Chapitre 4

Espaces euclidiens et préhilbertiens

4.1 historique

L'espace euclidien tire son nom du mathématicien grec Euclide (-3$^{\text{ème}}$ siècle. Historiquement, l'espace euclidien est seulement l'espace physique de dimension 2 ou 3 (plan ou espace) dans lequel ont été définis les points, les droites, les distances et les angles. À ces objets ont été affectées des propriétés comme "Â par deux points distincts ne passe qu'une seule droiteÂ ", ou bien "Â la somme des angles d'un triangle vaut deux droitsÂ ".
Les transformations caractéristiques de ces espaces euclidiens sont les isométries: elles transforment des figures géométriques en d'autres figures géométriques de mÃªme dimension. Elles sont à l'origine par exemple des cas d'égalité des triangles. Les outils fondamentaux de travail dans l'espace euclidien sont la règle et le compas. Ces espaces euclidiens naturels sont les univers où sont démontrés tous les grands théorèmes de la géométrie plane ou de la géométrie dans l'espace. Ils sont les objets d'étude de tous les géomètres avant Euclide jusqu'aux mathématiciens du XIXe siècle. Hilbert (1862-1943) en travaillant sur la relativité donne une définition moderne d e la géométrie euclidienne avec les produits scalaires. C'est en travaillant sur les opérateurs différentiels que ces mathématiciens (Hilbert, Cauchy,...) mettent au point la notion d'applications linéaires, d'endomorphismes, d'isométries.

4.2 Espaces préhilbertiens

4.2.1 Produit scalaire

Définition 1 *Soit E un $\mathbb{R}$-ev. On appelle produit scalaire sur E une forme bilinéaire symétrique définie positive.*

Définition 2 *Soit E un $\mathbb{C}$ -ev. On appelle forme hermitienne sur E toute application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$ qui vérifie:*
1) Pour tout $x \in E$, l'application $y \to \varphi(x,y)$ est une forme linéaire sur E.
2) Pour tous $x, y \in E$, $\varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$.

La condition (2) s'appelle la symétrie hermitienne. On en déduit que, pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto \varphi(x,y)$ est semi-linéaire, c'est-à-dire:

$$\forall x, x' \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \varphi(x + \lambda x', y) = \varphi(x,y) + \overline{\lambda}\varphi(x', y).$$

Remarque: Si φ est une forme hermitienne définie sur E, pour tout $x \in E$, $\varphi(x,x) \in \mathbb{R}$.

Exercice 1 Trouver les formes hermitiennes sur $\mathbb{C}^n$.

[Ind] Par analyse et synthèse. Il s'agit de trouver une application de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant....(prendre une base).

[Dem] En appelant $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ la base cabonique de $\mathbb{C}^n$ on obtient $\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(e_i,e_j)\overline{x_i}y_j$. La forme hermitienne est de la forme $\sum_{i,j}\lambda_{ij}\overline{x_i}y_j$, avec les λ_{ij} des complexes vérifiant $\lambda_{ji} = \overline{\lambda_{ij}}$, réciproquement une telle expression définie bien une forme hermitienne. On peut aussi noter cela matriciellement.

Définition 3 *On dit qu'une forme hermitienne φ définie sur E est positive si $\varphi(x,x) \geq 0$ pour tout $x \in E$; on dit qu'elle est définie positive si de plus $\varphi(x,x) > 0$ pour tout $x \neq 0$. Dans ce cas, φ est aussi appelé produit scalaire sur E*

Proposition 1 *Soit a, b des réels et $E = C^0_{pm}([a,b],\mathbb{C})$. L'application de $E\times E$ dans $\mathbb{C}$ qui, à $f, g \in E$ associe $\int_a^b \overline{f}g$ est une forme hermitienne positive sur E.*

[Ind] Le vérifier.

[Dem] Pour tout $f \in E$ l'application $g \longmapsto \int_a^b \overline{f}g$ est linéaire de E dans $\mathbb{C}$. On a bien la symétrie hermitienne car $\overline{\int_a^b \overline{f}g} = \int_a^b f\overline{g}$. Enfin $\int_a^b \overline{f}f = \int_a^b |f|^2 \geq 0$.

Proposition 2 **Inégalité de Cauchy-Schwarz.** *Soit φ une forme bilinéaire symétrique positive (resp une forme hermitienne positive) définie sur E espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (resp $\mathbb{C}$).*
1) Pour tous $x, y \in E$, on a

$$|\varphi(x,y)|^2 \leq \varphi(x,x)\varphi(y,y)$$

Si φ est définie positive, l'égalité n'a lieu que si et seulement si x et y sont liés.

[Ind] Se ramener au cas réel et étudier un polynÃ´me du second degré qi ne change pas de signe.

[Dem] Pour tous $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a $\varphi(x+\lambda y, x+\lambda y \geq 0$ en développant on obtient $\varphi(y,y)|\lambda|^2 + 2Re(\lambda\varphi(x,y)) + \varphi(x,x)$. Posons $\varphi(x,y) = \rho e^{i\alpha}$ et $\lambda = re^{-i\alpha}$ on a alors pour tout $r \in \mathbb{R}$: $\varphi(y,y)r^2 + 2\rho r + \varphi(x,x) \geq 0$. Ou bien $\varphi(y,y) = 0$ ou $y = 0$ et alors l'inégalité est vraie ou bien ce trinÃ´me en r garde un signe constant il n'a donc pas de racine réelle c'est à dire que son discriminant est négatif. $\rho^2 - \varphi(x,x)\varphi(y,y) \leq 0$. Or $\rho = |\varphi(x,y)|$ ce qui donne l'inégalité de Cauchy-Schwarz :$|\varphi(x,y)|^2 \leq \varphi(x,x)\varphi(y,y)$. Le cas d'égalité signifie que ou bien $y = 0$ et alors (x,y) est lié ou bien le discriminant est nul donc il existe une valeur réelle de ρ donc de λ tel que $\varphi(x+\lambda y, x+\lambda y) = 0$. Ceci fournit une valeur de λ telle que $x + \lambda y = 0$, x, y sont donc liés. Réciproquement si x, y sont liés on a l'égalité.

Exercice 2 Si f et g sont des fonctions réelles continues par morceaux définies sur l'intervalle $[a,b]$ $(a < b)$:

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \int_a^b f^2(t)dt \int_a^b g^2(t)dt.$$

Que peut-on dire dans le cas d'égalité ?

[Ind] Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec un produit scalaire bien choisi.

[Dem] Dans l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$, la forme de la proposition 1 est hermitienne positive et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \int_a^b f^2(t)dt \int_a^b g^2(t)dt$. Pour le cas d'égalité il faut se placer dans l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$ pour avoir un vrai produit scalaire. Il y aura égalité si et seulement si f et g sont colinéaires. Dans le cas où elles sont simplement continues par morceaux seule la réciproque est vraie.

Proposition 3 *Soit φ un produit scalaire sur E. L'application de E dans $\mathbb{R}_+$ qui, à $x \in E$ associe $\sqrt{\varphi(x,x)}$ est une norme sur E.*

[Ind] Vérifier les trois propriérés des normes.

[Dem] - Si $\sqrt{\varphi(x,x)} = 0$ alors $\varphi(x,x) = 0$ et d'après la propriété du produit scalaire on a : $x = 0$. - Ona pour tout scalaire et tous vecteurs $\sqrt{\varphi(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{|\lambda|^2 \varphi(x,x)} = |\lambda| \sqrt{\varphi(x,x)}$. - Pour l'inégalité triangulaire il faut vérifier que $\sqrt{\varphi(x+y,x+y)} \leq \sqrt{\varphi(x,x)} + \sqrt{\varphi(y,y)}$ c'est à dire en élevant au carré, en développant et en simplifiant $Re(\varphi(x,y)) \leq \varphi(x,x) + \varphi(y,y)$ qui est vraie car c'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz en remarquant que $Re(\varphi(x,y)) \leq |Re(\varphi(x,y))| \leq |\varphi(x,y)|$.

Définition 4 *On appelle espace préhilbertien un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (resp sur $\mathbb{C}$) muni d'un produit scalaire et de sa norme associée.*
Si E est de dimension finie, l'espace préhilbertien est appelé espace euclidien (resp hermitien).

Dans ce qui suit, E désigne un espace préhilbertien, $(\cdot,\cdot)$ son produit scalaire et $||\cdot||$ sa norme.

Proposition 4

$$\forall x, y \in E \quad ||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2\Re(x,y)$$

[Ind] Utiliser la définition de la norme et la bilinéarité du produit scalaire.

[Dem] Par définition $||(x+y)||^2 = (x+y,x+y) = (x,x)+(y,y)+(x,y)+\overline{(x,y)} = ||x||^2+||y||^2+2\Re(x,y)$.

Proposition 5 Identité du parallélogramme.

$$\forall x, y \in E \quad ||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$$

[Ind] Calculer et dessiner.

[Dem] On a $||x+y||^2 = ||x||^2+||y||^2+2\Re(x,y)$ et $||x-y||^2 = ||x||^2+||y||^2+2\Re(x,y)$ et $||x+y||^2+||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$. Dans le cas réel un dessin explique l'appellation de l'identité.

Exercice 3 Montrer que la sphère unité d'un espace préhilbertien, c'est à dire l'ensemble des points de norme 1, ne contient pas de segment non réduit à un point.

[Ind] Présenter un point d'un segment comme barycentre des extrémités et comparer sa norme avec 1.

[Dem] Un point z du segment $[x,y]$ peut s'écrire $z = tx+(1-t)y$ avec $t \in [0,1]$. On a $||tx+(1-t)y||^2 = ||tx||^2+||(1-t)y||^2+2\langle tx,(1-t)y\rangle = t^2+(1-t)^2+2t'1-t)\langle x,y\rangle = 1-2t(1-t)(1-\langle x,y\rangle)$. Si cette dernière expression vaut 1 on en déduit que ou bien $t = 0$ ou bien $t = 1$, ou bien $\langle x,y\rangle = 1 = ||x||||y|| \cos(x,y) = \cos(x,y)$. Soit $z = y$ ou $z = x$ ou (x,y) lié. Dans tous les cas on n'a plus de segment.

Proposition 6 *Soient x et y des éléments d'un espace préhilbertien* **réel** *E.*

$$\begin{aligned}(x,y) &= \frac{1}{2}\left(||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y^2||\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(||x+y||^2 - ||x-y||^2\right)\end{aligned}$$

[Ind] L'espace étant réel les formules précèdentes se simplifient.

[Dem] On a $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2(x,y)$ et donc $(x,y) = \frac{1}{2}\left(||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y^2||\right)$ et d'autre part $||x+y||^2 = ||x||^2+||y||^2+2(x,y)$ et $||x-y||^2 = ||x||^2+||y||^2+2(x,y)$ et $||x+y||^2-||x-y||^2 = 4(x,y)$.

Exercice 4 Trouver une formule analogue pour un espace préhilbertien complexe, donnant le produit scalaire en fonction de la norme.

[Ind] Penser à i.

[Dem] On trouve $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2\Re(x,y)$ et
$||x+iy||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 - 2\,\mathrm{Im}(x,y)$ d'où
$(x,y) = \frac{1}{2}\left(||x+y||^2 - i||x+iy||^2\right)$.

Définition 5 Angle de deux vecteurs. *Soit x et y deux vecteurs non nuls de E espace préhilbertien réel, on appelle angle de x et y l'unique réel $\theta \in [0,\pi]$ qui vérifie*

$$(x,y) = ||x||.||y|| \cos\theta$$

4.2.2 Orthogonalité

Définition 6 *On dit que deux vecteurs x et y sont orthogonaux si $(x,y) = 0$.*
Deux parties A et B de E sont dites orthogonales si tout élément de A est orthogonal à tout élément de B et on note alors $A \perp B$.

Proposition 7 Théorème de Pythagore.

$$\forall x,y \in E \quad x \text{ et } y \text{ sont orthogonaux} \implies ||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$$

La réciproque est vraie si E est préhilbertien réel.

[Ind] Utiliser la formule donnant la norme d'une somme.

[Dem] On a $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2\Re(x,y)$ d'où l'égalité de Pythagore si et seulement si $\Re(x,y) = 0$.

Définition 7 Orthogonal d'une partie. *Soit A une partie de E. On appelle orthogonal de A l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les éléments de A, on le note $A^\perp$ ou A°.*

Proposition 8 *Soit A une partie de E, A° est un sous-espace vectoriel de E et si A est non vide*

$$A^\circ = \bigcap_{x\in A} \{x\}^\circ$$

[Ind] Vérifier le critère des sous espaces vectoriels et bien comprendre la définition de l'orthogonal.

[Dem] Si A est vide alors $\{A\}^\circ = E$, on peut donc supposer A non vide. A° est l'ensemble des vecteurs y orthogonaux à tous les vecteurs x de A c'est donc l'intersection des $\{x\}^\circ$ pour $x \in A$. Il nous reste plus qu'à montrer que $\{x\}^\circ$ est un sous espace vectoriel. Soit un scalaire λ et des vecteurs y, z de $\{x\}^\circ$. On a $(y + \lambda z) = (y,x) + \overline{\lambda}(z,x) = 0$ donc $y + \lambda z \in \{x\}^\circ$. Nous avons bien ainsi que l'orthogonale d'une partie quelconque est un espace vectoriel.

Proposition 9 *Soient A, B des parties de E et F, G des s.e.v. de E.*
1) $A \subset B \implies B^\circ \subset A^\circ$.
2) $[A]^\circ = A^\circ$.
3) $(F+G)^\circ = F^\circ \cap G^\circ$.
4) $F^\circ + G^\circ \subset (F \cap G)^\circ$.

[Ind] Pour démontrer une égalité d'ensemble on montre une double inclusion.

[Dem]
1) Si y est dans B° alors $\forall z \in B$ on a $(y,z) = 0$ donc $\forall z \in A$ on a $(y,z) = 0$ donc $y \in A$.
2) On a $A \subset [A]$ donc $[A]^\circ \subset A^\circ$ ensuite si y est dans A° alors y est orthogonal à tout vecteur de A et y est orthogonal à toute combinaison linéaire de vecteur de A car le produit scalaire est linéaire donc y est dans $[A]^\circ$.

3) Si y est orthogonal à tout vecteur de $F+G$ il est alors en outre orthogonal à tout vecteur de F et à tout vecteur de G ainsi $(F+G)^\circ \subset F^\circ \cap G^\circ$. Récipproquement si y est dans $F^\circ \cap G^\circ$ alors y est orthogonal à tout vecteur de F et à tout vecteur de G il est donc orthogonal à tout vecteur $z+t$ de $F+G$ donc $(F+G)^\circ \supset F^\circ \cap G^\circ$.
4) Soit y dans $F^\circ + G^\circ$ on peut écrire $y = z+t$ avec $z \in F^\circ$ et $t \in G^\circ$. Si $u \in F \cap G$ le produit scalaire $(y,u) = (z,u) + (t,u) = 0 + 0 = 0$ et donc $y \in F \cap G^\circ$.

Proposition 10 *Soient $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E qui vérifie: F_i et F_j sont orthogonaux pour tous i et j distincts de I. La somme de cette famille est alors directe: $\bigoplus_{i\in I} F_i$ et appelée somme directe orthogonale de la famille.*

[Ind] Comment démontre-t-on qu'une somme est directe ?

[Dem] Prenons $\sum_{i\in I} x_i = 0$ avec pour chaque i : $x_i \in E_i$. Supposons qu'il existe i_0 : $x_{i_0} \neq 0$. Gràce à l'hypothèse d'orthogonalité en effectuant $(\sum_{i\in I} x_i, x_{i_0}) = (x_{i_0}, x_{i_0}) = 0$ ce qui donne $x_{i_0} = 0$ d'où une contradiction et par suite le vecteur nul a une écriture unique et la somme est directe.

Proposition 11 Hyperplan défini par un vecteur normal. *Soit x un vecteur non nul de E, le sous-espace $\{x\}^\circ$ est un hyperplan supplémentaire de $[x]$ et x est appelé vecteur normal à H.*

[Ind] Revoir la définition d'un hyperplan.

[Dem] L'espace vectoriel $\{x\}^\circ$ est le noyau de la forme linéaire sur E définie par $y \longmapsto (x,y)$, c'est donc un hyperplan. D'autre part $[x] \cap \{x\}^\circ = \{0\}$ car x est non nul.

Proposition 12 Hyperplan médiateur. *Soient x et y deux vecteurs distincts de E de normes égales. L'orthogonal de $x-y$ est un hyperplan H, supplémentaire orthogonal de la droite $[x-y]$, appelé hyperplan médiateur de x et y et qui vérifie*

$$\forall z \in H \quad ||x-z|| = ||y-z||$$

[Ind] Evaluer les normes.

[Dem] Il n'y a qu'à montrer l'égalité : $\forall z \in H$: $||x||^2 = ||y||^2$ d'où $||x-z+z||^2 = ||y-z+z||^2$ ou $||x-z||^2 + ||z||^2 + 2\langle x-z, z\rangle = ||y-z||^2 + ||z||^2 + 2\langle y-z, z\rangle$ soit $||x-z||^2 + 2\langle x-z-y+z, z\rangle = ||y-z||^2$ et $||x-z|| = ||y-z||$ car $(z, x-y) = 0$.

4.2.3 Familles orthogonales

Définition 8 *Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On dit que la famille est orthogonale si*

$$\forall i,j \in I \quad i \neq j \implies (x_i, x_j) = 0$$

et qu'elle est orthonormale si

$$\forall i,j \in I \quad (x_i, x_j) = \delta_{ij}$$

Proposition 13 *Une famille orthogonale constituée de vecteurs non nuls est libre.*

[Ind] Prendre une combinaison linéaire nulle et utiliser le produit scalaire.

[Dem] Soit $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0$ alors pour tout i_0 : on a : $(\sum_{i\in I} \lambda_i x_i, x_{i_0}) = \lambda_{i_0}(x_{i_0}, x_{i_0}) = 0$ et $\lambda_{i_0} = 0$.

Théorème 1 Méthode d'orthogonalisation de Schmidt. *Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une famille libre finie de E. Il existe une famille orthonormale $\{f_1, \dots, f_n\}$ vérifiant la propriété*

$$\forall p \in [1, n] \quad [e_1, \dots, e_p] = [f_1, \dots, f_p]$$

[Ind] Construire par récurrence la famille orthonormale.

[Dem] On pose $f_1 = \dfrac{e_1}{||e_1||}$. Supposons avoir construit $f_1, \dots, f_p$ on cherche $f_{p+1} = \lambda e_{p+1} + \mu_1 f_1 + \dots + \mu_p f_p$. On doit avoir $\forall i \in [1 \dots p]$: $f_i \cdot f_{p+1} = 0$ ce qui donne : $\lambda f_i \cdot e_{p+1} + \mu_i f_i \cdot f_i = 0$ puis $\mu_i = -\lambda f_i \cdot e_{p+1}$. Nous pouvons alors écrire $f_{p+1} = \lambda \left(e_{p+1} - \sum_{i=1}^{p} f_i \cdot e_{p+1} f_i \right)$. Il nous reste à imposer $||f_{p+1}|| = 1$ ce qui donne $|\lambda| \left(e_{p+1} - \sum_{i=1}^{p} f_i \cdot e_{p+1} f_i, f_{p+1} \right) = |\lambda| \, (e_{p+1}, f_{p+1}) = 1$. En posant $w_{p+1} = \left(e_{p+1} - \sum_{i=1}^{p} f_i \cdot e_{p+1} f_i \right)$ on voit que $(e_{p+1}, f_{p+1}) = ||w_{p+1}|| \geq 0$
Si $(e_{p+1}, f_{p+1}) = ||w_{p+1}|| = 0$ alors e_{p+1} serait dans $F_p = [f_1; \cdots, f_p] = [e_1, \cdots, e_p]$ et donc $(e_1, \dots, e_{p+1})$ serait liée ce qui n'est pas. On peut donc calculer $\lambda = \dfrac{1}{(e_{p+1}, f_{p+1})}$. Il n'y a plus qu'à diviser ce vecteur par sa norme pour trouver un vecteur normé. Enfin f_{p+1} convient bien.

4.2.4 Projection orthogonale

Théorème 2 Projection orthogonale sur un s.e.v. de dimension finie *Soit F un s.e.v.de dimension finie de E. Pour tout vecteur x de E, il existe un unique élément y de F qui vérifie*

$$||x - y|| = d(x, F) = \inf_{z \in F} ||x - z||$$

Le vecteur y est appelé projection de x sur F et l'application $\Pi_F^{\perp}$ qui à x associe y est un endomorphisme de E.
Si $(e_1, \dots, e_n)$ désigne une base orthogonale de F, on a

$$\forall x \in E \quad \Pi_F^{\perp}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(e_i, x)}{||e_i||^2} e_i$$

et

$$d(x, F)^2 = ||x||^2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{|(e_i, x)|^2}{||e_i||^2}$$

[Ind] Vérifier à partir de la forme de la projection.

[Dem] Posons $y = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{(e_i, x)}{||e_i||^2} e_i$. C'est bien un vecteur de F et il réalise le minimum de la distance car : si $z \in F$ on a $||x - z||^2 = ||x - y + y - z||^2 = ||x - y||^2 + ||y - z||^2 + 2(x - y, y - z) = ||x - y||^2 + ||y - z||^2$ car $x - y \in F^{\perp}$ puisque $(e_j, x - y) = \left(e_j, x - \sum_{i=1}^{n} \dfrac{(e_i, x)}{||e_i||^2} e_i \right) = (e_j, x) - \dfrac{(e_j, x)}{||e_j||^2} (e_j, e_j) = 0$. L'unicité se montre en prenant des éléments y, y' réalisant le minimum on a $||x - y|| \leq ||x - y'|| \leq ||x - y||$ et de plus : $||x - y||^2 = ||x - y'||^2 + ||y' - y||^2$ l'égalité des deux normes donne $y = y'$. Par définition l'application $x \longmapsto y$ est linéaire. Il reste Pythagore : comme $(x - y) \perp y$ on a $||x - y + y||^2 = ||x - y||^2 + ||y||^2$ ou $||x - y||^2 = ||x||^2 - ||y||^2$. De plus $||y||^2 = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{|(e_i, x)|^2}{||e_i||^2}$.

Proposition 14 *Â* **Inégalité de Bessel.** *Soit F un s.e.v.de dimension finie de E.*

$$\forall x \in E \quad ||x||^2 = ||\Pi_F^{\perp}(x)||^2 + d(x, F)^2$$

ainsi

$$\forall x \in E \quad ||\Pi_F^{\perp}(x)|| \leq ||x||$$

Le cas d'égalité signifiant que x appartient à F.

[Ind] C'est une reformulation.

[Dem] On a $||x||^2 = ||\Pi_F^{\perp}(x)||^2 + d(x, F)$ par pythagore et $\forall x$ on a $||\Pi_F^{\perp}(x)|| \leq ||x||$ avec égalité si $x \in F$.

Proposition 15 *Soit F un s.e.v. de dimension finie de E. Son orthogonal F° est un s.e.v. supplémentaire orthogonal de F.*

[Ind] Démontrer ce qu'il faut.

[Dem] Le sous espace F est de dimension finie. On sait que F° est un sous-espace et $F \cap F^{\circ} = \{0\}$ car si $x \in F$ et $x \in F^{\circ}$ alors $(x, x) = 0$ et $x = 0$. Enfin si $x \in E$ on a $x = \Pi_F^{\perp}(x) + \big(x - \Pi_F^{\perp}(x)\big)$ avec $\Pi_F^{\perp}(x) \in F$ et $\big(x - \Pi_F^{\perp}(x)\big) \in F^{\perp}$.

Proposition 16 *Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une famille libre finie de E. Il existe une unique famille orthonormale $\{f_1, \dots, f_n\}$ vérifiant les propriétés*

$$\begin{aligned} &\forall p \in [1, n] \quad [e_1, \dots, e_p] = [f_1, \dots, f_p] \\ &\forall p \in [1, n] \quad (e_p, f_p) > 0 \end{aligned}$$

Cette famille est définie par les expressions:

$$\forall p \in [1, n] \quad f_p = \frac{1}{||e_p - \Pi_{E_{p-1}}^{\perp}(e_p)||} \Big(e_p - \Pi_{E_{p-1}}^{\perp}(e_p)\Big)$$

en notant $E_0 = \{0\}$ et $E_k = [e_1, \dots, e_k]$ pour $k \in [1, n]$

[Ind] Il suffit de reprendre le procédé de Schmidt et de montrer l'unicité.

[Dem] En reprenant la démonstration on a $(e_1, f_1) = ||e_1|| > 0$ et c'est le seul choix. $f_{p+1} = \lambda \left(e_{p+1} - \sum_{i=1}^{p} (f_i, e_{p+1}) f_i \right) = \lambda w_{p+1}$, pour avoir $||f_{p+1}|| = 1$ on obtient $\lambda = \pm \frac{1}{||w_{p+1}||}$. Si on impose $(e_{p+1}, f_{p+1}) > 0$ on est obligé de prendre $\lambda = \frac{1}{||w_{p+1}||} > 0$, d'où l'unicité. Réciproquement $f_{p+1} = \frac{w_{p+1}}{||w_{p+1}||}$ convient car $1 = ||f_{p+1}||^2 = (f_{p+1}, f_{p+1}) = \lambda(w_{p+1}, f_{p+1}) = \lambda(e_{p+1}, f_{p+1}) > 0$ et comme $\lambda > 0$ on a bien $(e_{p+1}, f_{p+1}) > 0$.

4.3 Espaces euclidiens

4.3.1 Dualité dans un espace euclidien

Théorème 3 *Soit E un espace euclidien. L'application φ de E dans E^* qui, à $x \in E$, associe la forme linéaire $\varphi(x)$ définie sur E par $\varphi(x)(y) = (x, y)$ est un isomorphisme, appelé isomorphisme canonique entre E et son dual.*

[Ind] Utiliser les dimensions.

[Dem] φ est linéaire et injective car $(x, \bullet) = 0$ donne $\forall y \in E \; : \; (x, y) = 0$ en outre pour $x = y$ on obtient $x = 0$. Comme $\dim E = \dim E^*$ φ est bien un isomorphisme. Ainsi $\forall f \in E^* \; \exists ! x \; : \; f = (x, \bullet)$.

Exercice 5 Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base orthonormée de E. Montrer que la famille $\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\}$ est une base de E^*.

Montrer qu'il existe une unique base $\{f_1, \ldots, f_n\}$ de E^* vérifiant, pour tout $i, j \in [1, n]$, $f_i(e_j) = \delta_{ij}$.

[Ind] L'image d'une base par un isomorphisme est...En prendre deux...

[Dem] L'image d'une base par un isomorphisme est une base.Posons $f_i = \varphi(e_i)$ on a $f_i(e_j) = \varphi(e_i)(e_j) = (e_i, e_j) = \delta_{ij}$. Pour l'unicité si x_j est une autre base vérifiant les conditions alors $(x_i, e_j) = \delta_{ij} = (e_i, e_j)$ et $\forall j$ on a $(x_i - e_i, e_j) = 0$ ce qui donne $x_i - e_i = 0$.

4.3.2 Bases orthonormales

Proposition 17 *Tout espace euclidien ou hermitien possède des bases orthonormales.*

[Ind] Rebouter vos connaissances.

[Dem] C'est la conséquence du théorème de la base incomplète et du procédé de Gramm-Schmidt.

Définition 9 *Soit E un espace préhilbertien et $\{x_1, \ldots, x_p\}$ une famille de vecteurs de E E. La matrice $G = (g_{ij}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie par*

$$\forall i, j \in [1, p] \quad g_{ij} = (x_i, x_j)$$

est appelée matrice de Gramm de la famille.

Proposition 18 *Soit E un espace euclidien, $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E et G sa matrice de Gramm. Pour tous éléments x et y de E:*

$$(x, y) = {}^t\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) G \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j$$

En particulier, si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée:

$$(x, y) = {}^t\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

en notant $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) = (x_j)_{j \in [1,n]}$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(y) = (y_j)_{j \in [1,n]}$

[Ind] Vérifier.

[Dem] Si on pose : $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ on a alors $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_i y_j (e_i, e_j)$ ce qui est bien le produit matriciel écrit.

4.3.3 Supplémentaire orthogonal d'un s.e.v.

Théorème 4 *Soit E un espace euclidien de dimension n et F un s.e.v. de E de dimension p. Il existe une base orthonormée de $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ telle que $F = [e_1, \ldots, e_p]$ et $F^\circ = [e_{p+1}, \ldots, e_n]$.*
Ainsi $\dim F^\circ = \dim E - \dim F$.

[Ind] Construire une base.

[Dem] Prenons une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_p)$ de F que l'on complète en une base orthonormée de E. Alors $\forall p + 1 \leq i \leq n$ on a $e_i \in F^\circ$ et d'autre part si $x \in F^\circ$ on peut écrire $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ mais $\forall 1 \leq i \leq p \; : \; (x, e_i) = 0$ ce qui donne $\lambda_i = 0$ et donc $F^\circ = \text{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$. Le résultat sur les dimensions en résulte.

Proposition 19 *Soit E un espace euclidien et F et G des s.e.v. de E*

$$F \oplus F^\circ = E$$
$$\left((F)^\circ\right)^\circ = F$$
$$F^\circ + G^\circ = (F \cap G)^\circ$$

[Ind] Penser aux dimensions.

[Dem] On sait déjà que $F \oplus F^\circ = E$
On a $F \subset ((F)^\circ)^\circ$ et les sous-espace ayant la mÃªme dimension on en déduit l'égalité.
La proposition 9 donne $F^\circ + G^\circ \subset (F \cap G)^\circ$ et les dimensions donnent : $dim\,(F^\circ + G^\circ) = dimF^\circ + dimG^\circ - dimF^\circ \cap G^\circ = n - dimF + n - dimG - (n - dimF - dimG + dimF \cap G) = n - dim\,(F \cap G)$.

4.4 Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien

Proposition 20 *Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme de E.*
Il existe un unique endomorphisme de E, noté u^*, appelé adjoint de u tel que:

$$\forall x, y \in E \quad u(x) \cdot y = x \cdot u^*(y).$$

Si $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ est une base **orthonormée** *de E alors*

$$\mathcal{M}_\mathcal{B}(u^*) = {}^t\mathcal{M}_\mathcal{B}(u)$$

[Ind] Construire une forme linéaire à l'aide de u et utiliser le théorème de Riesz.

[Dem] Pour tout $y \in E$ considèrons la forme linéaire $x \longmapsto (u(x), y)$ d'après le théorème de Riesz il existe un unique élément que l'on note $u^*(y)$ tel que $\forall x \in E\ :\ (u(x), y) = (u^*(y), x) = (x, u^*(y))$. Montrons que l'application $y \longmapsto u^*(y)$. On a $\forall (x, y,) \in E^2$, $\forall z \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ par définition $(u^*(x + \lambda y), z) = (x + \lambda y, u(z)) = (x, u(z)) + \lambda(y, u(z)) = (u^*(x), z) + \lambda(u^*(y), z) = (u^*(x) + \lambda u^*(y), z)$. Par unicité puique les deux éléments $u^*(x + \lambda y)$ et $u^*(x) + \lambda u^*(y)$ conviennent ils sont égaux.
Prenons une base orthonormée on a par définition $\forall X, Y\ :\ {}^t(M_u X)\, Y = {}^t X M_{u^*} Y$ ou ${}^t X {}^t M_u Y = {}^t X M_{u^*} Y$ ce qui donne ${}^t X \left({}^t M_u - M_{u^*}\right) Y = 0$. Ainsi $\forall Y, X$ on a $X = \left({}^t M_u - M_{u^*}\right)$ et $\forall Y : \left({}^t M_u - M_{u^*}\right) Y = 0$ et par suite ${}^t M_u = M_{u^*}$.

Proposition 21 *Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$. $(uv)^* = v^* u^*$.*

[Ind] *Utiliser les matrices.*

[Dem] Si nous prenons une base orthonormée, avec les notations qui s'imposent cela revient à ${}^t(MN) = {}^t N {}^t M$.

Proposition 22 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.*

$$(u^*)^* = u$$
$$Ker\,u^* = (Im\,u)^\circ$$
$$Im\,u^* = (Ker\,u)^\circ$$

[Ind] Utiliser les matrices si possible sinon par double inclusion.

[Dem] La première assertion est connue en passant par les matrices dans une base orthonormée ; ${}^t\left({}^t M\right) = M$.

La seconde si $s \in \operatorname{Ker} u^*$ alors $u^*(x) = 0$ et $\forall y$: $(u^*(x), y) = (x, u(y)) = 0$ ainsi si $z \in \operatorname{Im} u$ alors $(x, z) = 0$ et $x \in (\operatorname{Im} u)^\circ$.
Réciproquement si $x \in (\operatorname{Im} u)^\circ$ alors $\forall z$: $(x, u(z)) = 0 = (u^*(z), x)$ et donc $x \in \operatorname{Ker} u^*$.
La dernière assertion se montre de la mÃªme faÃ§on.

Proposition 23 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les endomorphismes u et u^* ont mÃªme rang, mÃªme polynÃ´me caractéristique, mÃªme déterminant et mÃªme trace.*

[Ind] *Passer par les matrices.*

[Dem] Dans une base orthonormée la matrice de u^* est la transposée de la matrice de u. Or on sait qu'une matrice et sa transposée ont mÃªme rang, mÃªme polynÃ´me caractéristique, mÃªme déterminant et mÃªme trace.

4.5 Endomorphismes symétriques

Définition 10 *On appelle endomorphisme symétrique, ou autoadjoint, un endomorphisme u vérifiant $u^* = u$, c'est à dire vérifiant:*

$$\forall x, y \in E \quad u(x) \cdot y = x \cdot u(y).$$

Proposition 24 *Soit u un endomorphisme symétrique.*
1) La matrice de u dans une base orthonormée est symétrique.
2) $E = Ker\, u \oplus^\circ Im\, u$.
3) Si F est un s.e.v. stable par u, alors F° est stable par u.

[Ind] Prendre une base orthonormée, écrire une somme directe orthogonale, comment démontre-t-on qu'un sous espace est stable.

[Dem] 1) Dans une base orthonormée la matrice de u vérifie $M =^t M$ elle est donc symétrique.
2) Partons de $E = (\operatorname{Im} u)^\circ \oplus^\circ \operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u^* \oplus \operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.
3) On a si F est stable par u alors F° est stable par u^*. En effet si $z \in u^*(F^\circ)$ il existe $x \in F^\circ : z = u^*(x)$ et $\forall a \in F$: $(z, a) = (u^*(x), a) = (x, u(a)) = 0$ car $x \in F^\circ$ et $u(a) \in F$.

Proposition 25 *Soit p un projecteur de E.*

$$\operatorname{Ker} p \perp \operatorname{Im} p \Longleftrightarrow p^* = p$$

On dit alors que p est un projecteur orthogonal.

[Ind] Utiliser au maximum ce que vous savez et montrer le reste.

[Dem] Si p est symétrique alors $\operatorname{Ker} p \perp \operatorname{Im} p$.
Si $\operatorname{Ker} p \perp \operatorname{Im} p$ alors on peut écrire $E = \operatorname{Ker} p \oplus^\perp \operatorname{Im} p$ en décomposant des éléments quelconque $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$ on a $(p(x), y) = (x_2, y_1 + y_2) = (x_2, y_2)$ et d'autre part $(x, p(y)) = (x_2, y_2)$, p est donc symétrique.

4.6 Applications orthogonales

Définition 11 *Soit u une application de E dans E. On dit que u est orthogonale si et seulement si*

$$\forall x, y \in E \quad u(x) \cdot u(y) = x \cdot y.$$

Théorème 5 *Soit u une application de E dans E. Les assertions suivantes sont équivalentes:*
(1) u est orthogonale.
(2) $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\forall x \in E \quad ||u(x)|| = ||x||$.
(3) $u \in \mathcal{GL}(E)$ et $u^* = u^{-1}$.

[Ind] Faire une démonstration cyclique.

[Dem] $1 \Rightarrow 2$: u est orthogonale d6nc conserve le produit scalaire elle conserve donc la norme, montrons qu'elle est linéaire.$\forall (x, y) \in E^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ on a $u(x + \lambda y) - u(x) - \lambda u(y), u(x + \lambda y) - u(x) - \lambda u(y)) = (u(x + \lambda y), u(x + \lambda y)) - (u(x + \lambda y), u(x)) - \lambda(u(x + \lambda y), u(y) - (u(x), u(x + \lambda y)) + (u(x), u(x)) + \lambda(u(x), u(y)) - (u(y), u(x + \lambda y)) + (u(y), u(x)) + \lambda(u(y), u(y)) = (x + \lambda y, x + \lambda y) - (x + \lambda y, x) - \lambda(x + \lambda y, y) - (x, x + \lambda y) + (x, x) + \lambda(x, y) - (y, x + \lambda y) + (y, x) + \lambda(y, y) = (x, x) + \lambda(x, y) + \lambda(y, x) + \lambda^2(y, y) - (x, x) - \lambda(y, x) - \lambda(x, y) - \lambda^2(y, y) - (x, x) - \lambda(x, y) + (x, x) + \lambda(x, y) - (y, x) - \lambda(y, y) + (y, x) + \lambda(y, y) = 0$ d'où $u(x + \lambda y) = u(x) + \lambda u(y)$.
$2 \Rightarrow 3$: montrons que u est bijective. si $u(x) = 0$ alors $||u(x)|| = ||x|| = 0$ et $x = 0$. D'autre part $\forall (x, y) \in E^2 \ : \ (u(x), u(y)) = (x, u^*u(y)) = (x, y)$ de là on obtient $\forall y \ : \ u^*u(y) = y$ puis $u^*u = Id$.
$3 \Rightarrow 1 \forall (x, y) \in E^2 \ : \ (u(x), u(y) = (x, u^*u(y)) = (x, y)$.

Proposition 26 *L'ensemble des automorphismes orthogonaux de E, noté $\mathcal{O}(E)$, est un sous groupe de $\mathcal{GL}(E)$ et, pour tout $u \in \mathcal{O}(E)$, on a $|det(u)| = 1$.*

[Ind] Comment montrer que l'on a un sous groupe.

[Dem] $\mathcal{O}(E)$ est non vide car contient Id et est bien contenu dans $\mathcal{GL}(E)$. Soit u et v des automorphismes orthogonaux il suffit de montrer que vu^{-1} est un automorphisme orthogonal ou vu^*. Montrons que cet automorphisme conserve le produit scalaire : $\forall (x, y) \in E^2 \ : \ (vu^*(x), vu^*(y)) = (u^*(x), u^*(y)) = (x, u^*u(y)) = (x, y)$ et c'est fait.
$uu^* = Id$ donne $|\det(u)| = 1$.

Proposition 27 *Le sous-ensemble de $\mathcal{O}(E)$, constitué des endomorphismes de déterminant égal à 1, est un sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$, noté $\mathcal{SO}(E)$, appelé groupe des rotations de E.*

[Ind] Qu'est-ce qu'il y a à montrer ?

[Dem] $1 \times 1 = 1$.

Définition 12 *On appelle matrice orthogonale une matrice carrée A inversible vérifiant ${}^tA = A^{-1}$. L'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est noté $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, tandis que l'on note $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices orthogonales de déterminant 1, une telle matrice étant appelée matrice de rotation.*

Proposition 28 *$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ sont canoniquement isomorphes à $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ et à $\mathcal{SO}(\mathbb{R}^n)$.*

[Ind] Prendre une base orthonormée.

[Dem] Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée l'isomorphisme $u \longmapsto \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ de $calGL(E)$ dans $GL_n(\mathbb{R})$ envoit bien $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ et à $\mathcal{SO}(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 29 *Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons $C_1, \dots C_n$ les vecteurs colonnes de P et $L_1, \dots L_n$ ses vecteurs lignes.*

$$\begin{aligned} P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) &\Longleftrightarrow \forall i, j \in [1, n] \quad C_i \cdot C_j = \delta_{ij} \\ &\Longleftrightarrow \forall i, j \in [1, n] \quad L_i \cdot L_j = \delta_{ij} \end{aligned}$$

le produit scalaire $< \cdot >$ étant le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

[Ind] Utiliser l'isomorphisme.

[Dem] Un automorphisme orthogonal est bijectif, conserve le produit scalaire et la norme il transforme donc une base orthonormée en une base orthonormée. Les colonnes de la matrice sont donc orthonormées. Par la transposée il en est de mÃªme des lignes. Réciproquement si la matrice à ses lignes orthonormées, l'endomorphisme associé canoniquement transforme une base orthonormée en une base orthonormée. Il conserve aussi le produit scalaire car : si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de vecteurs e_i alors $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et

$y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ on a $(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ mais $u(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i)$ et $u(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i u(e_i)$. La base $(u(e_i))$ 'étant orthonormée on a $(u(x), u(y)) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ et on a bien l'égalité.

4.7 Changement de bases orthonormales

Proposition 30 *Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E.*
1) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$:

$$u \in \mathcal{O}(E) \iff u(\mathcal{B}) \text{ est orthonormale.}$$

2) Soit $\mathcal{B}'$ une base de E, P étant la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$:

$$P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \iff \mathcal{B}' \text{ est orthonormale .}$$

[Ind] Reformulation.

[Dem] Cela provient du fait qu'un endomorphisme est orthogonal ssi il transforme une base orthonormée en une base orthonormée.

4.8 Réduction des endomorphismes symétriques

Cette réduction repose sur 2 résultats fondamentaux.

Proposition 31 *Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n. A possède n valeurs propres réelles distinctes ou confondues.*

[Ind] Plonger dans $\mathbb{C}$

[Dem] On regarde l'endomorphisme associé u sur $\mathbb{C}$. Si λ est une valeur propre on a $u(x) = \lambda x$ et donc $(u(x), x) = \overline{\lambda}(x,x) = (x, u(x)) = \lambda(x,x)$. Comme $x \neq 0$ on en déduit que $\lambda = \overline{\lambda}$ et les valeurs propres sont réelles.

Proposition 32 *Soit u un endomorphisme symétrique de E. Si F est un s.e.v. stable par u, alors F° est stable par u.*

[Ind] Utiliser ce que l'on sait.

[Dem] Si F est stable par u alors F° est stable par $u^* = u$ car u est symétrique.

Théorème 6 *Tout endomorphisme symétrique u d'un espace euclidien E est diagonalisable. Plus précisément: Il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de u.*

[Ind] Par récurrence sur la dimension de l'espace.

[Dem] Si $\dim E = 1$ alors le résultat est vrai car l'endomorphisme est une homothétie et tout vecteur est propre. Supposons le résultat vrai pour tout espace de dimension inférieure à $p-1$. Mettons nous sur un espace de dimension p. Il existe au moins une valeur propre de fait réelle, soit $V(\lambda)$ le sous-espace propre associé. $E = V(\lambda) \oplus^\circ (V(\lambda))^\circ$. D'après ce qui précède $u_{|_{V(\lambda)^\circ}}$ est un endomorphisme de $V(\lambda)^\circ$ car ce sous-espace est stable. Sa dimension est plus petite donc par hypothèse de récurrence on a $V(\lambda)^\circ = V(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus V(\lambda_k)$ et donc $E = V(\lambda) \oplus V(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus V(\lambda_k)$. u est une homothétie sur chaque sous espace $V(\lambda_i)$ donc u est diagonalisable.

Proposition 33 *Soit u un endomorphisme symétrique de E, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres (réelles) distinctes de u. Alors*

$$E = Ker(u - \lambda_1 Id_E) \oplus^{\perp} Ker(u - \lambda_2 Id_E) \oplus^{\perp} \cdots \oplus^{\perp} Ker(u - \lambda_p Id_E).$$

[Ind] Que faut-il montrer ?

[Dem] Il s'agit de montrer que les sous espaces propres sont orthogonaux. Soit x_1, x_2 des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes λ_1, λ_2. On a $u(x_1) = \lambda_1 x_1$ et $u(x_2) = \lambda_2 x_2$. Calculons $(u(x_1), x_2) = \lambda_1(x_1, x_2)$ et $(u(x_1), x_2) = (x_1, u(x_2)) = \lambda_2(x_1, x_2)$. Les valeurs propres étant distinctes on en déduit que $(x_1, x_2) = 0$.

En considérant la matrice de u dans un base orthonormée de E, on en conclut:

Théorème 7 *Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n. Il existe alors une matrice orthogonale P d'ordre n telle que ${}^tPAP$ est diagonale.*

[Ind] Utiliser l'isomorphisme.

[Dem] Nous avons montré qu'un endomorphisme symétrique est diagonalisable à l'aide d'une base orthogonale. En termes de matrice cela signifie que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable à l'aide d'une matrice orthogonale.

4.9 Formes bilinéaires symétriques

Définition 13 *Soit E un $\mathbb{R}-$espave vectoriel, on appelle forme bilinéaire une application : $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, linéaire par rapport à chaque variable. Elle est dite symétrique ssi $\forall (x, y) \in E \times E$: $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$. L'ensemble des formes bilinéaires muni des lois usuelles est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel et l'ensemble des formes bilinéaires symétriques en est un sous-espace vectoriel.*

4.9.1 écriture matricielle

Si E est de dimension finie prenons une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ on peut alors écrire : $\varphi(x, y) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \varphi(e_i, e_j)$, en posant $M = ((\varphi(e_i, e_j)))$ on a avec X, Y les coordonnées de x, y dans la base $\mathcal{B}$: ${}^tXMY = \sum_i x_i \sum_j \varphi(e_i, e_j) y_j = \varphi(x, y)$ Dans le cas d'un changement de base, si P est une matrice de changement de base on a : $X = PX', Y = PY'$ et $\varphi(x, y) =^t XMY =^t X' \left({}^tPMP\right) Y'$ ainsi M est changée en ${}^tPMP$.

4.10 Formes quadratiques

Définition 14 *On appelle forme quadratique toute application $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle qu'il existe une forme bilinéaire symétrique φ telle que $\forall x \in E : q(x) = \varphi(x, x)$. Elle est dite définie ssi $\forall x \in E : q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, positive ssi $\forall x \in E\ x \neq 0\ : q(x) \geq 0$, définie positive ssi $\forall x \in E : q(x) > 0$*

Exercice 6 calculer $q(\alpha x + \beta y)$, $q(x + y)$, $q(x - y)$

[Ind] Utiliser la forme bilinéaire associée.

[Dem] En passant par la forme polaire associée on a : $q(\alpha x + \beta y) = \alpha^2 q(x) + \beta^2 q(y) + 2\alpha\beta\varphi(x, y)$. Les deux autres expressions sont des cas particuliers à connaÃ®tre par coeur :
$q(x + y) = q(x) + q(y) + 2\varphi(x, y)$ et $q(x - y) = q(x) + q(y) - 2\varphi(x, y)$.

Proposition 34 *(identité de polarisation) On a si φ est une forme bilinéaire symétrique de forme quadratique associée q :*$\forall (x,y)\in E^2 : \varphi(x,y)=\dfrac{1}{2}\left(q(x+y)-q(x)-q(y)\right)$ *et* $\varphi(x,y)=\dfrac{1}{4}\left(q(x+y)-q(x-y)\right)$. *Ainsi que (identité du parallélogramme) :* $q(x+y)+q(x-y)=2\left(q(x)+q(y)\right)$

[Ind] Vérifier.

[Dem] On a $q(x+y)=\varphi(x+y,x+y)=q(x)+q(y)+2\varphi(x,y)$ et $q(x-y)=\varphi(x-y,x-y)=q(x)+q(y)-2\varphi(x,y)$ d'où le premier résultat, le deuxième et le troisième.

Proposition 35 *Une forme quadratique est une application $q : E\longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie : $\forall(\alpha,x)\in \mathbb{R}\times E\quad q(\alpha x)=\alpha^2 q(x)$ et l'application $(x,y)\longmapsto q(x+y)-q(x-y)$ est une forme bilinéaire symétrique φ sur E.*

[Ind] Pas grand chose à montrer.

[Dem] Si φ est une forme bilinéaire alors q est la forme quadratique associée. De plus $q(\alpha x)=\varphi(\alpha x,\alpha x)=\alpha^2 q(x)$.

4.11 Formes quadratiques associées à un endomorphisme

Soit E un espace vectoriel euclidien. et u un endomorphisme de E. On appelle forme quadratique q associée à l'endomorphisme u l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par:

$$\forall x\in E\quad q(x)=(u(x),x).$$

Proposition 36 *Soit E un espace euclidien et q la forme quadratique associée à un endomorphisme u. Il existe un unique endomorphisme symétrique U tel que*

$$\forall x\in E\quad q(x)=(U(x),x)$$

et on a $U=\dfrac{1}{2}(u+u^*)$.

[Ind] Chercher la forme polaire.

[Dem] On a $\varphi(x,y)=\dfrac{1}{4}\left(q(x+y)+q(x-y)\right)=\dfrac{1}{4}\left((u(x+y),x+y)-(u(x-y),x-y)\right)=$
$\dfrac{1}{4}\left((u(x)+u(y),x+y)-(u(x)-u(y),x-y)\right)=$
$\dfrac{1}{4}\left((u(x),x)+(u(y),y)+(u(x),y)+(u(y),y)-(u(x),x)+u(x),x)+(u(y),x)-(u(y),y)\right)$
$=\dfrac{1}{2}\left((u(x),y)+(u(y),x)\right)=\dfrac{1}{2}\left((u(x)+u^*(x),y)\right)$. Il suffit alors de poser $U=\dfrac{1}{2}(u+u^*)$ qui est bien symétrique pour avoir le résultat.

Exercice 7 Soit $E=\mathbb{R}^3$ et q définie, pour $M=(x,y,z)$ par $q(M)=x^2+xy+2yz-z^2$. Montrer que q est une forme quadratique et que l'endomorphisme symétrique associée a, dans la base canonique, pour matrice, :

$$\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

[Ind] Utiliser les formules donnant la forme polaire.

[Dem] La forme polaire est avec un peu d'habitude (on dédouble les termes) : $\varphi(X, X') = xx' + \frac{1}{2}(xy' + x'y) + (yz' + y'z) - zz'$ si $X = (x, y, z)$ et $X' = (x', y', z')$. La matrice associée telle que $\varphi(X, X') =^t XMX'$ est bien : $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Théorème 8 *Soit q une forme quadratique associée à l'endomorphisme symétrique u sur l'espace vectoriel euclidien E de dimension n.*
Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ et des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$\forall x \in E \quad q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

où $(x_1, \ldots, x_n)$ représente les coordonnées de x dans la base orthonormée $\mathcal{B}$.

[Ind] Utiliser la proposition précèdente et les résultats sur les matrices symétriques réelles.

[Dem] Nous avons $q(x) =^t XMX$ en prenant une base orthonormée qui diagonalise l'endomorphisme U ce qui donne $q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$ où les λ_i sont les valeurs propres de U.

Définition 15 *On dit qu'un endomorphisme symétrique est positif si $(u(x), x) \geq 0$ pour tout $x \in E$ et définie positif si $u((x), x) > 0$ pour tout $x \in E$ non nul.*

Proposition 37 *Un endomorphisme symétrique u est positif (resp défini positif) si et seulement si son spectre est inclus dans $\mathbb{R}_+$ (resp $\mathbb{R}_+^*$).*

[Ind] Utiliser une base propre.

[Dem] En prenant une base orthonormée propre on a $u(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ où les λ_i sont les valeurs propres de u et les x_i les composantes de x dans la base propre. Ainsi si le spectre est positif on a $(u(x), x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$ qui est bien positif. Réciproquement si l'endomorphisme est positif en prenant pour chaque i_0 les x_i nuls sauf $x_{i_0} = 1$ on obtient λ_{i_0} positif.

4.12 AUTOMORPHISMES ORTHOGONAUX DE $\mathbb{R}^3$.

4.12.1 A partir d'une matrice

On suppose donner une matrice M, 3×3 correspondant à un endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ tel que $M_{\mathcal{C}}(u) = M$ où C est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ il faut :

vérifier que la matrice est orthogonale : pour cela on vérifie l'**orthonormalité** des colonnes.

On calcule le déterminant ou on compare un terme non nul à son cofacteur pour savoir si $\det M = +1$ ou $\det M = -1$.

Si $\underline{\det M = 1}$ alors u est une rotation on cherche

- l'axe qui est la droite invariante ou le sous espace propre associé à la valeur propre 1 soit $MX = X$. Soit $D = \mathbb{R}\overrightarrow{k}$

- l'angle pour lequel $Tr\,(u) = 2\cos\theta + 1$ en effet dans une base adaptée à la décomposition $\left(\mathbb{R}\overrightarrow{k}\right)^{\perp} \bigoplus \mathbb{R}\overrightarrow{k}$ l'endomorphisme u a pour matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 1 \\ \sin\theta & \cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
  En orientant l'axe par exemple par $\overrightarrow{k}$ on oriente le plan $\overrightarrow{k}^{\perp}$ et $\sin\theta = \left(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{v}, u\,(\overrightarrow{v})\right)$ produit mixte où $\overrightarrow{v}$ est un vecteur unitaire du plan orthogonal à l'axe.

Si det$\underline{M = -1}$ ou bien

- la matrice est symétrique et u est une symétrie orthogonale par rapport à un plan que l'on détermine par les invariants $MX = X$. ou bien
- la matrice n'est pas symétrique et u est la composée d'une rotation r et d'une symétrie s par rapport à un plan que l'on peut choisir orthogonal à l'axe de la rotation. On peut remarquer que $-u$ est une rotation r et $u = s\circ r = r\circ s$. On peut aussi déterminer l'axe de la rotation par les antiinvariants $MX = -X$ l'angle par $2\cos\theta - 1 = Tr\,(u)$ car dans une base adaptée à $\left(\mathbb{R}\overrightarrow{k}\right)^{\perp} \bigoplus \mathbb{R}\overrightarrow{k}$ l'endomorphisme à pour matrice : $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 1 \\ \sin\theta & \cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ puis en orientant l'axe on détermine le signe de θ par la même méthode que dans le cas d'une rotation et enfin le plan est l'orthogonal de $\mathbb{R}\overrightarrow{k}$.

4.13 Le problème "inverse"

Déterminer la matrice connaissant les éléments caractéristiques de l'automorphisme orthogonal.

4.13.1 Pour une rotation

Si $u = \mathcal{ROT}\left(\theta, \mathbb{R}\overrightarrow{k}\right)$ on détermne une base orthonormée (i', j', k') adaptée à la décomposition $\left(\mathbb{R}\overrightarrow{k}\right)^{\perp} \bigoplus \mathbb{R}\overrightarrow{k}$ la matrice de u est alors dans cette base $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 1 \\ \sin\theta & \cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et si P est la matrice de passage de la base canonique (i, j, k) à la base (i', j', k') on a la matrice de u dans la base canonique : $N = PM^tP$.

Une autre façon est de calculer les images des vecteurs de base par la formule

$$u\,(\overrightarrow{x}) = \cos\theta\overrightarrow{x} + \sin\theta\left(\overrightarrow{k} \bullet \overrightarrow{x}\right) + (1-\cos\theta)\left(\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{k}\right)\overrightarrow{k}$$

en effet

$$\begin{aligned} M &= \cos\theta\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin\theta\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (1-\cos\theta)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ u &= \cos\theta id + \sin\theta f + (1-\cos\theta)\,p_{\overrightarrow{k}} \\ \text{avec } f &: x \to k \bullet x \text{ et } p_{\overrightarrow{k}} \text{ la projection orthogonale sur } \mathbb{R}\overrightarrow{k} \end{aligned}$$

4.13.2 Pour une symétrie

C'est la même méthode avec pour matrice dans la base adaptée à $P \bigoplus P^{\perp}$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4.13.3 Pour $u = s \circ r$

penser à $-u$.

4.14 Exercices

Exercice 8 Soient E un espace préhilbertien réel et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs tels que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad ||e_i|| = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in E, \quad ||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i)^2.$$

Montrer que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

[Ind] Montrer que la famille est orthonormée.

[Dem] La condition appliquée aux vecteur e_j donne : $||e_j||^2 = \sum_{i \neq j} (e_j, e_i)^2 + 1$. On en déduit $\forall i \neq j$: $(e_j, e_i) = 0$. La famille est donc orthogonale et par suite libre. Posons maintenant $F = \text{vect } (e_i)_{1 \leq i \leq n}$. Pour tout élément x de $F^\perp$ on a $\forall k$: $(x, e_k) = 0$ et donc d'après l'hypothèse $||x||^2 = 0$ d'où $x = 0$ et $F = E$. Le système est donc libre et générateur c'est une base.

Exercice 9 Soit E un espace préhilbertien de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E. On transforme $\mathcal{B}$ par le procédé de Schmidt en une base $\mathcal{B}'$. Quelle est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$?

[Ind] Reprendre les formules donnant la base orthonormée et écrire la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des nouveaux vecteurs dans l'ancienne base.

[Dem] Pour obtenir une base orthogonale on pose $f_i = e_i - \sum_{j=1}^{i} \frac{\langle e_j, x \rangle}{||e_j||^2} e_j$. Ceci permet d'écrire la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de f_i dans la base (e_i). Il faut remarquer qu'elle est triangulaire avec des 1 sur la diagonale. Si on veut une base orthonormale il ne faut pas oublier de diviser f_i par sa norme.

Exercice 10 Soit $E = \mathbb{R}^3$. Trouver les matrices, dans la base canonique $\{i, j, k\}$, des endomorphismes suivants:
a) La projection orthogonale sur $[i - j]$
b) la symétrie orthogonale par rapport à $[i + j + k]$
c) la symétrie orthogonale par rapport à $[i + j, j + k]$
d) la rotation d'angle $\pi/4$ d'axe engendré par $i + j + k$.

[Ind] Pour la projection utiliser la formule à l'aide d'une base orthonormée.
Pour les symétries utiliser la projection.
Pour la rotation utiliser une base adaptée ou la formule donnant l'image d'un vecteur par une rotation.

[Dem] a) nous utilisons la formule $p(x) = \langle e_1, x \rangle e_1$ où e_1 est une base orthonormale de $[i - j]$. Prenons $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i - j)$. Ainsi $p(i) = \langle \frac{1}{\sqrt{2}}(i - j), i \rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(i - j) = \frac{1}{2}(i - j)$, de mÃªme $p(j) = -\frac{1}{2}(i - j)$ et $p(k) = 0$. D'où la matrice symétrique : $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
b) on utilise $s = 2p - id$ on prendra $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)$. On trouve $p(i) = p(j) = p(k) = \frac{1}{3}(i + j + k)$ et la matrice $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. La matrice de s est $2P - I$. On pouvait obtenir cela plus rapidement en regardant le rang !
c) MÃªme principe on prend $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i + j)$ et $e_2' = j + k - \frac{1}{2}\langle (j + k), i + j \rangle (i + j) = -\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + k$ puis $e_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}(-\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + k)$. On trouve : $p(i) = \frac{2}{3}i + \frac{1}{3}j - \frac{1}{3}k$, $p(j) = \frac{1}{3}i + \frac{2}{3}j + \frac{1}{3}k$ et $p(k) = -\frac{1}{3}i + \frac{1}{3}j + \frac{2}{3}k$.

La matrice orthogonale symétrique de S est $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

d) Nous pouvons utiliser la formule $r(x) = x\cos\theta + (1-\cos\theta)(u,x)u + (u \wedge x)\sin\theta$ avec $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)$. Ce qi donne $r(i), r(j), r(k)$. Ou bien dans une base adaptée la matrice de la rotation est $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice de passage de i, j, k à $e_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(i-j) e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(i+j-2k), e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(i+j+k$.

La matrice de passage est la matrice orthogonale :

$P = \begin{bmatrix} 1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} & 0 \\ 1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et la matrice de rotation

$$A = PMP^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 + 1/3\sqrt{2} & -1/6\sqrt{2} - 1/6\sqrt{2}\sqrt{3} + 1/3 & -1/6\sqrt{2} + 1/6\sqrt{2}\sqrt{3} + 1/3 \\ -1/6\sqrt{2} + 1/6\sqrt{2}\sqrt{3} + 1/3 & 1/3 + 1/3\sqrt{2} & -1/6\sqrt{2} - 1/6\sqrt{2}\sqrt{3} + 1/3 \\ -1/6\sqrt{2} - 1/6\sqrt{2}\sqrt{3} + 1/3 & -1/6\sqrt{2} + 1/6\sqrt{2}\sqrt{3} + 1/3 & 1/3 + 1/3\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Exercice 11 Déterminer la distance du vecteur x au sous-espace vectoriel engendré par $a_1, \dots, a_m$ dans les cas suivants:
a) $x = (1, 1, 1, 1), \quad a_1 = (-1, 1, -1, 1), \quad a_2 = (1, 0, 1, 0)$.
b) $x = (0, 0, 0, 1), \quad a_1 = (1, 0, 1, 0), \quad a_2 = (0, 1, 1, 0), \quad a_3 = (1, 0, 0, 1)$.

[Ind] Trouver une base orthonormale du sous espace vectoriel puis utiliser le cours.

[Dem] a) La distance est nulle car le vecteur x est dans le sous-espace.
b) Les orthonormalisés sont $[\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 0], [\frac{1}{6}\sqrt{3}, \frac{1}{6}\sqrt{3}, -\frac{1}{6}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3}], [-\frac{1}{6}\sqrt{6}, \frac{1}{3}\sqrt{6}, \frac{1}{6}\sqrt{6}, 0]$. La projection $p(x) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$. La distance est $d^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ et $d = \frac{1}{2}$.

Exercice 12 Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, muni du produit scalaire:

$$< P, Q >= \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

Quel est l'endomorphisme adjoint de la dérivation ?

[Ind] Penser au matrice.

[Dem] Une méthode est de passer par les matrices mais dans une base orthonormée. Pour cela prenons $e_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $e_2' = X - \langle X, e_1\rangle e_1 = X$, $e_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}X$ et $e_3' = X^2 - \langle X^2, e_1\rangle e_1 - \langle X^2, e_2\rangle e_2$, $e_3 = \frac{3}{4}\sqrt{10}(X^2 - \frac{1}{3})$.

Dans cette base la matrice de la dérivation est : $\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

La matrice de passage étant : $\begin{bmatrix} 1/2\sqrt{2} & 0 & -1/4\sqrt{10} \\ 0 & 1/2\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 3/4\sqrt{10} \end{bmatrix}$

La matrice de l'adjoint de la dérivation est ${}^tA = A$ et dans la base canonique $PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{5}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{15}{2} & 0 \end{bmatrix}$

Une autre méthode est de remarquer que pour tous polynÃ´mes P, Q on a : $\langle P, D^*(Q)\rangle = -\langle P, D(Q)\rangle + P(1)Q(1) - P(-1)Q(-1)$.

Exercice 13 E étant un espace euclidien, soit f une application de E dans E. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes:
a) $\forall x, y \in E, \quad (f(x), y) = -(x, f(y))$

b) $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\forall x \in E, \quad (f(x), x) = 0$.

[Ind] Adapter la preuve du théorème des endomorphismes symétriques au cas de l'antisymétrie. (penser à $x + y$)

[Dem] a) $\Rightarrow$ b) : On a pour tout x : $(f(x), x) = -(f(x), x)$ donc $(f(x), x) = 0$. Il reste à montrer que f est linéaire. Pour tout x, y et tout λ on a: $||f(x + \lambda y) - f(x) - \lambda f(y)||^2 = ||f(x + \lambda y)||^2 + ||f(x) + \lambda f(y)||^2 - 2\langle f(x + \lambda y), f(x) + \lambda f(t)\rangle = A + B - 2C$ avec

$A = -\langle x + \lambda y, f^2(x + \lambda y)\rangle$
$= -\langle x, f^2(x + \lambda y)\rangle - \lambda\langle y, f^2(x + \lambda y)\rangle$
$= -\langle f^2(x), x + \lambda y\rangle - \lambda\langle f^2(y), x + \lambda y\rangle$
$= -\langle f^2(x), x\rangle - \lambda\langle f^2(x), y\rangle - \lambda\langle f^2(y), x\rangle - \lambda^2\langle f^2(y), y\rangle$
$= ||f(x)||^2 + 2\lambda\langle f(x), f(y)\rangle + \lambda^2\langle f(y), f(y)\rangle$
$B = ||f(x)||^2 + \lambda^2||f(y)||^2 + 2\lambda\langle f(x), f(y)\rangle$
$C = \langle x + \lambda y, f(f(x) + \lambda f(y))\rangle$
$= \langle x, f(f(x) + \lambda f(y))\rangle + \lambda\langle y, f(f(f(x) + \lambda f(y)))\rangle$
$= -\langle f(x), f(x) + \lambda f(y)\rangle - \lambda\langle f(y), f(x) + \lambda f(y)\rangle$
$= ||f(x)||^2 + 2\lambda\langle f(x), f(y)\rangle + \lambda^2||f(y)||^2$

$A + B = 2||f(x)||^2 + 2\lambda^2||f(y)||^2 + 4\lambda\langle f(x), f(y)\rangle$
On a bien $A + B - 2C = 0$ et donc $f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$.

b) $\Rightarrow$ a) pour tout x, y on a $(f(x+y), x+y) = 0$ ou $(f(x)+f(y), x+y) = 0$ soit $(f(x), y)+(f(y), x) = 0$.

Exercice 14 Déterminer les matrices orthogonales réelles d'ordre 2. Quelles sont leurs valeurs propres et vecteurs propres ? Interprétation géométrique.

[Ind] Plusieurs solutions. Cahier des charges d'une matrice orthogonale ou dimension de l'espace des invariants.

[Dem] D'après les notes de cours il y en a deux sortes : les symétries s par rapport à une droite de matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$, de valeurs propres 1 et -1, de sous espace propres correspondant à $\mathrm{Im\,m}\, s$ et $\ker s$.
Et les rotations de matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$, de valeurs propres i et $-i$, de sous espaces propres les droites engendrées respectivement par $\begin{pmatrix} b \\ a - i \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b \\ a + i \end{pmatrix}$.

Exercice 15 Soit p un projecteur de l'espace euclidien E. Montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si : $\forall x \in E \quad ||p(x)|| \leq ||x||$.

[Ind] Utiliser pythagore. Pour la réciproque montrer que $\mathrm{Im}\, p \perp \mathrm{Ker}\, p$ en utilisant l'hypothèse pour $\lambda y + z$.

[Dem] Pour la partie directe la projection étant orthogonale, pythagore donne $\forall x \in E$: $||x||^2 = ||p(x)||^2 + ||x - p(x)||^2$ donc $\forall x \in E \quad ||p(x)|| \leq ||x||$.
Pour la réciproque montrons que $\mathrm{Im\,m}\, p \perp \ker p$. Soit $y \in \mathrm{Im\,m}\, p$ et $z \in \ker p$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $||p(\lambda y+z)|| \leq ||\lambda y+z||$ donc $||\lambda p(y)+p(z)||^2 = ||\lambda y||^2 = |\lambda|^2\, ||y||^2 \leq |\lambda|^2\, ||y||^2+||z||^2+2\lambda\langle y, z\rangle$ ou $2\lambda\langle y, z\rangle+||z||^2 \geq 0$. Puisque ceci est vrai pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on doit avoir $\langle y, z\rangle = 0$.

Exercice 16 Soient p_1 et p_2 deux projecteurs associés. Montrer que si $p_1 - p_2$ est orthogonal, alors p_1 et p_2 sont des projecteurs orthogonaux.

[Ind] Montrer que $\mathrm{Im}\, p_1 \perp \mathrm{Ker}\, p_1$.

[Dem] Soit $y \in \mathrm{Im}\, p_1 = \ker p_2$ et $z \in \ker p_1 = \mathrm{Im}\, p_2$. Par hypothèse $\langle (p_1 - p_2)(y), (p_1 - p_2)(z)\rangle = \langle y, z\rangle$ mais en développant $\langle (p_1 - p_2)(y), (p_1 - p_2)(z)\rangle = \langle y, -z\rangle = -\langle y, z\rangle$ par suite $\langle y, z\rangle = 0$ et p_1 est orthogonal, de mÃªme pour p_2.

Exercice 17 Soit E un espace euclidien, p et q deux projecteurs orthogonaux de E d'images respectives F et G. Montrer que $pq = qp$ si et seulement si $(F \cap G)^\perp \cap F \perp (F \cap G)^\perp \cap G$.

[Ind] Montrer que la somme est directe. Pour la réciproque utiliser $E = (F \cap G) \oplus^\perp (F \cap G)^\perp$.

[Dem] Pour la partie directe soit $x \in (F \cap G)^\perp \cap F$ et $y \in (F \cap G)^\perp \cap G$ on a $\langle x, y\rangle = \langle p(x), q(y)\rangle = \langle qp(x), y\rangle = \langle pq(x), y\rangle = 0$ car $y \in G$, $y \in (F \cap G)^\perp$ et $qp(x) = pq(x) \in F \cap G$.
Pour la réciproque : En remarquant que $F \cap G$ est stable par p et q, donc $(F \cap G)^\perp$ aussi car p et q sont symétriques.
En écrivant $E = (F \cap G) \bigoplus^\perp (F \cap G)^\perp$ et pour $x \in E$: $x = x_1 + x_2$ on a $pq(x) = x_1 + pq(x_2$ et $qp(x) = x_1 + qp(x_2$. Il suffit donc de montrer que $pq(x) = qp(x)$ pour $x \in (F \cap G)^\perp$.
On a $\langle pq(x) - qp(x), pq(x) - qp(x)\rangle = \langle pq(x), pq(x)\rangle - \langle qp(x), pq(x)\rangle - \langle pq(x), qp(x)\rangle + \langle qp(x), qp(x)\rangle$. Or
$\langle pq(x), pq(x)\rangle = \langle pq(x), q(x)\rangle = 0$ car $pq(x) \in F$ et $q(x) \in G$
$\langle qp(x), pq(x)\rangle = 0$ car $qp(x) \in G$ et $pq(x) \in F$
$\langle pq(x), qp(x)\rangle = 0$ car $pq(x) \in F$ et $qp(x) \in G$
$\langle qp(x), qp(x)\rangle = \langle qp(x), p(x)\rangle = 0$ car $qp(x) \in G$ et $p(x) \in F$

Exercice 18 Soit $u \in \mathcal{O}(E)$.
a) Montrer que si F est un s.e.v. stable par u, $F^\perp$ l'est également.
b) Montrer que deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.
c) Quelles sont les valeurs propres éventuelles de u.
d) Montrer que si toutes les valeurs propres de u sont réelles, alors u est diagonalisable.

[Ind] Comment montrer qu'un sous espace est stable
Passer dans $\mathbb{C}$
Regarder le module d'une valeur propre.
Par récurrence sur la dimension.

[Dem] a) Si F est stable par u alors on a mÃªme par les dimensions $u(F) = F$. Si $x \in F^\perp$ on a $\forall y \in F$, $\exists y' \in F$: $y = u(y')$ et : $\langle u(x), y\rangle = \langle u(x), u(y')\rangle = \langle x, y'\rangle = 0$.
b) et c) Dans $\mathbb{C}$ si $u(x) = \lambda x$ et $u(y) = \mu y$ alors $\langle u(x), u(y)\rangle = \overline{\lambda}\mu\langle x, y\rangle = \langle x, y\rangle$ et $\langle u(x), u(x)\rangle = |\lambda|^2 \langle x, x\rangle = \langle x, x\rangle$. On en déduit d'une part que $|\lambda| = 1$ et d'autre part si $\langle x, y\rangle \neq 0$, $\overline{\lambda}\mu = 1$ ou $\frac{\mu}{\lambda} = 1$ soit $\lambda = \mu$ et si $\lambda \neq \mu$ alors $\langle x, y\rangle = 0$.
d) Par récurrence si dim$E = 1$ alors u est une homothétie et est donc diagonalisable. Suppossons que tout automorphisme orthogonal dont les valeurs propres sont réelles d'un espace euclidien de dimension inférieure à p est diagonalisable et soit u un automorphisme orthogonal à valeurs propres réelles d'un espace vectoriel de dimension $p + 1$. Considèrons $V(\lambda_1)$ un sous espace propre de u. Si dim$V(\lambda_1) = p + 1$ alors u est une homothétie et est diagonalisable. Sinon soit G le supplémentaire orthogonal de $V(\lambda_1)$. On sait que G est stable par u. Considèrons $v = u_{|_{V(\lambda_1)}}$ c'est un automorphisme orthogonal d'un espace vectoriel de dimension inférieure à p dont les valeurs propres sont réelles (son polynÃ´me caractéristique divise celui de u). v est donc diagonalisable. Ainsi $G = \bigoplus V_v(\lambda_i)$ et $E = V(\lambda_1) \bigoplus V(\lambda_i)$ car $V_v(\lambda_i) = V_u(\lambda_i)$. Donc u est diagonalisable.

Exercice 19 Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, la matrice de passage étant orthogonale.

[Ind] La matrice est symétrique la diagonaliser par une matrice orthogonale.

[Dem] Le polynÃ´me caractéristique est $P(X) = -(X + 1)^2(X - 2)$. Les sous espace propre associé à 1 est le plan d'équation $x + y + z = 0$. Prenons deux vecteurs orthonormés : $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

Pour la valeur propre simple 2 prenons $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

La matrice de passage orthogonale est $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$. On a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 20 Trouver une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale, A étant la matrice carrée dont tous les coefficients sont égaux à 1

[Ind] On connait les éléments propres de cette matrice qui est de plus symétrique.

[Dem] Nous savons que cette matrice à 0 valeur propre d'ordre $n-1$ et pour vecteurs propres $e_1 - e_2, \cdots, e_1 - e_n$ mais ils ne sont pas orthogonaux. Prenons les vecteurs orthonormés du noyau : $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

puis

$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \vdots \end{pmatrix}$. Pour la valeur propre simple n on prend $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \vdots \\ \vdots \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

Ce qui donne pour matrice de passage $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \frac{1}{\sqrt{6}} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{\sqrt{6}} & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix}$. Ainsi ${}^tPJP$ est la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$

Exercice 21 Soient f et g deux endomorphismes symétriques de l'espace euclidien E. Montrer l'équivalence des propositions:
a) $f \circ g$ est symétrique.
b) $g \circ f = f \circ g$.
c) Il existe une base orthonormée de E qui diagonalise simultanément f et g.

[Ind] Preuve circulaire. Pour montrer que b) implique c), on pourra diagonaliser f, puis montrer que les sous espaces propres de f sont stables par g.

[Dem] a) $\Rightarrow$ b) : on a ${}^t(f \circ g) = f \circ g =^t g \circ^t f = g \circ f$

b) $\Rightarrow$ c) f est diagonalisable donc $E = \bigoplus_{i=1}^{p\perp} V_f(\lambda_i)$. Or les sous espaces propres V_f sont stables par g car si x vérifie $f(x) = \lambda x$ alors $f(g(x)) = g(f(x)) = \lambda g(x)$ et $g(x) \in V_f$. Ainsi $g_{|V_f}$ est un endomorphisme de V_f symétrique donc diagonalisable par une base propre orthonormée $\mathcal{B}_1$. En reboutant ces bases pour chaque sous espace propre de f on obtient une base propre pour g constituée de vecteurs propres de f.

c) $\Rightarrow$ a) Il existe une base qui diagonalise f et g ainsi dans cette base les matrices de f et g sont diagonales, elles commutent donc et $g \circ f = f \circ g$.

Exercice 22 Soit S un matrice carrée réelle d'ordre n symétrique, on dit que S est positive si:

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \quad {}^tXSX \geq 0$$

et définie positive si elle est positive et

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \quad {}^tXSX = 0 \implies X = 0.$$

Montrer qu'une matrice symétrique réelle est positive (resp. définie positive) si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives).

[Ind] Prendre un vecteur propre. Pour la réciproque faire un changement de base.

[Dem] $\Rightarrow$: Si X est un vecteur propre on a ${}^tXSX =^t X\lambda X = \lambda^t XX \geq 0$ et donc $\lambda \geq 0$.
$\Leftarrow$: A l'aide d'un changement de base diagonalisant S on a ${}^tXSX =^t X^tPSPX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geq 0$ et S est positive. De mÃªme pour strictement positive.

Exercice 23 Soit $\{x_1, \dots, x_p\}$ une famille de vecteurs de l'espace euclidien E. On note $\mathcal{G}(x_1, \dots, x_n)$ la matrice $((x_i \cdot x_j))_{i,j\in[1,p]}$ et $G(x_1, \dots, x_p)$ son déterminant.
1) Montrer que $\mathcal{G}(x_1, \dots, x_n)$ est une matrice symétrique positive et qu'elle est définie positive si et seulement si la famille $\{x_1, \dots, x_p\}$ est libre.
2) Soit F l'espace engendré par la famille libre $\{x_1, \dots, x_p\}$. Soit $x \in E$, montrer que le carré de la distance de x à F est le rapport $G(x_1, \dots, x_p, x)$ sur $G(x_1, \dots, x_p)$.

[Ind] Se placer dans une base orthonormée. On pourra montrer que $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} {}^tAA$. Poser $y = x - P_F(x) \in F^\circ$

[Dem] 1) Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée, en posant $x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ji}e_j$ et $M = ((x_{ji}))$ on a $(x_i|x_j) = \sum_{k=1}^{n} x_{ki}x_{kj}$ et $\mathcal{G}(x_1, \cdots, x_n) =^t MM$. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ on a ${}^tX\mathcal{G}X =^t X^tMMX = ||MX||^2 \geq 0$.
Si $(x_1, \cdots, x_p)$ est lié on a $\operatorname{Rg} \mathcal{G}(x_1, \cdots, x_p) = \operatorname{Rg} M = \operatorname{Rg} (x_1, \cdots, x_p)$. En effet on a pour toute matrice A : $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} {}^tAA$ ou encore pour tout endomorphisme u : $\operatorname{Rg} u^* \circ u = \operatorname{Rg} u$
(ceci parce que $\ker(u^* \circ u) = \ker u$ car $\ker u \subset \ker u^* \circ u$ et $\forall x \in \ker u^* \circ u$ on a $u^* \circ u(x) = 0$ et $(u^* \circ u(x), x) = 0 = (u(x), u(x))$ donc $x \in \ker u$.)
Si $x_1, \cdots, x_n)$ est libre alors $M \in \mathcal{GL}_n$ et $\det({}^tMM) = (\det M)^2 > 0$.
2) Si $y = x - p_F(x) \in F^\perp$ alors $d = ||y||$. Calculons $\mathcal{G}(x, x_1, \cdots, x_n) = \mathcal{G}(P_F(x), x_1, \cdots, x_n) + \mathcal{G}(y, x_1, \cdots, x_n)$. Mais $\mathcal{G}(P_F(x), x_1, \cdots, x_n) = 0$ car $P_F(x) \in F$ et $\mathcal{G}(y, x_1, \cdots, x_n) = ||y||^2\mathcal{G}(x_1, \cdots, x_n)$ car $y \in F^\perp$. Ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 24 Montrer que le matrice de Hilbert $H_n = (\dfrac{1}{i+j-1})_{1\leq i,j\leq n}$ est définie positive.

[Ind] $\dfrac{1}{i+j-1} = \displaystyle\int_0^1 t^{i+j-2}dt.$

[Dem] On écrit $\dfrac{1}{i+j-1} = \displaystyle\int_0^1 t^{i+j-2}dt$ ce qui permet d'écrire $\displaystyle\sum_{i,j} \frac{1}{i+j-1}x_ix_j = \sum_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} t^{i-1}x_i\right)^2 dt \geq 0$.

Exercice 25 Montrer qu'une matrice symétrique réelle S est positive (resp. définie positive) si et seulement si il existe une matrice carrée A (resp. inversible) telle que $S = {}^tAA$.
Montrer alors , qu'en général, la matrice A n'est pas unique. Quelle condition supplémentaire sur A doit-on imposer pour avoir l'unicité de A.

[Ind] S est diagonalisable, elle est semblable à une matrice diagonale D de diagonale positive et il est facile d'écrire $D = \Delta^2$.

[Dem] La matrice S est diagonalisable donc il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $S =^t PDP$. Mais D est diagonale positive on peut donc écrire $D = \Delta^2 =^t \Delta\Delta$. Ainsi $S =^t P^t\Delta\Delta P =^t (\Delta P)\Delta P =^t AA$ avec $A = \Delta P$. La matrice A n'est pas unique car Δ n'est pas unique, mais si on impose Δ positive on n'a plus le choix pour les racines carrées et A est alors unique.

Exercice 26 Trouver les bornes sur $\mathbb{R}^3$ privé de 0 de la fonction

$$f(x, y, z) = \frac{(x + 2y + 3z)^2}{3x^2 + 2y^2 + z^2}$$

[Ind] Quotient de deux formes quadratiques.

[Dem] Posons pour commencer $X = \sqrt{3}x$, $Y = \sqrt{2}y$ $Z = z$ l'expression devient, en posant $u = (X, Y, Z)$: $f(X, Y, Z) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{X}{||u||} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{Y}{||u||} + 3\frac{Z}{||u||}\right)^2$. L'expression est toujours positive et 0 est atteint pour $X = Y = Z = 0$. Le minimum de f est donc 0.
En remarquant que $f(X, Y, Z) = \frac{1}{||u||^2}\left(\langle a, u\rangle\right)^2$ où $a = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$ et en utilisant Cauchy-Schwarz on a $f(X, Y, Z) \leq ||a||^2$, de plus il y a égalité pour u colinéaire à a. La borne supérieure de f est donc $\frac{50}{6}$.

Exercice 27 Soit A une matrice symétrique positive. Montrer qu'il existe une unique matrice symétrique positive S telle que $S^2 = A$.

[Ind] A est diagonalisable, elle est semblable à une matrice diagonale D de diagonale positive et il est facile d'écrire $D = \Delta^2$. Pour l'unicité penser aux valeurs propres et aux sous espaces propres.

[Dem] L'existence se montre comme l'exercice 25. Pour l'unicité soit $R \in \mathcal{S}_n^+$ telle que $R^2 = S$. Pour toute valeur propre de R on a $E_R(\lambda) \subset E_S(\lambda^2)$ mais l'égalité $\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(R)} E_R(\lambda) = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(S)} E_S(\lambda^2) = \mathbb{R}^n$ donne l'égalité $\forall\lambda \in \mathrm{Sp}(R) : E_R(\lambda) = E_S(\lambda^2)$. Ceci prouve que R et S sont simultatément diagonalisable (c'est à dire avec la mÃªme base). D'où l'unicité de R.

Exercice 28 Soit A une matrice inversible, montrer qu'il existe une matrice orthogonale P et une matrice symétrique S telles que $A = PS$

[Ind] (utiliser l'exercice précédent).

[Dem] A étant inversible la matrice ${}^tAA$ est symétrique strictement positive. D'après l'exercice précédent on a l'existence de la matrice symétrique S et d'une matrice orthogonale P telle que ${}^tAA = P\Delta^{2t}P$. Posons $S = P\Delta^tP$, S est inversible et ${}^tAA = S^2$. En posant $\Omega = AS^{-1}$ on a d'une part $A = \Omega S$ avec S symétrique et d'autre part Ω est ortogonale car ${}^t\Omega\Omega =^t S^{-1t}AAS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I$. On peut mÃªme montrer l'unicité en obligeant S à Ãªtre positive.

Exercice 29 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère sur $E \times E$ l'application:

$$< P, Q >= \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} P(t)Q(t)dt.$$

Montrer que $< ., . >$ est un produit scalaire sur E.
Soit u l'endomorphisme de E défini par $u(P)(t) = (t^2 - 1)P''(t) + (2t + 1)P'(t)$. Montrer que u est autoadjoint. Quelles sont ses valeurs propres ?

[Ind] Vérifier en faisant des intégrations par parties. Regarder une équation différentielle.

[Dem] Vérifier que l'on a un produit scalaire ne pose pas de problème. $\langle \ , \ \rangle$ est bien définie, symétrique, linéaire par rapport par exemple à P, et est défini car l'intégrale d'une fonction continue positive est nulle si et seulement si la fonction est nulle ($\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} > 0$ et un polynÃ´me nul sur $]-1,1[$) est identiquement nul.
Il s'agit de vérifier que $\Delta(P,Q) = \langle u(P), Q\rangle = \langle P, u(Q)\rangle$.
On a $\Delta(P,Q) = \displaystyle\int_{-1}^{+1} \left((t^2-1)P'' + 2tP' + P'\right) Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt$
$= \displaystyle\int_{-1}^{+1} \left((t^2-1)P'' + 2tP'\right) Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} + \int_{-1}^{+1} P'Q\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt$
Nous faisons une intégration par paties sur la première intégrale en reconnaissant la dérivée de $(t^2-1)P'$ on obtient :
$\Delta(P,Q) = -\displaystyle\int_{-1}^{+1} \left((t^2-1)Q' + Q\right) P'\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt + \int_{-1}^{+1} P'Q\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt$
$= -\displaystyle\int_{-1}^{+1} Q'P'(t^2-1)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt$. L'expression obtenue est symétrique en P et Q donc $\Delta(P,Q) = \Delta(Q,P)$.
Pour les valeurs propres λ on obtient l'équation différentielle $(t^2-1)P'' + (2t+1)P' - \lambda P = 0$. Cette équation possède une solution polynÃ´miale de degré p pour $0 \le p \le n$. Mais en regardant les termes de plus haut degré on a $p(p-1) + 2p - \lambda = 0$ ou $\lambda = p(p+1)$. Nous avons les valeurs propres, $n+1$ valeurs propres distinctes.

4.14.1 Travaux Dirigés : Espace euclidien

Exercice 30 [Révision]
Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et les trois éléments $A_1 = \frac{1}{2}(X-2)(X-3)$, $A_2 = -(X-1)(X-3)$, $A_3 = \frac{1}{2}(X-1)(X-2)$.
1°) Montrer que $\{A_1, A_2, A_3\}$ est une base de E. Quelles sont sur cette base les composantes des vecteurs $1, X, X^2$ et P où $P \in E$?
2°) Quelles sont les matrices de passage entre les deux bases ?
3°) Soit $M = (X-1)(X-2)(X-3)$ et $S \in \mathbb{R}[X]$. On note pour tout P de E, $\overline{SP}$ le reste de la division euclidienne de SP par M et u l'application $P \longmapsto u(P) = \overline{SP}$.
Montrer que u est un endomorphisme de E et trouver sa matrice dans le base $\{A_1, A_2, A_3\}$, puis dans la base $\{1, X, X^2\}$.
4°) Soit $v \in End(E)$, tel que $M(v) = 0$. Calculer les produits $A_i(v) \circ A_j(v)$ pour i, j variant de 1 à 3.

[Dem] Nous allons nous sevir du fait que $A_j(i) = \delta_{ij}$.

- E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension 3, il suffit donc de prouver que (A_1, A_2, A_3) est libre. Or $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = 0$ donne pour $X = 1 : \alpha_1 A_1(1) = 0$ soit $\alpha_1 = 0$ puis pour $X = 2, X = 3$ cela donne $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$. Il existe donc $(\lambda_0, \mu_0, \nu_0)$ tel que $1 = \lambda_0 A_1 + \mu_0 A_2 + \nu_0 A_3$ que l'on calcule par $X = 1, X = 2, X = 3$. On trouve $\left\{\begin{array}{l} 1 = A_1 + A_2 + A_3 \\ X = A_1 + 2A_2 + 3A_3 \\ X^2 = A_1 + 4A_2 + 9A_3 \end{array}\right.$ puis pour tout P de $E : P = P(1)A_1 + P(2)A_2 + P(3)A_3$.
- Soit $P = \mathcal{M}_{(A_i)\to(X^j)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -\frac{5}{2} & 4 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ en inversant $\left\{\begin{array}{l} A_1 = 3 - \frac{5}{2}X + \frac{1}{2}X^2 \\ A_2 = -3 + 4X - X^2 \\ A_3 = 1 - \frac{3}{2}X + \frac{1}{2}X^2 \end{array}\right.$.
- u est un endomorphisme de E car $\overline{SP} \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg(P) < 3$, donc $u(P) \in E$. En décomposant $P \overset{h}{\to} SP \overset{k}{\to} \overline{SP}$ on a que h est linéaire et k est le reste on a : $T_1 = R_1(M)$ et $T_2 = R_2(M)$ donne $T_1 + T_2 = R_1 + R_2(M)$ et $\lambda T_1 = \lambda R_1(M)$ donc k est linéaire. Les colonnes de la matrice de u sont dans (A_1, A_2, A_3) les images $u(A_i)$ exprimées dans (A_i). En divisant S par $(X-1)$ il existe un unique polynôme Q tel que : $S = (X-1)Q + S(1)$ d'où $SA_1 = Q(X-1)A_1 + S(1)A_1$ avec $\deg(S(1)A_1) = 2$ et $Q(X-1)A_1 = \frac{1}{2}QM$. L'unicité donne $\overline{SA_1} = S(1)A_1 = u(A_1)$ puis $u(A_2) = S(2)A_2$ et $u(A_3) = S(3)A_3$. Ainsi $\mathcal{M}_{(A_i)}(u) = \begin{pmatrix} S(1) & 0 & 0 \\ 0 & S(2) & 0 \\ 0 & 0 & S(3) \end{pmatrix}$ qui est donc diagonale.

- On a $A_1(v) \circ A_2(v) = \left(\frac{1}{2}(v-I)\circ(v-3I)\right)\circ(-(v-I)\circ(v-3I)) = -\frac{1}{2}((v-2I)\circ(v-3I)\circ(v-I))\circ(v-3I)$. Le produit est en effet commutatif pour les polynômes d'endomorphisme on a $A_1(v)\circ A_2(v) = -\frac{1}{2}M(v)\circ(v-3I) = -\frac{1}{2}(v-3I)\circ M(v) = 0$. De même $A_i(v)\circ A_j(v) = 0$ pour tout $i \neq j$. De $1 = A_1 + A_2 + A_3$ on en déduit que $A_1(v) = A_1(v)\circ(A_1(v)+A_2(v)+A_3(v))$ d'où $A_1(v) = (A_1(v))^2$ et de même $A_2^2(v) = A_2(v)$ et $A_3^2(v) = A_3(v)$.

Exercice 31 Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ A est-elle diagonalisable. Montrer que A est semblable à la matrice $J = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

[Dem] On a $C_A(X) = -(X+2)^3$. On cherche une base (v_1, v_2, v_3) telle que $(u+2I)v_3 = v_2$ et $(u+2I)v_2 = v_1$. C'est à dire $v_1 \in \ker(u+2I)$ avec $v_1 \neq 0$, $v_2 \in \ker(u+2I)^2$ et $v_2 \notin \ker(u+2I)$ et $v_3 \in \ker(u+2I)^3 = E$ et $v_3 \notin \ker(u+2I)^2$. Comme $\dim\left(\ker(u+2I)^2\right) = 2$ on sait que l'un au moins des vecteurs e_1, e_2, e_3 peut-être v_3. On prend $v_3 = e_3$ et $(u+3I)v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ on pose $v_2 = (u+2I)v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_1 = (u+2I)v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ on a $P^{-1}AP = J$ avec $J = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 32 Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base $\{e_1, e_2, e_3\}$, soit l'endomorphisme u défini par sa matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. On note v l'endomorphisme de matrice $A + I$.

1°) En observant $A + I$, montrer que -1 est valeur propre de u, en déduire $\ker(A + I)$.
2°) Calculer le polynôme caractéristique de u.
3°) On pose $v_1 = e_3 - e_2$, montrer en calculant $v(e_i)$ et $v^2(e_i)$ pour $i = 1, 2, 3$ en fonction de e_1, e_2, v_1, que v est nilpotent d'indice 3.
4°) On pose $v_2 = e_1, v_3 = e_2$. Exprimer la matrice de v dans la base (V_1, V_2, V_3), donner également la matrice de passage P.
5°) En déduire une forme triangulaire de u, de matrice T.
6°) Calculer T^n et A^n.
7°) En déduire pour des valeurs de x à préciser, la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} A^n$.

[Dem] Soit $B = A + I = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ on a $rang(B) = 2$ et donc $\dim \ker(A+I) = 1$ et -1 est valeur propre de A. D'autre part $v(e_2) = v(e_3) = ae_1$ donc $u(e_3 - e_2) = 0$ et $u(V_1) = -V_1$ avec $V_1 = e_3 - e_2$. $\ker(A+I) = vect(V_1)$.

- $C_A(X) = -(X+1)^3$. (-1) est valeur propre triple de A et comme $B \neq 0$ on a que A n'est pas diagonalisable.
- $v(e_1) = -V_1, v(e_2) = ae_1, v(e_3) = ae_1$ puis $v^2(e_1) = v(V_1) = 0, v^2(e_2) = -aV_1, v^2(e_3) = -aV_1$ et donc $v^2 \neq 0$ si $a \neq 0$ sans calcul on a $v^3 = 0$.
- $v(V_1) = 0, v(e_1) = V_1, v(e_2) = ae_1$ d'où $v(V_1) = 0, v(V_2) = V_1, v(V_3) = aV_2$. Ainsi (V_1, v_2, V_3) est bien une base, donc $N = \mathcal{M}_{(V_i)}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $N = P^{-1}BP$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- v est triangulaire par N et $N = P^{-1}(A+I)P$ soit $N = P^{-1}AP + I$ ou $N - I = P^{-1}AP = T$ et $T = N - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- Comme $N^3 = 0$ on a $T^n = (-1)^n (I - N)^n = (-1)^n \left(I - nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 \right)$ d'où $A^n = PT^nP^{-1} =$ $(-1)^n \left(I - nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2 \right)$ avec $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & -a \\ 0 & a & a \end{pmatrix}$ et $A^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & -na & -na \\ n & 1 + \frac{n(n-1)}{2} a & n\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) a \\ -n & -\frac{n(n-1)}{2} a & 1 - \frac{n(n-1)}{2} a \end{pmatrix}$.
- Le rayon de convergence est $R = 1$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ d'où $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} A^n = \sum_{n \geq 1} (-1)^n \left(\frac{1}{n} x^n I - x^n B - \frac{n-1}{2} x^n B^2 \right) =$ $-\ln(1+x) I + \frac{x}{1+x} B - \frac{x^2}{(1+x)^2} B^2$.

Exercice 33 Soit A une matrice symétrique réelle $A = ((a_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n}$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ ses valeurs propres. Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij})^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$.

[Dem] A étant symétrique réelle est diagonalisable dans le groupe orthogonal : il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP = D$ où $D = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Ainsi $tr(D^2) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i^2$ et $tr(D^2) = tr({}^tP(A^2P)) =$ $tr(A^2P{}^tP) = tr(A^2)$. Si $A^2 = ((c_{ij}))$ on a $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}$ or $a_{ik} = a_{ki}$ d'où $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}$ et $tr(A^2) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (a_{ik})^2$.

Exercice 34 Soit A une matrice symétrique réelle telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ avec $A^k = I$. Montrer alors que $A^2 = I$.

[Dem] A est symétrique réelle donc il existe P matrice orthogonale telle que ${}^tPAP = D = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ par suite ${}^tPA^kP = D^k$. Or $A^k = I = {}^tPP$ ou $D^k = I$ il en résulte que pour tout i on a : $\lambda_i^k = 1$, avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Cela nécésitte $\lambda_i = \pm 1$ de toute façon on aura $\lambda_i^2 = 1$ et par suite $D^2 = I$ et $A^2 = PD^{2t}P = I$.

Exercice 35 Soit $n \geq 2$ fixé. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Soit u l'endomorphisme de E défini par $Q \longmapsto u(Q) = Q(0)1 + Q(1)(X^2 - X)$.

1°) On se place d'abord dans le cas où $n = 2$. Ecrire la matrice de u dans la base canonique $B = (1, X, X^2)$ de E. Calculer le plolynôme caractéristique C_u, les valeurs propres et les vecteurs propres de u, u est-il diagonalisable ?

2°) Montrer que la matrice de u est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3°) Dans le cas général de la dimension n, décrire le noyau $\ker u$ et en donner une base, quelle est la dimension du noyau ? Montrer que $\ker u \cap im\ u$ est engendré par un seul vecteur que l'on précisera.

[Dem] $u(Q) = Q(0)1 + Q(1)(X^2 - X)$ donc $\begin{cases} U(1) = 1 + X^2 - X \\ U(X) = 0 + (X^2 - X) \\ U(X^2) = 0 + (X^2 - X) \end{cases}$ et $M(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
$C_A(X) = \det(X - A) = X^2(X-1)$ et $\lambda = 0$ donne le noyau formé des polynômes Q s'annulant en $0, 1$ soit les multiples de $(X^2 - X)$. On prendra $V_1 = (0, -1, 1)$. Pour $\lambda = 1$ on obtient $\begin{cases} -x - 2y - z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ et on prend $V_2 = (1, -1, 1)$. Comme $\ker A$ est de dimension 1, il en résulte que A n'est pas diagonalisable.
On cherche U_1, U_2, U_3 tels que $u(U_1) = U_1, u(U_2) = 0, u(U_3) = U_2$. Ainsi $U_1 = V_2 = (1, -1, 1)$ puis $U_2 \in \ker u$ soit $U_2 = (0, -1, 1)$. Pour le polynôme Q associé à U_3 il doit vérifier $u(Q) = U_2 = -X + X^2$ on peut prendre $Q = X$ ou $Q = X^2$. Ainsi $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
$\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$ et $im(u) = 2 = vect(1, X - X^2)$ ce qui donne $\dim \ker u = (n+1) - 2 = n - 1$. En effet si $Q \in \ker u$ alors il s'annule en $0, 1$ et $Q = X(X-1)R$ mais $\deg(Q) \leq n$ et donc

$\deg(R) \leq n-2$. $\ker u = \{Q = X(X-1)R$ avec $\deg(R) \leq n-2\}$. L'application $\mathbb{R}_{n-2}[X] \xrightarrow{R \longmapsto X(X-1)R} \ker u$ est un isomorphisme et donc $\dim \ker u = n-1$. Si $I = \ker u \cap imu$ ses éléments sont multiples de de $X - X^2$ dans $vect\left(1, X - X^2\right)$ et donc $I = vect\left(X - X^2\right)$.

Exercice 36 Soit E l'espace vectoriel euclidien réel de dimension 3 rapporté à la base orthonormée $B = (i, j, k)$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E On appelle id_El'application identique de E et r l'endomorphisme ayant pour matrice dans B : $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1°) Montrer que r est une isométrie ; préciser ses caractéristiques géométriques.
2°) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ engendré par les trois applications $id_E, r, r^2 = r \circ r$. Quelle est la dimension de F? F est-il stable pour la composition des endomorphismes?
3°) Soit D la droite vectorielle engendrée par $u = i + j + k$. Montrer que F contient toutes les rotations d'axe D : il pourra être utile de choisir une nouvelle base de E.

[Dem] r transforme la base orthonormée (i, j, k) en (j, k, i) qui est une base orthonormée directe, c'est donc une rotation. L'axe est dirigé par $i + j + k$ (qui est invariant) et l'angle est $\dfrac{2\pi}{3}$.
$\dim F = 3$, on vérifie l'indépendance de Id, r, r^2 et comme $r^3 = Id$ on en déduit la stabilité.
Soit $B' = \left(u, \frac{1}{\sqrt{2}}(i-j), \frac{1}{\sqrt{2}}(j-k)\right)$ une nouvellebase orthonormée directe. Une rotation d'axe D a pour matrice dans cette base : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$. r a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, avec $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Et r^2 a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ 0 & \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$. On montre alors que toute rotation d'axe D est combinaison liméaire de r et r^2, en effet $\begin{cases} x\cos\theta + y\cos 2\theta = a \\ x\sin\theta + \sin 2\theta = b \end{cases}$ a pour déterminant $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0$

Exercice 37 Préciser la transformation de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est : $M = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

[Dem] M est orthogonale de déterminant -1, on sait que -1 est valeur propre. Les invariants sont donnés par $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -9 & 6 & -3 \\ 6 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ qui est de rang 1, il s'agit donc de la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $3x - 2y + z = 0$.

Exercice 38 Soit $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & -4 & 4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$ élément de $M_3(\mathbb{R})$.

1°) Quelle transformation de $\mathbb{R}^3$ euclidien représente A?
2°) Trouver les matrices qui commutent avec A.

[Dem] A est orthogonale de déterminant -1, A n'est pas symétrique et donc A n'est pas une symétrie orthogonale et est semblable à $B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. On a $tr(A) = tr(B)$ ou $2\cos\theta - 1 = -\frac{23}{9}$ ou $\cos\theta = -\frac{7}{9}$. On a $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w = e_2 + e_3$ est vecteur propre. De plus $\det(e_1, Ae_1, w) = \frac{8}{9} > 0$ et $\sin\theta = \frac{4\sqrt{2}}{9}$. La matrice est celle de la composée d'une rotation axiale autour de w, d'angle θ et de la symétrie orthogonale par rapport à $w^{\perp}$.

Le commutant de B est formé de matrices $M = \begin{pmatrix} c & d & 0 \\ e & f & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ la matrice $C = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$ commute avec $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = D$ elle doit donc commuter avec $D - \cos\theta I$ c'est à dire avec $\begin{pmatrix} 0 & -\sin\theta \\ \sin\theta & 0 \end{pmatrix}$ ou avec $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ce qui donne $M = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$. On obtient donc un sev de dimension 3 et $com\,(A) = vect\left(I, A, A^2\right)$.

Exercice 39 Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ rapporté à une base $B = (i, j, k)$, déterminer la matrice de l'isométrie u dans les cas suivants :

1°) u est la symétrie par rapport au plan U engendré par k et $v = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

2°) u est la symétrie par rapport à la droite vectorielle U de vecteur directeur $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3°) u est la rotation r autour de la droite vectorielle U engendrée par $v = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ et par laquelle i a pour image j.

4^0) Dans $\mathbb{R}^4$ trouver la matrice de la symétrie orthogonale s_H par rapport au plan H : $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

[Dem] 4^0) On a pour la projection $p_H = \frac{1}{2}(s_H + Id)$ une base de H est $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On orthonormalise cette base $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} u_1$ et $v_2 = \frac{1}{\|v_2'\|} v_2'$ avec $v_2' = u_2 - \dfrac{\langle u_2, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 = u_2 - \frac{2}{2} u_1 = u_2 - u_1$ et $v_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ainsi $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. En utilisant la formule $P_H(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i$

on obtient $\begin{cases} P_H(C_1) = \langle C_1, v_1\rangle v_1 + \langle C_1, v_2\rangle v_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ P_H(C_2) = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \\ P_H(C_3) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) \\ P_H(C_4) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \end{cases}$ ce qui donne avec $s_H(x) = 2P_H(x) - x$

pour la matrice $M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 40 Dans le plan euclidien démontrer que toute rotation peut se décomposer en un produit de deux symétries orthogonales, l'une pouvant être choisie arbitrairement. Pour cela on pourra utiliser les nombres complexes.

Exercice 41 Soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$. Calculer dans la base canonique la matrice de la projection sur D parallèlement à P.

Exercice 42 soit la forme quadratique dans $\mathbb{R}^2$: $q(x, y) = 2x^2 - xy - y^2$, écrire sa matrice, la réduire.

Exercice 43 Dans $\mathbb{R}^2$ soit la forme bilinéaire : $\varphi(X,Y) = x_1y_1 - x_2y_2$ on note $H = \{X; x_1 = x_2\}$. Montrer que : $H^\perp = H$.

Exercice 44 Soit $\mathbb{R}^n$ euclidien et a l'endomorphisme naturellement associé à la matrice $A = ((a_{ij}))$, définie par $a_{ii} = 1, a_{i,i+1} = -1, a_{n,1} = -1$ et $a_{ij} = 0$ sinon. Exprimer A sous la forme $P(U)$ où $P \in \mathbb{C}[X]$ et U est une matrice de permutation. Trouver les valeurs propres de U et de A^*A, calculer $|||A|||$.

[Dem] $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n - U$ avec $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est bien une matrice de permutation, $P(X) = 1 - X$. Les matrices $I_n, U, U^2, \cdots, U^{n-1}$ sont indépendantes en effet on a : $u(e_1) = e_n, u(e_i) = e_{i-1}$ pour $i > 2$ donc $u^2(e_1) = e_{n-1}, u^3(e_1) = e_{n-2}, \cdots, u^{n-1}(e_1) = e_2$ ainsi si $\alpha_1 I + \alpha_2 u + \cdots + \alpha_n u^{n-1} = 0$ alors l'image de e_1 est $0 = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_2 = 0$ et pour tout i on obtient $\alpha_i = 0$. Le polynôme mimimal de U est $X^n - 1$ et le polynôme caractéristique $(-1)^n(X^n - 1)$ car $U^n = I$. Il est scindé à racines simples, U est diagonalisable avec $sp(U) = U_n$ groupe des racines $n^{ème}$ de l'unité. $U^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} = {}^tU$ et $A^*A = (I_n - U^{n-1})(I_n - U) = I_n - U^{n-1} - U + I_n = 2I_n - U - U^{n-1}$. Toute base de diagonalisation de U en est une de tout polynôme de U, on a une base propre de A^*A avec pour valeurs propres les $2 - \lambda_k - \lambda_k^{n-1}$ avec $\lambda_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k = 1 \cdot\cdot n$. Mais $\lambda_k\overline{\lambda}_k = 1\lambda_k\lambda_k^{n-1}$, les valeurs propres sont donc $2 - \lambda_k - \overline{\lambda}_k = 2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n} = 4\sin^2\frac{k\pi}{n}$ pour $k = 1 \cdot\cdot n$.

Enfin $\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle x, A^*Ax\rangle$ et en diagonalisant A^*A dans une base orthonormée on a $|||A|||^2 = \sup\{|\mu_k|; k = 1 \cdot\cdot n\}$ et μ_k les valeurs propres de A^*A. Si $n = 2p$ ce rayon spectral est 4 et $|||A||| = 2$, si $n = 2p+1$ ce rayon spectral est $\sin^2\frac{p\pi}{2p+1}$ et $|||A||| = 2\sin\frac{p\pi}{2p+1}$.

Exercice 45 Soit $E = \mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $|||A||| = \sup\{\|Ax\|; \|x\| = 1\}$. Soit enfin $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que les valeurs propres de A^*A sont strictement positives.

Si $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ sont les valeurs propres de A^*A comptées avec leur ordre de multiplicité, montrer que $|||A||| = \sqrt{\lambda_1}$ et $\left|\left|\left|A^{*-1}\right|\right|\right| = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}$ puis que $\inf\{|||A - M|||; \det M = 0\} = \sqrt{\lambda_n}$.

[Dem] Si on a la relation $A^*Ax = \lambda x$ alors $\langle x, A^*Ax\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = \lambda\|x\|^2 = \|Ax\|^2$ donc on en déduit que $\lambda > 0$ car $x \neq 0$ et A est inversible. Remarquons que A^*A étant symétrique réelle, les valeurs propres sont réelles.

A^*A est diaonalisable, dans une base propre orthonormée C=$(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ on a $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j c_j$ et $\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle x, A^*Ax\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j, \sum_{k=1}^n \alpha_k\lambda_k e_k \right\rangle = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2 \lambda_k \leq \lambda_1 \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2$. Si $\|x\| = 1$ alors il reste $\|Ax\| \leq \sqrt{\lambda_1}$ soit $|||A||| \leq \sqrt{\lambda_1}$ mais pour $x = e_1$ on atteint ce majorant donc on a l'égalité. La même base est orthonormée et propre pour $A^{-1}A^{*-1}$ mais avec pour valeurs propres : $A^{-1}A^{*-1}(e_j) = \frac{1}{\lambda_j}e_j$. On a donc $\left|\left|\left|A^{-1}\right|\right|\right| = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}$.

Si M est de rang inférieur strictement à n alors il existe x_0 de la sphère unité tel que $M(x_0) = 0$ donc $\|(A - M)(x_0)\| = \|A(x_0)\| \geq \sqrt{\lambda_n}\|x_0\| = \sqrt{\lambda_n}$ alors que précédament on avait $\lambda_n\|x\|^2 \leq \|Ax\|^2 \leq \lambda_1\|x\|^2$, ainsi $|||A - M||| = \sup\{\|(A - M)(x)\|; \|x\| = 1\}$ et on a $|||A - M||| \geq \|(A - M)(x_0)\| \geq \sqrt{\lambda_n}$ et $d = \inf\{|||A - M|||; \det(M) = 0\} \geq \sqrt{\lambda_n}$.

Sur la base C on définit M_0 par $M_0e_i = Ae_i$ pour $i < n$ et $M_0e_n = 0$ on a ainsi $\det(M) = 0$ et pour tout $i < n$: $(A - M)e_i = 0$ alors que $(A - M_0)e_n = Ae_n$ donc avec $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j$ on a :

$\|(A - M_0)(x)\|^2 = \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (A - M_0) e_j \right\|^2 = \|\alpha_n A e_n\|^2 = |\alpha_n|^2 \langle Ae_n, Ae_n \rangle = |\alpha_n|^2 \langle e_n, A^* A e_n \rangle$
$= \lambda_n |\alpha_n|^2 \leq \lambda_n \|x\|^2$. Ainsi si $\|x\| \leq 1, \|(A - M_0)(x)\| \leq \sqrt{\lambda_n}$ et, comme $\|(A - M_0)(e_n)\| = \sqrt{\lambda_n}$ on a $\||A - M_0\|| = \sqrt{\lambda_n}$ et finalement $d = \sqrt{\lambda_n}$ avec cet inf atteint.

Exercice 46 Réduire et trouver une base propre associée à la forme quadratique Q sur $\mathbb{R}^3$ définie par : $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2(yz + zx + xy)$.

[Dem] Une décomposition en carrées par la méthode de Gauss :
$Q(x, y, z) = x^2 + 2x(-y - z) + y^2 + z^2 - 2yz = (x - y - z)^2 - (y + z)^2 + y^2 + z^2 - 2yz = (x - y - z)^2 - 4yz$
$= (x - y - z)^2 - (y + z)^2 + (y - z)^2$. Ainsi Q est de rang 3 et de signature $(2, 1)$. En posant $X = x - y - z, Y = y - z, Z = y + z$ on obtient les formes coordonnées dans une nouvelle base (I, J, K), la matrice de passage étant telle que : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ou $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Dans cette base Q s'écrit $X^2 + Y^2 - Z^2$.