Chapitre 5

Espaces vectoriels normés

5.1 Introduction

Il s'agit dans ce chapitre d'une présentation moderne et abstraite d'espaces vectoriels. L' analyse fonctionnelle linéaire du début du $20^{\text{ème}}$ siècle, autour des probl 'emes posés par les équations intégrales en a été la cause. Hilbert (1904-1906) étudie les développements en séries de fonctions orthogonales, Riesz (1880-1956) étudie les fonctions de carré sommable, il introduit les espaces L^p.
Il faut attendre 1920 pour que la notion d'espace normé apparaisse avec Banach (1892-1945) , Von Neumann (1903-1957) propose une présentation axiomatique des espaces d'Hilbert.
Banach écrit en 1920 : L'ouvrage (Sur les opérations dans les espaces abstraits et leur application aux équations intégrales) a pour but d'établir quelques théorèmes valables pour différents champs fonctionnels, que je spécifie dans la suite. Toutefois, afin de ne pas être obligé à les démontrer isolément pour chaque champ particulier, ce qui serait bien pénible, j'ai choisi une voie différente que voici : je considère d'une façon générale les ensembles d'éléments dont je postule certaines propriétés, j'en déduis des théor èmes et je démontre ensuite de chaque champ fonctionnel particulier que les postulats adoptés sont vrais pour lui.
La topologie s'est développée parallèlement mais il ne faut pas croire que les espces vectoriels normés sont un cas particulier des espaces topologiques. Les mt́hodes ne sont pas les mêmes. Ensuite on a étudié la géométrie des espaces vectoriels normés. Dans la seconde partie du $20^{\text{ème}}$ siècle les progrès sont considèrables pour les espaces de banach (espace vectoriel complet) et les opérateurs que l'on peut définir dessus.

5.2 Normes sur un espace vectoriel réel ou complexe

On essaie d'étendre la notion de valeur absolue définie dans $\mathbb{R}$ ou de module définie dans $\mathbb{C}$ à un espace vectoriel pour mesurer des longueurs.

Définition 1 *Soit E un espace vectoriel sur K ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).*
On appelle norme sur E une application N de E dans $\mathbb{R}$ vérifiant:
(N1) $\forall x \in E \quad N(x) = 0 \implies x = 0.$
(N2) $\forall x \in E \quad \forall \lambda \in K \quad N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$
(N3) $\forall x, y \in E \quad N(x+y) \leq N(x) + N(y).$

Exercice 1 Montrer que $N(0) = 0$ et que, pour tout $x \in E$, $N(x) \geq 0$.

[Ind] $0 = x - x$ puis $x - x = 0$.

[Dem] Pour tout x on a $N(O) = N(0.x) = 0N(x) = 0$.
On a $0 = N(0) = N(x-x) = N(x+(-x)) \leq N(x) + N(-x) = 2N(x)$ donc $N(x) \geq 0$.

Proposition 1 (Inégalité triangulaire)

$$\forall x, y \in E \quad |N(x) - N(y)| \leq N(x+y) \leq N(x) + N(y).$$

[Ind] Adapter la démonstration pour les valeurs absolues.

[Dem] Écrivons $N(x) = N(x+y-y) \leq N(x+y)+N(y)$ et donc $N(x)-N(y) \leq N(x+y)$. Puis en écrivant $N(y) = N(x+y-x) \leq N(x+y)+N(x)$ on a $N(y)-N(x) \leq N(x+y)$. Ainsi $|N(x) - N(y)| \leq N(x+y)$.

Exercice 2 Soit E un espace vectoriel normé par la norme N. Soit u un endomorphisme de E, montrer que $N \circ u$ est une norme sur E si et seulement si u est injective.

[Ind] Utiliser la linéarité de u puis bien écrire les définitions.

[Dem] $N \circ u$ vérifie les deux premières propriétés grâce à la linéarité de u. Pour tous x, y et tout λ : $N(u(x+y)) = N(u(x)+u(y)) \leq N(u(x)) + N(u(y))$ et $N(u(\lambda x)) = N(\lambda u(x)) = |\lambda| N(u(x))$. Parcontre pour l'axiome de séparation si $N(u(x)) = 0$ alors $u(x) = 0$ si u est injective on en déduira que $x = 0$. Et réciproquement si $N \circ u$ est une norme alors si $u(x) = u(y)$ on a $u(x-y) = 0$ et donc $N(u(x-y)) = 0$ et on en déduira que $x - y = 0$.

5.2.1 norme associée à un produit scalaire

Proposition 2 *Soit φ un produit scalaire sur E. L'application de E dans $\mathbb{R}_+$ qui, à $x \in E$ associe $\sqrt{\varphi(x,x)}$ est une norme sur E.*

[Ind] Vérifier.

[Dem] φ étant un produit scalaire on a $\forall x \in E$: $\varphi(x,x) \in \mathbb{R}^{+*}$. Pour l'axiome de séparation : si on $||x|| = 0$ alors $\varphi(x,x) = 0$ et donc $x = 0$ car φ est définie positive. La pseudo homogènéité : $||\lambda x|| = \varphi(\lambda x, \lambda x) = \lambda\overline{\lambda}\varphi(x,x)$ et $||\lambda x|| = |\lambda|\,||x||$. L'inégalité triangulaire provient de l'inégalité de cauchy-schwarz. En effet on veut $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ ou en core en élevant au carré : $\varphi(x,x) + \varphi(y,y) + 2Re\,(\varphi(x,y)) \leq \varphi(x,x) + \varphi(y,y) + 2\varphi(x,x)\varphi(y,y)$ en simplifiant $Re\,(\varphi(x,y)) \leq \varphi(x,x)\varphi(y,y)$ ce qui est vrai car $Re\,(\varphi(x,y)) \leq |\varphi(x,y)|$ et la deuxième inégalité est cauchy- schwarz.

5.2.2 Normes usuelles sur K^n

Proposition 3 *Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Les applications, qui à $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ associent*

$$||x||_\infty = \sup_{i \in [1,n]} |x_i|, \quad ||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad ||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

sont des normes sur K^n.

[Ind] Vérifier, pour la norme 3 trouver un produit scalaire.

[Dem] $||x+y||_\infty = \sup_{i \in [1,n]} |x_i + y_i|$. Or on a $\forall i \in [1..n]$: $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|$ donc $\forall i \in [1..n]$: $|x_i + y_i| \leq \sup_{i \in [1,n]} |x_i| + \sup_{i \in [1,n]} |y_i|$, puis en prenant le *sup* à gauche on obtient $||x+y||_\infty \leq ||x||_\infty + ||y||_\infty$.
Pour $\lambda \in K$ on a $\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$, ainsi $||\ lambdax||_\infty = \sup_{i \in [1,n]} |\lambda x_i| = |\lambda| \sup_{i \in [1,n]} |x_i| = |\lambda|\,||x||_\infty$.
Si $||x||_\infty = 0$ alors $\forall i \in [1,n]$ on a $x_i = 0$ et donc $x = 0$.
Pour la norme 1, aucune difficulté.
Pour la norme 2, l'homogénéité et l'axiome de séparation ne posent pas de problème. L'inégalité triangulaire provient de l'inégalité de cauchy schwarz pour le produit scalaire : $langlex, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

5.2.3 Norme usuelle sur $\mathcal{B}(A, K)$

Proposition 4 *Soit $\mathcal{B}(A, K)$ l'ensemble des fonctions bornées définies sur l'ensemble A. L'application qui à un élément f de $\mathcal{B}(A, K)$ associe*

$$||f||_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

est une norme sur $\mathcal{B}(A, K)$ appelée norme de la convergence uniforme

[Ind] Vérifier.

[Dem] Tout d'abord pour f bornée sur A, $||f||_\infty$ existe bien et est un élément de K.
Si f est dans $\mathcal{B}(A, K)$ et $\lambda \in K$ on a $||\lambda f||_\infty = |\ lambda|\,||f||_\infty$, puis avec g dans $\mathcal{B}(A, K)$: $\forall x \in A$ on a $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ donc $\forall x \in A$: $|f(x) + f(y)| \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$ ce qui donne en prenant le *sup* à gauche : $||f + g||_{\ infty} \leq ||f||_\infty ||g||_\infty$. Enfin si $||f||_\infty = 0$ alors $\forall x \in A$: $|f(x)| = 0$ et $f = 0$.

5.2.4 Normes usuelles sur $C^0([a, b], K)$

Proposition 5 *Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Les applications qui, à $f \in C^0([a, b], K)$, associe*

$$||f||_1 = \int_a^b |f(t)|\, dt, \quad ||f||_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\, dt}, \quad ||f||_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

sont des normes sur $C^0([a, b], K)$.

[Ind] Vérifier.

[Dem] Pour la norme 1 : Pour f, g dans $C^0([a, b], K)$ on a $\forall x \in [a, b]$: $|f(x) + g(x)|\ \ leq\, |f(x)| + |g(x)|$ donc par intégration sur $[a, b]$ on obtient l'inégalité triangulaire. L'homogénéité ne pose pas de problème. La séparation : $||f||_1 = 0$ donne $\displaystyle\int_a^b |f| = 0$ mais l'intégrale d'une fonction positive continue est nulle si et seulement si la fonction est nulle d'où $f = 0$.
Pour la norme 2 elle provient du produit scalaire : $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_a^b \overline{f(x)}g(x)dx$, c'est une norme euclidienne.
Pour la norme infinie : une fonction continue sur le compact $[a, b]$ étant bornée, $C^0([a, b], K)$ est inclus dans $\mathcal{B}(A, K)$, donc la norme $||\cdot||_\infty$ est définie sur $C^0([a, b], K)$ et vérifie les trois propriétés.

5.2.5 Distance dans un espace vectoriel normé

Définition 2 (Distance) *Soit A un ensemble, une application d définie sur $A \times A$ dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant (D1), (D2) et (D3) est appelée distance sur A:*
(D1) $\forall x, y \in A \quad d(x, y) = d(y, x)$.
(D2) $\forall x, y \in A \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$.
(D3) $\forall x, y, z \in A \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.
Le couple (A, d) est appelé espace métrique.

Proposition 6 *Soit (E, N) un espace normé. L'application d de $E \times E$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par :*

$$\forall x, y \in E \quad d(x, y) = N(x - y).$$

est une distance sur E appelée distance associée à N.

[Ind] vérifier.

[Dem] Pour (D1) : $d(x, y) = N(x - y) = N(-(x - y)) = N(y - x) = d(y, x)$, pour (D2) : $d(x, y) = 0$ donne $N(x - y) = 0$ et $(x - y = 0$ ou $x = y$. Poyr D3 : $\forall x, y, z \in A$: $d(x, y) = N(x - z + z - y) \leq N(x - z) + N(y - z)\ leq N(x, z) + N(y, z)$.

Proposition 7 *Soit (E, N) un espace normé et d la distance associée*

$$\forall x, y, z \in E \quad d(x+z, y+z) = d(x, y) \quad \textit{(Invariance par translation)}$$
$$\forall x, y \in E \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad d(\lambda.x, \lambda.y) = |\lambda|\, d(x, y) \quad \textit{(Homogénéité)}$$

[Ind] Vérifier.

[Dem] $\forall x, y, z \in E$ on a $d(x+z, y+z) = N(x+z-y-z) = N(x-y) = d(x, y)$ et $\forall \lambda \in K$: $d(\lambda x, \lambda y) = N(\lambda x - \lambda y) = N(\lambda(x-y)) = |\lambda|\, N(x-y) = |\lambda|\, d(x, y)$.

5.2.6 Boules ouvertes, Boules fermées

Soit E un espace vectoriel normé par l'application $x \to ||x||$.

Définition 3 (Boule fermée) *Soit $x_0 \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$. On appelle boule fermée, de centre x_0 et de rayon r, l'ensemble $B_f(x_0, r) = \{x \in E \mid ||x - x_0|| \leq r\}$.*

Définition 4 (Boule ouverte) *Soit $x_0 \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle boule ouverte, de centre x_0 et de rayon r, l'ensemble $B_o(x_0, r) = \{x \in E \mid ||x - x_0|| < r\}$.*

Proposition 8 *Une boule (ouverte ou fermée) est convexe.*

[Ind] Comment montrer qu'un ensemble est convexe.

[Dem] Soit u, v dans $\mathcal{B}_o(a, r)$. Il faut montrer que le segment d'extrémités u, v est dans cette boule. C'est à dire pour t réel avec $0 \leq t \leq 1$, on a $tu + (1-t)\,v \in \mathcal{B}_o(a, r)$. Or $a = ta + (1-t)\,a$ et
$d(a, tu + (1-t)\,v) = \|ta + (1-t)\,a - (tu + (1-t)\,v)\| =$
$= \|t\,(a-u) + (1-t)\,(a-v)\| \leq |t|\, \|a-u\| + |1-t|\, \|a-v\|$
$\leq (t + 1 - t)\, r \leq r$.

Exercice 3 Soit $x_0 \in E$, r un réel positif et $\alpha \in K^*$. On appelle $\alpha B_o(x_0, r)$ l'ensemble $\{\alpha x \mid x \in B_o(x_0, r)\}$.
1) Montrer que $\alpha B_o(x_0, r) = B_o(\alpha x_0, |\alpha|\, r)$.
2) Soit $y_0 \in E$. Montrer que $y_0 + B_o(x_0, r) = B_o(x_0 + y_0, r)$.
Montrer les mêmes propriétés pour une boule fermée.
En déduire que toutes les boules se déduisent par homothéties et translations de la boule centrée en 0 de rayon 1 (boule unité)

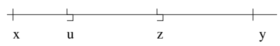
[Ind] Une égalité d'ensembles se montre par double inclusion.

[Dem] Si $x \in \alpha B_o(x_0, r)$, $x = \alpha x'$ avec $||x' - x_0|| < r$ donc $||x - \alpha x_0|| < |\alpha|\, r$ et $x \in B_o(\alpha x_0, |\alpha|\, r)$.
Réciproquement si $x \in B_o(\alpha x_0, |\alpha|\, r)$ en posant $x = \alpha x'$ on a $normeαx' - \alpha x_0 < |\alpha r|$ ou $||x - x_0|| < \alpha$ et donc $x \in \alpha B_o(x_0, r)$.
$x \in y_0 + B_o(x_0, r) \Leftrightarrow \exists y \ : \ x = y_0 + y$ avec $||y - x_0|| < r$ $Leftrightarrow||x - y_0 - x_0|| < r \Leftrightarrow x \in B_o(x_0 + y_0, r)$. De même pour les boules fermées.
On peut alors écrire $B_o(x_0, r) = x_0 + rB_o(0, 1)$ ce qui prouve que toute boule se déduise de la boule unité par des homothéties et translations.

Exercice 4 On suppose qu'il existe x, y, z trois éléments distincts de E appartenant à la sphère unité de E (ensemble des éléments de norme 1) et vérifiant $z \in [x, y]$. Montrer que le segment $[x, y]$ est inclus dans la sphère unité.

[Ind] Monter que l'application qui à $t \in [0, 1]$ associe $||x + t(y - x)||$ est convexe.

[Dem] On a $||x|| = 1$, $||y|| = 1$, $||z|| = 1$. Prenons par exemple cette disposition.

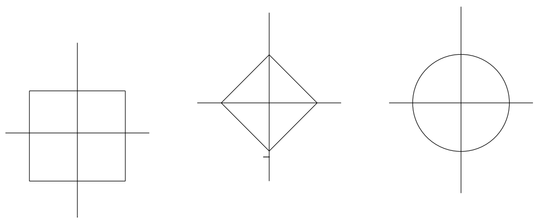


Ecrivons que z est barycentre de $[u, y]$: $z = tu + (1-t)y$ on obtient $||z|| \leq t||u|| + (1-t)||y||$ ou $1 \leq t||u|| + (1-t)$.
Écrivons maintenant que u est barycentre $[x, z]$ cela donne avec $u = t'x + (1-t')z$: $normeu \leq t'||x|| + (1-t')||z|| \leq 1$.
D'où l'égalité dans la majoration précédente ou $t||u|| + 1 - t = 1$ soit $||u|| = 1$ (le cas $t = 0$ donne $z = y$).

Exercice 5 Représenter les boules fermées unité pour les normes usuelles dans $\mathbb{R}^2$.

[Ind] Pour cela on se débarassera des valeurs absolues ou du *sup* en se plaçant dans des domaines bien choisis.

[Dem] Les boules sont déterminées par $\nu(x) \leq k$, regardons les boules unité es :
$\sup(|x|, |y|) \leq 1$ donne en décomposant dans chaque quadrant du plan un carré (si x, y sont positifs on sépare $x \leq y$ ce qui donne $y \leq 1$, puis $y \leq x$).
Pour la seconde norme, $|x| + |y| \leq 1$, dans chaque quadrant on trouve des segments (x, y positifs et $x + y \leq 1$) ce qui donne un carré "penché".
Pour la dernière c'est un cercle ou une vraie boule.



0 1 2

5.2.7 Parties bornées

Définition 5 (Partie bornée) *$A \subset E$ est dite bornée s'il existe une boule de E contenant A.*

Proposition 9 *Soit $x_0 \in E$ et $A \subset E$. A est bornée si et seulement s'il existe $r > 0$ tel que $A \subset B(x_0, r)$.*

[Ind] Ajouter et retrancher la même quantité.

[Dem] Si $A \subset B(a, r)$ alors $||x - x_0|| = ||x - a + a - x_0|| \leq r + ||a - x_0||$ et A est contenu dans la boule de centre x_0 et de rayon $r + ||a - x_0||$.

Exercice 6 Soit a et b deux points distincts de E. Montrer qu'il existe un réel ε strictement positif tel que $B_o(a, \varepsilon) \cap B_o(b, \varepsilon) = \emptyset$. (On dit que E est séparé).

[Ind] Si $a \neq b$ alors $||a - b||/3 > 0$.

[Dem] Effectivement prenons $\varepsilon = \frac{1}{3}||a - b||$ alors $B_o(a, \varepsilon) \cap B_o(b, \varepsilon) = \ emptyset$. En effet s'il existait x dans l'intersection on aurait : $||a - b|| = ||a - x + x - b|| \ leq||x - a|| + ||x - b|| \leq \frac{2}{3}||a - b||$, ce qui est impossible.

5.2.8 Suites

E est un espace vectoriel normé par la norme $|| \cdot ||$.

Les définitions et les propriétés qui suivent sont analogues à celles déjà vues dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et se démontrent pratiquement de la même faç on.

Définition 6 (Suite convergente) *Soit (u_n) une suite de E. On dit que la suite (u_n) est convergente vers une limite $l \in E$ si la suite $||u_n - l||$ converge vers 0, c'est à dire*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies ||u_n - l|| \leq \varepsilon.$$

Exercice 7 Montrer que si la suite (u_n) converge vers ℓ, alors la suite $(||u_n||)$ converge vers $||\ell||$.

[Ind] Trouver une inégalité.

[Dem] Par encadrement il suffit d'écrire $|||u_n|| - ||\ell||| \leq ||u_n - \ell||$.

Proposition 10 *Si la limite d'une suite existe, elle est unique.*

[Ind] Si il y en avait deux...

[Dem] Si on a une suite (u_n) ayant deux limites ℓ et ℓ'. Ainsi $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies ||u_n - \ell|| \leq \varepsilon$. et $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies ||u_n - \ell'|| \leq \varepsilon$. donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \;\; \exists n_0 \in N \;\; \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies ||\ell - \ell'|| \leq 2\varepsilon$. en écrivant $||\ell - u_n + u_n - \ell'|| \; leq ||u_n - \ell|| + ||u_n - \ell'||$. Ce qui donne $\forall \varepsilon$: $||\ell - \ell'|| \; leq \varepsilon$ donc $||\ell - \ell'|| = 0$ et $\ell = \ell'$.

Proposition 11 *Toute suite convergente est bornée.*

[Ind] Majorer pour n assez grand puis les termes qui restent.

[Dem] Soit (u_n) une suite convergente vers ℓ on a $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies ||u_n - \ell|| \leq \varepsilon$. donc pour $\varepsilon = 1$ on a $\exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies ||u_n|| \leq ||\ell|| + 1$. et donc $\forall n$: $||u_n|| \leq \; sup\{||\ell|| + 1, ||u_0||, \cdots, ||u_{n_0 - 1}||\}$.

Proposition 12 *La somme de deux suites convergentes est convergente vers la somme des limites.*

[Ind] Écrire les définitions.

[Dem] Si u_n et v_n sont des suites convergentes vers ℓ et ℓ' alors $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_1 \implies ||u_n - \ell|| \leq \varepsilon$ et $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \;\; \exists n_2 \in \mathbb{N}$
$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies ||v_n - \ell'|| \leq \varepsilon$ ainsi $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \;\; \exists n_0 = \sup\{n_1, n_2\} \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies ||u_n + v_n - \ell - \ell'|| \leq ||u_n - \ell|| + ||v_n - \ell'|| \leq 2\varepsilon$. Donc $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$.

Proposition 13 *Le produit d'une suite de scalaires qui converge vers λ et d'une suite de E qui converge vers l est une suite de E qui converge vers $\lambda.l$.*

[Ind] Écrire une différence de produits autrement.

[Dem] Soit (λ_n) et (u_n) convergeant vers λ et ℓ. on écrit $||\lambda_n u_n - \lambda \ell|| = ||(\lambda_n - \lambda) u_n + (u_n - \ell)\lambda||$ qui est majorée par $||\lambda_n - \lambda|| ||u_n|| + ||u_n - \ell|| ||\lambda||$. La suite (u_n) étant bornée, par comparaison on obtient que $\lim\limits_{n \to +\infty} ||\lambda_n u_n - \lambda \ell|| = 0$.

Définition 7 (Suite extraite) *Soit (u_n) une suite d'éléments de E. On dit que la suite (v_n) est une suite extraite de la suite (u_n) s'il existe une injection croissante φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier n: $v_n = u_{\varphi(n)}$.*

Exercice 8 Montrer qu'une suite extraite d'une suite extraite de la suite (u_n) est une suite extraite de (u_n).

[Ind] Composer les injections.

[Dem] la suite (v_n) est une suite extraite de la suite (u_n) s'il existe une injection croissante φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier n: $v_n = u_{\varphi(n)}$.
la suite (w_n) est une suite extraite de la suite (v_n) s'il existe une injection croissante ψ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier n: $w_n = v_{\psi(n)} = u_{\varphi(\psi(n))}$. Il suffit alors de préciser que la composée de deux injections croissantes est une injection croissante.

Proposition 14 *Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente vers la même limite.*

[Ind] Utiliser les définitions.

[Dem] Si (u_n) est une suite convergente vers ℓ, alors $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies ||u_n - \ell|| \leq \varepsilon$. Or φ est une injection croissante donc il existe $i_0 \geq n_0$ et $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists i_0 \in \mathbb{N} \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad i \geq i_0 \implies ||u_{\varphi(i)} - \ell|| \leq \varepsilon$.

5.2.9 Normes équivalentes

Définition 8 *Soit E un Ke.v. Deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes s'il existe deux réels α et β strictement positifs tels que*

$$\forall x \in E \quad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x).$$

On montre facilement que

Proposition 15 *Cette relation entre normes est une relation d'équivalence.*

[Ind] Réflexivité, symétrie, transitivité.

[Dem] Nous avons $\forall x \in E \quad N_1(x) \leq N_1(x) \leq N_1(x)$, puis si $\forall x \in E \; quad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_3(x)$ alors $\forall x \in E \quad \frac{1}{\beta} N_2(x) \leq N_1(x) \leq \frac{1}{\alpha} N_2(x)$ et enfin si $\forall x \in E \quad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$ et $\forall x \in E \quad \alpha' N_2(x) \leq N_3(x) \leq \beta' N_2(x)$ alors $\forall x \in E \quad \alpha\alpha' N_1(x) \leq N_3(x) \leq \beta\beta' N_1(x)$.

Proposition 16 (Comparaison de deux normes) *Soient N_1 et N_2 deux normes sur E. Les assertions suivantes sont équivalentes:*
a) Il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $N_1 \leq \alpha N_2$.
b) Toute partie bornée pour N_2 est bornée pour N_1.
c) Toute suite convergente pour N_2 est convergente pour N_1.
d) Toute suite convergente vers 0 pour N_2 est bornée pour N_1.

[Ind] Démonstration en boucle.

[Dem] a) $\Rightarrow$ b) : si une partie A est bornée pour n_2 alors il existe une boule $B_{N_2}(O, r)$ contenant A mais alors la boule $B_{N_1}(O, \alpha r)$ contient A qui est donc borné pour N_1.
b) $\Rightarrow$ c)Si une suite (x_n) converge vers x pour N_2 alors $\forall \varepsilon \, : \, \exists n_0 \, : \, \forall n \, : \, n \geq n_0 \Rightarrow N_2(x_n - x) \leq \varepsilon$ ou encore $\forall \varepsilon \, : \, \exists n_0 \, : \, \forall n \, : \, n \geq n_0 \Rightarrow N_1(x_n - x) \leq \alpha\varepsilon$ donc la suite converge vers x pour N_1.
c) $\Rightarrow$ d) : il suffit de prendre $x = 0$. une suite qui converge vers 0 pour N_2 converge pour N_1 et est donc borné pour N_1.
d) $\Rightarrow$ a) : par contraposée si $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^* \; : \; \exists x \in E$ tel que $N_1(x) > \alpha N_2(x)$. Prenons $\alpha = n$ d'où une suite (x_n) vérifiant $N_1(x_n) > n N_2(x_n)$. Les x_n ne sont jamais nul à cause de l'inégalité stricte. Posons $y_n = \frac{x_n}{\sqrt{n} N_2(x_n})$ on a $N_2(y_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $N_1(y_n) > \sqrt{n}$. Voilà une suite convergente vers 0 pour N_2 et non bornée pour N_1.

Remarque: On en déduit que si deux normes sont équivalentes, elles sont interchangeables pour montrer la convergence de suites etc...
En revanche, si elles définissent les mêmes applications lipschitziennes, les rapports de ces applications changent. Ainsi, par exemple, une application ayant un rapport plus petit que 1 pour une norme, peut avoir un rapport plus grand que 1 pour une norme équivalente.

Exercice 9 Montrer que les normes $|| \cdot ||_1$, $|| \cdot ||_2$ et $|| \cdot ||_\infty$, définies sur K^n, sont équivalentes.

[Ind] Trouver à la main les constantes des inégalités.

[Dem] En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour la norme euclidienne $|| \, ||_2$ on a $sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot 1 \leq ||x||_2 \left(\sum_{i=1}^{n} 1\right)^{\frac{1}{2}}$ ce qui donne $||x||_1 \leq \sqrt{n}||x||_2$. D'autre part $\left(\sum_{i=1}^{n} vabsx_i{}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(n||x||_\infty^2\right)^{\frac{1}{2}}$ soit $||x||_2 \leq n||x||_\infty$. Enfin on a $||x||_\infty = |x_{i_0}| \leq ||x||_1$; En récapitulant on a

$$||x||_1 \leq \sqrt{n}||x||_2 \leq n^{\frac{3}{2}}||x||_\infty \leq n^{\frac{3}{2}}||x||_1$$

tout cela prouve que ces trois normes sont équivalentes.

A partir de maintenant et jusqu'à la fin du chapitre la dimension est finie

5.3 Espaces vectoriels de dimension finie

Théorème 1 *Soit E un K-ev de dimension finie. Deux normes sur E sont équivalentes.*

[Ind] Hors programme

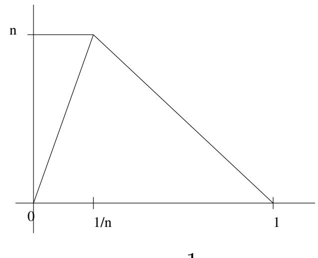
[Dem] Nous allons montrer que toute norme N est équivalente à $||||_\infty = \nu$.
On a $N\left(\sum_{i=1}^{p} x_i e_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p} |x_i| N(e_i) \leq p \sup_i |x_i| \sum_{i=1}^{p} N(e_i)$ où (e_i) est une base de E. Ainsi $N(x) \leq k\nu$.
D'autre part on a pour tout élément x, y : $|N(x) - N(y)| \leq N(y - x) \leq k\nu(y - x)$ c' est à dire que N est lipschitzienne de $(E, \nu) \to \mathbb{R}$. Or l'application $\varphi : \mathbb{R}^n \to E$ telle que $x \mapsto \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$ est une isométrie de $\mathbb{R}^n$ dans (E, ν) donc un homéomorphisme en munissant $\mathbb{R}^n$ de la norme ν. Dans $\mathbb{R}^n$ la sphère unité S est compact (comme produit d'espce compacts, un segment de $\mathbb{R}$ étant compact par le théorème de Bazano-Weierstrass dan $\mathbb{R}$), son image par φ aussi, et donc la fonction continue N est borné et atteint ses bornes sur $varphi(S)$. Soit $h = N(a)$ sa borne inférieure on a donc $\nu(x) = 1 \Rightarrow N(x) \geq h > 0$. Si $x \in E^*$ alors $N(\frac{x}{\nu(x)}) = 1$ et donc $N\left(\frac{x}{\nu(x)}\right) \geq h$ ce qui donne $h\nu(x) \leq N(x)$.

La remarque faite au paragraphe précédent et ce théorème prouve que, dans un espace vectoriel de dimension finie, les propriétés topologiques (ouverts, fermés, voisinages, limites , continuité, compacité,...) ne dépendent pas de la norme utilisée et , qu'en général, on n'a pas besoin de préciser la norme que l'on a prise pour obtenir la propriété. Seules les propriétés purement métriques (vecteurs de norme 1, rapport d'une application lipschitzienne, ...) dépendent de telle ou telle norme, auquel cas il sera important de préciser la norme prise pour établir le résultat numérique.
Remarque: Ce théorème est faux en dimension infinie:

Exercice 10 Montrer que les normes $||.||_1$ et $||.||_\infty$ définies sur $C^0([a, b], K)$ ne sont pas équivalentes.

[Ind] Trouver une suite qui tend vers 0 pour l'une et pas pour l'autre.

[Dem] On a une inégalité a savoir $||f||_1 \leq ||f||_\infty$.
Prenons la suite de fonctions de graphe f_n :



L'aire, ce qui correspond à la norme 1 vaut toujours $\frac{1}{2}$ mais le sup f_n vaut n et tend vers l'infini. Il ne peut donc pas exister de constante telle que $||f_n||_{\ infty} \leq ||f_n||_1$.

5.3.1 suites

Proposition 17 *Pour qu'une suite (u_n) d'éléments d'un espace vectoriel normé E de dimension finie soit convergente il faut et il suffit que ses coordonnées dans une base de E soient convergent es.*

[Ind] Choisir sa norme.

[Dem] Étant en dimension finie toutes les normes sont équivalentes on peut donc choisir la norme du sup. Posons $u_n = (u_n^i)_{1\le i\le p}$, si la suite converge vers $l = (l_i)_{1\le i\le p}$ alors pour tout i on a $\left|u_n^i - l_i\right| \le ||u_n - l||_\infty$ donc chaque composante converge vers la composante de la limite. Réciproquement si chaque composante (u_n^i) converge vers l_i alors $||u_n - l||_\infty = \left|u_n^{i_0} - l_{i_0}\right|$ et donc (u_n) converge vers $l = (l_i)$.

5.3.2 Exemples d'étude de suites de nombres réels ou complexes définies par une relation de écurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

Voir T.D.

5.4 Etude locale d'une application

5.4.1 Point adhérent, point intérieur

Définition 9 (Point adhérent à une partie) *Soit A une partie de E. Un élément x de E est adhérent à A si et seulement si $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad B_o(x,\varepsilon)\cap A \ne \emptyset$. On note $\bar{A}$ l'ensemble des points adhérents à A.*

Définition 10 (Partie dense) *Une partie A de E est dite dense dans E si $\bar{A} = E$. Ainsi dans toute boule ouverte non vide de E, il y a (au moins) un élément de A.*

Exemple 1 $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Définition 11 (Point intérieur à une partie) *Soit A une partie de E et $x \in E$. On dit que x est intérieur à A si et seulement s'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B_o(x,\varepsilon) \subset A$. On note $\mathring{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A.*

Proposition 18 (Caractérisation des parties ouvertes) *Soit A un partie de A. A est ouverte si et seulement si tous les points de A sont intérieurs à A.*

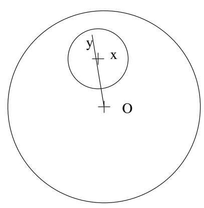
[Ind] Écrire la définition d'un ouvert.

[Dem] Si A est ouvert et $a \in A$ alors il existe $B_o(a,\varepsilon) \subset A$ donc a est intérieur à A. Si tous les points de A sont intérieurs à A alors si $a \in A$ il existe une boule $B_o(a, \varepsilon \subset A$.

Exercice 11 Soit $x \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.
a) Montrer que l'ensemble des points intérieurs à la boule fermée de centre x de rayon r est la boule ouverte de centre x de rayon r.
b) Montrer que l'ensemble des points adhérents à la boule ouverte de centre x de rayon r est la boule fermée de centre x de rayon r.

[Ind] Procéder par double inclusion.

[Dem] a) pour la première inclusion il s'agit de montrer que l'intérieur de $\bar{B}$ est inclus dans la boule ouverte. Si x est intérieur à $\bar{B}$ il existe ε tel que $B(x,\varepsilon) \subset \bar{B}$.



Pour tout y tel que $||y-x|| \leq \varepsilon$ et $||y-x_0|| \leq r$. En prenant un point y sur la droite passant par x_0 et x on a : $x = tx_0 + (1-t)y = x_0 + t(y-x_0)$ ou $||x-x_0|| = t||y-x_0|| \leq tr$, comme on peut supposer $t<1$ (sinon $x = x_0$) on abien $normex - x_0 < r$ et $x \in B_o$.
Pour la réciproque soit $x \in B_o$ alors $\exists\varepsilon$; la boule ouverte de centre x et de rayon ε est incluse dans la boule ouverte donc à fortiori dans $\bar{B}$ et x est dans l'intérieur de $\bar{B}$.
b) Si x est dans l'adhérence de la boule ouverte alors $\forall\varepsilon$: $B(x, \varepsilon = \cap B_o \neq\ emptyset$. Il existe donc y tel que $||y-x_0|| < r$ et $||y-x|| < \varepsilon$. Ce qui donne $||x-x_0|| < \varepsilon + r$. Cette inégalité étant vraie pour tout ε, par exemple en prenant $eps = \frac{1}{n}$ et en faisant tendre n vers ∞ on obtient $||x-x_0|| \leq r$ et x est dans la boule fermée.
Pour la réciproque soit x dans la boule fermé et un ε. Construisons $y = tx + (1-t)x_0$ tel que $||y-x|| = t||x-x_0|| < \varepsilon$. Il suffit de prendre $t < \dfrac{\varepsilon}{||x-x_0||}$ pour que $y \in B(x,\varepsilon) \cap B_o$.

5.4.2 Applications de la notion de suite convergente

Proposition 19 (Caractérisation d'un point adhérent à une partie) *Soit A une partie de E.*
Un élément x est adhérent à A si et seulement s'il existe une suite (u_n) d'éléments de A qui converge vers x.

[Ind] Construire la suite. Pour la réciproque prendre un point non adhérent et rgarder ses propriét 'es par rapport au complémentaire.

[Dem] Si a est adhérent à A alors $\forall n$ la boule $\mathcal{B}\left(a, \frac{1}{n}\right)$ rencontre A ce qui nous permet de prendre un $x_n \in \mathcal{B}\left(a, \frac{1}{n}\right) \cap A$ on a alors $\lim x_n = a$. Si a n'est pas adhérent alors il est intérieur au complémentaire de A ce qui donne l'existence d'une boule $\mathcal{B}(a,r)$ ne rencontrant pas A. Si donc il existait une suite (x_n) de A ayant pour limite a, a partir d'un certain rang on aurait $x_n \in \mathcal{B}(a,r)$ ce qui contredit que cette boule ne rencontre pas A. Ainsi il n'existe pas de telle suite.

Proposition 20 (Caractérisation des parties fermées par les suites) *Soit A une partie de E.*
Si A est fermée, un élément x appartient à A si et seulement s'il existe une suite (u_n) d'éléments de A qui converge vers x.
La partie A est fermée si et seulement si toute suite convergente d'éléments de A possède une limite qui appartient à A.

[Ind] Le complémentaire d'un ferméest un ouvert.

[Dem] Soit F un fermé et (x_n) une suite de F ayant pour limite dans E l'élément x. Si $x \notin F$ alors il appartient à son complémentaire qui est ouvert donc il existe $\mathcal{B}(x,r)$ ne rencontrant pas F. Comme $\lim x_n = x$ à partir d'un certain rang on est dans $\mathcal{B}(x,r)$ et donc plus dans F d'où contradiction. ($\exists n_0 : n \geq n_0 \Longrightarrow \|x_n - x\| < r$). Si F n'est pas fermé considèrons encore $O = CF$, il existe $\ell \in O$ qui n'est le centre d'aucune boule contenue dans O (sinon O est ouvert et F fermé). Choisissons alors $x_n \in F \cap \mathcal{B}\left(\ell, \frac{1}{n}\right)$ on a $\lim x_n = \ell$ et $\ell \notin F$.

5.4.3 Limites d'une application

Les notions et les propriétés suivantes de limite en un point et de continuité d'une application définie d'une partie d'un espace vectoriel normé dans un autre sont analogues à celles déjà vues (et se démontrent de la même faç on).
E, F et G sont, dans ce qui suit, des espaces vectoriels normés respectivement par $||\cdot||$, N et M.

Définition 12 (Limite d'une application) *Soit A une partie de E et f une application de A dans F. Soit a un point adhérent à A, on dit que f admet une limite l en a (et on note $\lim\limits_a f = l$) si*

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists\eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in A \quad ||x-a|| \leq \eta \implies N(f(x)-l) \leq \varepsilon.$$

On montre alors que:

Proposition 21 *Si la limite existe, elle est unique.*

[Ind] Adapter la preuve pour les suites.

[Dem] On prend des limites différentes l, l' et en écrivant que $N(l - l') = N(l - f(x) + f(x) - l') \leq N(f(x) - l) + N(f(x) - l')$ on montre que cette quantité peut être rendu aussi petite que l'on veut, elle est donc nulle.

Proposition 22 *Pour E de dimension finie, en choisissant une base de E on peut définir $f = (f_1, \ cdots, f_n)$ par ses composantes. Ainsi f a pour limite $\ell = (\ell_1 \cdots, \ell_n)$ en a si et seulement si pour tout $i \in [1, .., n]$ les fonctions f_i ont pour limite en a ℓ_i.*

[Ind] Choisir une norme.

[Dem] Pour la partie directe on a $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in A \quad ||x - a|| \leq \eta \implies N(f(x) - \ell) \leq \varepsilon.$. En prenant à l'arrivée la norme du sup on obtient $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in A \quad ||x - a|| \leq \eta \implies \forall i \in [1..n] \, |f_i(x) - \ell_i| \leq \varepsilon$. c'est 'a dire que la limite de f_i est ℓ_i. Pour la réciproque il suffit de remarquer que $||f(x) - \ell||_\infty = |f_{i_0}(x) - \ell_{i_0}|$ pour un certain i_0.

Proposition 23 *Si f est définie sur $A \subset E$ à valeurs dans F et possède une limite l en un point a adhérent à A, alors l est adhérent à $f(A)$.*

[Ind] Construire une suite.

[Dem] On a $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in A \quad ||x - a|| \leq \eta \implies N(f(x) - l) \leq \varepsilon$. Avec $\varepsilon = \frac{1}{n}$ et en prenant 'a chaque fois un $x_n \in A$ tel que $N(f(x_n - l) \leq \frac{1}{n}$ on a que $lim f(x_n) = l$ donc l est adhérent à $f(A)$.

Proposition 24 (Limite d'une somme) *Si f et g sont définies sur $A \subset E$ à valeurs dans F et possèdent des limites respectives l et l' en a adhérent à A, alors $f + g$ possède en a la limite $l + l'$.*

[Ind] Revoir la preuve pour les suites.

[Dem] On écrit $N((f + g)(x) - l - l') \leq N(f(x) - l) + N(g(x) - l')$ les termes de droite tendent vers 0 quand x tend vers a donc aussi le terme de gauche par encadrement.

Proposition 25 (Limite d'un produit) *Soient λ et f sont définies sur une partie A de E à valeurs respectivement dans K et dans un espace vectoriel normé F et a un point adhérent à A. Si λ et f admettent, en a des limites α et l, alors le produit $\lambda \dot{f}$ admet, en a, la limite αl.*

[Ind] Revoir la preuve de ce résultat pour les suites.

[Dem] On écrit $N(\lambda(x)f(x) - \alpha l) = N((\lambda(x) - \alpha)f(x) + (f(x) - l)\alpha$ et en utilisant que f est bornée au voisinage de a on obtient le résultat par encadrement.

Proposition 26 (Limite d'un inverse) *Soit f une fonction numérique définie sur une partie A de E et a adhérent à A. Si f admet, en a, une limite α non nulle alors il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\quad \forall x \in B_o(a, r) \cap A \quad f(x) \neq 0$ et en appelant $\tilde{f}$ la restriction de f à $B_o(a, r) \cap A$, on a $\lim_a \dfrac{1}{\tilde{f}} = \dfrac{1}{\alpha}$.*

[Ind] Transformer la différence de deux inverses.

[Dem] Avec les hypothèses $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in A \quad ||x - a|| \leq \eta \implies \alpha - \varepsilon \leq f(x) \leq \alpha + \varepsilon$ en prenant $\varepsilon = \ alpha/2$ on a que f est non nulle au voisinage de a. On écrit : $\left| \dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{\alpha} \right| = \dfrac{|f(x) - \alpha|}{|f(x)\alpha|}$ et en minorant le dénominateur par $f(x) \geq \alpha/2$ pour x assez proche de a, on obtient le résultat.

Proposition 27 (Limite d'une composée) *Soient $f : A \subset E \to F$ et $g : B \subset F \to G$ telles que $f(A) \subset B$. Si a adhérent à A et b adhérent à B sont tels que $\lim_a f = b$ et $\lim_b g = l \in G$, alors $\lim_a g \circ f = l$.*

[Ind] Prendre la définition avec les ε.

[Dem] Traduisons $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta_1 \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall y \in B \quad ||y-b|| \leq \eta \implies N(g(y)-l) \leq \varepsilon$ et $\exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad forall x \in A \quad ||x-a|| \leq \eta \implies N(f(x)-b) \leq \eta_1$ d'où $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in A \quad ||x-a|| \leq \eta \implies N(g \circ f(x) - l) \leq \varepsilon$.

5.5 Applications continues

Définition 13 (Application continue) *Soit $f : A \subset E \to F$ et $a \in A$, on dit que f est continue en a si $\lim_a f = f(a)$.*
f est continue si elle est continue en tout point de A.

On déduit de cette définition que:

Proposition 28 *La somme, la composée d'applications continues est continue. Le produit de deux fonctions numériques continues est continue. Le quotient de deux fonctions numériques continues est continue sur son ensemble de définition.*

[Ind] Traduire par les limites

[Dem] C'est exactement l'application de ces résultats pour les limites.

Exercice 12 Considérons K^n muni de la norme $||\cdot||_\infty$. Montrer que les formes linéaires coordonnées sont continues. En déduire que toute fonction rationnelle à n variables est continue sur son ensemble de définition.

[Ind] Utiliser l'inégalité $|x_i - a_i| \leq ||x-a||_\infty$.

[Dem] Si $x \in K^n$ on notera $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$. On pour tout i : $\left|x_i - x_i^0\right| \leq ||x - x^0||_\infty$. Ceci permet de prouver la continuité des formes linéaires coordonnées.
Une fonction rationnelle à n variables est le quotient de combinaisons linéaires de formes coordonnées donc continue sur son ensemble de définition.

Proposition 29 (Image d'une suite convergente par une application continue) *Soit $f : A \subset E \to F$ et $a \in A$. f est continue en a si et seulement si toute suite (u_n) d'éléments de A qui converge vers a est telle que la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.*

[Ind] Partie directe les ε, la réciproque par contraposée.

[Dem] Si f est continue en a alors $\forall \varepsilon : \exists \eta : \forall x \in A : normex - a \leq \eta \Rightarrow ||f(x) - f(a)|| \leq \varepsilon$. Donc si (u_n) tend vers a on a $\forall \varepsilon : \exists n_0 : \forall n : n \leq n_0 ||u_n - a|| \leq \eta$ et donc $||f(u_n) - f(a)|| \leq \varepsilon$ ceci prouve que $(f(u_n)$ tend vers $f(a)$.
Réciproquement Par contraposée : si f n'est pas continue en a alors $\exists \varepsilon :: \forall \eta : \exists x \in A : ||x-a|| \leq \eta$ et $||f(x) - f(a)|| \geq \varepsilon$ prenons $\eta = \frac{1}{n}$ on obtient une suite (x_n) de A tel que x_n converge vers a car $||x-a|| \leq \frac{1}{n}$ et $(f(x_n)$ ne tend pas vers $f(a)$ puisque $normef(x_n) - f(a) \geq \varepsilon$.

Remarque: Cette proposition est aussi bien utilisée pour trouver la limite d'une suite image que pour montrer qu'une application n'est pas continue en un point.

Exercice 13 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si}(x,y) = (0,0) \\ \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.

[Ind] Trouver des suites tendant vers 0 dont leurs images n'ont pas la même limite.

[Dem] Pour la suite $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$ la limite de $f(x_n, y_n)$ est 0. Mais pour la suite $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = 0$ la limite est 1. f n'est donc pas continue en 0. Elle est continue sur $\mathbb{R}^2/\{0,0\}$.

Montrons des propriétés importantes des fonctions continues.

Proposition 30 (Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue) *Soit $f : A \subset E \to F$ une application continue.*
L'image réciproque par f d'un ouvert (resp fermé) de F est l'intersection d'un ouvert (resp fermé) de E et de A.

[Ind] Utiliser les suites.

[Dem] Pour montrer que si F est fermé alors $\overset{-1}{f}(F)$ est fermé il suffit de prendre une suite de (x_n) de $\overset{-1}{f}(F)$ c'est à dire $f(x_n) \in F$ convergeant dans E vers ℓ et montrer que $\ell \in \overset{-1}{f}(F)$. Or (x_n) converge vers ℓ et f est continue donx $f(x_n) \in F$ converge vers $f(\ell)$ et comme F est fermé $f(\ell) \in F$ donc $\ell \in \overset{-1}{f}(F)$. Pour les ouverts on passe au complémentaire.

Exercice 14 Montrer que la propriété précédente caractérise les fonctions continues.

[Ind] Utiliser les suites.

[Dem] Écrivons que l'image réciproque d'une boule ouverte est l'intersection d'une boule ouverte avec A :

$$\forall \varepsilon \, \exists \eta \ : \ B(x_0, \eta) \cap A \subset \overset{-1}{f}\left(B\left(f(x_0, \varepsilon\right)\right)$$

c'est exactement

$$\forall \varepsilon \, \exists \eta \ : \ \forall x \in A \ \ normex - x_0 \leq \eta \Rightarrow ||f(x) - x(x_0|| \leq \varepsilon$$

.

Ainsi si f est à valeurs réelles alors pour tout nombre rél α, l'ensemble des points x tels que $f(x) \geq \alpha$ ou tels que $f(x) = \alpha$ est une partie fermée de E. De même l'ensemble des points x tels que $f(x) > \alpha$ est une partie ouverte de E.

5.5.1 Applications lipschitziennes

Définition 14 *Soit $f : A \subset E \to F$. On dit que f est lipschitzienne de rapport $k \in \mathbb{R}_+$ si*

$$\forall x, y \in A \quad N(f(x) - f(y)) \leq k||x - y||.$$

Exemple 2 La norme sur E est une application lipschitzienne de rapport 1.

Proposition 31 *Toute application lipschitzienne est continue.*

[Ind] Trouver η.

[Dem] Si $k = 0$ alors la fonction est identiquement nulle et le résultat est vrai. Sinon il suffit de prendre $\eta = \dfrac{\varepsilon}{k}$.

Remarque: La norme sur E est donc une fonction numérique continue.

Proposition 32 *L'ensemble des applications lipschitziennes définies sur A est un s.e.v. de $\mathcal{F}(A, F)$.*

[Ind] Le montrer.

[Dem] L'ensemble n'est pas vide et avec les notations qui s'imposent on a $N(f + \lambda g(x) - f + \lambda g(y)) \leq N(f(x) - f(y)) + |\lambda| \, N(g(x) - g(y)) \leq k_1||x - y|| + |\lambda| \, k_2||x - y||$ et $f + \lambda g$ est lipschitzienne de rapport $k_1 + |\lambda| \, k_2$.

5.5.2 Applications linéaires continues

Soient E et F deux K-e.v.n.de dimesion finie.

Théorème 2 *Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. u est lipschitzienne.*

[Ind] Démonstration circulaire.

[Dem] Les fonctions coordonnées de u sont des fonctions polynômiales en les coordonnées donc continues. Il en résulte que u est continue comme somme de fonctions continues. u est continue en 0 alors $\exists \eta\ :\ \forall x\ \ ::||x|| \leq \eta \Rightarrow ||u(x)|| \leq 1$. Maintenant pour x non nul quelconque dans E on a $||\eta \dfrac{x}{||x||}|| \leq \eta$ et donc $||u\left(\eta \dfrac{x}{||x||}\right)|| \leq 1$ ou $||u(x)|| \leq \dfrac{1}{\eta}||x||$. Si $x = 0$ la relation est encore vraie.
u est "lipschitzienne" en 0 mais pour une application linéaire on s'y ramène. En effet $||u(x) - u(y)|| = ||u(x-y)|| \leq C||x-y||$.

Sur un produit d'espaces vectoriels normés (E_i, N_i) nous pouvons entr'autres définir trois normes classiques et équivalentes : avec $X = (x_1, \cdots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i$

$$||X||_\infty = \sup_{i=1,\cdots,n} N_i(x_i)$$

$$||X||_1 = \sum_{i=1}^{n} N_i(x_i)$$

$$||X||_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} N_i^2(x_i)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 33 *Soient E, F et G des K-espaces vectoriels normés et B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G. Si E et F sont de dimension finie, B est continue.*

[Ind] Quelle est la forme d'une application bilinéaire.

[Dem] En prenant des bases on a que B est une fonction polynômiale en les coordonnées, donc continue.

Exercice 15 Soit E un espace préhilbertien. Montrer que le produit scalaire est une application continue définie de $E \times E$ dans K.

[Ind] Trouver une application bilinéaire.

[Dem] Le produit scalaire est une application bilinéaire de $E \times E$ dans K, l'inégaalité de Chauchy-Schwarz donne $\forall x,\ y\ :\ |\langle x, y\rangle| \leq ||x||||y||$ ce qui montre imédiatement que le produit scalaire est borné sur le produit des boules unités. Le produit scalaire est donc continiue.

Remarque: Cela permet aussi de montrer la continuité de $(u, v) \longmapsto uv$ dans l'algèbre $calL(E)$.

5.6 Parties compactes

Définition 15 (Compact) *Une partie A de E espace vectoriel normé de* ***dimension finie*** *est dite compacte si, elle est fermée et bornée.*

Exemple 3 Toute segment de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est compacte.

Remarque: Cette définition n'est plus vraie pour un espace vectoriel de dimension infinie, on aura seulement que tout compact est fermé borné.

Remarque: On montre que cette définition est caractéristique des espaces vectoriels de dimension finie.

Proposition 34 *Soit $E = K^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) muni de la norme $|| \cdot ||_\infty$. Soit F un compact (fermé, borné) de toute suite de F on peut extraire une suite convergente.*

[Ind] hors programme.

[Dem] Il suffit de montrer que de toute suite de F, fermé, borné de E on peut extraire une suite convergente. Nous prenons une suite (X_n) de K^p chaque vecteur X_n à p composantes $x_n^1, \cdots, x_n^p$. Les projections coordonnées p_i sont continues donc $p_i(F)$ est un compact de K. Partant de la suite $(p_p(X_n) = (x_n^p)$ on peut extraire une suite convergente $x_{\varphi_p(n)}$. Repartant de la suite $X_{\varphi_p(n)}$ on peut extraire de x_n^{p-1} une suite convergente. Ainsi de suite jusqu'à épuisement des coordonnées (en nombre fini). On trouve ainsi une suite extraite de (X_n) dont chaque composante converge, donc elle converge pour la norme infinie. Nous avons utilisé Bolzano- Weierstrass dans K.

Exercice 16 Soit $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts emboîtés non vides de E. Il existe un point commun à tous ces compacts et ce point est unique si et seulement si le diamètre des compacts C_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

[Ind] C'est la généralisation du théorème des segments emboités.

[Dem] Soit une suite $(x_n)_n$ telle que $x_{n \in C_n}$. Cette suite est dans le compact $cap_n C_n$, elle admet donc une sous-suite convergente vers ℓ et $\ell \in \cap_n C_n$, qui n'est donc pas vide.

Théorème 3 (Image directe d'un compact) *Soit $f : A \subset E \to F$ une application continue. Si K est un compact de E inclus dans A alors $f(K)$ est une partie compacte de F.*

[Ind] Admis.

[Dem] Si K est compact de toute suite de K on peut extraire une suite convergente dans K. Soit une suite de $f(K)$ elle s'écrit $y_n = f(x_n)$ avec $x_n \in K$ de (x_n) on peut extraire une suite $(x_{\varphi(n)})$ convergente vers $\ell \in K$. f étant continue $f(x_{\varphi(n)})$ converge vers $f(\ell)$ et il reste à montrer que $f(\ell \in f(K)$, ce qui est admis.

Proposition 35 *Une fonction à valeurs réelles, définie sur un compact de E et continue est bornée et atteint ses bornes.*

[Ind] Utiliser la proposition précédente.

[Dem] Soit K le compact on a donc $f(K)$ est compact donc borné soit $m = inf f(K)$ et $M = Supf(K)$. m, M sont des limites de points de $f(K)$ qui est fermé, donc $m, M \in K$.

Exercice 17 Soit F un s.e.v de dimension finie de E. Montrer que, pour tout $x \in E$, il existe $y \in F$ tel que $||x - y|| = \inf_{z \in F} ||x - z||$ ce nombre est aussi noté $d(x, F)$. Montrer en utilisant une norme choisie dans $\mathbb{R}^2$ qu'il peut exister plusieurs vecteurs possédant cette propriété.

[Ind] Utiliser le fait que F est fermé et que les parties fermées et bornées de F sont compactes.

[Dem] Par définition de l'inf il existe une suite z_n d'éléments de F telle que $||x - z_n||$ tend vers $\inf_{z \in F} ||x - z||$. En écrivant $||z_n|| = ||x - z_n|| + ||x||$ on a que la suite $(z_n)_n$ est bornée. F étant de dimension finie est fermé. Ainsi la suite $(z_n)_n$ est dans un fermé borné, donc dans un compact. Il existe donc une sous suite convergente disons vers z. Par passage à la limite on a $||x - z|| = \inf_{z \in F} ||x - z||$. Prenons dans $\mathbb{R}^2$, une droite par exemple l'axe des x et un point sur cette droite la distance de ce point à la droite est atteint en tout point de la droite.

Révision : Quelques propriétés des réels

5.7 introduction

L'histoire de l'invention du corps des réels est certainement la plus passionnante. On peut faire remonter à la Grèce classique, la Grèce d'Euclide l'apparition des nombres réels. Mais il faudra attendre 1870 pour obtenir une construction satisfaisante de $\mathbb{R}$. Étudiant la mesure des longueurs, l'école de Pythagore démontre (-600) qu'il est impossible, une unité étant choisie, de mesurer toute longueur par un quotient d'entiers (diagonale du carré, $\sqrt{2}$). Il faut bien se rendre compte que la présentation du corps des réels avec ses opérations et son ordre n'était pas évidente : on pouvait additionner, diviser certains nombres et pas d'autres. C'est ainsi que Archimède énonce : étant donnés des nombres A, B avec $A < B$ il existe un entier n tel que $nA > B$. Parallèlement à ce problème de proportion, le calcul numérique apporte son lot de questions. Les fractions continues puis les séries sont de bon moyen de représenter les nombres réels ou du moins de donner de bonne approximation : 1596 déjà 35 décimales de π, $\dfrac{4}{\pi} = \dfrac{1+1}{2+\dfrac{3^2}{2+\dfrac{5^2}{2+\dfrac{7^2}{2+\cdots}}}}$.

L'apparition de droles de nombres dans des domaines différents : problèmes de rapport, somme de séries, solutions d'équations, les fonctions log et exponentielle, a posé la nécessité de leur classification. Mais toute construction devait tenir compte de la pssibilité des opérations et de l'ordre. C'est Cauchy grâce aux limites de suites et puis Dedekind (1872) qui présentent une construction algèbrique de $\mathbb{R}$ à l'aide des coupures ($x^2 \geq 2$), puis Cantor construit $\mathbb{R}$ à l'aide des suites de cauchy en mettant les opérations et l'ordre. Néanmoins il n'était pas évident que les différentes constructions aboutissaient au mm̂e ensemble. La définition axiomatique de Hilbert est importante et résoud le problème : il existe un unique ensemble vérifiant
1) c'est un corps commutatif pour les lois $+, \cdot$.
2) c'est un corps totalement ordonné.
3) c'est un groupe ordonné archimèdien pour la loi $+$.
4) c'est un système qu'il n'est pas possible d'agrandir en lui ajoutant des éléments pour obtenir un ensemble vérifiant encore 1-2-3.
Pour finir nous citons l'apparition de la fonction log. Pour simplifier les calculs numériques nous voyons des tableaux (Stifel 1544) de ce type :

$$\begin{array}{cccccccccccc} \cdots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \cdots & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128 & 256 \end{array}$$

Ainsi pour calculer 8×32 on a que 8 correspond à 3, 32 à 5 et $5 + 3 = 8$ 8 qui correspond à 256. On transforme ainsi un produit en somme. $l(xy) = l(x) + l(y)$.

Théorème 4 *Soit A une partie non vide majorée (resp minorée) de $\mathbb{R}$, l'ensemble des majorants (resp minorants) de A possède un plus petit élément (resp un plus grand élément), il est appelé borne supérieure (resp borne inférieure) de A noté* $\sup A$ *(resp* $\inf A$*).*

[Ind] Admis.

[Dem] Admis.

Proposition 36 (Caractérisation de la borne supérieure) *Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$ et α un réel*

$$\alpha = \sup A \iff \begin{cases} \forall x \in A \quad x \leq \alpha \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists x \in A \quad \alpha - \varepsilon < x \end{cases}$$

[Ind] Revoir la définition d'une borne supérieure.

[Dem] En effet la premiére assertion exprime que α est un majorant et la seconde que pour tout $\varepsilon > 0$ $M - \varepsilon$ n'est pas majorant donc α est bien le plus petit majorant.

Proposition 37 (Caractérisation de la borne inférieure) *Soit A une partie minorée de $\mathbb{R}$ et α un réel*

$$\alpha = \inf A \iff \begin{cases} \forall x \in A \quad \alpha \leq x \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists x \in A \quad x < \alpha + \varepsilon \end{cases}$$

[Ind] Qu'est une borne inférieure ?

[Dem] Cela exprime que α est le plus grand des minorants.

Exercice 18 Soient A et B des parties non vides de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$A \subset B \implies \inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$$

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B$$
$$\inf(A+B) = \inf A + \inf B$$

[Ind] Plus il y a de monde plus on a de chance de trouver des petits et des grands ! Pour la seconde et la troisième assertion procéder par double inégalité.

[Dem] Pour tout x de B on a $\inf B \leq x$ donc pour tout x de A aussi $\inf B \leq x$, l'inf A étant le plus grand des minorants on a $\inf B \leq \inf A$. On a toujours $\inf A \leq \sup A$. Pour tout élément x de A on a $x \leq \sup B$ car x est aussi dans B et comme le $\sup A$ ets le plus petit des majorants on a $\sup A \leq \sup B$. Pour tout $x = a + b$ avec $a \in A$ et $b \in B$ on a $x \leq \sup A + \sup B$ donc $\sup(A+B) \leq \sup A + \sup B$. en écrivant $x = a + b$ puis en prenant le sup en x on a $\sup(A+B) \geq a + b$ ou $\sup(A+B) - b \geq a$ ce pour tout $a \in A$ donc $\sup(A+B) - b \geq \sup A$ ou pour tout $b \in B$: $\sup(A+B) \geq \sup A + b$ et enfin $\sup(A+B) \geq \sup A + \sup B$. D'où l'égalité.
Même démonstration pour les inf.

Définition 16 *soit $x \in \mathbb{R}$. on appelle valeur absolue de x et on note $|x|$, le plus grand des deux réels x et $-x$.*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| = \sup\{-x, x\}$$

Exercice 19 Soient $x, y \in \mathbb{R}$

$$|x| \leq y \iff x \leq y \text{ et } -x \leq y$$
$$\iff -y \leq x \leq y$$

[Ind] Différentier le cas où $|x| = x$ et le cas $|x| = -x$.

[Dem] Il suffit de remarquer que $|x| \leq y$ donne $x \leq y$ et $-x \leq y$ ou $x \geq -y$.

Proposition 38 *Soient $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$\sup\{x, y\} = \frac{1}{2}\left(x + y + |x - y|\right)$$
$$\inf\{x, y\} = \frac{1}{2}\left(x + y - |x - y|\right)$$

[Ind] Séparer les cas où $\sup\{x, y\} = x$ ou y.

[Dem] En effet si $x \leq y$ alors $x + y + |x - y| = x + y - x + y = 2y$ et si $x \geq y$ alors $x + y + |x - y| = x + y + x - y = 2x$. De même pour l'inf.

Exercice 20 Calculer, pour $x, y \in \mathbb{R}$, les expressions

$$\frac{1}{2}\left(|x + y| + |x - y|\right) \text{ et } \frac{1}{2}\left(|x + y| - |x - y|\right)$$

[Ind] Séparer les cas selon que $x \leq y$ ou $x \geq y$.

[Dem] Si $x \geq y$ et $x \geq -y$ on trouve $x + y + x - y = 2x$.
Si $x \geq y$ et $x \leq y$ on trouve $2y$.
Si $x \leq y$ et $x \geq -y$ on touve $-2y$.
Si $x \leq y$ et $x \leq -y$ on trouve $-2x$.
De même pour l'autre.

Proposition 39 (Passage à la limite dans une inégalité) *Si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles* **convergentes** *alors*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq v_n \implies \lim_{n\to\infty} u_n \leq \lim_{n\to\infty} v_n.$$

[Ind] Par l'absurde.

[Dem] On peut se ramener par différence à montrer que si $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $x_n \geq 0$ alors la limite ℓ est positive. Si $\ell < 0$ alors en faisant $\varepsilon = -2\ell$ dans $\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \,:\, \forall n \in N \,:\, n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - \ell| \leq \varepsilon$ donnerait $\forall n \geq n_0 \,:\, |x_n - \ell| \leq -2\ell$ ou $x_n \leq \ell - 2\ell$ c'est à dire $x_n < 0$ ce qui contredit l'hypothèse.

Exercice 21 Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes. Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n < \lim_{n\to\infty} v_n$ entraîne $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang.

[Ind] Écrire les définitions des limites avec les ε.

[Dem] L'hypothèse peut s'écrire : $\lim_{n\to\infty}(u_n - v_n) = \ell < 0$ c'est à dire :$\forall \varepsilon, \exists n_0, \forall n \geq n_0 : |u_n - v_n - \ell| < \varepsilon$. Cette dernière inégalité donne $u_n - v_n < \ell + \varepsilon$. Prenons $\varepsilon = -\frac{\ell}{2} > 0$ on aura pour $n \geq n_0$ l'inégalité $u_n - v_n < \frac{\ell}{2} < 0$ ou $u_n < v_n$.

Proposition 40 (Existence d'une limite par encadrement) *Soient (u_n) et (w_n) deux suites* **convergentes vers la même limite l** *et (v_n) une suite réelle,*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq v_n \leq w_n \implies \lim_{n\to\infty} v_n = l$$

[Ind] Utiliser la définition des limites avec les ε.

[Dem] Avec les hypothèses la quantité $|v_n - \ell| \leq \sup |w_n - \ell|, |u_n - \ell|$. Soit $\varepsilon > 0$ on a $\exists n_0 \,:\, \forall n \in N \,:\, n \geq n_0 \Rightarrow |w_n - \ell| \leq \varepsilon$ et $\exists n_1 \,:\, \forall n \in N \,:\, n \geq n_1 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon$ donc $\forall \varepsilon > 0\, \exists n_2 = \sup n_0, n_1 \,:\, \forall n \in N \,:\, n \geq n_2 \Rightarrow |v_n - \ell| \leq \varepsilon$ ce qui prouve que (v_n) tend vers ℓ.

Théorème 5 *Soit (x_n) une suite croissante de réels. La suite (x_n) est convergente ou divergente vers $+\infty$ et*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Une suite croissante de réels est convergente si et seulement si elle est majorée.

Soit (x_n) une suite décroissante de réels. La suite (x_n) est convergente ou divergente vers $-\infty$ et

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Une suite décroissante de réels est convergente si et seulement si elle est minorée.

[Ind] Écrire la définition du sup.

[Dem] Soit (x_n) une suite croissante ou bien elle est majorée et nous posons $\ell = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Par définition $\forall \varepsilon\ \exists p \in \mathbb{N}\ :\ \ell - \varepsilon \leq x_p \leq \ell$ mais la suite est croissante donc $\forall n \geq p\ x_p \leq x_n \leq \ell$ ou $0 \leq \ell - x_n \leq \varepsilon$ ce qui donne que la site tend vers ℓ. Si la suite n'est pas majorée alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ il existe un terme de la suite disons x_p tel que $x_p \geq \lambda$ mais alors $\forall n \geq p$ on a $x_n \geq x_p \geq \lambda$ c'est à dire que la suite (x_n) tend vers $+\infty$.

De cette caractérisation des suites monotones convergentes, on en déduit des résultats importants:

Proposition 41 (Suites adjacentes) *Soient (u_n) une suite croissante et (v_n) une suite décroissante. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ alors les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes. Si, de plus, la suite $(u_n - v_n)$ converge vers 0, elles sont dites adjacentes et elles convergent vers la même limite.*

[Ind] Appliquer le théorème précédent.

[Dem] On a que la suite (u_n) est croissante et majorée car $\forall n\ :\ u_n \leq v_n \leq v_0$ donc convergente vers ℓ. La suite (v_n) est décroissante et minorée car $u_0 \leq u_n \leq v_n$ donc convergente vers ℓ'. Or $u_n - v_n$ tend vers 0 donc en passant à la limite on a $\ell - \ell' = 0$ ce qui donne le résultat.

Exercice 22 Montrer que deux suites sont adjacentes si et seulement si l'une est croissante, l'autre est décroissante et leur différence converge vers 0.

[Ind] Reprendre la démonstration précédente.

[Dem] Il est clair que si les suites sont adjacentes elles vérifient les conditions de l'exercice. Pour la réciproque il suffit d'obtenir dans ces conditions $u_n \leq v_n$. On peut à l'aide de ces seules hypothèses démontrer que les suites convergent vers la même limite. En effet $\lim\limits_{n\to\infty} u_n - v_n = 0$ donne pour n assez grand : $u_n \leq v_n + 1 \leq v_0 + 1$ donc u_n est croissante et majorée donc convergente. De même pour v_n. Ces deux suites convergent donc vers la même limite ℓ. Maintenant u_n croit vers ℓ et v_n décroit vers ℓ donc $u_n \leq v_n$.

Exercice 23 Montrer que les deux suites $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{nn!} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\right)$ sont adjacentes.

[Ind] Le vérifier.

[Dem] La première u_n est clairement croissante. La seconde vérifie $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+1)!}\left(\dfrac{-1}{n}\right) < 0$ et est donc décroissante. La différence entre les deux est $\dfrac{1}{nn!}$ est bien décroissante vers 0, on a aussi $u_n \leq v_n$. Les deux suites sont adjacentes.

Théorème 6 (Théorème des segments emboîtés) *Soient (I_n) une suite décroissante (au sens de l'inclusion) de segments de $\mathbb{R}$, alors $K = \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$ et K est un singleton si et seulement si la suite des longueurs de I_n tend vers 0.*

[Ind] Utiliser des suites adjacentes.

[Dem] Posons $I_n = [a_n, b_n\ ]$. Comme (I_n) est décroissante on a que (a_n) est croissante et (b_n) décroissante et $\forall n \in \mathbb{N}\ :\ a_n \leq b_n$. Ainsi par application de la proposition sur le suites adjacentes (a_n) converge vers a et (b_n) converge vers b avec $a \leq b$. Il en résulte que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est égal à $[a,b]$ qui n'est pas vide. Si la longueur des I_n tend vers 0 alors $b_n - a_n$ tend vers 0 et $a = b$ donc K est un singleton. Si K est un singleton c'est donc que $a = b$ et donc $b_n - a_n$, longueur de I_n tend vers 0.

Proposition 42 (Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$) *Soit A une partie de E,*

$$A \text{ est un intervalle} \Longleftrightarrow \forall x, y \in A \quad [x,y] \subset A$$

[Ind] Quelle est la définition d'un intervalle.

[Dem] Prenons un intervalle du type $A =]a, b[= \ x \in \mathbb{R} : a < x < b \ .$ alors $\forall x, y \in A$ les éléments $z \ : \ x \leq z \leq y$ vérifie $a < z < b$ et donc sont dans A d'où $[x, y] \subset A$. Réciproquement dans $\overline{\mathbb{R}}$ posons $a = \inf A$ et $b = \sup A$ alors si $a < z < b$ il existe, par définition des bornes sup et inf, $z, t \in A$ tel que $z \in [z, t]$ donc $z \in A$ et $]a, b[\subset A$ enfin si $z \in A$ alors évidement $a < z < b$ par définition de a, b. Donc $A =]a, b[$.

Théorème 7 (Théorème des valeurs intermédiaires) *Soit f une fonction réelle continue définie sur un intervalle I, $f(I)$ est alors un intervalle de $\mathbb{R}$.*

[Ind] Chercher la plus grande racine de $f(x) = \gamma$.

[Dem] Posons $m = \inf f(I)$ et $M) \sup f(I)$. Si $m = M$ c'est vrai. Sinon soit γ te que : $m < \gamma < M$ il existe alors a, b dans I tels que : $m \leq f(a) < \gamma < f(b) \leq M$. Supposons par exemple $a < b$. Soit $\mathcal{C} = \ \S \in [\dashv, \lfloor] \ : \ \{(\S) \leq \gamma \ $ et posons $c = \sup \mathcal{C}$. Il existe une suite (x_n) telle que $\lim x_n = c$, la continuité de f donne $\lim f(x_n) = f(c)$ et par suite $f(c) \leq \gamma$ car $f(x_n) \leq \gamma$. D'autre part $c = \sup \mathcal{C}$ donc $f(x) > \gamma$ et $\forall x \in]c, b[$ on a $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c) \geq \gamma$. Ainsi $f(c) = \gamma$.

On en déduit le principe de recherche par dichotomie d'un zéro d'une fonction continue définie sur un intervalle s'il existe deux valeurs a et b pour lesquelles $f(a)f(b) < 0$.

Proposition 43 (Caractérisation des fonctions monotones continues) *Soit f une fonction réelle monotone définie sur un intervalle I. La fonction f est continue si et seulement si $f(I)$ est un intervalle.*

[Ind]

[Dem] D'une part on a que si f est une fonction continue sur un intervalle I alors $f(I)$ est un intervalle par le théorème des valeurs intermédiaires. D'autre part toute fonction disons croissante possède une limite à gauche et à droite en tout point a de I et $f(a^-) \leq f(a) \leq f(a^+)$. En effet pour $a \in I$ soit $X = \ x \in I \ : \ x < a \ $ et $M = \sup f(X)$ alors $\forall \varepsilon$ il existe $u \in I \ : \ u < a$ et $M - \varepsilon \leq f(u) \leq M$ la croissance de f donne alors que $\forall v \in]u, a[$ on a $M - \varepsilon \leq f(v) \leq M$ donc $M = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a^-)$ et donc f admet une limite à gauche qui vérifie $f(a^-) \leq f(a)$. De même à droite. Maintenant si $f(I)$ est un intervalle la croissance de f donne que $f(a^-) = f(a) = f(a^+)$ donc f est continue en a.

Théorème 8 *Soit f une fonction continue définie sur un intervalle fermé borné, $f(I)$ est alors un intervalle fermé borné, en particulier f est bornée et atteint ses bornes.*

[Ind] Par l'absurde.

[Dem] Posons $I = [a, b]$.Si f n'était pas bornée, il existerait pour chaque $n \in \mathbb{N}$, un point x_n de I vérifiant $|f(x_n)| \geq n$. De la suite (x_n) on pourrait extraire une suite $(x_{\varphi(n)})$ convergent vers x élément de I, f étant continue on aurait $(f(x_n))$ qui convergerait vers $f(x)$ ce qui est impossible car $(f(x_n))$ n'est pas bornée. Donc f est bornée. Posons $M = \sup\limits_I f$ et $m = \inf\limits_I f$ Si f ne prenait pas la valeur M alors la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{M - f(x)}$ serait continue sur I donc bornée et il existerait $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in I \ : \ |M - f(x)| \geq \alpha$ ce qui donnerait $\forall x \in I \ : \ f(x) \leq M - \alpha$ ce qui contredit le fait que M soit la borne supérieure. De même avec m.

Fonctions dérivables

Théorème 9 (Théorème de Rolle) *Soit f une fonction réelle définie sur l'intervalle $[a, b]$ ($a \neq b$) continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

[Ind] Prendre le maximum de f.

[Dem] Si f est constante alors $f'(x) = 0$ si $x \in]a, b[$ et le résultat est vrai. Sinon f prend des valeurs différentes de $f(a)$ et de $f(b)$, disons des valeurs supérieures. Soit $M = \sup_I f = f(c)$. Ainsi $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ est positif pour $x \leq c$ et négatif si $x \geq c$ donc sa limite qui existe c'est $f'(c)$ est nulle.

La démonstration repose sur la

Proposition 44 *Soit f une fonction réelle dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Si la fonction f présente un extremum local en un point $x \in]a, b[$, alors $f'(x) = 0$.*

[Ind] Étudier le taux de variations.

[Dem] Nous l'avons fait on regarde le taux de variations : Supposons qu'il s'agisse d'un maximum, le rapport $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ est positif pour $x \leq c$ et négatif si $x \geq c$ donc sa limite $f'(c)$ est positive et négative donc nulle.

Du théorème de Rolle, on déduit le

Théorème 10 Accroissement finis. *Soit f une fonction réelle définie sur l'intervalle $[a, b]$ ($a \neq b$) continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.*

[Ind] Appliquer Rolle à une fonction auxilliaire.

[Dem] On considère les points $A = (a, f(a)$, $B = (b, f(b)$ et, pour $x \in I$, $M(x) = (x, f(x)$ de $\mathbb{R}^2$, la fonction $x \mapsto \det(\overrightarrow{AM(x)}, \overrightarrow{AB})$ vérifie les hypothèses du théorème de Rolle et, pour $x \in I$, $\varphi'(x) = \begin{vmatrix} 1 & b - a \\ f'(x) & f(b) - f(a) \end{vmatrix}$.

Une conséquence du théorème des accroissements finis:

Proposition 45 *Soit f une fonction réelle définie sur l'intervalle $[a, b]$ ($a \neq b$) continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.*
a) La fonction f est croissante si et seulement si, pour tout $x \in]a, b[$, $f'(x) \geq 0$.
b) La fonction f est constante si et seulement si, pour tout $x \in]a, b[$, $f'(x) = 0$.
c) La fonction f est décroissante si et seulement si, pour tout $x \in]a, b[$, $f'(x) \leq 0$.

[Ind]

[Dem] Faisons a) les autres sont identiques. Si f est croissante en regardant le taux de variations $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ est positif pour tout x donc sa limite $f'(c)$ est positif. Réciproquement soit $x \leq y \in [a, b]$ le théorème des accrooissements finis donne il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(y) - f(x)) = f'(c)(y - x)$ ainsi si $f'(c) \geq 0$ on a $f(y) \geq f(x)$ et f est croissante.

Fonctions convexes Caractérisation des fonctions convexes

Définition 17 *Soient a et b deux réels. Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite convexe si :*

$$\forall x, y \in [a, b] \quad \forall t \in [0, 1] \quad f((1 - t)x + ty) \leq (1 - t)f(x) + tf(y).$$

Elle est dite concave si:

$$\forall x, y \in [a, b] \quad \forall t \in [0, 1] \quad f((1 - t)x + ty) \geq (1 - t)f(x) + tf(y).$$

Remarque Une fonction est convexe si et seulement si son opposée est concave.

Définition 18 Épigraphe d'une fonction. *Soit f une fonction réelle définie sur I. L'épigraphe de f est l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I \text{ et } y \geq f(x)\}$.*

Proposition 46 Sur les graphes. *Une fonction est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe.*

[Ind] Traduire la convexité de l'épigraphe.

[Dem] Dire que l'épigraphe $\mathcal{E}$est convexe c'est dire que $\forall X, Y \in \mathcal{E}$ le segment $[X, Y]$ est dans $\mathcal{E}$. Mais un point du segment s'écrit $Z = (1-t)X + tY$ avec $t \in [0,1]$. Posons $X = (x_1, y_1)$ et $Y = (x_2, y_2)$ on a si $y_1 \geq f(x_1)$ et $y_2 \geq f(x_2)$ que $(1-t)y_1 + ty_2 \geq f((1-t)x_1 + tx_2)$. En outre $(1-t)f(x_1) + tf(x_2) \geq f((1-t)x_1 + tx_2)$. Ainsi si l'épigraphe est convexe la fonction est convexe. Maintenant si la fonction est convexe, en reprenant les notations ci-dessus on a $(1-t)y_1 + ty_2 \geq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \geq f((1-t)x_1 + tx_2)$ et donc le segment (X, Y) est dans l'épigraphe.

Proposition 47 Sur les pentes. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Les quatre propositions sont équivalentes:*

1) f est convexe.

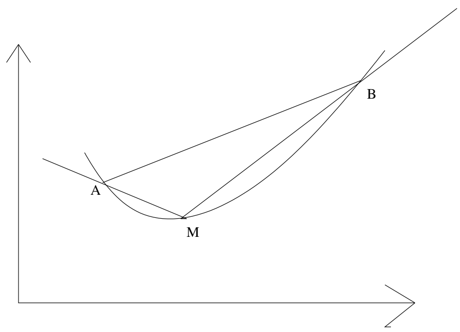
2) $\forall x, y \in [a, b] \quad (x < y) \quad \forall u \in]x, y[\quad \dfrac{f(u) - f(x)}{u - x} \leq \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$.

3) $\forall x, y \in [a, b] \quad (x < y) \quad \forall u \in]x, y[\quad \dfrac{f(y) - f(u)}{y - u} \geq \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$.

4) $\forall x, y \in [a, b] \quad (x < y) \quad \forall u \in]x, y[\quad \dfrac{f(x) - f(u)}{x - u} \leq \dfrac{f(y) - f(u)}{y - u}$.

[Ind] Écrire un point de segment comme barycentre.

[Dem] Si f est convexe on a $\dfrac{f(u) - f(x)}{u - x} = \dfrac{f((1-t)x + ty) - f(x)}{u - x} \leq \dfrac{(1-t)f(x) + tf(y) - f(x)}{(1-t)x + ty - x} = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$. Réciproquement si $\dfrac{f(u) - f(x)}{u - x} \leq \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$ alors $f(u) \leq \frac{u-x}{y-x} f(y) + \ (1 - \frac{u-x}{y-x}\ ) f(x)$ ce qui, en posant $u = (1-t)x + ty$ donne $f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$ c'est à dire f est convexe. 3) et 4) se montrent pareillement. Il s'agit des inégalités entre les pentes de AB, AM, MB.



Proposition 48 Sur les fonctions pentes des fonctions convexes. *Soit f une fonction numérique définie sur l'intervalle I et pour $x \in I$, soit Φ_x la fonction définie sur $I - \{x\}$ par $\Phi_x(t) = \dfrac{f(x) - f(t)}{x - t}$.*

La fonction f est convexe si et seulement si pour tout $x \in I$, Φ_x est croissante.

[Ind] Utiliser la propostion précédente.

[Dem] Dire que Φ_x est croissante c'est écrire : si $t \leq t'$ $\dfrac{f(t) - f(x)}{t - x} \leq \dfrac{f(t') - f(x)}{t' - x}$ C'est l'inégalité 2) si $x < t < t'$ et l'inégalité 3) si $t < t' < x$ et l'inégalité 4) si $t < x < t'$. Réciproquement il faut montrer que $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$. Si $x = y$ ou $t = 0, 1$ c'est vrai. Ainsi on peut supposer $x < y$ et $0 < t < 1$ donc $u = tx + (1-t)y$ vérifie $x < u < y$ et la crioissance de $z \longmapsto \dfrac{f(z) - f(y)}{z - y}$ sur I/y donne $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \dfrac{f(u) - f(y)}{u - y} = \dfrac{f(y) - f(u)}{y - u}$. Or $y - u > 0$ ce qui donne $\dfrac{y - u}{x - y}\ (f(x) - f(y)\ ) \leq f(y) - f(u)$ d'où $f(u) \leq f(y) - \dfrac{y - u}{x - y}\ (f(x) - f(y)\ ) = \dfrac{u - y}{x - y} f(x) + \left(1 - \dfrac{u - y}{x - y}\right) f(y)$ comme $t = \dfrac{u - y}{x - y}$ on obtient le résultat.

Proposition 49 Sur les tangentes des fonctions convexes dérivables. *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *dérivable sur* $]a, b[$.

$$f \text{ convexe sur } [a, b] \Longleftrightarrow \forall x_0 \in]a, b[\quad \forall x \in [a, b] \quad f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \leq f(x).$$

[Ind] Faire un dessin puis éecrire la démonstration.

[Dem] Si f est convexe $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq \dfrac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0}$ pour tout $z : x_0 < z < x$. En faisant tendre z vers x_0 on obtient le résultat si $x \geq x_0$. Dans l'autre cas $x \leq x_0$ on utilise l'autre inégalité. Pour la réciproque On a $f(x) \geq f(y) + (x - y)f'(y)$ donc si $x < y$ alors $x - y < 0$ et $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y)$. Mais nous avons aussi $f(y) \geq f(x) + (y - x)f'(x)$ et comme $y - x > 0$ on obtient $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq f'(x)$ ce qui montre que si $x < y$ alors $f'(x) \leq f'(y)$. f' est croissante. Ce qui montre la convexité de f grâce à la proposition suivante.

Proposition 50 Sur les fonctions convexes dérivables.

$$f \text{ convexe sur } [a, b] \Longleftrightarrow f' \text{ croissante sur }]a, b[.$$

[Ind]

[Dem] En utilisant si $x_0 < y_0 < x$ les inégalités $f'(x_0) \leq \dfrac{f(x) - f(x_0}{x - x_0} \leq \dfrac{f(x) - f(y_0}{x - y_0}$ puis en faisant tendre x vers y_0 on obtient si $x_0 \leq y_0 : f'(x_0) \leq f'(y_0)$. Ainsi f' est croissante. Réciproquement si f n'est pas convexe alors il existerait des points a, b, c tels que (*) $a < b < c$ et $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq \dfrac{f(c) - f(b)}{c - b}$ ce qui donne $\sup_{a \leq x \leq b} f'(x) \geq \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq \dfrac{f(c) - f(b)}{c - b} \geq \inf_{b \leq x \leq c} f'(x)$. Les inégalités (*) entraîne l'existence d'un point $u \in [a, b]$ et d'un point $c \in [b, c]$ tels que $f'(u) > f'(v)$ ce qui contredit la croissance de la fonction f'.

Proposition 51 Sur les fonctions convexes deux fois dérivables. *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *deux fois dérivable sur* $]a, b[$.

$$f \text{ convexe sur } [a, b] \Longleftrightarrow f'' \geq 0 \text{ sur }]a, b[.$$

[Ind] Résultat connu.

[Dem] On sait que sous ces hypothèses f' est croissante si et seulement si sa dérivée f'' est positive.

Quelques propriétés des fonctions convexes

Proposition 52 Sur la continuité et la dérivabilité des fonctions convexes. *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *convexe, alors* f *est continue en tout point* x *appartenant à l'***intérieur** *de* $[a, b]$ *(*$x \in]a, b[$*). De plus* f *est dérivable à droite et à gauche en* x *et on a* $f'_g(x) \leq f'_d(x)$.

[Ind] Jouer avec les inégalités pour obtenir ce que l'on veut.

[Dem] Posons $F_u(t) = \dfrac{f(t) - f(u)}{t - u}$ on sait que si f est convexe alors F_u est croissante pour tout u de $I = [a, b]$ sur I/u. Si u est intérieur à I alors F_u est majorée par $F_u(w)$ pour $t < w$ et $w \in I$. Elle admet donc une limite à gauche au point u, $F_u(u^-)$ satisfaisant $F_u(v) \leq F_u(u^-) \leq F_u(w)$ pour tous $u, v \in I : v < u < w$. Ainsi la dérivée à gauche $f'_g(u)$ existe et vérifie $\dfrac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq f'_g(u) \leq \dfrac{f(w) - f(u)}{w - u}$

pour tous $u, w \in I \ : \ v < u < w$. Pour $t > u$ la fonction croissante F_u est minorée par $f'_g(u)$ et admet une limite à droite au point u, $F_u(u^+$ vérifiant $f'_g(u) \leq F_u(u^+) \leq F_u(w)$ pour $w > u$. Donc la dérivée à droite existe et vérifie : $f'_g(u) \leq f'_d(u) \leq \dfrac{f(w)-f(u)}{w-u}$ pour $w \in I \ : \ w > u$. En changeant de notations on a si $v > u$: $f'_g(u) \leq f'_d(u) \leq \dfrac{f(v)-f(u)}{v-u} \leq f'_g(v) \leq f'_d(v)$. Les fonctions f'_g et f'_d sont croissantes et leurs existences prouvent que f est continue.

Inégalités de convexité

$\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$	$\ln(1+t) < t$
$\forall t \in \mathbb{R}$	$e^t \geq 1+t$
$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	$\frac{2}{\pi}t \leq \sin t \leq t$
$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$	$t \leq \tan t \leq \frac{4}{\pi}t$
$(x_1, \cdots, x_n) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^n$	$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$

Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Il s'agit de réviser des notions de première année. En quelque sorte le b. a. ba nécessaire, sans lui inutile de continuer.

Equivalents :

Définition 19 *Soit deux fonctions f et g définies toute les deux au voisinage d'un point x_0, sauf éventuellement en x_0, on dit que*

$$f \underset{x_0}{\sim} g \text{ si et seulement si } \lim_{x_0} \frac{f}{g} = 1$$

on suppose ici que la fonction g ne s'annule pas dans un voisinage de x_0.

Définition 20 *Soit deux fonctions f et g définies toute les deux au voisinage d'un point x_0, sauf éventuellement en x_0, on dit que*

$$f = \underset{x_0}{o}(g) \text{ si et seulement si } \lim_{x_0} \frac{f}{g} = 0$$

on suppose ici que la fonction g ne s'annule pas dans un voisinage de x_0.

Remarque: En pratique il s'agit en connaissant la fonction f de trouver une fonction plus simple g équivalente à f au voisinage d'un point pour cela on ne considère plus que les termes qui ont "de l'importance" au voisinage de ce point. Bien entendu cette notion est locale et nous ne pouvons en tirer des renseignements qu'au voisinage du point considéré.

Remarque: D'autre part les résultats à connaître sont au voisinage de 0, si on est en un autre point on pose $x = x_0 + h$ et on raisonne avec h au voisinage de 0 ou $y = \dfrac{1}{x}$ au voisinage de x à l'infini.

Remarque: Enfin c'est seulement en connaissant par coeur des équivalents que vous pourrez faire des exercices.

Proposition 53 *On peut faire le produit ou le quotient d'équivalents mais en général pas une somme*

[Ind] Utiliser les écritures classiques du produit ou du quotient.

[Dem] Pour le produit on écrit $|f_1(t)g_1(t) - f_2(t)g_2(t)| \leq |f_1(t) - f_2(t)|\,|g_1(t)| + |g_1(t) - g_2(t)|\,|f_2(t)|$. Ainsi $\forall\varepsilon$ il existe η tel que $|t - t_0| \leq \eta$ implique $|f_1(t)g_1(t) - f_2(t)g_2(t)| \leq \varepsilon\,|f_2(t)|\,|g_1(t)| + \varepsilon\,|g_1(t)|\,|f_2(t)|$.
De même pour le quotient en utilisant l'égalité : $\left|\dfrac{1}{f} - \dfrac{1}{g}\right| = \dfrac{|f-g|}{fg}$.
Pour la somme il est claire que sans précaution on peut trouver zéro.

Proposition 54 ***Au voisinage de*** 0 *:*

$\sin x \sim x$	$\ln(1+x) \sim x$	$shx \sim x$
$\tan x \sim x$	$e^x - 1 \sim x$	$thx \sim x$
$\arcsin x \sim x$	$\cos x \sim 1 - \dfrac{x^2}{2}$	$\arg shx \sim x$
$\arctan x \sim x$	$chx \sim 1 + \dfrac{x^2}{2}$	$\arg thx \sim x$
	$(1+x)^\alpha \sim 1 + \alpha x$	$\arg ch(1+x) \sim \sqrt{2x}$

Au voisinage de $+\infty$ **:**

$chx \sim \frac{1}{2}e^x$	$argshx \sim \ln x$
$shx \sim \frac{1}{2}e^x$	$\arg chx \sim \ln x$

[Ind] Ici le but n'est pas la démonstration mais de savoir ces résultats. Se poser la question des démonstrations peut être amusant.

[Dem] Prenons par exemple la première soit $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Tout dépend comment a-t-on défini la fonction *sin*. Si c'est géométriquement il y a une démonstration géométrique : en comparant l'aire de deux triangles et d'un secteur angulaire on obtient : $\cos x \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq \dfrac{1}{\cos x}$. Le taux de variations en 0 suppose connue la dérivée de sin. De toute façon la meilleure définition des fonctions trigonométriques est celle par les séries exponentielles et ainsi on a les développements limités.
Pour la seconde si la fonction *ln* est définie comme primitive de la fonction $\dfrac{1}{x}$ on sait alors qu'elle est dérivable et le taux de variations donne la limite de $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.
Si la fonction exponentielle est la fonction inverse du *ln* on connait sa dérivée et c'est le taux de variations.
Mais encore une fois la fonction exponentielle est la somme d'une série.
Pour les fonctions inverses comme arcsin, si on pose $\arcsin x = y$ on a $x = \sin y$. Si x est au voisinage de 0, y aussi et $x = \sin y \sim y$ ce qui donne $\arcsin x \sim x$....

Développement limité
Comme pour les équivalents on se ramènera au voisinage de 0 :

Définition 21 *On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 si et seulement si :*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

Remarque: ici $o(x^n) = x^n \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Proposition 55 *Le développement limité d'une fonction, s'il existe est unique.*
Le DL_n au voisinage de 0 d'une fonction paire(resp impaire) est paire (resp impair)

[Ind] Qui sont les coefficients d'un D.L.

[Dem] Dans un développement limité, disons en 0. On a que $a_0 = f(0)$ et plus généralement $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. D'où l'unicité. Pour une fonction paire en écrivant

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

et

$$f(-x) = a_0 + a_1(-x) + \cdots + a_n x^n + o((-1)^n x^n)$$

, puis en faisant la différence qui est nulle :

$$0 = 2a_0 + 2a_2 x + \cdots + 2a_{2n'} x^{2n'} + o(x^n)$$

. En utilisant l'unicité d'un D.L., ici 0 on en déduit que $\forall n \,:\, a_{2n} = 0$.

Proposition 56 théorème de Taylor-Young *Si la fonction f est n fois dérivable en 0 alors f admet un $DL_n\left(0\right)$ et*

$$f\left(x\right)=f\left(0\right)+f'\left(0\right)x+\frac{f'\left(0\right)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}\left(0\right)}{n!}x^n+o\left(x^n\right)$$

c'est ainsi que nous avons : $a_0=f\left(0\right),a_1=f'\left(0\right),\cdots$

[Ind] Le vérifier.

[Dem] Si la fonction est n fois dérivable alors on peut écrire la formule de Taylor-young propostion 28 ce qui donne bien le développement limité d'ordre n.

Proposition 57 *On peut faire la **somme** de deux $DL_n\left(0\right)$ termes à termes, pour le **produit** il ne faut garder que les termes de degré inférieur à n. On peut **primitiver** un développement limité (si $f'\left(x\right)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+o\left(x^n\right)$ alors $f\left(x\right)=f\left(0\right)+a_0x+a_1\frac{x^2}{2}+\cdots+a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}+o\left(x^{n+1}\right)$) On peut **composer** c'est à dire si f et g sont continues en 0 et possèdent des $DL_n\left(0\right)$ de partie régulière respectivement P et Q et si $\boxed{f\left(0\right)=0}$ alors pour trouver le $DL_n\left(0\right)$ de $g\circ f$ il suffira de substituer $Q\left(X\right)$ à X dans $P\left(X\right)$ et ne garder que les termes d'ordre $\leq n$. Enfin pour le **quotient** si f, g sont continues en 0 et $\boxed{g\left(0\right)\neq 0}$ alors $\frac{1}{g\left(x\right)}=\frac{1}{g\left(0\right)+a_1x+\cdots+a_nx^n+o\left(x^n\right)}=\frac{1}{g\left(0\right)}\frac{1}{1+\frac{a_1}{g(0)}x+\cdots+\frac{a_n}{g(0)}x^n+o\left(x^n\right)}$ en composant les DL avec $\frac{1}{1+u}=1-u+u^2+\cdots+\left(-1\right)^nu^n+o\left(u^n\right)$ on obtient le DL de $\frac{1}{g}$ puis le quotient $\frac{f}{g}$.*

[Ind] Se ramener à des monômes.

[Dem] Pour la somme on peut se ramener à des monômes et il suffit de se servir de $t^{-n}\left(f_1(t)+g_1(t)-f_2(t)-g_2(t)\right)=t^{-n}\left(f_1(t)-f_2(t)\right)+t^{-n}\left(g_1(t)-g_2(t)\right)$.
Pour le produit on écrit : $t^{-n}\left(f_1(t)g_1(t)-f_2(t)g_2(t)\right)=t^{-n}\left(f_1(t)-f_2(t)\right)g_1(t)+t^{-n}\left(g_1(t)-g_2(t)\right)f_2(t)$, chacun des seconds membres apparaît comme une somme de deux termes qui tendent vers zéro quand t tend vers zéro.
Primitiver. On peut toujours intégrer la partie polynômiale. Le petit o s'écrit $x^n\varepsilon x$ avec ε continue au voisinage de 0. En écrivant pour tout ε il existe η tel que si $|x|\leq\eta$ on a $\left|\int_0^x o(t^n)\right|\leq\left|\frac{t^{n+1}}{n+1}\right|\varepsilon$ on obtient bien un $o(x^{n+1})$.
Pour la composée on obtient $g\left(f(x)\right)=Q\left(P(x)+o(x^n)\right)+o(x^n)$. Dans $Q\left(P(x)+o(x^n)\right)$ on ne pourra garder que les termes de degré inférieur à n.
Le quotient est montré par composition.

Proposition 58

$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o\left(x^n\right)$
$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}++o\left(x^n\right)$
$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+1}\right)$
$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right)$
$shx=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+1}\right)$
$chx=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right)$
$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+o\left(x^7\right)$
$thx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}-\frac{17x^7}{315}+o\left(x^7\right)$
$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha\left(\alpha-1\right)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha\left(\alpha-1\right)\cdots\left(\alpha-n+1\right)}{n!}x^n+o\left(x^n\right)$
$\arcsin x=x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\cdots+\frac{1\times3\times\cdots\times\left(2p-1\right)}{2\times4\times\cdots\times\left(2p\right)}\frac{x^{2p+1}}{2p+1}+o\left(x^{2p+1}\right)$
$\ln\left(1+x\right)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right)$
$-\ln\left(1-x\right)=x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right)$
$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^p\frac{x^{2p+1}}{2p+1}+o\left(x^{2p+2}\right)$

[Ind] Taylor ou série géométrique.

[Dem] La première est la $n^{\text{ème}}$ somme partielle de la suite géométrique car le reste est $\left|\frac{-x^{n+1}}{1-x}\right|\leq$ $|x^n|\,\varepsilon(x)$. De celle-là on trouve $\ln(1+x)$ puis $\ln(1-x)$ et $\frac{1}{1+x^2}$ et enfin par intégration arctan. Pour l'exponentielle, c'est la formule de Taylor, d'où les factoriels et on en déduit les fonctions hyperboliques. En utilisant Taylor pour e^{ix} on obtient les fonctions trigonomt́riques. Pour $(1+x)^\alpha$ on utilise une équation différentielle ou Taylor.

5.8 Exercices

Exercice 24 Supposons E de dimension finie. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Montrer qu'une partie A de E est bornée si et seulement si toutes les projections de A sur les axes de coordonnées sont bornées.

[Ind] Partie directe et réciproque, bien choisir sa norme.

[Dem] Pour la partie directe prenons la norme du sup; Soit une partie A bornée alors $\exists M\ :\ \forall x\in A$ on a $||x||_\infty\leq M$. En posant $x=(x_i)_{1\leq i\leq n}$, on obtient $\forall i\ :\ |x_i|\leq M$ et donc toutes les projections de A sont bornées.
Pour la réciproque prenons la norme 1. Si toutes les projections de A sont bornées disons par M_i alors $\forall x\in A\ :\ ||x||_1=\sum_{i=1}^{n}|p_i(x)|\leq M=\sum_{i=1}^{n}M_i$.

Exercice 25 Soient A et B deux parties de E.Montrer que:

$$\inf_{x\in A}d(x,B)=\inf_{y\in B}d(y,A)=\inf_{(x,y)\in A\times B}||x-y||.$$

On note ce nombre $d(A,B)$. Que peut-on dire de A et B si $d(A,B)=0$.

[Ind] Procéder par multi inégalités. Un peu difficile penser à l'adhérence d'une partie (ensemble des limites de points de la partie).

[Dem] Dans les deux cas il s'agit de $\inf_{x\in A}\inf_{y\in B} d(x,y)$ mais c'est aussi le dernier $\inf_{(x,y)\in A\times B} d(x,y)$.

Exercice 26 Supposons E de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{GL}(E)$. Montrer que $x \to ||u(x)||$ est une norme sur E. Montrer directement qu'elle est équivalente à la norme $||\cdot||$ sur E.

[Ind] Vérifier les trois propriétés des normes en utilisant les propriétés de u.

[Dem] La linéarité de u permet de montrer les axiomes de norme : pour tous x, y de E et tout $lambda$ de K on a $||u(x+y)|| = ||u(x)+u(y)|| \le ||u(x)|| + ||u(y)||$ et $||u(\lambda x)|| = ||\lambda u(x)|| = |\lambda|\,||u(x)||$. L'axiome de séparation provient de la biectivité de u. En effet $||u(x)|| = 0$ donne $u(x) = 0$ puis $x = 0$. L'espace étant de dimension finie toutes les normes sont équivalentes. En effet pour tout x de E : $||u(x)|| \le |||u|||\,||x||$ et, comme u est bijective on a aussi en posant $x = u^{-1}(y)$: $||u^{-1}(y)|| \le \left|||u^{-1}|||\right|\,||y||$ ou $||x|| \le \left|||u^{-1}|||\right|\,||u(x)||$.

Exercice 27 Soit F un sous-espace vectoriel de E.
a) Montrer que si $F \ne E$, alors il n'existe pas de boule ouverte non vide contenue dans F.
b) Montrer que tout sous-espace vectoriel de dimension finie est un fermé.
c) Montrer qu'un sous-espace vectoriel n'est pas forcément fermé.

[Ind] a) Si tel était le cas alors $F = E$. b) En prenant la caractérisation par les suites, et en passant par les coordonnées on se ramène au cas d'une droite. c) Prendre un contre-exemple.

[Dem] a) S'il existe une boule ouverte non vide $\mathcal{B}(a,\varepsilon)$ contenue dans F alors pour tout $x \in E$ le vecteur $u = a + \dfrac{\varepsilon}{2||x-a||}(x-a)$ est dans la boule car $||u-a|| = dis\frac{\varepsilon}{2}$. Mais alors $u \in F$, $a \in F$ donc $x_i n F$ et on a montré que $F = E$.

b) Soit $(x_n)_n$ une suite de F convergent dans E. Ainsi chaque coordonée de la suite converge $(x_n^i)_n$. En notant (e_i) une base de F on a $x_n^i = \lambda_n^i e_i$. Mais $(\lambda_n^i)_n$ est une suite de scalaires convergente vers disons λ^i donc la suite $(x_n)_n$ converge vers $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda^i e_i$ qui est bien dans F.

c) Dans l'espace des fonctions continues par morceaux muni de la norme $||||_1$ et prenons le sous espace vectoriel des fonctions continues. Il n'est pas fermé car il existe des suites de fonctions continues convergentes en intégrales vers une fonction non continue.

Exercice 28 Soient N_1 et N_2 les applications définies sur $\mathbb{R}^2$ par:

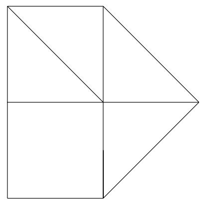
$$\forall P = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad N_1(P) = \sup_{t\in[0,1]} |x+ty| \text{ et } N_2(P) = \left(\int_0^1 (x+ty)^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

Montrez que ce sont des normes et trouvez les boules unités.

[Ind] Vérifier. Discuter pour supprimer la valeur absolue, calculer l'intégrale.

[Dem] Soit $P = (x,y)$ et $P' = (x',y')$ des pointes de $\mathbb{R}^2$ on a pour tout t de $[0,1]$: $|x+x'+t(y+y')| \le |x+ty| + |x'+ty'|$ puis en passant au sup $N_1(P+P') \le N_1(P) + N_1(P')$. Soit λ un réel on pour tout t dans $[0,1]$: $|\lambda x + t\lambda y| = |\ lambda|\,|x+ty|$ puis en passant au sup : $N_1(\lambda P) = |\lambda|\,N_1(P)$. Enfin si $N_1(P) = 0$ alors pour tout t de $[0,1]$ on a $|x+ty| = 0$ et pour $t = 0$ puis $t = 1$ on obtient $x = 0$ et $y = 0$. La norme N_2 provient du produit salaire $\varphi(P,P') = \displaystyle\int_0^1 (x+ty)(x'+ty')dt$. (il n'est pas difficile de montrer que c'en est bien un)
La boule unité de N_1 : Premier cas : $x \ge 0$ et $y \ge 0$ alors il faut retenir les points pour lesquels $\forall t\ in[0,1]$: $x+ty < 1$ ou $x+y < 1$, d'où la représentation dans ce quart de plan.

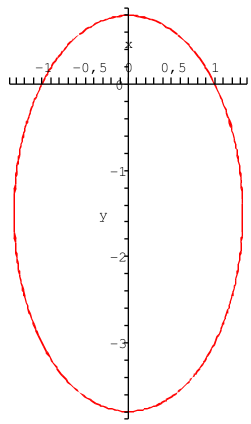
Deuxième cas $x \leq 0$ et $y \geq 0$: Le signe de $x + ty$ peut changer en $t = \frac{-x}{y}$ si ce nombre positif est dans $[0, 1]$.
si $\frac{-x}{y} \leq 1$ ou $-x \leq y$ il faut vérifier pour $t \in [0, \frac{-x}{y}]$ la condition $-x - ty < 1$ ou $-x < 1$ soit $x > -1$ et pour $t \in [\frac{-x}{y}, 1]$ la condition $x + ty < 1$ ou $x + y < 1$, aucune contrainte d'où la représentation dans le huitième de plan.
si $\frac{-x}{y} > 1$ alors $x + ty$ est toujours négatif et la condition s'écrit $\forall t\ in [0, 1]$: $-x - ty < 1$ ou $x > -1$, d'où la représentation. Les deux autres cas se déduisent par symétrie par rapport à Ox.



N1

La boule unité de N_2 : Il suffit de résoudre $\int_0^1 (x+ty)^2 dt < 1$ ou en calculant l'intégrale $x^2 + \frac{1}{3}y^2 + y < 1$. On trouve une ellipse de grand axe oy et de petit axe $y = -\frac{3}{2}$.

N2



Exercice 29 Soit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. Soit $g \in E$. et $N_g :\ f \rightarrow ||fg||_\infty$.
a) Trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur g pour que N_g soit une norme sur E.
b) N_g étant une norme, comparer N_g et $||\cdot||_\infty$ et trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur g pour que ces deux normes soient équivalentes.

[Ind] En vérifiant les trois propriétés trouver ce qui bloque. Pour b) il suffit de trouver des conditions suffisantes et montrer qu'elles sont nécessaires.

[Dem] Si f_1 et f_2 sont des fonctions de E alors $N_g(f_1 + f_2) = ||f_1 g + f_2 g||_\infty \leq ||f_1 g||_\infty + ||f_2 g||_\infty = N_g(f_1) + N_g(f_2)$. Pour λ un scalaire on : $N_g(\lambda f) = ||\lambda f g||_\infty = |\lambda|\, ||fg||_\infty = |\lambda|\, N_g(f)$. Maintenant si $N_g(f) = 0$ alors $||fg||_\infty = 0$ et donc $fg = 0$ ou $\forall t \in [0, 1]$: $f(t)g(t) = 0$. Les fonctions étant continues si g ne s'annule sur aucun intervalle non réduit à un point on en déduira que $f = 0$. Réciproquement si g s'annule sur un petit intervalle $[a, b] \subset [0, 1]$ en prenant une fonction f non nulle sur $]a, b[\neq \emptyset$ on aura pourtant $N_g(f) = 0$.

Exercice 30 Soit $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$. Si $x \in E$, on pose $N_1(x) = \sup |x| + \sup |x'|$ et $N_2(x) = \sup(|x| + |x'|)$. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E. Sont-elles équivalentes?

[Ind] Le vérifier. Essayer de trouver des inégalités.

[Dem] Écrivons $N_1(x) = ||x||_\infty + ||x'||_\infty$. Ainsi l'inégalité triangulaire et la "pseudo" homogénéité se déduisent de celles de la norme infinie et de la linéarité de la dérivée. Pour N_2, en écrivant $N_2(x) = ||(|x| + |x'|)||_\infty$, l'inégalité triangulaire et l'homogénéité se déduisent de celles de la norme infinie, de la linéarité de la dérivée et de celles de la valeurs absolues. Pour l'axiome de séparation si $N_1(x) = 0$ alors $normex = 0$ et $x = 0$, si $N_2(x) = 0$ alors $|x| + |x'| = 0$ et donc $|x| = 0$, puis $x = 0$.
Pour la comparaison on a $\forall t \in [0,1] \ : \ |x(t)| + |x'(t)| \leq \sup|x| + \sup \ vabsx'$ donc $N_2(x) \leq N_1(x)$. Dans l'autre sens on a $\forall t \in [0,1] \ : \ |x(t)| \leq |x(t)| + |x'(t)| \leq N_2(x)$ et de même $\forall t \in [0,1] \ : \ |x'(t)| \leq vabsx(t) + |x'(t)| \leq N_2(x)$ donc $N_1(x) \leq 2N_2(x)$. Elles sont équivalentes.

Exercice 31 Soit $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. Montrer que la forme linéaire définie sur E qui, à x, associe $x'(0)$ n'est pas continue.

[Ind] Trouver une suite.

[Dem] En prenant la suite : $f_n \ : \ t \mapsto t(1-t)^n$ on a que $f_n'(t) = (1-t)^{n-1}(1-(n+1)t)$. La suite $(f_n)_n$ tend vers 0 uniformément car $\sup f_n = \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$ tend bien vers 0, mais $f_n'(0) = 1$ ne tend pas vers 0.

Exercice 32 Soit $E = \mathbb{R}[X]$, si $P \in E$, on note $N_1(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \left|P^{(n)}(0)\right|$ et $N_2(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{1}{n!} P^{(n)}(0)\right|$. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E. Comparez-les entre elles et à la norme $||P|| = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$.

[Ind] Le vérifier. Trouver des inégalités et des suites.

[Dem] L'inégalité triangulaire et l'homogénéité ne posent pas de problème ni pour N_1 ni pour N_2. Si, pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \ : \ N_1(P) = \sum_{k=0}^{n} n! \, |a_k| = 0$ alors tous les coefficients sont nuls et $P = 0$, de même pour N_2.
On a d'une manière évidente $N_2(P = \leq N_1(P)$ car $\frac{1}{n!} \leq 1$. Ces deux normes ne sont pas équivalentes car en prenant la suite de polynÃ´mes $P_n(X) = 1 + \cdots + X^n$ on a $N_1(P_n) = 1 + 2! + \cdots + n!$ et $N_2(P_n) = n$ il est alors clair que $\dfrac{N_1(P_n)}{N_2(P_n)}$ tend vers l'infinie.
On a l'inégalité $|P(t)| \leq \sum_{k=0}^{n} \left|a_k t^k\right| \leq N_2(P)$ donc $||P|| \leq N_2(P)$, on en déduit une inégalité dans le même sens pour N_1. En prenant la suite de polynÃ´mes $P_n(X) = X^n$ on a $N_1(P_n) = n! \to +\infty$ et $||_{|}|\infty P_n = 1$ donc N_1 et $||_{|}|\infty$ ne sont pas équivalentes. Comme $N_2 \leq N_1$ la même suite prouve que N_2 et $||_{|}|\infty$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 33 Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$, on pose $||A|| = n \sup_{i,j \in [1,n]} |a_{ij}|$. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme sup. Montrer que:

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \quad ||AX|| \leq ||A||.||X||$$

a) Montrer que si $||A|| < 1$, alors $I - A$ est inversible.
b) Trouver en fonction de $||A||$ un majorant de l'ensemble des valeurs propres de A.

[Ind] Attendre le chapitre sur les séries. a) Trouver l'inverse en vous inspirant d'une fameuse égalité. b) Que vérifie une valeur propre.

[Dem] En effet pour tout indice i on a : $\left|\sum_j a_{ij} x_j\right| \leq \sum_j |a_{ij}| \sup_j |x_j|$ mais $\sum_j |a_{ij}| \leq n \sup_{i,j} |a_{ij}|$ et finalement en prenant le sup sur i on obtient $||AX|| \leq ||A||||X||$.
a) Nous remarquons que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n$ est absolument convergente car convergente en norme puisque $||A|| < 1$. Il suffit alors de vérifier que $(I - A) \sum_{n=0}^{+\infty} = I$ en développant et en remarquant l'autodestruction

des termes (ou en faisant un changement d'indices).
Si X est un vecteur propre (donc non nul) asssocié à la valeur propre λ on a $AX = \ lambdaX$ en remplaçant dans $||AX|| \leq ||A||.||X||$ on obtient $\lambda||X||\ leq||A||||X||$ et en simplifiant $\lambda \leq ||A||$. $||A||$ est un majorant des valeurs propres.

Exercice 34 Soit $E = \mathcal{B}(A, K)$ l'algèbre des fonctions à valeurs dans K, définies et bornées sur un ensemble A. On munit E de sa norme usuelle:

$$\forall f \in E \quad ||f||_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)|\,.$$

Montrer que E est complet.

[Ind] Utiliser que K est complet pour trouver la limite, puis montrer que la suite converge vers cette limite pour la norme uniforme.

[Dem] Soit une suite de Cauchy $(f_n)_n$ pour la norme uniforme alors $\forall x \in A$ la suite $(f_n(x))_n$ est de Cauchy dans K qui est complet. Ainsi chacune de ces suites converge et il existe $f(x)$ tel que $\forall x \in A$: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Il reste à montrer que la convergence est uniforme. La suite (f_n) vérifie le critère de cauchy uniforme c'est à dire : $\forall\varepsilon, \exists n_0, \forall p, q, \forall x \in A$: $p \geq n0$ et $q \geq n_0 \Rightarrow |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$. En passant à la limite quand q tend vers ∞ on obtient : $\forall\varepsilon, \exists n_0, \forall p, \forall x \in A : p \geq n_0 \Rightarrow |f_p(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ ce qui prouve que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f.

Exercice 35 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par: $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$. Montrer que (f_n) converge vers la fonction nulle pour la norme sup sur $[0, 1]$.

[Ind] Vous pouvez chercher le sup.

[Dem] A x fixé dans $[0, 1]$ la suite numérique $(f_n(x))_n$ tend vers 0. La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle.
Les fonctions f_n sont positives et croissantes sur $[0, 1]$ car $f_n'(x) = \dfrac{1}{(1+nx)^2}$. Le sup de f_n est donc en 1 et vaut $\dfrac{1}{1+n}$ qui tend vers 0. La suite $(f_n)_n$ tend donc uniformément vers 0.

Exercice 36 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrez que $f_{|S_n}$ est bornée et atteint ses bornes. Montrer qu'il existe au moins deux points diamétralement opposés ayant même image par f.

[Ind] Utiliser la compacité. Utiliser la fonction $\varphi(x) = f(x) - f(-x)$.

[Dem] $\mathbb{R}^n$ étant de dimesion finie S_n, la sphère unité, fermée et bornée est compact. La fonction continue $f_{|S_n}$ est définie sur ce compact donc $f(S_n)$ est donc compact. C' est à dire fermeé et bornée. Il en résulte que f est bornée et atteint ses bornes sur S_n. Maintenant en considèrant la fonction continue $x \mapsto \varphi(x) = f(x) - f(-x)$. Ou bien $\varphi(1) = 0$ et les points 1 et -1 conviennent, ou bien $\varphi(1)$ et $\varphi(-1)$ sont de signe contraire

Exercice 37 Montrer que $\mathcal{GL}_n(K)$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(K)$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

[Ind] Ouvert, image réciproque d'un ouvert par une fonction continue. Dense, limite de suites...

[Dem] Considèrons l'application det de $\mathcal{M}_n(K)$ dans $\mathbb{R}$. Elle est continue car elle s'exprime comme somme et produit des coefficients de la matrice. $\mathcal{GL}_n(K)$ est l'image réciproque de l' ouvert $\mathbb{R}^*$ et est donc ouvert. Soit M une matrice non inversible de $\mathcal{M}_n(K)$ alors 0 est valeur propre. Les valeurs propres de M étant en nombre fini on peut considérer la plus petite valeur propre en module soit λ. Les matrices $M - \frac{1}{n}\lambda I$ sont inversibles (car $\frac{1}{n}\lambda$ n'est pas valeur propre) et convergent vers M (il suffit de prendre la limite des coefficients). Ainsi $\mathcal{GL}_n(K)$ est dense dans $\mathcal{M}_n(K)$.

Exercice 38 Montrer que l'ensemble des matrices complexes diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Est-il ouvert?

[Ind] Utiliser le polynôme caractéristique pour construire une suite de matrices diagonalisables, regarder son complémentaire.

[Dem] Soit ε un réel. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors A est triangularisable c'est à dire il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP = T$ avec T triangulaire. Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de T. Choisissons une norme de matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ des complexes tels que $\lambda_1 + \alpha_1, \cdots, \lambda_n + \alpha_n$ soient deux à deux distincts. Et $||T'T|| \leq \dfrac{\varepsilon}{normeP||P^{-1}||}$ avec $T' = T + \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$.
Ainsi $PT'P^{-1}$ est diagonalisable et $||PT'P^{-1}|| \leq \varepsilon$.

Complément : Norme subordonnée
On considère maintenant que $E = \mathrm{K}^n$, $F = \mathrm{K}^m (K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

Exercice 39 Pour tout $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$\sup_{x \in E-\{0\}} \frac{||u(x)||}{||x||} \in \mathbb{R}$$

On note ce nombre $|||u|||$.

[Ind] Utiliser le bon critére.

[Dem] On sait que si u est continue alors il existe C tel que $\forall x \in E \ : \ ||u(x)|| \ leqC||x||$ donc $\sup\limits_{x \in E-\{0\}} \dfrac{||u(x)||}{||x||}$ est fini.

Exercice 40 Montrer que:

$$|||u||| = \sup_{x \in E, ||x||=1} ||u(x)||$$

[Ind] En multipliant un vecteur par l'inverse de sa norme on obtient un vecteur unitaire.

[Dem] Ona déjà : $|||u||| \leq \sup\limits_{x \in E, ||x||=1} ||u(x)||$. D'autre part $forallx \in E$, $x \neq 0$ on a $u\left(\dfrac{x}{||x||}\right) \leq \sup\limits_{x \in E, ||x||=1} ||u(x)||$. En prenant alors le sup à gauche on onbtient $|||u||| \ leq \sup\limits_{x \in E, ||x||=1} ||u(x)||$. D'où l'égalité.

Exercice 41 Soit $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$.

$$\forall x \in E \quad ||u(x)|| \leq |||u|||\,.||x||$$

[Ind] Écrire la dnition d'un *sup*.

[Dem] Par définition $|||u||| = \sup\limits_{x \in E-\{0\}} \dfrac{||u(x)||}{||x||}$ donc $\forall x \in E \ : \ ||u(x)|| \leq |||u|||\,||x||$.

Exercice 42 L'application définie sur $\mathcal{L}_c(E, F)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui, à u associe $|||u|||$ est une norme que l'on appelle norme subordonnée aux normes de E et F.

[Ind] Vérifier.

[Dem] Si $|||u||| = 0$ alors $\forall x \in E\ :\ ||u(x)|| \leq 0$ donc u est nulle.
On a pour les applications linéaires continues u, v on a, pour tout x de E $||u(x) + v(x)|| \leq ||u(x)|| + ||v(x)|| \leq (|||u||| + |||v|||)\,||x||$ donc $|||u + v||| \leq |||u||| + |||v|||$.
Enfin de même $|||\lambda u||| = \lambda\,|||u|||$.

Exercice 43 Soit G un K-e.v.n. et soient $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}_c(F, G)$. On a:

$$|||v \circ u||| \leq |||v|||\,.\,|||u|||$$

[Ind] Évaluer $||v(u(x))||$.

[Dem] On a $\forall x \in E$ $||v(u(x))|| \leq |||v|||\,||||u(x) \leq |||v|||\,|||u|||\,||x||$ d'où le résultat en passant au *sup*.

Exercice 44 La norme sur $\mathcal{L}_c(E)$ associée à la norme de E est une norme d'algèbre.

[Ind] Qu'est-ce que c'est qu'une norme d'algèbre.

[Dem] C'est la proposition précédente.

Exercice 45 Soit $u \in \mathcal{L}_c(E)$. Montrer que si λ est une valeur propre de u: $|\lambda| \leq |||u|||$.

[Ind] Le *sup* est le plus grand de tous.

[Dem] Si λ est une valeur propre alors il existe x vecteur propre tel que $u(x) = \lambda x$. Mais nous avons $\forall x \neq 0\ :\ \dfrac{||u(x)||}{||x||} \leq |||u|||$ en outre $\lambda \leq |||u|||$.

Exercice 46 Montrer que la norme sur $\mathcal{L}(E)$ associée à la $||.||_\infty$ est définie par:
si $A = (a_{ij})$ est la matrice de l'endomorphisme u

$$|||u|||_\infty = \sup_{i \in [1,n]} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

[Ind] Calculer la norme : majorer et montrer que le majorant est atteint.

[Dem] Notons ${}^tX = (x_1, \cdots, x_n)$ et ${}^tY = (y_1, \cdots, y_n)$ on a $Y = AX$ soit pour $1 \leq i \leq n$: $y_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$.
$N_\infty(AX) = \displaystyle\max_{1 \leq i \leq n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right) N_\infty(X)$. Soit i_0 tel que $1 \leq i_0 \leq n$ et $\displaystyle\max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right) = \sum_{i=1}^{n} |a_{i_0 j}|$. Soit ${}^tZ = (z_1, \cdots, z_n)$ tel que $z_j = 1$ si $a_{i_0,j} = 0$ et $z_j = \dfrac{\overline{a_{i_0,j}}}{|a_{i_0,j}|}$ sinon. Ainsi $N_\infty(Z) = 1$ et $N_\infty(AZ) \geq \displaystyle\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} z_j\right| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right)$. On en déduit le résultat.

Exercice 47 Montrer que la norme sur $\mathcal{L}(E)$ associée à la norme $||.||_1$ est:

$$|||u|||_1 = \sup_{j \in [1,n]} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

[Ind] Majorer et montrer que le majorant est atteint.

[Dem] Notons ${}^tX = (x_1, \cdots, x_n)$ et ${}^tY = (y_1, \cdots, y_n)$ on a $Y = AX$ soit pour $1 \leq i \leq n$: $y_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$.

$N_1(AX) = \sum_{i=1}^{n} |y_i| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}xj| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right)$ et $N_1(AX) \leq \max_{1\leq j\leq n}\left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right)\sum_{j=1}^{n} |x_j|$

Soit j_0 tel que $\max_{1\leq j\leq n}\left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right) = \sum_{i=1}^{n} |a_{ij_0}|$ et posons ${}^tZ = (z_1, \cdots, z_n)$ où $z_j = 1$ si $j = j_0$ et $z_j = 0$ sinon. Ainsi $N_1(Z) = 1$ et $N_1(AZ) = \sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{ji=1}^{n} a_{ij}z_j\right| = \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j_0}|$. On peut ainsi conclure.

5.9 Travaux Dirigés : Espace vectoriel normé

Exercice 48 Soit I un intervalle fermé borné, p une fonction continue sur I strictement positive. Démontrer que E_p ensemble des fonctions x continues de I dans K est un K-espace vectoriel préhilbertien quand on définit $\langle x, y\rangle = \int_I \overline{x(t)}y(t)p(t)dt$.

[Dem] E_p est bien un K-espace vectoriel, sev de $C(I, K)$ car E_p est non vide ($0 \in E_p$) et si x, y sont des éléments de E_p alors l'inégalité : $|x+y|^2 \leq 2|x|^2 + 2|y|^2$ prouve que la somme est dans E_p, l'opération externe ne pose pas de problème. E_p est préhilbertien car $\langle x, y\rangle = \int_I \overline{x(t)}y(t)p(t)dt$ est bien linéaire à droite, semi-linéaire à gauche et $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$, $\langle x, x\rangle \geq 0$ car p est positive et enfin $\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ car pour tout t de I la fonction $|x|^2 p$ est continue et positive.

Exercice 49 On garde les notations de l'exercice précédent. Vérifier que la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ est dans E_p . On appelle P_n une suite de polynômes orthogonaux (par le procédé de Gram-schmidt) de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$. Ecrire la construction de (P_n).
1) Démontrer que :

i) Pour tout n le polynôme P_n est orthogonal à tous les polynômes Q de degré strictement inférieur à n.

ii) Pour tout n, $P_n - tP_{n-1}$ est un polynôme de degré inférieur strictement à n, en déduire que : $\langle tP_{n-1}, P_n\rangle = \langle P_n, P_n\rangle$.

iii) Pour tous éléments de E_p on a : $\langle xy, z\rangle = \langle x, \overline{y}z\rangle$.
2) Montrer que tous les polynômes P_n ont n racines réelles distinctes et intérieures à I.
3) Montrer qu'il existe deux suites de nombres réels λ_n et μ_n avec $\mu_n \succ 0$ telles que $\forall n \geq 2$ on ait $P_n = (t + \lambda_n)P_{n-1} - \mu_n P_{n-2}$.

[Dem] Posons $V_n = vect\,(1, X, \cdots, X^n)$ la construction s'effectue par $P_0 = 1$ et $P_{n+1} = X^n - p_{V_n}\left(X^{n+1}\right)$ où p_{V_n} est la projection de $K[X]$ sur V_n. Ainsi on est assuré que les P_n sont bien orthogonaux et $P_{n+1} \in V_{n+1}$. Pratiquement on pose $P_{n+1} = X^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i$ et on résoud en λ_i le système pour $i = 1..n : 0 = \left\langle X^{n+1}, P_i\right\rangle + \lambda_i \langle P_i, P_i\rangle$. Il ne reste plus qu'à normer les polynômes : $P'_n = \|P_n\|^{-1} P_n$.

1 Pour tout t on a P_n orthogonal Q polynôme de degré inférieur strictement à n car celui-ci est combinaison linéaire des $(P_i)_{0\leq i<n}$.

P_n et tP_{n-1} ont le même terme de plus haut degré car $P_n = X^n + \cdots$, ainsi $d^0\left(P_n - tP_{n-1}\right) < n$ et $\langle tP_{n-1}, P_n\rangle = 0$.

On a $\langle xy, z\rangle = \langle \overline{xy}z, 1\rangle = \langle x, y\overline{z}\rangle$

2 On a par orthogonalité de P_n et P_0 : $\int_I P_n p = 0$ donc P_n change de signe au moins une fois dans l'intérieur de I. Plus généralement soit $(t_1, \cdots, t_r)$ avec $t_i < t_{i+1}$ la suite des racines de P_n intérieurs à I en lesquelles P_n change de signe. Si $r < n$ alors on pose $Q(t) = (t - t_1)(t - t_2)\cdots(t - t_r)$ et le polynôme P_nQ a un signe constant sur I d'où $\langle P_n, Q\rangle \neq 0$ ce qui contredit le 1-1 et donc $r = n$.

3 Le polynôme $P_n - tP_{n-1}$ est de degré $< n$ et donc $P_n - tP_{n-1} = \sum_{i\leq n-1} c_iP_i$ avec pour tout $i \leq n-1$: $-\langle tP_{n-1}, P_i\rangle = c_i \langle P_i, P_i\rangle$. La question 1-3 donne $\langle tP_{n-1}, P_i\rangle = \langle P_{n-1}, tP_i\rangle$. Donc si $i + 1 < n - 1$ ou $i < n - 2$ ce produit scalaire est nul et $c_i = 0$ sauf pour $i = n - 2$ et $n - 1$.
Pour $i = n - 2$ la remarque $1 - 2$ donne $-\langle P_{n-1}, P_{n-1}\rangle = c_{n-2}\langle P_{n-2}, P_{n-2}\rangle$ et donc $c_{n-2} < 0$.
Pour $i = n - 1$ la relation $-\langle tP_{n-1}, P_i\rangle = c_i \langle P_i, P_i\rangle$ montre seulement que $c_{n-2} \in \mathbb{R}$.
Ce qui donne $P_n = tP_{n-1} + c_{n-1}P_{n-1} - |c_{n-2}|\, P_{n-2}$.

Exercice 50 [:d'après météo 86]
Soit les polynômes de Legendre : $L_n(X) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dX^n}\left[\left(X^2 - 1\right)^n\right]$, $n \in \mathbb{N}$
1) Montrer que L_n est un polynôme de degré n, ayant la parité de n.

2) Calculer L_0, L_1, L_2. Préciser le cœfficient de X^n dans L_n.
3) En utilisant la formule de Leibnitz, démontrer que $L_n(1) = 1$ et $L_n(-1) = (-1)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
4) On pose $w_n(x) = (x^2 - 1)^n$:

i) Ecrire une équation différentielle du premier ordre vérifiée par w_n.

ii) En dérivant un bon nombre de fois cette équation, déterminer une équation différentielle du second ordre vérifiée par L_n, que l'on notera (E).
5) Montrer : (1) $L_n'(x) = xL_{n-1}'(x) + nL_{n-1}(x)$, pour tout $n \geq 1$.
6) En utilisant (E) et (1) établir (2) : $nL_n(x) = xL_n'(x) - L_{n-1}'(x)$, pour tout $n \geq 1$.
7) Déduire, à l'aide de (1) et (2) une relation de récurrenceentre les trois polynômes L_{n+1}, L_n, L_{n-1} ; cette relation ne faisant plus intervenir de dérivées.
8) On pose $I_n = \int_{-1}^{+1}(1 - x^2)^n dx$. Calculer I_n par récurrence.
9) Soit Q un polynôme de degré strictement inférieur à n , calculer : $\int_{-1}^{+1} L_n(x)Q(x)dx$.
10) Calculer $\int_{-1}^{+1} L_n(x)L_m(x)dx$, suivant que $m = n$ ou $m \neq n$.

[Dem]

- $\left(x^2-1\right)^n$ est un polynôme de degré n donc $D^n\left[\left(x^2-1\right)^n\right]$ est de degré n. Nous savons que la dérivée d'une fonction paire $f(x) = f(-x)$ est impaire $f'(x) = -f'(-x)$ et que la dérivée d'une fonction paire est impaire, ainsi L_n a la parité de n.
- On a : $L_0(x) = 1, L_1(x) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(x^2-1\right) = x, L_2(x) = \frac{1}{8}\frac{d^2}{dx^2}\left(x^4 - 2x^2 + 1\right) = \frac{1}{8}\frac{d}{dx}\left(4x^3 - 4x\right) = \frac{1}{8}\left(12x^2 - 4\right) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$. Le coefficient de x^n est obtenu en dérivant x^{2n}, n fois, soit $2n(2n-1)\cdots(2n-(n-1)) = 2n(2n-1)\cdots(n+1)$ ou $\frac{2n!}{n!}$ et en multipliant par $\frac{1}{2^n n!}$ on obtient $\frac{2n!}{2^n\left(n!^2\right)}$. Pour $n = 1$ on trouve 1 et pour $n = 2$, $\frac{3}{2}$.
- On a $L_n(x) = \frac{1}{2^n n!}D^n\left[(x-1)^n(x+1)^n\right] = \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\left[(x-1)^n\right]^{(k)}\left[(x+1)^n\right]^{(n-k)} =$ $\frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} n(n-1)\cdots(n-k+1)(x-1)^{n-k}\, n(n-1)\cdots(n-(n-k)+1)(x+1)^{n-(n-k)}$ et ainsi $L_n(1) = \frac{1}{2^n n!}\binom{n}{n}n!2^n = 1$ et $L_n(-1) = \frac{1}{2^n n!}\binom{n}{0}(-2)^n n! = (-1)^n$.
  - $w_n'(x) = n2x\left(x^2-1\right)^{n-1}$ et $\left(x^2-1\right)w_n'(x) - 2nxw_n(x) = 0$.
  - En dérivant $n+1$ fois on a : $D^{n+1}\left[\left(x^2-1\right)w_n'(x)\right] - 2nD^{n+1}(xw_n) = 0$ soit $\left(x^2-1\right)w_n^{(n+2)} + 2(n+1)xw_n^{(n+1)} + 2\frac{(n+1)n}{2}w_n^{(n)} - 2nxw_n^{(n+1)} - 2n(n+1)w_n^{(n)} = 0$ ou $\left(x^2-1\right)w_n^{(n+2)} + 2xw_n^{(n+1)} - n(n+1)w_n^{(n)} = 0$ ce qui donne $\left(x^2-1\right)L_n'' + 2xL_n' - n(n+1)L_n = 0$.
- $L_n' = xL_{n-1}' + nL_{n-1}$ donne $L_n'' = L_{n-1}' + xL_{n-1}'' + nL_{n-1}' = (n+1)L_{n-1}' + xL_{n-1}''$. En utilisnt l'équation différentielle précédente on a $\left(x^2-1\right)(n+1)L_{n-1}' + \left(x^2-1\right)xL_{n-1}'' + 2xL_n' - n(n+1)L_n = 0$ et en recommençant à utiliser l'équation différentielle pour L_{n-1}'': $\left(x^2-1\right)(n+1)L_{n-1}' - 2x^2L_{n-1}' + n(n-1)xL_{n-1} + 2xL_n' - n(n+1)L_n = 0$ ou $(n+1)\left(x^2-1\right)L_{n-1}' - 2x^2L_{n-1}' + (n-1)xL_n' - (n-1)x^2L_{n-1}' + 2xL_n' - n(n+1)L_n = 0$. Par simplification $-(n+1)L_{n-1}' + (n+1)xL_n' - n(n+1)L_n = 0$ ce qui donne $nL_n = xL_n' - L_{n-1}'$.
- On a $\left\{\begin{array}{c} xL_n' - L_{n-1}' = nL_n \\ L_n' - xL_{n-1}' = nL_{n-1} \end{array}\right.$ en éliminant L_n' puis L_{n-1}' on obtient $\left\{\begin{array}{c} \left(x^2-1\right)L_{n-1}' = -nxL_{n-1} + nL_n \\ \left(x^2-1\right)L_n' = nxL_n - nL_{n-1} \end{array}\right.$ d'où $\left(x^2-1\right)L_{n-1}' = -nxL_{n-1} + nL_n = (n-1)xL_{n-1} - (n-1)L_{n-2}$. Ou $nL_n = (2n-1)xL_{n-1} - (n-1)L_{n-2}$.
- On a $I_0 = 2$ et $I_n = \int_{-1}^{+1}1\left(1-x^2\right)dx = \left[x\left(1-x^2\right)^n\right]_{-1}^{+1} + n\int_{-1}^{+1}2x^2\left(1-x^2\right)^{n-1}dx$ ce qui donne $(1+2n)I_n = 2nI_{n-1}$ et $I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1}$. Pae récurrence cela donne $I_n = \dfrac{2n2(n-1)\cdots 2.1}{(2n+1)(2(n-1)+1)\cdots 3}2 = \dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$.
- Si $d^0(Q) < n$ alors $\int_{-1}^{+1}D^n\left(x^2-1\right)^n Q(x)\,dx = -\int_{-1}^{+1}D^{n-1}\left(x^2-1\right)^n Q'(x)\,dx = \cdots = (-1)^n\int_{-1}^{+1}\left(x^2-1\right)^n D^nQ(x)\,dx = 0$.

- Si $m \neq n$ disons $m < n$ alors $\int_{-1}^{+1} L_n(x) L_m(x)\,dx = 0$ et si $m = n$ alors $\int_{-1}^{+1} L_n^2(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} L_n(x) L_n(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^n D^{2n} L_n(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^n 2n!dx = \dfrac{(2n)!2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$ en multipliant par le coefficient et en simplfiant on trouve $\frac{2}{2n+1}$.

Exercice 51 [Polynômes de Tchebitchev (enset 88)]
On définit une suite de polynômes de variable réelle à cœfficients réels par : $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_n(x) = xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)$ pour $n \geq 2$.
a) Montrer que P_n est un polynôme de degré n.
b) i) Montrer que $P_n(2\cos\theta) = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$, $\forall\theta \in]0,\pi[$.

ii) En dérivant (i) montrer que : $nP_n(2\cos\theta) = 2\cos\theta P_n'(2\cos\theta) - 2P_{n-1}'(2\cos\theta)$.
c) Quels sont les zéros du polynôme P_n?
d) Montrer que : $\forall n \in N, n \geq 1, \forall x \in R, nP_n(x) = xP_n'(x) - 2P_{n-1}'(x)$ et
$(n-1)P_n'(x) = xP_n''(x) - 2P_{n-1}''(x)$ et $2P_n''(x) = xP_{n-1}''(x) + (n+2)P_{n-1}'(x)$.
e) Etablir une équation différentielle linéaire du second ordre satisfaite par P_n.

[Dem]

- P_0 est de degré 0 et si pour $k \leq n-1$ on suppose que P_k est de degré k alors P_n est la différence d'un polynôme de degré n et d'un polynôme de degré $n-2$ il est donc de degré n.
  - $P_n(\cos\theta) = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$. La formule est vraie au rang0 et 1. Supposons-la vraie au rang $n \geq 2$, $P_{n+1}(2\cos\theta) = 2\cos\theta\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} - \dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta}(2\cos\theta\sin(n+1)\theta - \sin n\theta)$ or en utilisant la formule $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a\cos b$ on a $2\cos\theta\sin(n+1)\theta - \sin n\theta = \cos\theta\sin(n+1)\theta + \cos(n+1)\theta\sin\theta = \sin(n+2)\theta$ d'où $P_{n+1}(2\cos\theta) = \dfrac{\sin(n+2)\theta}{\sin\theta}$.
  - On a $-2\sin\theta P_n'(2\cos\theta) = (n+1)\dfrac{\cos(n+1)\theta}{\sin\theta} - \dfrac{\sin(n+1)\theta\cos\theta}{\sin^2\theta}$ soit $-2P_n'(2\cos\theta) = (n+1)\dfrac{\cos(n+1)\theta}{\sin^2\theta} - \dfrac{\sin(n+1)\theta\cos\theta}{\sin^3\theta}$. De la même formule au rang en dessous on a : $-2\sin\theta P_{n-1}'(2\cos\theta) = \dfrac{n\cos n\theta}{\sin\theta} - \dfrac{\sin n\theta\cos\theta}{\sin^2\theta}$ soit $2\cos\theta P_n'(2\cos\theta) = -(n+1)\dfrac{\cos(n+1)\theta\cos\theta}{\sin^2\theta} + \dfrac{\sin(n+1)\theta\cos^2\theta}{\sin^3\theta}$. Formons la quantité $2\cos\theta P_n'(2\cos\theta) - 2P_{n-1}'(2\cos\theta) = \Delta$. Avec $2\cos\theta P_n'(2\cos\theta) = -\dfrac{n\cos(n+1)\theta\cos\theta}{\sin^2\theta} - \dfrac{\cos\theta}{\sin^3\theta}(\cos(n+1)\theta\sin\theta - \sin(n+1)\theta\cos\theta) = -\dfrac{n\cos(n+1)\theta\cos\theta}{\sin^2\theta} + \dfrac{\sin n\theta\cos\theta}{\sin^3\theta}$ on obtient $\Delta = -\dfrac{\cos(n+1)\theta\cos\theta}{\sin^2\theta} + \dfrac{\sin n\theta\cos\theta}{\sin^3\theta} - \dfrac{n\cos n\theta}{\sin^2\theta} - \dfrac{\sin n\theta\cos\theta}{\sin^3\theta} = \frac{n}{\sin^2\theta}\left(\cos n\theta - \cos n\theta\cos^2\theta + \sin n\theta\sin\theta\cos\theta\right)$
  $= \frac{n}{\sin^2\theta}\left(\cos n\theta - \cos n\theta + \cos n\theta\sin^2\theta + \sin n\theta\sin\theta\cos\theta\right) = \frac{n}{\sin^2\theta}\left(\cos n\theta\sin^2\theta + \sin n\theta\sin\theta\cos\theta\right) = \frac{n}{\sin^2\theta}(\sin\theta\sin(n+1)\theta) = nP_n(2\cos\theta)$.
- Les zéros de P_n sont les zéros de $\sin(n+1)\theta$ c'est à dire $(n+1)\theta = k\pi$ ou $\theta_k = \frac{k}{n+1}\pi$ on a bien n zéros.
- Le polynôme $nP_n - xP_n' + 2P_{n-1}'$ est un polynôme de degré n qui est nul pour tout θ de $]0,\pi[$ en $2\cos\theta$ donc sur tout $]-2,+2[$ d'où l'égalité.
  - De la première relation on a $nP_n' = P_n' + xP_n'' - 2P_n''$ d'où $(n-1)P_n' = xP_n'' - 2P_n''$.
  - De $P_n = xP_{n-1} - P_{n-2}$ on a en dérivant $P_n' = P_{n-1} + xP_{n-1}' - P_{n-2}'$ puis $P_n'' = 2P_{n-1}' + xP_{n-1}'' - P_{n-2}''$ or la deuxième relation donne $(n-2)P_{n-1}' = xP_{n-1}'' - 2P_{n-2}''$ d'où $-P_{n-2}'' = \frac{n-2}{2}P_{n-1}' - \frac{x}{2}P_{n-1}''$. Ainsi $P_n'' = 2P_{n-1}' + xP_{n-1}'' + \frac{n-2}{2}P_{n-1}' - \frac{x}{2}P_{n-1}''$ soit $2P_n'' = (n+2)P_{n-1}' + xP_{n-1}''$.
- $2P_n'' = xP_{n-1}'' + (n+2)P_{n-1}'$ or $P_{n-1}'' = \frac{x}{2}P_n'' - \frac{n-1}{2}P_n'$ et $P_{n-1}' = \frac{x}{2}P_n' - \frac{n}{2}P_n$. Ainsi $2P_n'' = \frac{x^2}{2}P_n'' - \frac{n-1}{2}xP_n' + \frac{(n+2)}{2}xP_n' - \frac{n(n+2)}{2}P_n$ soit $(4-x^2)P_n'' = 3xP_n' - n(n+2)P_n$ et l'équation différentielle $(4-x^2)P_n'' - 3xP_n' + n(n+2)P_n = 0$

Exercice 52 Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $(e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E. Vérifier que l'on obtient trois normes particulières sur E en posant, pour tous x_i de K :

$$\nu_0\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sup_{1\leq i\leq n} |x_i|, \nu_1\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \nu_2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

De plus ces normes sont équivalentes, montrer que : $\forall x \in E : \nu_0(x) \leq \nu_1(x) \leq \sqrt{n}\nu_2(x) \leq n\nu_0(x)$.
Décrire les pavés ouverts de $\mathbb{R}^n$ pour $n = 1, 2, 3$ pour ces trois normes.

[Dem] Nous avons montré dans le cours que nous avions bien des normes, seule ν_2 est euclidienne et l'inégalité triangulaire provient de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Nous avons $\nu_0(x) \leq \nu_1(x)$ car pour tout i : $|x_i| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_i|$. Ensuite $\left(\sum_i |x_i|\right)^2 = \sum_i \sum_j |x_i| |x_j| \leq \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \left(|x_i|^2 + |x_j|^2\right) \leq \frac{1}{2}(n+1)\nu_2^2(x)$ en utilisant $\frac{n+1}{2} \leq n$ nous obtenons le résultat. Enfin en majorant chaque $|x_i|$ par le plus grand d'entr'eux on a la dernière comparaison. Les boules sont déterminées par $\nu(x) \leq k$, regardons les boules unitées : $\sup(|x|, |y|) \leq 1$ donne en décomposant dans chaque quadrant du plan un carré (si x, y sont positifs on sépare $x \leq y$ ce qui donne $y \leq 1$, puis $y \leq x$), dans le cas $n = 3$, un cube. Pour la seconde norme, $|x| + |y| \leq 1$, dans chaque quadrant on trouve des segments (x, y positifs et $x + y \leq 1$) ce qui donne un carré "penché". Pour la dernière c'est un cercle ou une vraie boule.

Exercice 53 Avec $n \in \mathbb{N}^*$ on considère l'algèbre sur K : $E = M_n(K)$ des matrices carrées nxn , à cœfficients dans K. Prouver que l'application $\|\|$ de $M_n(K)$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par : $\|A\| = n \sup_{\left\{\begin{array}{l} 1\leq i\leq n \\ 1\leq J\leq n \end{array}\right.} |a_{i,j}|$ où $A = ((a_{i,j}))$ est une norme qui possède de plus la propriété suivante: $\forall A \in E, \forall B \in E : \|A \times B\| \leq \|A\| \|B\|$

[Dem] Cette norme n'est rien d'autre que la norme ν_0 sur K^{n^2}a un coefficient près. De plus $A \times B = ((c_{ij}))$ avec $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. On a pour tout indice $|a_{ik}b_{kj}| \leq \sup_{i,j} |a_{ij}| \sup_{i,j} |b_{ij}|$ et donc $|c_{ij}| \leq n \sup_{i,j} |a_{ij}| \sup_{i,j} |b_{ij}|$ ce qui donne $\|A \times B\| \leq \|A\| \|B\|$.

Exercice 54 Montrer que $n : (x, y) \longmapsto \int_0^1 |x + ty|\, dt$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$, représenter la boule unité .

[Dem] Par invariance en changeant (x, y) en $(-x, -y)$ il suffit de considérer deux cas. Supposons $x \geq 0$ et $y \geq 0$ dans ce cas la boule unité donne par intégration $x + \frac{y}{2} \leq 1$. Si $x \geq 0$ et $y \leq 0$ l'étude de $x + ty \geq 0$ donne $t \leq \frac{x}{-y}$. Le nombre $\frac{x}{-y}$ n'appartient pas toujours à l'intervalle $[0, 1]$. $\frac{x}{-y} \geq 0$ mais $\frac{x}{-y} \leq 1$ donne $x \leq -y$ et dans ce cas $n(x, y) = \int_0^{\frac{x}{-y}} x + ty + \int_{\frac{x}{-y}}^1 -x - ty = \frac{x^2}{-y} + \frac{x^2}{2y} - x - \frac{x^2}{y} - \frac{y}{2} + \frac{x^2}{2y} = -2\frac{x^2}{y} + \frac{x^2}{y} - x - \frac{y}{2} = -\frac{x^2}{y} - x - \frac{y}{2}$. Faisonx la synthèse : dans la quadrant $x \geq 0, y \geq 0$ on trouve le segment d'équation $x + \frac{y}{2} \leq 1$, dans le demi quadrant $x \geq 0, y \leq 0$ et $x \geq -y$ le segment qui se recole $x + \frac{y}{2} \leq 1$, et dans le demi quadrant $x \geq 0, y \leq 0, x \leq -y$ on trouve l'ellipse $x^2 + xy + \frac{y^2}{2} + y \leq 0$. Nous obtenons là un bout d'éllipse d'axe $x = -\frac{y}{2}$ et $y = -2$ qui se reboute.

Exercice 55 On définit sur l'espace vectoriel $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ les applications ν_1 et ν_2 par : $\nu_1(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et $\nu_2(f) = \int_0^1 e^x |f(x)|\, dx$.
1) Montrer que ν_1 et ν_2 sont des normes sur E.
2) Soit (f_n) la suite de fonctions définies par $f_n(x) = 1 - nx$ si $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ et $f_n(x) = 0$ si $\frac{1}{n} \leq x \leq 1$. Etudier la suite (f_n) dans (E, ν_1) et (E, ν_2), conclusion.

[Dem] Pour ν_1: Pour toute fonction f le réel $\nu_1(f)$ existe car f est continue sur $[0, 1]$. On a $\nu_1(\lambda f) = \sup_{x\in[0,1]} |\lambda f(x)|$ or pour tout x de $[0, 1]$ on a $|\lambda f(x)| = |\lambda| |f(x)| \leq |\lambda| \nu_1(f)$ puis en prenant le sup à

gauche on obtient $\nu_1(\lambda f) \leq \lambda\nu_1(f)$. Il faut recommencer en prenant l'égalité dans l'autre sens, pour obtenir l'égalité $\nu_1(\lambda f) = |\lambda|\,\nu_1(f)$. Pour l'inégalité triangulaire on part de la relation vraie pour tout x : $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$. Puis on prend le sup à droite et ensuite à gauche. La dernière propriété est vraie car $\nu_1(f) = 0$ donne pour tout x de $[0,1]$: $|f(x)| \leq \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| = 0$ et donc f est nulle sur tout l'intervalle. Pour ν_2, l'homogénéité, l'inégalité triangulaire ne posent pas de problème, enfin si $\nu_2(f) = 0$ alors $\displaystyle\int_0^1 e^x\,|f(x)|\,dx = 0$ et on en déduit que pour tout x de $[0,1]$: $e^x\,|f(x)| = 0$ car nous avons une fonction continue et positive, on en déduit que f est nulle sur $[0,1]$.
Il s'agit de calculer $\nu_1(f_n) = 1$ pour tout n. D'autre part $\nu_2(f_n) = \int_0^{\frac{1}{n}} (1-nx)\,e^x dx = e^{\frac{1}{n}} - 1 - \int_0^{\frac{1}{n}} xe^x dx = e^{\frac{1}{n}} - 1 - [xe^x]_0^{\frac{1}{n}} + [e^x]_0^{\frac{1}{n}} = 2e^{\frac{1}{n}} - 2 - \frac{1}{n}e^{\frac{1}{n}}$, cette suite réelle tend vers 0. Nous pouvons en déduire que les normes ne sont pas équivalentes néanmoins nous avons $\nu_2(f) \leq (e-1)\,\nu_1(f)$. Ainsi toute suite convergeant vers 0 pour ν_1 converge vers 0 pour ν_2.

Exercice 56 Soit E l'espace des fonctions réelles définies sur $I = [0,1]$ et lipschitziennes. On pose $K(f) = \sup\limits_{\substack{x\neq y\\(x,y)\in I^2}} \dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$ et $M(f) = \sup\limits_{x\in I}|f(x)|$ puis $N(f) = M(f) + K(f)$.
1^0) Montrer que E est un sev de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.
2^0) Montrer que M et N sont des normes sur E, sont-elles équivalentes ?

[Dem] Pour montrer que E est un sev, il suffit de voir que E n'est pas vide ($0 \in E$), et que la somme et $\lambda \cdot f$ de fonctions lipschitziennes est lipschitzienne, nous l'avons fait en cours.
Nous avons déja montré que M est une norme sur l'ensemble des fonctions continues sur I, ici on est sur un sev et on a donc aussi une norme. Pour N, pour les deux premières propriétés il suffit de les vérifier pour K. On a $K(\lambda f) = |\lambda|\,K(f)$, pour l'inégalité triangulaire on part de $\dfrac{|(f+g)(x)-(f+g)(y)|}{|x-y|} = \dfrac{|f(x)-f(y)+g(x)-g(y)|}{|x-y|} \leq \dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} + \dfrac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|} \leq K(f) + K(g)$ maintenant en passant au sup à gauche puisque cette inégalité est vraie pour tout $x \neq y$ de I, on obtient $K(f+g) \leq K(f) + K(g)$. Par suite N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour la dernière $N(f) = 0$ donne en outre $M(f) = 0$ et donc $f = 0$.
Pour l'équivalence nous avons $M(f) \leq N(f)$ si nous pensons qu'elles ne sont pas équivalentes, recherchons une suite tendant vers 0 pour M et non pour N. Prenons la suite f_n définie par $f_n(x) = \left(x - \frac{1}{n}\right)$ si $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ et 0 sinon. Ainsi $M(f_n) = \frac{1}{n}$ qui tend vers 0 mais $K(f_n)$ est supérieur à 1 en effet $\sup\limits_{x\neq y} \dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \geq 1$ car 1 est atteint pour $x = 0$ et $y = \frac{1}{n}$. Pour le coefficient de lipschitz on regarde la tangente car le taux de variation $\dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$ peut s'écrire $f'(\zeta)$, c'est ainsi que toute fonction à dérivée bornée est lipschitzienne. Nous aurions pu construire un contre exmple à l'aide de x^n.

Exercice 57 • Soit A et B deux parties d'un evn (E,N). On pose $A+B = \{a+b, a \in A, b \in B\}$. Montrer que

-a- si A ou B est ouvert alors $A+B$ est ouvert.

-b- si A et B sont compacts alors $A+B$ l'est.

-c- si A est compact et B est fermé alors $A+B$ est fermé.

[Dem]

- Pour tout b de B considèrons $\Phi_b : E \to E$ tel que $\Phi_b(x) = x+b$ on a que Φ_b est une translation donc un homéomorphisme de E. Si A est ouvert, $\Phi_b(A)$ est ouvert. Ensuite on écrit $A+B = \bigcup\limits_{b\in B} \Phi_b(A)$ qui montre que $A+B$ est ouvert comme réunion d'ouverts.
- Soit $z_n = a_n + b_n$ une suite de $A+B$. Le produit $A \times B$ de compacts est compact. De la suite (a_n, b_n) on peut donc extraire une suite $\left(a_{\varphi(n)}, b_{\varphi(n)}\right)$ qui converge. Ainsi pour tout entier n on a $z_{\varphi(n)} = a_{\varphi(n)} + b_{\varphi(n)}$ et $z_{\varphi(n)}$ convergevers un élément de $A \times B$ qui est donc compact.
- Soit $z_n = a_n + b_n$ une suite de $A+B$ qui converge disons $\lim z_n = \ell$. De la suite (a_n) du compact A, on extrait $a_{\varphi(n)}$ qui tend vers a élément de A. En écrivant $z_{\varphi(n)} = a_{\varphi(n)} + b_{\varphi(n)}$ on a que $\left(b_{\varphi(n)}\right)$ converge vers $\ell - a$ qui est bien un élément de B car B est fermé donc $\ell \in A+B$ et $A+B$ est femé.

Exercice 58 Soit E l'ensemble des applications de $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ telles que $f(0)=0$ Montrer que N_1, N_2 définies par $N_1(f)=\sup\limits_I |f(t)|$ et $N_2(f)=\sup\limits_I |f'(t)|$ où $I=[0,1]$ sont des normes et les comparer.

[Dem] Le fait que ce sont des normes ne pose pas de difficulté, il faut bien remarquer que E est formé des fonction de classe 1 et nulle en 0, ainsi si le dérivée est nulle on a que la fonction est constante et donc nulle.Pour la comparaison on a : Pour tout t de $[0,1]$, $|f'(t)|\leq N_2(f)$, ensuite par les accroissements finis on a : $|f(t)-f(0)|\leq N_2(f)|t|$ ce qui prouve que $|f(t)|\leq N_2(f)$ puis $N_1(f)\leq N_2(f)$. Mais N_1n'est pas plus fine que N_2 en effet considèrons pour $n\geq 2$: $f_n(x)=\frac{1}{n}\sin nx$ pour $0\leq x\leq \frac{\pi}{2n}$ et $f_n(x)=\frac{1}{n}$ si $\frac{\pi}{2n}\leq x\leq 1$. On a $f_n'(x)=\cos nx$ si $0\leq x\leq\frac{\pi}{2n}$ et 0 sinon. On a bien $f_n\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $f_n(0)=0$ donc $f_n\in E$. Pour les limites on a $N_1(f_n)=\frac{1}{n}$ qui tend vers 0 mais $N_2(f_n)=1$ qui ne tend pas vers 0.

Exercice 59 Soit $\mathbb{R}^2$ muni d'une norme quelconque et $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ telle que : $\exists\alpha\in]0,\frac{1}{2}[$: $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \|f(x)-f(y)\|\leq\alpha(\|f(x)-x\|+\|f(y)-y\|)$. Montrer que f admet un point fixe unique.

[Dem]

- Pour l'unicité on a si $x=f(x)$ et $y=f(y)$ la relation donne $\|f(x)-f(y)\|=0$ et donc $f(x)=f(y)$ et par suite $x=y$.
- Pour l'existence, partons d'un x_0 quelconque et posons $x_{n+1}=f(x_n)$ on a $\|x_{n+1}-x_n\|\leq \alpha(\|x_{n+1}-x_n\|+\|x_n-x_{n-1}\|)$ ou $\|x_{n+1}-x_n\|\leq\frac{\alpha}{1-\alpha}\|x_n-x_{n-1}\|$. Posons $k=\frac{\alpha}{1-\alpha}$ on a $0<\alpha<\frac{1}{2}$ et donc $0<k<1$. Pour tout p on a : $\|x_{n+p}-x_n\|\leq\sum\limits_{j=n}^{n+p-1}\|x_{j+1}-x_j\|$ or $\|x_{j+1}-x_j\|\leq k^j\|x_1-x_0\|$. Nous avons donc $\|x_{n+p}-x_n\|\leq\|x_1-x_0\|\left(\sum\limits_{j=n}^{n+p-1}k^j\right)\leq\dfrac{k^n}{1-k}\|x_1-x_0\|$. Nous avons donc que (x_n) est une suite de Cauchy car $\lim k^n=0$ et elle converge donc. Si $\ell=\lim x_n$ on a pour tout n $\|f(x_n)-f(\ell)\|\leq\alpha(\|f(x_n)-x_n\|+\|f(\ell)-\ell\|)$ et en passant à la limite $\|\ell-f(\ell)\|\leq\alpha\|f(\ell)-\ell\|$ ou $(1-\alpha)\|\ell-f(\ell)\|\leq 0$ soit $\ell=f(\ell)$.

Exercice 60 [De l'utilisation de la formule de Leibnitz]
On considère la fonction $f(x)=e^{-x^2}$.
1) Montrer que : a) $f'(x)=-2xf(x),\forall x\in\mathbb{R}$

b) $f^{(n+1)}(x)=-2xf^{(n)}(x)-2nf^{(n-1)}(x),\forall x\in\mathbb{R},\forall n\geq 1$

2) Montrer que $f^{(n)}(x)=e^{-x^2}P_n(x)$ où P_n est un polynôme de degré n vérifiant :

$$P_{n+1}(x)=-2xP_n(x)-2nP_{n-1}(x),\forall x\in R,\forall n\geq 1.$$

Ces polynômes P_n sont les polynômes d'Hermitte. Déterminer P_n pour $0\leq n\leq 3$.

[Dem] On a $f'(x)=-2xe^{-x^2}=-2xf'(x)$. En utilisant la formule de Leibnitz $(-2xf(x))^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-2x)^{(k)}f^{(n-k)}(x)$ il y a peu de termes non nuls seulement pour $k=0$ et 1 ce qui donne $f^{(n+1)}(x)=-2xf^{(n)}(x)-2nf^{(n-1)}(x)$ pour tout x réel et tout entier supérieur à 1. Il ya bien sur d'autre méthode! On démontre l'existence de P_n par récurrence, pour $n=0$ et 1 la propriété est vraie avec $P_0=1$ de degré 0 et $P_1=-2x$ de degré 1. En supposant la propriété vraie jusqu'au rang n on a $f^{(n+1)}(x)=-2xe^{-x^2}P_n(x)-2ne^{-x^2}P_{n-1}(x)=e^{-x^2}(-2xP_n(x)-2nP_{n-1}(x))$ et en posant $P_{n+1}(x)=-2xP_n(x)-2nP_{n-1}(x)$ on obtient bien un polynôme de degré $n+1$. Cette formule permet de calculer de proche en proche le polynômes : $P_2(x)=-2x(-2x)-2=4x^2-2, P_3(x)=-2x\left(4x^2-2\right)-4(-2x)=-8x^3+12x$.

Exercice 61 [suites...suites révision]
1) Soient a et b des réels, $0 < a < b$. On pose $u_0 = a, v_0 = b$ et $\forall n \in N^* : u_n = \sqrt{u_{n-1} v_{n-1}}$
$v_n = \frac{u_{n-1}+v_{n-1}}{2}$. Montrer que u_n et v_n admettent une limite commune.
2) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n - 6}{u_n - 4}$.

a) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta : \begin{cases} u_0 = \alpha \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = \alpha \\ u_0 = \beta \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = \beta \end{cases}$

b) On supppose $u_0 \notin \{\alpha, \beta\}$ et on pose $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$, déterminer une relation entre v_n et v_{n+1} et en déduire la limite de u_n.
3) CCP 97 Soient des réels a, u_0, u_1 tels que $0 < a < 1$ et $0 < u_0 < u_1$. Soit la suite : $u_{n+1} = u_n + a u_{n-1}$. Cette suite converge-t-elle ?

[Dem]

- Il s'agit de la moyenne arythmétique et géométrique on a les relations de comparaison : pour tout n : $u_n \leq u_{n+1}, v_{n+1} \leq v_n$ et $u_n \leq v_n$. Faisons une démonstration par récurrence : au rang 0 on a $u_0 = a$ et $u_1 = \sqrt{u_0 v_0} = \sqrt{ab} \geq \sqrt{aa} = a = u_0$ et $v_1 = \frac{u_0+v_0}{2} \leq b = v_0$ et enfin $u_0 \leq v_0$. En supposant la propriété vraie au rang n on a de la même façon $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geq \sqrt{u_n u_n} = u_n$ (on met dans l'hypothèse de récurrence la positivité des suites) ainsi $u_{n+1} \geq u_n \geq 0$ et $0 \leq v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \leq v_n$ enfin la relation $2\sqrt{u_n v_n} \leq u_n + v_n$ qui résulte de la positivité de $(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2$ donne la dernière relation. Ainsi les deux suites sont adjacentes et elles convergent vers la même limite.
- Ces valeurs correspondent aux points fixes de l'application f définie par $f(x) = \frac{x-6}{x-4}$ qui conduit à l'équation $x = \frac{x-6}{x-4}$ ou $x^2 - 5x + 6 = 0$ dont les racines sont 2 et 3. On a $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - \alpha}{u_{n+1} - \beta} = \dfrac{\frac{u_n-6}{u_n-4} - 2}{\frac{u_n-6}{u_n-4} - 3} = \dfrac{-u_n + 2}{u_n - 4} \dfrac{u_n - 4}{-2u_n + 6} = \frac{1}{2} \dfrac{u_n - 2}{u_n - 3} = \frac{1}{2} v_n$. Ainsi (v_n) est une suite géométrique qui converge vers zéro. En revenant à $u_n = \dfrac{\beta v_n - \alpha}{v_n - 1}$converge vers α. Remarquons une chose : il faut supposer pour tout $n : u_n \neq 4$.

Exercice 62 [suites $u_{n+1} = f(u_n)$ révision]
1) Etudier la suite définie par $u_{n+1} = 1 - \cos u_n$ avec $u_0 \in \mathbb{R}$.
2) Etudier la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n^2 + 1\right)$.
3) Etudier la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}, u_{n+1} = 1 - u_n^2$.

[Dem]

- Si la limite existe elle vérifie $l = 1 - \cos l$ ce qui donne en étudiant la fonction $f(x) = x - 1 + \cos x$, $l = 0$. On remarque que pour tout n : $0 \leq u_n \leq 2$. La relation $1 - \cos u_n = 2\sin^2 \frac{u_n}{2}$ on a $u_{n+1} - u_n = 2\left(\sin^2 \frac{u_n}{2} - \sin^2 \frac{u_{n-1}}{2}\right)$. La fonction $x \longmapsto \sin^2 x$ est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $0 \leq \frac{u_n}{2} \leq 1 \leq \frac{\pi}{2}$. Ainsi par récurrence $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $u_2 - u_1 = 1 - \cos u_1 - u_1 \leq 0$ car $1 - \cos x - x$ est décroissante sur $[0, 2]$. On a donc $\lim u_n = 0$.
- La seule limite possible est $\ell = 1$, pour tout u_0 on a pour tout $n \geq 1 : u_n > 0$. D'autre part $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(1 + u_n^2\right) - u_n = \frac{1}{2}\left(1 + u_n^2\right) - \frac{1}{2}\left(1 + u_{n-1}^2\right) = \frac{1}{2}\left(u_n - u_{n-1}\right)\left(u_n + u_{n-1}\right)$. Ainsi (u_n) est momotone et comme $u_1 - u_0 = \frac{1}{2}\left(u_0 - 1\right)^2 \geq 0$ on a que (u_n) est croissante.
  - Si $u_0 = 1$ alors pour tout $n : u_n = 1$.
  - SI $|u_0| \leq 1$ alors $u_1 \leq 1$ et pour tout $n : u_n \leq 1$ comme (u_n) est croissante et majorée, elle converge et ce ne peut être que vers 1.
  - Si $|u_0| > 1$ alors $u_1 - |u_0| = \frac{1}{2}\left(1 + u_0^2\right) - |u_0| = \frac{1}{2}\left(|u_0| - 1\right)^2$et $u_1 > |u_0|$ et pour tout $n : u_n > |u_0| > 1$ et par suite (u_n) diverge.

Exercice 63 [Et toujours...A.F., Rolle...révision]
1) Soit $\alpha \in]0, 1[$. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^* : \dfrac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leq (n+1)^\alpha - n^\alpha \leq \dfrac{\alpha}{n^{1-\alpha}}$, puis en déduire un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p^{1-\alpha}}$.

2) Montrer que tout polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle.
3) Montrer que si f est dérivable sur un intervalle I et admet n zéros sur I , sa dérivée admet au moins $n-1$ zéros sur I , séparant les zéros de f.

Application : Montrer que le polynôme de Legendre $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n$ admet n zéros distincts dans $]-1,+1[$.

[Dem]

- Pour $\alpha \in \left]0,1\right[$ et n entier, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est continue dans $[n,n+1]$ et dérivable sur $]n,n+1[$ en appliquant le théorème des accroissements finis sur cet intervalle on a : il existe $c \in]n,n+1[$ tel que $(n+1)^\alpha - n^\alpha = \alpha c^{\alpha-1}$. La fonction $t \longmapsto t^{\alpha-1}$ étant décroissante on en déduit : $\dfrac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leq (n+1)^\alpha - n^\alpha \leq \dfrac{\alpha}{n^{1-\alpha}}$. En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient $\alpha \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{(p+1)^{1-\alpha}} \leq n^\alpha$ et $\alpha \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^{1-\alpha}} \leq (n+1)^\alpha - 1$ d'où $\dfrac{(n+1)^\alpha}{\alpha} - \dfrac{1}{\alpha} \leq \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^{1-\alpha}} \leq \frac{n^\alpha}{\alpha}$.
En divisant par n^α et en faisant tendre n vers ∞ on a $\lim n^\alpha = +\infty$, $\lim \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^\alpha = 1$ ce qui donne $\dfrac{1}{\alpha} \leq \lim \dfrac{1}{n^\alpha} \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^{1-\alpha}} \leq \frac{1}{\alpha}$ ou encore $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^{1-\alpha}} \overset{+\infty}{\sim} \frac{n^\alpha}{\alpha}$.
- Un polynôme est une fonction continue et comme le degré est impair, $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$ ainsi par le théorème des valeurs intermédiaires on a que P s'annule au moins une fois.
- Si f admet n zéros sur I disons $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$ alors sur chaque intervalle $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ le théorème de Rolle donne que la dérivée f' s'annule sur cet intervalle ouvert, ainsi f' a bien $n-1$ zéros séparant les zéros de f. Pour le polynôme de Legendre on part du polynôme $\left(x^2-1\right)^n$ il a deux zéros $+1$ et -1 donc sa dérivée s'annule une fois dans l'intervalle $]-1,+1[$. En supposant que le polynôme $\left(x^2-1\right)^{(p)}$ pour $1 \leq p < n$ s'annule p fois dans l'intervalle ouvert $]-1,+1[$ on a qu'il s'annule $p+2$ fois sur $[-1,+1]$ donc d'après ce qui précède sa dérivée $\left(x^2-1\right)^{(p+1)}$ s'annule $p+1$ fois sur $]-1,+1[$. On en déduit le résultat pour $p=n$.

Exercice 64 [révision]
1) Montrer que l'équation $\ln x + x = k$, admet une solution unique x_k, quelque soit $k \in \mathbb{N}$.
2) Montrer que lorsque $k \to +\infty$, on a : $x_k = ak + b\ln k + c\frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right)$,$a$,$b$,$c$ étant des constantes à déterminer.

[Dem] en conidèrant la fonction $f(x) = \ln x + x$ elle est strictement croissante de $]0,+\infty[$ vers $]-\infty,+\infty[$ et continue par suite elle atteint la valeur k une et une seule fois, en x_k. On a donc $\ln x_k + x_k = k$, et $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = +\infty$ car f^{-1} va de $]-\infty,+\infty[$ vers $]0,+\infty[$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = +\infty$. Ensuite on a $x_k \sim k$ car $\ln x$ est négligeable en $+\infty$ par rapport à x, on peut aussi écrire : $\frac{x_k}{k} = 1 - \frac{\ln x_k}{k}$. Ensuite $\ln x_k \sim \ln k$ ou $\ln x_k = \ln k + o(\ln k)$ ou $\frac{\ln x_k}{k} = \frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right)$ en injectant ceci à la relation précédente on obtient $\frac{x_k}{k} = 1 - \frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right)$. Poursuivons $\ln\frac{x_k}{k} = \ln\left(1 - \frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right)\right) = -\frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right)$ ce qui donne en partant de $x_k = k - \ln x_k = k - \ln k - \ln\frac{x_k}{k} = k - \ln k + \frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right)$.

Exercice 65 [révision]
Soit f une fonction numérique dérivable sur $[a,b]$ telle que : $f'(a) \neq f'(b)$.. Montrer que f' prend toute valeur de l'intervalle $]f'(a), f'(b)[$. Enoncer le résultat.

[Dem] Prenons un élément k tel que $f'(a) < k < f'(b)$. Supposons que le rapport $h = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $\in]f'(a), f'(b)[$ alors $k \in]f'(a), h[\cup]h, f'(b)[$ plusieurs cas sont possibles :

- si $k \in]f'(a), h]$ alors on considère lapplication $g :]a,b] \to \mathbb{R}$ qui à t associe $\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$ on a que g est continue et $\lim\limits_{t\to a} g(t) = f'(a)$ ainsi $g(]a,b]) \supset]f'(a), h]$ et c'est gagné il existe c tel que $k = g(c)$.
- Si $f'(a) < f'(b) < h$ on a que $k \in]f'(a), h]$ et c'est gagné.

- Si $h \leq f'(a) < f'(b)$ alors $k \in]h, f'(b)[$ et on considère la fonction $g_1 : [a, b[\to \mathbb{R}$ qui à t associe $\dfrac{f(t) - f(b)}{t - a}$.

Exercice 66 [révision équations fonctionnelles]
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en 0 telles que :

1) $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = 2f(x)$

2) $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = [f(x)]^2$

[Dem]

- Si $f(0) = 0$. Considèrons $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = f'(0)$ on a que g est continue en 0 et $g(2x) = g(x)$ et $g\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = g(x)$ et g est constante. Ainsi les seules solutions qui conviennent sont $f(x) = ax$.
  Or il existe $a \neq 0$ tel que $f(a) = 0$ alors en considèrant $f\left(\frac{a}{2^n}\right) = 0$ on a $f(0) = 0$.
- Il existe $b \neq 0$ tel que $f(b) > 0$ car $f \neq 0$ et même $f \geq 0$. Considèrons $f(b) = \left(f\left(\frac{b}{2^n}\right)\right)^{2^n}$ on a $\ln f\left(\frac{b}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} \ln f(b)$ et donc $\ln f(0) = 0$ et $f(0) = 1$. Ainsi $g = \ln f$ vérifie $g(2x) = 2g(x)$ donc en remontant on trouve les fonctions $x \longmapsto e^{\lambda x}$.

Exercice 67 [révision]
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$; soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $f(a) = 0$. Montrer qu'il existe un point M de la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de f tel que la tangente en M à $(\mathcal{C})$ passe par O.

Exercice 68 [révision]
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application C^2 telle que $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f''(c) = f(c)$.

Exercice 69 [révision]
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$; montrer que l'équation $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx - (a + b + c) = 0$ admet au moins une solution x dans $]0, 1[$.

Exercice 70 Dans $K[X]$ on considère les normes $\|P\|_1 = \sup\limits_{[0,1]} |P(x)|$, $\|P\|_2 = \sum\limits_{i=0}^{n} |P(i)|$, $\|P\|_3 = \sum\limits_{i=0}^{n} |a_i|$, $\|P\|_4 = \sup\limits_{[0,1]} \sum\limits_{i=0}^{n} \left|P^{(i)}(x)\right|$, $\|P\|_5 = \int\limits_0^1 |P(t)\, dt|$

[Dem] Des comparaisons évidentes $\|P\|_5 \leq \|P\|_1$, $\|P\|_1 \leq \|P\|_4$, $\|P\|_1 \leq \|P\|_3$, $\|P\|_5 \leq \|P\|_3$. Des moins évidentes : $\|P\|_2 \leq n^n (n+1) \|P\|_3$, $\|P\|_3 \leq \|P\|_4$ et $\|P\|_4 \leq \sum\limits_{i=0}^{n} i! \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \|P\|_3$. Ensuite en utilisant les formules de Cramer avec $n+1$ points on peut exprimer les a_i en fonctions de valeurs de P et ainsi $\|P\|_1 \leq \|P\|_3 \leq R \|P\|_1$. Si $\tilde{P}$ est une primitive de P on a $\int_0^1 |P(t)\, dt| \geq \left|\int_0^1 P[t]\, dt\right| \geq \tilde{P}(x)$ et donc $\left\|\tilde{P}\right\|_1 \leq \|P\|_5$. En écrivant les coefficients de P on a $\left|\frac{a_i}{i+1}\right| \leq R_{n+1} \left\|\tilde{P}\right\|_1$ ou $|a_i| \leq (n+1) R_{n+1} \left\|\tilde{P}\right\|_1$. De nouveau avec les formules de Cramer on a $|a_i| \leq L_n \sum |P(j)|$ d'où $\|P\|_3 \leq (n+1) L_n \|P\|_2$. On doit avoir tout!

Exercice 71 Montrer si f et g sont des fonctions continues, il en est de même de $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$.

[Ind] Utiliser les formules exprimant le sup ou l'inf.

[Dem] Nous avons vu que $\sup\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|)$ et

$\inf\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|)$. Ainsi si l'on sait que la valeur absolue d'une fonction continue est continue c'est fini. Pour ce dernier résultat : $\forall\varepsilon$, $\exists\eta$: $|x - x_0| \leq \eta \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$ ceci prouve en prenant un ε suffisament petit que $f(x)$ à le même signe que $f(x_0$ pour x assez proche de x_0. ensuite $-f$ est continue en x_0 donc $\forall\varepsilon$, $\exists\eta'$: $|x - x_0| \leq \eta' \Rightarrow -f(x_0) - \varepsilon \leq -f(x) \leq -f(x_0) + \varepsilon$. Maintenant $|f(x)| = \sup\{f(x), f(-x)\}$. Si en x_0 $|f(x_0) = f(x_0)|$ il en sera de même de $|f(x)|$ et on utilisera le premier critère, sinon le second.

Exercice 72 Valeurs d'adhérence. Soit (u_n) une suite de réels, on dit que le réel λ est une valeur d'adhérence de la suite s'il existe une suite extraite de la suite (u_n) qui converge vers λ.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:
a) λ est une valeur d'adhérence de la suite.
b) Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid |u_n - \lambda| \leq \varepsilon\}$ est infini.
c) Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq n$ et $|u_p - \lambda| \leq \varepsilon$.

[Ind] pruve $a \Rightarrow b \Rightarrow c \Rightarrow a$.

[Dem] Si on a a) alors il existe une sous-suite $(x_{n_i})_i$ convergeant vers λ donc $\forall\varepsilon$, $\exists p_0$: $\forall p \quad p \geq p_0 \Rightarrow \left|u_{n_p} - \lambda\right| \varepsilon$ donc l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid |u_n - \lambda| \leq \varepsilon\}$ est infini d'où b). C'est ensemble étant infini $\forall\varepsilon$ $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists p \geq n$: $|u_p - \lambda| \leq \varepsilon$ d'où c). Maintenant supposant c) on peut construire une sous-suite convergeant vers λ en appliquant c) avec $\varepsilon = \frac{1}{n}$.

Exercice 73 Montrer qu'une suite bornée de réels possède au moins une valeur d'adhérence et qu'elle est convergente si et seulement si elle n'en possède qu'une seule.

[Ind] La première partie c'est Bolzano-Weierstrass. Pour la partie directe la limite est unique. Pour la réciproque prendre la contraposée en utilisant la divergence construire au moins deux valeurs d'adhérence distinctes.

[Dem] De toute suite bornée $(x_n$ on peut extraire une sous-suite convergente vers λ, λ est valeur d'adhérence. Si elle est convergente alors toute suite extraite converge vers la même limite donc il n'y a qu'une seule vakeur d'adhérence. Pour la réciproque par contraposée si elle diverge, possédant déjà une valeur d'adhérence λ nous allons en construre une deuxième différente. On a pour λ $\exists\varepsilon$ $\forall n_0$: $n \geq n_0$ et $|u_n - \lambda| > \varepsilon$. Ceci nous permet de construire une sous-suite de (x_n) vérifiant $|u_{n_i} - \lambda| > \varepsilon$. Cette sous-suite étant également bornée possède une valeur d'adhérence μ vérifiant $|\lambda - \mu| > \varepsilon$.

Exercice 74 Soit f une fonction continue sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x+1) - f(x)$ à une limite ℓ quand x tend vers $+\infty$. Étudier la limite de $f(x)/x$ quand x tend vers $+\infty$.

[Ind] Se ramener à $\ell = 0$.Écrire l'hypothèse, faire intervenir la partie entière de x.

[Dem] On se ramène à $\ell = 0$ en posant $h(x) = f(x) - \ell x$. Ainsi :
$\exists n_0$: $\forall x > n_0 \quad |f(x+1) - f(x)| < \varepsilon$ ou
$\forall x > n_0 \quad |f(x) - f(n_0 + x - [x])| < [x]\varepsilon$ en effet d'une part $|f(x+p) - f(x)| < p\varepsilon$ et d'autre part on a $x = n_0 + [x] - n_0 + x - [x]$ avec $[x] - n_0 \in \mathbb{N}$.
Soit $M(\varepsilon) = \sup\limits_{u \in [n_0, n+1]} |f(u)|$ on a

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| - \left|\frac{f(n_0 + x - [x])}{x}\right| \leq \frac{[x]}{x}\varepsilon \text{ et}$$

$$\frac{f(x)}{x} \leq \frac{M(\varepsilon)}{x} + \varepsilon < 2\varepsilon \text{ si } x > \frac{M(\varepsilon)}{\varepsilon} \text{ donc } \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Exercice 75 Soit f une fonction numérique croissante sur $]0, +\infty[$ telle que la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = f(x)/x$ est décroissante. Montrer que g est continue. f l'est-elle également ?

[Ind] Avec les hypothèses majorer $g(x) - g(y)$. Écrire f en fonction de g.

[Dem] Nous allons montrer que g est continue en $x \in]0, +\infty[$. Supposons $x < y$ on a
$0 < g(x) - g(y) = \frac{f(x)}{x} - \frac{f(y)}{y} = \frac{yf(x) - xf(y)}{xy} \leq \frac{f(y)}{x} - \frac{f(y)}{y} = f(y)(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$. Puisqu'il s'agit de prendre

la limite quand y tend vers x on peut supposer $0 < y \leq A$. Mais la fonction $x \to \frac{1}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc :
$\forall \varepsilon \ \exists \eta \ \forall y : \ |y - x| \leq \eta \Rightarrow \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right| \leq \frac{\varepsilon}{A}$. Ce qui donne
$\forall \varepsilon \ \exists \eta \ \forall y : \ |y - x| \leq \eta \Rightarrow |g(x - g(y))| \leq \varepsilon$. Et g est continue à droite en x, on adapte la démonstration à gauche de x.
g étant continue il en est de même de f car $f(x) = xg(x)$ et f est le produit de fonctions continues.

Exercice 76 Soit f et g deux fonctions continues périodiques de période T et T' respectivement. Montrer que si T/T' est rationnel alors $f + g$ est périodique. Montrer que si T/T' n'est pas rationnel, alors $f + g$ est apériodique.

[Ind] Dans le second cas, on raisonnera par l'absurde et on montrera que si S est une période de $f + g$ alors les fonctions $x \to f(x + S) - f(x)$ et $x \to g(x) - g(x + S)$ sont constantes.

[Dem] Si $\frac{T}{T'}$ est rationnel alors $T\mathbb{Z} + T'\mathbb{Z} = T''\mathbb{Z}$ et alors T'' est une période de f et de g donc de $f + g$. ou plus simplement il existe p, q entiers telq que $pT = qT'$.
Si $\frac{T}{T'}$ n'est pas rationnel alors $T\mathbb{Z} + T'\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Montrons maintenant que si $f + g$ est périodique, alors elle est constante. Si S est une période de $f + g$ on a $u(x) = f(x + S) - f(x) = g(x) - g(x + S)$. u a donc comme période T comme somme de $x \mapsto f(x + S)$ et de $-f$ et aussi T'. Mais comme $\frac{T}{T'}$ n'est pas rationnel on a vu que u doit être constante.
On a donc $f(x + S) - f(x) = u(0) = f(S) - f(0)$ ou $f(x + S) = f(x) + f(S) - f(0)$ ce qui donne par récurrence $f(nS) = n(f(S) - f(0)) + f(0)$. Mais comme f est continue et périodique elle est bornée sur $\mathbb{R}$. Ceci implique que $f(S) = f(0)$ et S est une période de f qui en a donc 2 dans un rapport irrationnel ce qui est impossible.

Exercice 77 Soit $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $f \ : \ I \to I$ une fonction croissante. Montrer qu'il existe au moins un point x de l'intervalle I tel que $f(x) = x$.

[Ind] Étudier la fonction $\varphi(x) = f(x) - x$.

[Dem] En condidèrant la fonction $\varphi(x) = f(x) - x$, puisque f va de I dans I on a $\varphi(a) \geq 0$ et $\varphi(b) \leq 0$. Cette fonction étant continue elle s'annule d'où l'existence d'au moins un x tel que $f(x) = x$. La courbe traverse la bissectrice.

Exercice 78 [calculer les limites suivantes]
$\lim\limits_{0}(\cos x)^{\cot an 2x}$; $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{2x-\pi}}$; $\lim\limits_{0} |\sin x|^{\tan x}$. $\lim\limits_{\infty} (x+1)exp(\frac{1}{x+1}) - xexp(\frac{1}{x})$; $\lim\limits_{+\infty} x \left(\frac{1}{e} - \left(\frac{x}{x+1}\right)^x\right)$; $\lim\limits_{0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos 2x}}{\sin^2 x}$ $\lim\limits_{0} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{(x - \sin x)}}$; $\lim\limits_{0}(\sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}}$;$\lim\limits_{a} \frac{x^a - a^x}{x^x - a^a}$.

[Dem] $\lim\limits_{0}(\cos x)^{\cot an 2x} = \lim\limits_{0} e^{co \tan 2x \ln \cos x} = \lim\limits_{0} e^{\frac{1}{\tan 2x} \ln\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)} = \lim\limits_{0} e^{\frac{1}{2x}\left(-\frac{x^2}{2}\right)} = 1$

$$\lim_{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{2x-\pi}} = \lim_{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{1}{2x-\pi} \ln \sin x} = \lim_{0} e^{\frac{1}{2t} \ln \cos t} = \lim_{0} e^{\frac{1}{2t} \ln\left(1 - \frac{t^2}{2}\right)} = 1$$

$$\lim_{0} |\sin x|^{\tan x} = \lim_{0} e^{\tan x \ln |\sin x|} = \lim_{0} e^{x \ln x} = 1$$

$$\lim_{\infty} (x + 1)exp(\tfrac{1}{x+1}) - xexp(\tfrac{1}{x}) = \lim_{\infty} (x + 1)exp(\tfrac{1}{x+1}) \left(1 - \frac{x}{x + 1} exp(\tfrac{1}{x(x+1)})\right)$$

$$= \lim_{\infty} (x + 1) \left(exp(\tfrac{1}{x+1})\right) \left(1 - \left(1 - \frac{1}{x + 1}\right)\left(1 + \frac{1}{x\,(x + 1)}\right)\right) = 1$$

$$\lim_{+\infty} x \left(\tfrac{1}{e} - \left(\tfrac{x}{x+1}\right)^x\right) = \lim_{+\infty} x \left(\tfrac{1}{e} - e^{x \ln \frac{x}{x+1}}\right) = \lim_{+\infty} x \left(\tfrac{1}{e} - e^{x \ln\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)}\right) = \lim_{+\infty} x \left(\tfrac{1}{e} - e^{-\frac{x}{x+1}}\right) = \lim_{+\infty} x \left(\tfrac{1}{e} - e^{-1 + \frac{1}{x+1}}\right)$$

$$= \lim_{+\infty} x \left(\tfrac{1}{e} - \tfrac{1}{e} e^{\frac{1}{x+1}}\right) = \lim_{+\infty} x \left(\tfrac{1}{e} - \tfrac{1}{e}\left(1 + \tfrac{1}{x+1}\right)\right) = \tfrac{1}{e}$$

$$\lim_{0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos 2x}}{\sin^2 x} = \lim_{0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} - \left(1 - 2x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{x^2} = \lim_{0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} - 1 + x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{0} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\dfrac{\sin x}{(x - \sin x)}} = \lim_{0} e^{\dfrac{\sin x}{x - \sin x} \ln \dfrac{x}{\sin x}} = \lim_{0} e^{\dfrac{\sin x}{x - \sin x}\left(\dfrac{x}{\sin x} - 1\right)} = e$$

$$\lim_{0}(\sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{0} e^{\frac{1}{x} \ln(\sin x + \cos x)} = \lim_{0} e^{\frac{1}{x}(\sin x + \cos x - 1)} = \lim_{0} e^{\frac{1}{x} x} = e$$

$\lim_a \dfrac{x^a - a^x}{x^x - a^a}$: $x^a - a^x = ((1+t)a)^a - a^{(1+t)a} = a^a\left((1+t)^a - a^{ta}\right) = a^a\left(a(1-\ln a)t + o(t)\right)$ avec $x = (1+t)a$

et $x^x = ((1+t)a)^{(1+t)a} = a^a a^{at}(1+t)^{(1+t)a} = a^a\left(1 + (a\ln a)t + o(t)\right)\left(e^{(1+t)a\ln(1+t)}\right)$

$= a^a\left(1+(a\ln a)t + o(t)\right)\left(e^{at+o(t)}\right) = a^a\left(1 + (a + a\ln a)t + o(t)\right)$ et donc $x^x - a^a = a^a\left(a(1+\ln a)t + o(t)\right)$

et $\dfrac{x^x - a^x}{x^x - a^a} = \dfrac{(1-\ln a)t + o(t)}{(1+\ln a)t + o(t)}$. Si $\ln a \neq \pm 1; a \neq e$ et $\frac{1}{e}$ on a $\lim_a \dfrac{x^a - a^x}{x^x - a^a} = \dfrac{1-\ln a}{1+\ln a}$. Pour les cas particuliers on a si $a = e$: $\lim_a \dfrac{x^a - a^x}{x^x - a^a} = 0$ et si $a = \frac{1}{e}$ alors $\lim_a \dfrac{x^a - a^x}{x^x - a^a} = +\infty$ car $\dfrac{x^a - a^x}{x^x - a^a} \sim \dfrac{a^a 2at}{a^a \frac{a}{2} t^2} \sim \frac{4}{t}$.

Exercice 79 $\Diamond$DL3(-1) de $\dfrac{x+1}{x^2+3x+3}$; DL6(0) de $\cos^n x$; Donner des équivalents simples de $y_1, y_2, y_3, y_1 - y_2, y_1 - y_3$ en $+\infty$ avec $y_1 = \sqrt[3]{x^3 + x + 1}; y_2 = \sqrt{x+1}; y_3 = \sqrt{x^2+1}$.
$\Diamond$DL2(0) de $\sqrt{1 + \sqrt{1+x}}$; DL3(0) de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$; DL5(0) de $e^x - \sqrt{1+2x}$; DL3($+\infty$) de $\arctan\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$; DL2($\frac{\pi}{4}$)de $(1+\tan x)^{\frac{1}{3}}$; DL($+\infty$) de $\frac{x^3+2}{x-2}$à la précision $(\frac{1}{x})^2$. ; D.L. d'ordre 4 de $\frac{\ln x}{x^2}$ en 1 .
$\Diamond$DL4$\left(\frac{\pi}{4}\right)$ de $(\tan x)^{\tan 2x}$.

[Dem] Posons $x + 1 = t$ on a $\dfrac{x+1}{x^2+3x+3} = \dfrac{t}{(t-1)^2 + 3(t-1) + 3} = \dfrac{t}{t^2 - 2t + 1 + 3t - 3 + 3} = \dfrac{t}{t^2+t+1}$
$= t\left(1 - t + o\left(t^2\right)\right) = t - t^2 + o\left(t^3\right)$.

$\cos^n x$.

$y_1 \sim \sqrt{x}; y_2 \sim \sqrt{x}; y_3 \sim x$ et $y_1 - y_2 \sim \sqrt{x}; y_1 - y_3 = \sqrt[3]{1 + x + x^3} - \sqrt{1+x^2} \sim \frac{1}{3}x$.

$\sqrt{1 + \sqrt{1+x}} = \left(1 + (1+x)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o\left(x^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}x^2 + o\left(x^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}$
$= \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}x^2 - \frac{1}{32}x^2 + o\left(x^2\right)\right) = \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{8}x - \frac{5}{128}x^2 + o\left(x^2\right)\right)$.

$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e^{\frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o\left(x^4\right)\right)} = e^{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \left(x^3\right)} = e\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{48}x^3 + o\left(x^3\right)\right)$
$= e\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + o\left(x^3\right)\right)$.

$e^x - \sqrt{1+2x} = x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{13}{15}x^5 + o\left(x^5\right)$.

$\arctan\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} =$.

$(1+\tan x)^{\frac{1}{3}}$ en posant $u = x - \frac{\pi}{4}$ on obtient $(1+\tan x)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(1 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 + o\left(x^3\right)\right)$.

$\dfrac{x^3+2}{x-2} = \left(x^3+2\right)\frac{1}{x}\left(1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{8}{x^3} + \dfrac{16}{x^4} + o\left(\dfrac{1}{x^4}\right)\right) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{x^2} + x^2 + 2x + 4 + \dfrac{8}{x} + \dfrac{16}{x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$
$= x^2 + 2x + 4 + \dfrac{10}{x} + \dfrac{20}{x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

$\dfrac{\ln x}{x^2} =$.

$f(x) = (\tan x)^{\tan 2x}$ définie une fonction f sur $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $f\left(\dfrac{\pi}{4} + h\right) = \left(\dfrac{1+\tanh}{1-\tanh}\right)^{-\dfrac{1}{\tan 2h}} = g(h)$. On a $\ln g(h) = -\dfrac{1}{\tan 2h}\ln\dfrac{1+\tanh}{1-\tanh}$ qui admet un D.L. en O. On a $\ln\dfrac{1+\tanh}{1-\tanh} \sim 2h$ et $\left(\ln\dfrac{1+\tanh}{1-\tanh}\right)' = \dfrac{2}{\cos 2h} = \dfrac{2}{1 - 2h^2 + \frac{2}{3}h^4 + o\left(h^4\right)} = 2\left(1 + 2h^2 + \frac{10}{3}h^4 + o\left(h^4\right)\right)$ d'où $\ln\dfrac{1+\tanh}{1-\tanh} = 2\left(h + \frac{2}{3}h^3 + \frac{2}{3}h^5 + o\left(h^5\right)\right)$ car en 0 nous avvons 0. Ce qui donne $-\ln g(h) = \dfrac{2\left(1 + \frac{2}{3}h^2 + \frac{2}{3}h^4 + o\left(h^4\right)\right)}{2 + \frac{8}{3}h^2 + \frac{64}{15}h^4 + o\left(h^4\right)} = 1 - \frac{2}{3}h^2 - \frac{26}{45}h^4 + o\left(h^4\right)$ et $g(h) = \frac{1}{e}\left(1 + \frac{2}{3}h^2 + \frac{4}{5}h^4 + o\left(h^4\right)\right)$.

$\diamondsuit$DL5(0) de f^{-1} où f est définie par : $\begin{cases} \dfrac{e^{x^2}-1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ pour cela il faudra montrer que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On a que f est impaire et $f(x) \sim x$ au voisinage de 0 et $f'(0) = 1$. Sur $\mathbb{R}^*$ on a $f'(x) = \dfrac{(2x^2-1)e^{x^2}+1}{x^2}$ et f' est du signe de $g : t \longmapsto (2t-1)e^t + 1$, sur $\mathbb{R}^+$ on a $g'(t) = (2t+1)e^t > 0$ sur $\mathbb{R}^+$ et $g(t) > g(0) = 0$ sur $\mathbb{R}^+$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel $f'(x) > 0$ ainsi f est un difféomorphisme. Le fait que f soit impaire et $f(x) \sim \dfrac{e^{x^2}}{x} \overset{+\infty}{\to} +\infty$. donne que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Faisons un dl de l'exp : $y = f(x) = x + \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^5}{6} + o(x^5)$. Or $y \sim x$ donc $x^3 = y^3 + o(y^3)$ ce qui donne $x = y - \dfrac{y^3}{2} + o(y^3) = y\left(1 - \dfrac{y^2}{2} + (y^2)\right)$ et $x^3 = y^3\left(1 - \dfrac{y^2}{2} + o(y^2)\right)^3 = y^3\left(1 - \dfrac{3y^2}{2} + o(y^2)\right)$. On a $x^5 = y^5 + o(y^5)$ et en reportant $x = y - \dfrac{y^3}{2}\left(1 - \dfrac{3y^2}{2}\right) - \dfrac{y^5}{6} + o(y^5) = y - \dfrac{y^3}{2} + \dfrac{7y^5}{12} + o(y^5)$ et $f^{-1}(y) = y - \frac{1}{2}y^3 + \frac{7}{12}y^5 + o(y^5)$.

Exercice 80 [Etudier les fonctions suivantes:]
$f(t) = \frac{t\ln t}{t^2-1}$ et $g(t) = \frac{t^2-2t-1}{t}\exp(-\frac{1}{t})$ (On utilisera dans la mesure du possible les DL)

[Dem] $f'(t) = \dfrac{t^2+1}{(t^2-1)^2}\left(\dfrac{t^2-1}{t^2+1} - \ln t\right)$ et nous étudions le signe de $\left(\dfrac{t^2-1}{t^2+1} - \ln t\right)$ dont la dérivée est $\dfrac{4t^2 - t^4 - 2t^2 - 1}{t(t^2+1)^2} = -\dfrac{(t^2-1)^2}{t(t^2+1)^2}$ qui reste négatif sur $\mathbb{R}^{+*}$. Ainsi $\left(\dfrac{t^2-1}{t^2+1} - \ln t\right)$ est décroissante sur $]0,+\infty[$ de $+\infty$ à $-\infty$ et s'annulant en 1, et donc la dérivée de f est positive sur $]0,1[$ et positive sur $]1,+\infty[$ la fonction f est donc croissante sur $]0,1[$ de 0 à $\frac{1}{2} = \lim\limits_{1} f$ et décroissante sur $]1,+\infty[$ de $\frac{1}{2}$ à 0.
En 1 on a : en posant $u = t-1$: $f(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{u^2}{6} - \frac{1}{12}u^3 + o(u^3)\right)$. D'où la courbe.

$e^{\frac{1}{t}}g'(t) = \dfrac{t^3+t^2-t-1}{t^3} = \dfrac{(t-1)(t+1)^2}{t^3}$ et g est croissante sur $]-\infty,0[$ de 0 à $+\infty$ puis décroissante sur $]0,1[$ de 0 à $-\frac{2}{e}$ et croissante sur $]1,+\infty[$ de $-\frac{2}{e}$ à 0. D'où la courbe.

Exercice 81 Soit $f(x) = (chx)^{\frac{1}{x}}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Prolonger f par continuité en 0, étudier les variations de f et construire son graphe.

[Dem] $f(x) = e^{\dfrac{1}{x}\ln chx}$ en 0 on a $f(x) = e^{\dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)\right)} = e^{\dfrac{x}{2}+o(x^2)} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$ et en $+\infty$ on a $chx \sim \frac{1}{2}e^x$; $\ln chx \sim x$ et $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{x}\ln chx = 1$ soit $\lim\limits_{+\infty} f = e$. D'autre part pour tout x de $\mathbb{R}$ on a $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$ et $\lim\limits_{-\infty} f = \dfrac{1}{e}$. Pour les variations $f'(x) = f(x)\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\ln chx}{x}\right) = \dfrac{f(x)}{x^2}(xthx - \ln chx)$ si $g(x) = xthx - \ln chx$ alrs $g'(x) = \dfrac{x}{ch^2x}$. et g décroit en passant au minimum en 0 et est donc positive sur $\mathbb{R}$ et donc aussi f' et f est croissante de $\frac{1}{e}$ à e. En 0 on a un point d'inflexion.

Exercice 82 Etudier la fonction f définie par $f(x) = x|1 + \frac{1}{x}|^{x+1}$. On utilsera des D.L.

[Dem] f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1,0\}$.
En -1 : en posant $x = -1+t$ on a $\ln|f()| = t\ln|t| + (1-t)\ln|1-t| = t\ln|t| + o(t\ln|t|)$ et $|f(x)| = 1 + t\ln|t| + o(t\ln|t|)$ et come $f(x) < 0$ si $x < 0$ on a $f(x) = -1 - t\ln|t| + o(t\ln|t|)$, on prolongera donc en posant $f(-1) = -1$ et f n'est pas dérivable en -1 car $\dfrac{f(x)+1}{x+1} \sim -\ln(x+1)$.
En 0 on a $\ln|f(x)| = -x\ln|x| + (x+1)\ln(x+1) = -x\ln|x| + o(x\ln|x|)$ et $|f(x)| = 1 - x\ln|x| + o(x\ln|x|)$ ainsi si $x > 0$ on a $f(x) = 1 - x\ln x + o(x\ln x)$ et si $x < 0$ on a $f(x) = -1 + x\ln|x| + o(x\ln|x|)$ et $\lim\limits_{0^+} f = 1$ et $\lim\limits_{0^-} f = -1$ pour $x > 0$ on a $\dfrac{f(x)-1}{x} \sim -\ln x$ et si $x < 0$ alors $\dfrac{f(x)+1}{x} \sim \ln|x|$.

En $\pm\infty$ on a $\ln|f(x)| = \ln|x| + (x+1)\ln\left|x+\dfrac{1}{x}\right| = \ln|x| + (x+1)\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{3x^3} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)\right)$
$= \ln|x| + 1 + \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{6x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. Ainsi $f(x) = ex\left(1 + \dfrac{1}{2x} + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{6}\right)\dfrac{1}{x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right) = ex + \frac{1}{2}e -$ $\dfrac{1}{24x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ il y a une asymptote $y = ex + \frac{1}{2}e$ et la position est donnée $\left(f(x) - ex - \frac{e}{2}\right) \sim -\dfrac{e}{24x}$.
Pour les variations on a $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \ln|x+1| - \ln|x| = \ln\left|\dfrac{x+1}{x}\right| > 0$ si et seulement si $-\frac{1}{2} < x < 0$ donc f est croissante sur $]-\infty,-1[$ de $-\infty$ à-1 et croissante sur $\left]-1,-\frac{1}{2}\right[$ de -1 à $-\frac{1}{2}$ puis décroissante sur $\left]-\frac{1}{2},0\right[$ de $-\frac{1}{2}$ à -1 et croissante sur $]0,+\infty[$ de $+1$ à $+\infty$.

Exercice 83 [Dérivons]
A) Encadrement de la fonction $u \to \sqrt{1-u}$ sur $[0,1]$.
a) Soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par $g(u) = 1 - \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \sqrt{1-u}$, étudier les variations de g et en déduire un encadrement de $g(u)$ pour $u \in [0,1]$.
b) Soit h la fonction définie sur $[0,1]$ par $h(u) = 1 - \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 - \sqrt{1-u}$, démontrer que : $\forall u \in [0,1]$, $0 \leq \frac{1}{16}u^3 \leq h(u) \leq \frac{3}{8}u^3$.
c) Déduire de ce qui précède un encadrement de $\sqrt{1-u}$ sur $[0,1]$.
B) Soit t un réel, n un entier supérieur à 2 et la suite de fonctions polynômes $(A_n)_{n\geq 2}$ définie par :
$A_n(t) = nt^{n+1} - (n+2)t^n + nt + 2 - n$.
1) Vérifier que 1 est racine de A_n et donner son ordre de multiplicité.
2) Etudier les variations de A_n sur $\mathbb{R}$ en distinguant deux cas selon la parité de n.
3) Déterminer le nombre de racines réelles de A_n et leur ordre de multiplicité.