  $\sin t_0 = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$  et  $\sin^2 t_2 = 1 - \frac{(1 - \sqrt{17})^2}{32} = \frac{7 + \sqrt{17}}{16}$  ce qui donne  $\sin t_2 = \frac{\sqrt{7 + \sqrt{17}}}{4}$  tout ceci permet de calculer les valeurs approchées :  $x(0) = 1 + \sqrt{2} = 2,41$  et  $y(0) = 0$ ;  $x(t_1) = \frac{11 + 3\sqrt{17}}{8\sqrt{2}} = 2,07$ ,  $y(t_1) = \frac{\sqrt{7 - \sqrt{17}}(\sqrt{17} - 3)}{16} = 0,12$ ;  $x(t_0) = -\frac{1}{4\sqrt{2}} = -0,18$ ,  $y(t_0) = -\frac{3\sqrt{7}}{4\sqrt{2}} = -1,40$ ;  $x(t_2) = \frac{11 - 3\sqrt{17}}{8\sqrt{2}} = -0,12$ ,  $y(t_2) = -\frac{(3 + \sqrt{17})(\sqrt{7 + \sqrt{17}})}{16} = -1,48$  et  $x(\pi) = \sqrt{2} - 1 = 0,41$ ,  $y(\pi) = 0$ .  
 Il reste les points d'intersection avec les axes :  $x = 0$  donne  $t = \frac{\pi}{2}$  ou  $t = \frac{3\pi}{4}$  et pour  $t = \frac{\pi}{2}$  on a  $x = 0, y = -1$ , pour  $t = \frac{3\pi}{4}$  on a  $x = 0, y = -\sqrt{2}$ . Tandis que pour  $y = 0$  on trouve  $t = 0$  ou  $t = \pi$  ou  $t = \frac{\pi}{4}$  pour  $t = \frac{\pi}{4}$  cela donne  $x = \sqrt{2}, y = 0$ .

exercice\_4



Les points doubles : pour  $t \in [0, \pi]$  il y en a un, les paramètres  $t_1, t_2$  qui l'atteignent sont tels que  $\frac{\pi}{4} < t_1 < \frac{\pi}{2}$  et  $\frac{3\pi}{4} < t_2 < \pi$ , avec la symétrie on en aura un deuxième et elle troisième est

$C(\sqrt{2}, 0)$ . La résolution de  $\begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases}$  donne  $\begin{cases} \sqrt{2}(\cos^2 t_1 - \cos^2 t_2) + \cos t_1 - \cos t_2 = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2t_1 - \sin 2t_2) - (\sin t_1 - \sin t_2) = 0 \end{cases}$

La première donne  $2\sqrt{2} \cos \frac{t_1 + t_2}{2} \cos \frac{t_1 - t_2}{2} + 1 = 0$  et la seconde  $\sqrt{2} \sin(t_1 - t_2) \cos(t_1 + t_2) - 2 \sin \frac{t_1 - t_2}{2} \cos \frac{t_1 + t_2}{2} = 0$  puis  $2\sqrt{2} \cos \frac{t_1 + t_2}{2} \cos(t_1 + t_2) - 2 \sin \frac{t_1 + t_2}{2} \cos \frac{t_1 + t_2}{2} = 0$  ou  $\sqrt{2} \cos \frac{t_1 - t_2}{2} \left( 2 \cos^2 \frac{t_1 + t_2}{2} \right)$

$\cos \frac{t_1 + t_2}{2} = 0$  ou enfin  $2 \cos \frac{t_1 + t_2}{2} + \sqrt{2} \cos \frac{t_1 - t_2}{2} = 0$ . On obtient donc  $\begin{cases} 2\sqrt{2} \cos \frac{t_1 + t_2}{2} \cos \frac{t_1 - t_2}{2} = -1 \\ \cos^2 \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{1}{4} \end{cases}$

or  $\frac{\pi}{2} < \frac{t_1 + t_2}{2} < \frac{3\pi}{4}$  et donc  $\cos \frac{t_1 + t_2}{2} = -\frac{1}{2}$ ,  $\frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{2\pi}{3}$  et par suite  $\cos \frac{t_1 - t_2}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  mais

$-\frac{3\pi}{8} < \frac{t_1 - t_2}{2} < -\frac{\pi}{2}$  donc  $\frac{t_1 - t_2}{2} = -\frac{\pi}{4}$  et  $\begin{cases} t_1 = \frac{5\pi}{12} \\ t_2 = \frac{11\pi}{12} \end{cases}$ . Pour les coordonnées de ce point double

on a  $x = x(t_1) = x(t_2) = \frac{1}{2}(x(t_1) + x(t_2)) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(\cos 2t_1 + \cos 2t_2) + \frac{1}{2}(\cos t_1 + \cos t_2)$   
 $= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(t_1 + t_2) \cos(t_1 - t_2) + \cos \frac{t_1 + t_2}{2} \cos \frac{t_1 - t_2}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ . Pour  $y = \frac{1}{2}(y(t_1) + y(t_2)) =$

$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sin 2t_1 + \sin 2t_2) - \frac{1}{2}(\sin t_1 + \sin t_2) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(t_1 + t_2) \cos(t_1 - t_2) - \sin \frac{t_1 + t_2}{2} \cos \frac{t_1 - t_2}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ .

Les coordonnées des trois points sont donc  $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)$ ,  $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)$ ,  $(\sqrt{2}, 0)$ .

Pour montrer que  $(C)$  est invariante par certaine rotation on a que le centre est forcément le centre

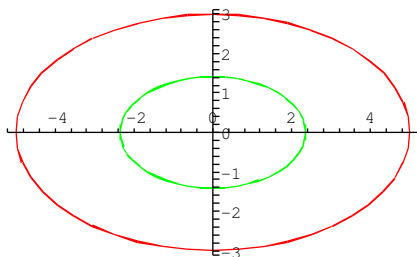
de gravité des trois points doubles :  $\Omega\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ . On a alors  $\begin{cases} x(t) - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2t + \cos t \\ y(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2t - \sin t \end{cases}$  Mettons

l'origine en  $\Omega$  :  $z(t) = x(t) - \frac{\sqrt{2}}{2} + iy(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{2it} + e^{-it}$  et  $z(t)e^{2i\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{2it-4i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\left(t-\frac{2\pi}{3}\right)} = z\left(t - \frac{2\pi}{3}\right)$  et la courbe est invariante par la rotation  $\mathcal{R}\left(\Omega, \frac{2\pi}{3}\right)$  de même  $z(t)e^{4i\frac{\pi}{3}} = z\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)$  et on trouve la rotation  $\mathcal{R}\left(\Omega, \frac{4\pi}{3}\right)$ .

**Exercice 29**  $\varepsilon$  est une ellipse de centre  $O$ ,  $A$  un point de  $\varepsilon$ ,  $A'$  le symétrique de  $A$  par rapport au grand axe de  $\varepsilon$ ,  $M$  l'intersection de la normale à  $\varepsilon$  en  $A$  avec la droite  $OA'$ . Quel est le lieu de  $M$  lorsque  $A$  décrit  $\varepsilon$  ?

[Dem] On paramètre l'ellipse par  $A(a \cos t, b \sin t)$  ainsi  $A'$  le symétrique de  $A$  par rapport à  $O\vec{i}$  a pour coordonnées  $A'(a \cos t, -b \sin t)$ . Une équation de la normale en  $A$  à  $\varepsilon$  est  $ax \sin t - by \cos t + (b^2 - a^2) \sin t \cos t = 0$  en écrivant  $-a \sin t(x - a \cos t) + b \cos t(y - b \sin t) = 0$ . Une équation de  $OA'$  est  $bx \sin t + ay \cos t = 0$ . Ces deux droites sont confondues lorsque  $\sin t \cos t = 0$  c'est à dire  $A$  sommet de  $\varepsilon$ , sinon  $M$  a pour coordonnées  $x = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} a \cos t$ ;  $y = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} b \sin t$ . Le lieu de  $M$  est l'ellipse  $\varepsilon'$  d'équation  $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 1 = 0$  avec  $A = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} a$  et  $B = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} b$  privé de ses sommets. On a  $\varepsilon'$  est l'homothétique de  $\varepsilon$  par l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ .

exercice\_5

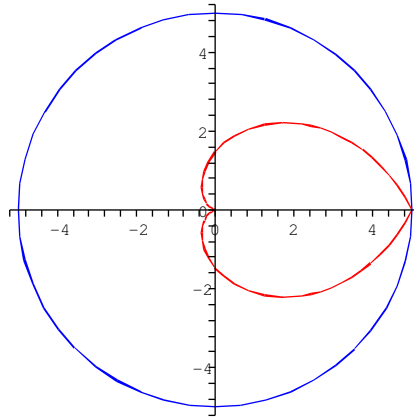


**Exercice 30**  $B$  décrit un cercle de centre  $O$  et de rayon  $OA$ . Lieu des points  $M$ , point de contact du cercle inscrit dans le triangle  $OAB$  et de la droite  $OB$ .

[Dem] Posons  $\|OA\| = a$ , on repère  $B$  par  $(\widehat{OA, OB}) = \theta [2\pi]$ . Il est clair que pour  $\theta$  et  $-\theta$  on obtient deux figures symétriques par rapport à  $OA$ .  $\theta$  et  $\theta + 2\pi$  donne le même point. On se contentera de  $\theta \in [0, \pi]$ . Un point  $M(r, \theta)$  avec  $r = \|OM\|$ , le centre  $I$  du cercle inscrit dans  $OAB$  a pour coordonnées polaires  $\left(\rho, \frac{\theta}{2}\right)$  avec  $\rho = \|OI\| = \frac{r}{\cos \frac{\theta}{2}}$ . La condition  $d(I, OA) = d(I, AB)$  donne alors

$$\rho \sin \frac{\theta}{2} = a \cos \frac{\theta}{2} - \rho \text{ c'est à dire } r \tan \frac{\theta}{2} = a \cos \frac{\theta}{2} - \frac{r}{\cos \frac{\theta}{2}} \text{ et } r = \frac{a \cos^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \sin \frac{\theta}{2}} = a \left(1 - \sin \frac{\theta}{2}\right).$$

exercice\_6



**Exercice 31** 1°) Etude de la courbe d'équation polaire :  $\rho = \frac{1 - \sin \theta}{1 + \cos \theta}$

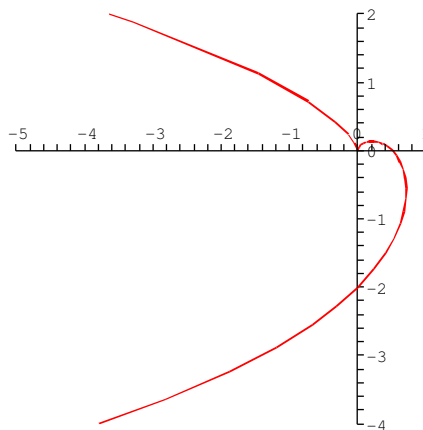
2°) de même avec  $\rho = \frac{\sin \frac{3\theta}{2}}{1 - 2 \cos \theta}$

[Dem]  $\rho$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{(2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$  et est  $2\pi$ -périodique. Posons  $I = ]-\pi, +\pi[$ , aux bornes de  $I$  on pose  $\theta = -\pi + \phi$  et  $\rho \sin \phi = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \cos \phi} \underset{\phi=0}{\sim} \frac{2}{\phi}$  la courbe admet une branche parabolique, de même en  $\pi$ . Pour la dérivée  $\rho' = \frac{-\cos \theta + \sin \theta - 1}{(1 + \cos \theta)^2}$  qui est du signe de  $-\cos \theta + \sin \theta - 1$  en passant par les formules en  $t$  c'est à dire en posant  $t = \tan \frac{\theta}{2}$  c'est du signe de  $2(t - 1)$  donc  $\rho$  est décroissante de  $-\pi$  à  $\frac{\pi}{2}$  et croissante de  $\frac{\pi}{2}$  à  $\pi$ . Le tableau de variations :

$\theta$	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$0$		$\frac{\pi}{2}$		$\pi$
$\rho$	$+\infty$	$\searrow$	$2$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$0$	$\nearrow$	$+\infty$
$\tan v$			$-1$		$-1$				

$$\tan v = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{(1 - \sin \theta)(1 + \cos \theta)}{\sin \theta - \cos \theta - 1}$$

exercice\_7\_1



autre solution :  $\rho = \frac{\sin \frac{3\theta}{2}}{1 - 2 \cos \theta}$  L'ensemble de définition est  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .  $\rho$  est  $4\pi$ -périodique, de plus  $\rho(\theta + 2\pi) = -\rho(\theta)$  et  $O$  est centre de symétrie,  $\rho$  est impaire et  $Oy$  est axe de symétrie. On étudie  $\rho$  sur  $\left[ 0, \frac{\pi}{3} \right[ \cup \left] \frac{\pi}{3}, \pi \right[$ . On a  $\rho = 0$  si et seulement si  $\theta = 0 \left[ \frac{2\pi}{3} \right]$ . Pour l'étude des

branches infinies :  $h = \theta - \frac{\pi}{3}$  et  $Y = \rho \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\cos \frac{3h}{2} \sinh}{1 - \cosh + \sqrt{3} \sinh} = \frac{(1 + \theta(h))(1 + \theta(h^2))}{h\sqrt{3} + \frac{1}{2}h^2 + \theta(h^2)} =$   
 $\frac{1 + \theta(h)}{\sqrt{3} + \frac{1}{2}h + \theta(h)} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{6}h + \theta(h)$ . Dans le repère mobil  $(0, I, J)$  tel que  $(i, I) = \frac{\pi}{3}$  la droite  $Y = \frac{\sqrt{3}}{3}$

est asymptote et on a la position. Pour les variations  $\rho' = \frac{\frac{3}{2} \cos \frac{3\theta}{2} (1 - 2 \cos \theta) - 2 \sin \theta \sin \frac{3\theta}{2}}{(1 - 2 \cos \theta)^2} =$

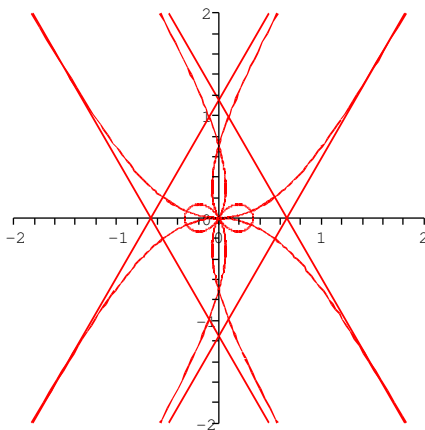
$\frac{3 \cos \frac{3\theta}{2} - \cos \frac{5\theta}{2} - 5 \cos \frac{\theta}{2}}{2(1 - 2 \cos \theta)^2}$  sur  $[0, \frac{\pi}{3}]$  on a  $1 - 2 \cos \theta \leq 0$ ,  $\cos \frac{3\theta}{2} \geq 0$ ,  $\sin \theta \geq 0$ ,  $\sin \frac{3\theta}{2} \geq 0$  et la première

formule donne que  $\rho' \leq 0$ , sur  $[\frac{2\pi}{3}, \pi]$  on a  $1 - 2 \cos \theta \geq 0$ ,  $\cos \frac{3\theta}{2} \leq 0$ ,  $\sin \theta \leq 0$ ,  $\sin \frac{3\theta}{2} \leq 0$  et la première expression donne  $\rho' \leq 0$ , sur  $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$  on a  $\frac{\pi}{2} \leq \frac{3\theta}{2} \leq \pi$ ,  $\frac{5\pi}{6} \leq \frac{5\theta}{2} \leq \frac{5\pi}{3}$ ,  $\frac{\pi}{6} \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{3}$  donc  $\cos \frac{3\theta}{2} \leq 0$ ,  $-\frac{1}{2} \leq \cos \frac{5\theta}{2} \leq \frac{1}{2}$ ,  $\cos \frac{\theta}{2} \geq 0$  NON

$\theta$	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\pi$
$\rho$	0	-	$-\infty$   $+\infty$	+	0	-	-1
$\tan V$							$\infty$

et la courbe :

exercice\_7\_2



**Exercice 32** Soit  $P$  une parabole; enveloppe des cordes  $M_1M_2$  de  $P$  telles que les normales en  $M_1$  et  $M_2$  se coupent en un point de  $P$ . On appelle enveloppe d'une famille de droites  $\Delta_t$  à un paramètre une courbe  $\Gamma = (I, f)$  telle que pour tout  $t$  de  $I$ ,  $M(t) \in \Delta_t$  et  $\Gamma$  admet en  $M(t)$ ,  $\Delta_t$  comme tangente.

[Dem] On définit la parabole par  $y^2 - 2px = 0$ , la normale à  $\mathcal{P}$  au point  $A\left(\frac{a^2}{2p}, a\right)$  est la droite  $Da : 2apx + 2p^2y - a^3 - 2ap^2 = 0$ , pour  $a \neq 0$  c'est à dire  $A \neq O$  elle recoupe en la parabole en  $C\left(\frac{c^2}{2p}, c\right)$  avec  $c = -a - \frac{2p^2}{a}$ . Inversement le point  $C$  étant donné les points  $M\left(\frac{y^2}{2p}, y\right)$  de  $\mathcal{P}$  dont la normale contient  $C$  correspondent à  $y^2 + cy + 2p^2 = 0$ , il en existe effectivement deux différents si  $c^2 > 8p^2$ . La corde  $M_1M_2$  a pour équation  $2pX - (y_1 + y_2)Y + y_1y_2 = 0$  ou  $2pX + cY + 2p^2 = 0$  car  $y_1 + y_2 = -c$ ,  $y_1y_2 = 2p^2$ . La droite  $M_1M_2$  passe par le point  $D(-p, 0)$  indépendant de  $c$ .

autre solution : (autre) Si on paramètre la parabole par  $x = \frac{p}{2}t^2, y = pt$  la corde  $M_1 = M(u), M_2 = M(v)$  a pour équation  $(M_1M_2) : 2x - (u + v)y + pu v = 0$ . Les coordonnées du point d'intersection des normales en  $M_1$  et  $M_2$  à  $\mathcal{P}$  vérifient  $\begin{cases} ux + y - \frac{p}{2}u^3 - pu = 0 \\ vx + y - \frac{p}{2}v^3 - pv = 0 \end{cases}$  ou  $\begin{cases} x = \frac{p}{2}(u^2 + uv + v^2 + 2) \\ y = -\frac{p}{2}uv(u + v) \end{cases}$

ce point appartient à  $\mathcal{P}$  si et seulement si  $y^2 - 2px = \frac{p^2}{4}u^2v^2(u + v)^2 - p^2(u^2 + uv + v^2 + 2) = 0$  ou  $(uv - 2)((uv + 2)(u + v)^2 + 4) = 0$  ou  $(u^2v^2 - 4)(u + v)^2 + 4uv - 8 = 0$

Cas où  $uv = 2$  alors  $x = \frac{p}{2}((u + v)^2 - uv + 2)$  et  $s = u + v$  vérifie  $s^2 \geq 8$ . Les cordes  $(M_1M_2) : 2x - sy + 2p = 0$  pivotent autour de  $A(-p, 0)$ .



Cas où  $(uv+2)(u+v)^2+4=0$  ou  $uv=-2-\frac{4}{s^2}$  les cordes  $(M_1M_2): 2x-sy-2p\left(1+\frac{2}{s^2}\right)=0$  et les coordonnées  $(x,y)$  du point caractéristique de  $(M_1M_2)$  vérifient  $-y+\frac{8p}{s^3}=0$  ou  $y=\frac{8p}{s^3}$  et  $x=p\left(1+\frac{6}{s^2}\right)$  d'où  $8(x-p)^3-27py^2=0$ , équation caractéristique de la développée de la parabole  $\mathcal{P}$ .

**Exercice 33** Soit  $\epsilon$  une ellipse de foyers  $F$  et  $F'$ ,  $M$  un point de  $\epsilon$ . Les droites  $(MF)$  et  $(MF')$  recouper  $\epsilon$  en  $P$  et  $P'$ . Quelle est l'enveloppe des droites  $(PP')$  lorsque  $M$  décrit  $\epsilon$ ?

[Dem] On paramètre l'ellipse par  $x=a\frac{1-t^2}{1+t^2}, y=\frac{2bt}{1+t^2}$ . La corde  $(PP')$  où  $P=M(u), P'=M(u')$  a pour équation  $\begin{vmatrix} x & a(1-u^2) & a(1-u'^2) \\ y & 2bu & 2bu' \\ 1 & 1+u^2 & 1+u'^2 \end{vmatrix}=0$  ou  $bx(1-uu')+ay(u+u')-ab(1+uu')=0$ .

La corde  $MP$  passe par  $F(c,0)$  si  $c(1-ut)-a(1+ut)=0$  la corde  $MP'$  passe par  $F'(-c,0)$  si  $c(1-u't)+a(1+u't)=0$ . Ainsi  $t \neq 0, u=\frac{c-a}{t(c+a)}, u'=\frac{c+a}{t(c-a)}$  et on a  $uu'=\frac{1}{t^2}, u+u'=\frac{2c^2+a^2}{t(c^2-a^2)}=-\frac{2}{tb^2}(c^2+a^2)$ . La corde  $(PP')$  s'écrit en fonction de  $t: bx\left(1-\frac{1}{t^2}\right)-\frac{2ay(c^2+a^2)}{tb^2}-ab\left(1-\frac{1}{t^2}\right)=0$  ou  $b^3t^2(x-a)-2ayt(c^2+a^2)-b^3(x+a)=0$ . L'équation cartésienne de l'enveloppe s'obtient en écrivant que ce trinôme du second degré, exclue  $x=a$ , a une racine double:  $a^2y^2(c^2+a^2)^2+b^6(x^2-a^2)=0$  ou  $\frac{x^2}{a^2}+\frac{(c^2+a^2)^2}{b^6}y^2-1=0$  c'est une ellipse  $\epsilon'$  déduite de  $\epsilon$  par l'affinité  $(x,y) \mapsto \left(x, \frac{b^2}{c^2+a^2}y\right)$ .

**Exercice 34** Déterminer le rayon de courbure en  $\theta=0$  de la courbe  $(C)$  d'équation polaire:  $\rho=2a\frac{\sin 3\theta}{\sin 2\theta}$ .

[Dem] En 0 on a  $\rho(0)=3a$  on peut donc prolonger  $\rho$  par continuité en 0. Faisons un DL2 en 0 de  $\rho: \rho=2a\frac{3-\frac{1}{6}(27\theta^2)}{2-\frac{1}{6}(8\theta^2)}+o(\theta^2)=3a-\frac{5}{2}a\theta^2+o(\theta^2)$  ainsi  $\rho'(0)=0$  et  $\rho''(0)=-5a$ . Le rayon de courbure en  $\theta=0$  est donné par  $R(0)=\frac{(\rho^2+\rho'^2)^{3/2}}{(\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho'')}=\frac{9}{8}a$ .

**Exercice 35** Soit  $ABC$  un vrai triangle d'un plan euclidien; montrer que le centre de gravité  $G$ , l'orthocentre  $H$  et le centre du cercle circonscrit  $J$  sont alignés.

[Dem] Soit  $x,y,z$  les coordonnées barycentriques d'un point  $M$  du plan dans la base affine  $(A,B,C)$  on a  $M=xA+yB+zC$  avec  $x+y+z=1$ . Posons  $a=\|BC\|, b=\|CA\|, c=\|AB\|$  puis  $p=\vec{AB}\cdot\vec{AC}, q=\vec{BC}\cdot\vec{BA}, r=\vec{CA}\cdot\vec{CB}$ . On a  $\begin{cases} 2p=b^2+c^2-a^2 \\ 2q=c^2+a^2-b^2 \\ 2r=a^2+b^2-c^2 \end{cases}$  et  $\vec{AM}=y\vec{AB}+z\vec{AC}$  sera orthogonal à  $\vec{BC}$  si  $qy-rz=0$  ce qui donne une équation barycentrique de la hauteur  $AH$  ou  $H(x,y,z): px=qy=rz$  ainsi  $H=\frac{1}{s}(qrA+rpB+pqC)$  où  $s=qr+rp+pq$ . Soit  $A_1=\frac{1}{2}(B+C)$  le milieu de  $[B,C]$  on a  $\vec{A_1M}=(y-\frac{1}{2})\vec{AB}+(z-\frac{1}{2})\vec{AC}$  qui sera orthogonal à  $\vec{BC}$  si  $q(y-\frac{1}{2})-r(z-\frac{1}{2})=0$ , c'est une équation barycentrique de la médiatrice  $A_1J$  avec  $J(x,y,z): qy-rz=\frac{q-r}{2}, rz-px=\frac{r-p}{2}, px-qy=\frac{p-q}{2}$  et ainsi  $J=\frac{1}{2s}(p(q+r)A+q(r+p)B+r(p+q)C)$  on constate que :

$$\frac{1}{3}(H+2J)=\frac{1}{3}(A+B+C)=G$$

Autrement dit  $G, H, J$  sont alignés

**Exercice 36** Pour chacune des courbes planes suivantes, donner un paramétrage: le cercle de rayon 1 et de centre  $\Omega=(1,0)$ , donner trois paramétrage; une droite parallèle à l'axe des ordonnées, dont un en polaire.

**Exercice 37** Soit  $C$  la courbe plane donnée en coordonnées polaires par :  $\rho(t) = t + \frac{1}{t}$  et  $\theta(t) = 1 + t^2$  avec  $t \in \mathbb{R}^*$

- 1°) Trouver d'éventuelles symétries.
- 2°) Donner les variations de  $\rho$  et de  $\theta$  en fonction de  $t$ ;
- 3°) Etudier les branches infinies, et les points doubles.
- 4°) Représenter la courbe.
- 5°) On se contente de la partie de la courbe donnée par les  $t$  positifs. En écrivant  $\rho$  comme fonction de  $\theta$ , redémontrer la formule donnant le rayon de courbure à l'aide de  $\rho$  et de ses dérivées. Faire le calcul pour  $t = 1$ .

[Dem] On a  $\rho(-t) = -\rho(t)$  et  $\theta(-t) = \theta(t)$  il y a une symétrie par rapport à l'origine, on se contente de

$t > 0$ . Les variations sont données par  $\rho'(t) = 1 - \frac{1}{t^2}$  et  $\theta'(t) = 2t$  d'où

$t$	0		1		$+\infty$
$\rho'$	$-\infty$	-	0	+	1
$\rho$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
$\theta$	1	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
$\theta'$	0	+		+	

. L'étude des branches infinies se fait ainsi : on a  $\lim_{\theta \rightarrow 1^+} \rho = +\infty$  et on étudie ce qui se passe en  $t = 0$ .

On a  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \rho(t) \sin(\theta(t) - 1) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^2 + 1}{t} \sin(t^2) = 0$ . Ainsi la droite passant par l'origine et faisant un angle de  $\theta_0 = 1$  avec l'axe des abscisses est asymptote à la courbe. Il reste l'étude des points multiples on résoud

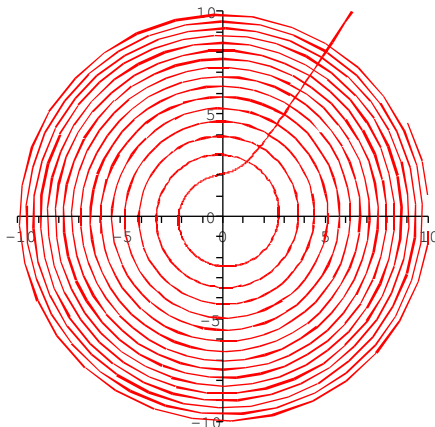
$\begin{cases} \rho(t_1) = \rho(t_2) \\ \theta(t_2) = \theta(t_1) + 2k\pi \end{cases}$  ou  $\begin{cases} (t_1^2 + 1)t_2 = t_1(t_2^2 + 1) \\ t_2^2 - t_1^2 = 2k\pi \end{cases}$  avec  $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$

ou  $\begin{cases} (t_1 - t_2)(t_1 t_2 - 1) = 0 \\ t_2^2 - t_1^2 = 2k\pi \end{cases}$  avec  $t_1 \neq t_2$ , ou  $\begin{cases} t_1 t_2 = 1 \\ t_2^4 - 1 - 2k\pi t_2^2 = 0 \end{cases}$  soit  $t_2 = \sqrt{k\pi + \sqrt{1 + k^2\pi}} = \frac{1}{t_1}$

avec  $k \in \mathbb{Z}^*$  il y a une infinité de points doubles. Il y a aussi les autres points avec  $\rho(t_2) = -\rho(t_1)$  et  $\theta(t_2) = \theta(t_1) + (2k + 1)\pi$  Pour la dernière question on a  $\rho(\theta) = \frac{\theta}{\sqrt{\theta - 1}}$  pour  $\theta > 1$  et en utilisant la

$$\text{formule } R = \frac{\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^3}{\left\| \frac{dOM}{d\theta} \wedge \frac{D^2OM}{d\theta^2} \right\|} = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}{|\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''|} = \frac{8}{3}.$$

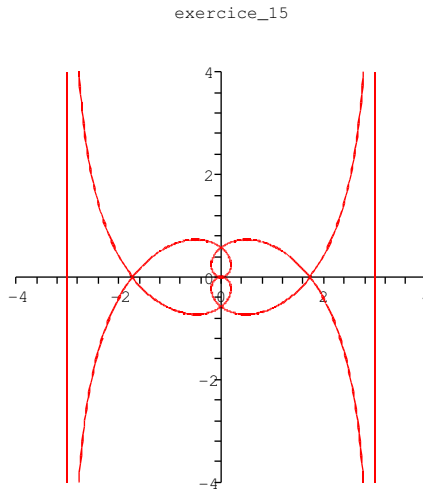
exercice\_13



**Exercice 38** Soit  $C$  une conique de foyer  $F$  et de directrice  $D$ . Une droite passant par  $F$  coupe  $C$  en deux points  $M$  et  $M'$ . Trouver le lieu du point d'intersection des tangentes à  $C$  en  $M$  et  $M'$ .

**Exercice 39** Etudier la courbe plane dont l'équation en coordonnées polaires est  $\rho = \tan \frac{\theta}{3}$ . (Période, symétries, variations, asymptotes, points doubles, courbe.)

[Dem] La fonction  $\rho(\theta)$  est  $3\pi$ -périodique et il faut prendre une période d'étude de  $6\pi$  qui est le ppcm de 3 et 2. Le domaine de définition est  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{2} + 3k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ . Les symétries donnent  $r(\theta + 3\pi) = \rho(\theta)$ , il y a symétrie par rapport à l'origine,  $D_e = \left] \frac{-3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$  et  $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$  ce qui donne une symétrie par rapport à  $Oy$  et on étudie la courbe sur  $\left[ 0, \frac{3\pi}{2} \right[$ . La fonction  $\rho'(\theta) = \frac{1}{3} \left( 1 + \tan^2 \frac{\theta}{3} \right) > 0$  et la fonction  $\rho$  croît sur  $\left[ 0, \frac{3\pi}{2} \right[$  de 0 à  $+\infty$ . En  $\left( \frac{\pi}{2} \right)^-$  on a  $\lim_{\theta \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} \rho \sin \left( \theta - \frac{3\pi}{2} \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \tan \left( \frac{\pi}{2} - \frac{h}{3} \right) \sin(-h) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sinh \cos \frac{h}{3}}{\sin \frac{h}{3}} = 3$  et la droite d'équation  $x = -3$  est asymptote. Les points multiples sont obtenus en résolvant  $\begin{cases} \theta_2 = \theta_1 + 2k\pi \\ \rho(\theta_2) = \rho(\theta_1) \end{cases}$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  ou  $\begin{cases} \theta_2 = \theta_1 + (2k+1)\pi \\ \rho(\theta_2) = -\rho(\theta_1) \end{cases}$ . Ici compte tenu de la stricte croissance de  $\rho$  sur  $\left[ 0, \frac{3\pi}{2} \right[$  seuls les points d'intersection avec les axes sont des points multiples.



**Exercice 40** Dans le plan affine euclidien orienté (unité 5cm) rapporté au repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  et d'axe polaire  $(O, \vec{i})$ , on considère la courbe  $G$  définie par son équation polaire :  $r(\theta) = \left( \sin \frac{\theta}{4} \right)^4$ .

1°) construire  $\Gamma$ ;

2°) Calculer la longueur totale de la courbe  $\Gamma$  en cm.

3°) On oriente  $\Gamma$  dans le sens des  $\theta$  croissants ; soit  $\vec{t}$  le vecteur tangent unitaire de la courbe orientée en un point  $M(\theta)$  et  $\vec{n}$  le vecteur normal unitaire directement perpendiculaire à  $\vec{t}$ . Pour  $\theta \in [0, 2\pi]$ , déterminer l'angle  $(\vec{i}, \vec{t})$  puis le rayon de courbure au point  $M(\theta)$  de  $\Gamma$ .

4°) En tout point  $M$  de  $\Gamma$ , distinct du pôle  $O$ , on considère la droite  $\Delta_M$ , perpendiculaire à la droite  $(OM)$  en  $M$ . Si  $M$  est confondu avec  $O$ ,  $\Delta_O$  est la perpendiculaire à la tangente à  $\Gamma$  en  $O$ .

a) Donner une représentation paramétrique de l'enveloppe  $E$  des droites  $\Delta_M$ .

b) Déterminer une équation polaire de  $E$ , puis construire  $E$ .

**Exercice 41** en reprenant la courbe de l'exercice 3, trouver sa développée c'est à dire l'ensemble des centres de courbure. Quel est le rapport entre la tangente en un point de la développée et la normale à la courbe au point correspondant.

[Dem] Pour la développée on a  $\vec{C} = \frac{dM}{ds}$  pour le vecteur tangent à  $(\Gamma)$  et  $\varphi = (\vec{i}, \vec{C})$ . Pour calculer  $\varphi$  on a par exemple  $\tan \varphi = \frac{y'}{x'} = -\cot an2t$  donc  $\varphi = 2t + \frac{\pi}{2}$  modulo  $\pi$  et  $d\varphi = 2dt$ . En posant  $I_t$ , le centre

de courbure en  $M_t$  on a  $\overrightarrow{OI_t} = \overrightarrow{OM_t} + \frac{ds}{d\varphi} \vec{n}$  ce qui donne  $\begin{cases} x_I = x_M - \frac{dy}{d\varphi} = \frac{3}{2} \cos t - \frac{1}{2} \cos 3t \\ y_I = y_M + \frac{dx}{d\varphi} = \frac{3}{2} \sin t - \frac{1}{2} \sin 3t \end{cases}$  pour

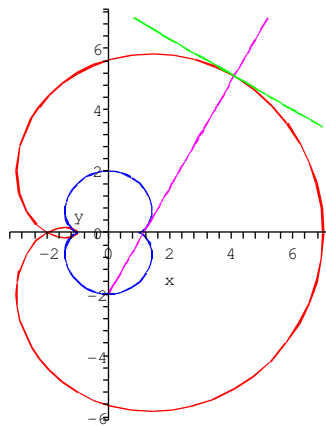
la construction de cette développée  $D$  on a  $I(t+2\pi) = I(t)$  et  $I(t+\pi)$  et  $I(t)$  sont symétriques par rapport à  $O$ ,  $I(-t)$  et  $I(t)$  sont symétriques par rapport à  $Ox$  on prendra  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  pour les dérivées :

$\begin{cases} x' = -\frac{3}{2} \sin t + \frac{3}{2} \sin 3t = 3 \sin t \cos 2t \\ y' = \frac{3}{2} \cos t - \frac{3}{2} \cos 3t = 3 \sin t \sin 2t \end{cases}$  et le tableau de variations :

$t$	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'$	0	+	0	-	0
$y'$	0	+		+	0
$x$	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	0
$y$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	2
$\frac{y'}{x'}$	0		$\infty$		0

et la représentation :

exercice\_17



## 7.14 Démonstrations

## 7.15 Exercices

### 7.15.1 Indications

### 7.15.2 Corrigés