Chapitre 3

Réduction des endomorphismes

Marie Ennemond Camille Jordan (5 janvier 1838 - 22 janvier 1922) était un mathématicien franÃ§ais, connu à la fois pour son travail fondamental dans la théorie des groupes et pour son influent Cours d'analyse. Il est né à Lyon et étudia à l'École polytechnique (Promotion 1855). Il fut ingénieur de profession puis plus tard, enseigna à l'École polytechnique et succéda à Liouville au Collège de France où il avait une réputation de choix de notation excentriques. On se souvient aujourd'hui de son nom dans un certain nombre de résultats fondamentaux : le théorème de la courbe de Jordan : un résultat topologique requis en analyse complexe ; la forme normale de Jordan et la réduction de Jordan souvent confondue avec les travaux de Wilhelm Jordan 1842-1899 à qui l'on doit la méthode du pivot ou d'Élimination de Gauss-Jordan. le théorème de Jordan-Hölder qui est un résultat basique des séries de compositions. En fait le travail de Jordan a fait beaucoup pour introduire la théorie de Galois dans le courant de pensée majoritaire. Il investigua aussi les groupes de Mathieu, les premiers exemples de groupes sporadiques. Son Traité des substitutions sur les permutations de groupes fut publié en 1870.

3.1 Généralités

E désigne un espace vectoriel sur K non réduit à $\{0\}$.

3.1.1 Sous-espaces stables

Définition 1 *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un s.e.v. de E, on dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$. On note alors $u_{|F}$ l'endomorphisme de F déduit de u par restriction à F.*

Exercice 1 Si E est de dimension finie et si u est un automorphisme de E, montrer que le s.e.v F est stable par u si et seulement si $u(F) = F$.
En revanche, montrer que si E n'est pas de dimension finie, on peut avoir F stable par u et $u(F) \neq F$ mÃªme si $u \in \mathcal{GL}(E)$.

[Ind] F est de dimension finie s'il est inclus dans un espace de dimension finie.

[Dem] Puisque u est un automorphisme, la dimension de $(u(F))$ est celle de F, si F est stable par u, $u(F)$ et F sont des sous-espaces vectoriels emboîtés de mÃªme dimension finie, ils sont donc égaux.
Prenons $F = K[X^2]$ et $u \in \mathcal{L}(K[X])$ défini par la famille des images de la base canonique : $u(X) = X^2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u(X^{2n}) = X^{2n+2}$, $u(X^{2n+3}) = X^{2n+1}$, l'image de la base canonique étant une base de $K[X]$, u est un automorphisme, F est stable par u et $u(F) \neq F$.

3.1.2 Sous-espaces propres

Définition 2 Valeur propre, sous-espace propre. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. un scalaire λ est une valeur propre de u si et seulement si $E_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda I_E) \neq \{0\}$. Le sous-espace vectoriel E_λ est alors appelé sous-espace propre relatif à la valeur propre λ.*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $\lambda \in K$ est une valeur propre de A si et seulement si $\operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$*, où A est identifié avec l'application linéaire de K^n dans K^n qui à X associe AX.*

Définition 3 *L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme u (resp d'une matrice A) est appelé spectre de u (resp de A) et noté* $\operatorname{Sp}(u)$ *(resp* $\operatorname{Sp}(A)$*).*

Définition 4 Vecteur propre. *Un vecteur x appartenant à E est un vecteur propre de u si et seulement si $x \neq 0$ et s'il existe $\lambda \in K$ tel que $u(x) = \lambda.x$, c'est à dire $x \in E_\lambda - \{0\}$.*

Exercice 2 Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$ suivants:
a) $P \mapsto XP$ b) $P \mapsto XP'$ c) $P \mapsto (X^2 - 1)P' - XP$

[Ind] Chercher le degré de l'image d'un polynôme P

[Dem]
a) Si $P \neq 0$, on a $\deg(u(P)) = \deg(P) + 1$, il ne peut donc pas exister de vecteurs propres.
b) Si P est de degré $n > 0$, l'image de P est de degré n, mais son coefficient dominant est celui de P multiplié par n, les seules valeurs propres possibles sont donc les entiers positifs. Pour $n \in \mathbb{N}$, on tente alors de résoudre l'équation $XP' = nP$. Le polynôme P doit donc Ãªtre de degré n, on pose alors $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et on égale les coefficients de mÃªme degré dans les polynômes XP' et nP, on trouve alors que pour tout entier k strictement inférieur à n, on a $a_k = 0$ et puisque, le polynôme X^n est bien un vecteur propre, on constate alors que le spectre de l'endomorphisme est $\mathbb{N}$ et que le sous-espace propre associé à un entier positif n est le sous-espace vectoriel engendré par X^n.
c) Si P est de degré $n > 0$, le polynôme image est de degré inférieur ou égal à $n + 1$ et le coefficient du terme de degré $n + 1$ est égal à celui de P multiplié par $n - 1$. Ainsi, seuls les polynômes de degré 1 sont susceptibles d'Ãªtre des vecteurs propres. On pose alors $P = aX + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$, l'image de P est $-bX - a$ et on cherche les valeurs de λ pour lesquelles l'équation $-bX - a = \lambda(aX + b)$ possède au moins une solution non nulle. On a donc $\lambda a + b = 0$ et $a + \lambda b = 0$. On obtient un système de deux équations à deux inconnues a et b et le déterminant de ce système est $\lambda^2 - 1$, ainsi les valeurs propres sont -1 et 1 et les sous-espaces propres associés sont respectivement $\mathbb{R} \cdot (X + 1)$ et $\mathbb{R} \cdot (X - 1)$.

Proposition 1 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ des valeurs propres distinctes de u.*

1) Les sous-espaces propres correspondants sont en somme directe : $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$.

2) Si $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont des vecteurs propres de u associés respectivement aux valeurs $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille libre.

[Ind] Faire une démonstration par récurrence sur l'entier p.

[Dem] Les deux propriétés sont équivalentes. Montrons la première par récurrence.
La propriété est vraie si $p = 1$.
Supposons la propriété à l'ordre p et soit $\lambda_1, \dots \lambda_{p+1}$ des valeurs propres distinctes de l'endomorphisme u. Soient $x_1, \dots, x_{p+1}$ des éléments des sous-espaces propres associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \dots \lambda_{p+1}$. Supposons que

$$x_1 + \dots + x_{p+1} = 0,$$

on a donc

$$u(x_1) + \dots + u(x_{p+1}) = 0$$

c'est à dire

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{p+1} = 0$$

Multiplions la première égalité par λ_{p+1} et retranchons- la à la dernière, on obtient

$$(\lambda_1 - \lambda_{p+1})x_1 + \dots + (\lambda_p - \lambda_{p+1})x_p = 0.$$

Puisque les p premiers sous-espaces propres sont en somme directe, on a :

$$(\lambda_1 - \lambda_{p+1})x_1 = \dots = (\lambda_p - \lambda_{p+1})x_p = 0$$

ce qui implique, toutes les valeurs propres étant distinctes que

$$x_1 = \cdots = x_p = 0$$

et donc $x_{p+1} = 0$. Les $p+1$ sous-espaces propres sont bien en somme directe et on conclut la proposition en appliquant le principe de récurrence.

Exercice 3 Soit (r_n) une suite de réels tous distincts et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n la fonction numérique d'une variable réelle définie par $\varphi_n(x) = \mathrm{e}^{r_n x}$. Montrer que la famille de fonctions (φ_n) est une famille libre de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

[Ind] La dérivation est un endomorphisme de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, quelles sont ses valeurs propres ?

[Dem] Les fonctions (φ_n) sont des fonctions non nulles, vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes de l'endomorphisme u de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui à une fonction f associe f', on en conclut que la famille (φ_n) est libre.

Proposition 2 *Soit $a \in \mathcal{GL}(E)$. L'application Φ_a, qui, à un endomorphisme u, associe l'endomorphisme $\Phi_a(u) = aua^{-1}$ est un automorphisme de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ appelé automorphisme intérieur de $\mathcal{L}(E)$ associé à a.*

[Ind] Appliquer les définitions.

[Dem] L'application Φ_a est linéaire car $\mathcal{L}(E)$ est une algèbre, d'autre part, si u et v sont des endomorphismes de E, $\Phi_a(uv) = auva^{-1} = aua^{-1}ava^{-1} = \Phi_a(u)\Phi_a(v)$, on en conclut que Φ_a est un morphisme d'algèbre. On constate que $\Phi_a \circ \Phi_{a^{-1}} = \Phi_{a^{-1}} \circ \Phi_a = Id_{\mathcal{L}E}$ donc Φ_a est un automorphisme.

Exercice 4 Que peut-on dire de l'application Φ qui, à $a \in \mathcal{GL}(E)$ associe $\Phi_a \in \mathcal{GL}(\mathcal{L}(E))$?

[Ind] Est-ce un morphisme de groupe, est-elle injective ? surjective ?

[Dem] Supposons E non nul. Soient a et b deux automorphismes de E. Pour tout endomorphisme u de E, on a : $\Phi_{ab}(u) = (ab)u(ab)^{-1} = a(bub^{-1})a^{-1} = \Phi_a \circ \Phi_b(u)$, Φ est donc un morphisme de groupe. Cherchons son noyau; si a vérifie, pour tout endomorphisme u, $\Phi_a(u) = u$ alors on a $au = ua$, on en déduit que a est une homothétie, donc le noyau n'est pas réduit à Id_E et Φ n'est pas injective.
Soit $a \in \mathcal{GL}(E)$, l'application Ψ_a qui à un endomorphisme u de E associe au est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ (ce n'est pas un morphisme d'algèbre) , s'il existait b tel que $\Phi_b = \Psi_a$, alors $\Phi_b(a^{-1}) = Id_E$, on en déduit alors $a^{-1} = Id_E$, ainsi Ψ_{2Id_E} n'appartient pas à l'image de Φ qui n'est donc pas surjective.

Proposition 3 *Soit $a \in \mathcal{GL}(E)$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On a $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(aua^{-1})$ et pour tout élément λ de $\mathrm{Sp}(u)$:*

$$\mathrm{Ker}(aua^{-1} - \lambda Id_E) = a\left(\mathrm{Ker}(u - \lambda Id_E)\right)$$

[Ind] Commencer par l'égalité des sous-espaces vectoriels en procédant par double inclusion.

[Dem] Il suffit de montrer l'égalité entre les sous-espaces vectoriels proposés pour montrer l'égalité des spectres d'après la définition des valeurs propres.
Soit x un élément de E, $x \in \mathrm{Ker}(aua^{-1} - \lambda Id_E)$ équivaut $ua^{-1}(x) = \lambda a^{-1}(x)$ donc équivaut à $a^{-1}(x)$ appartient à $\mathrm{Ker}(u - \lambda Id_E)$ ce qui signifie $x \in a\left(\mathrm{Ker}(u - \lambda Id_E)\right)$.

3.1.3 Polynômes d'endomorphismes

Définition 5 *Soient $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme à coefficients dans K et $u \in \mathcal{L}(E)$. L'endomorphisme $P(u)$, appelé polynôme de l'endomorphisme u, est défini par*

$$P(u) = a_0.Id_E + a_1.u + \cdots + a_n u^n = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k$$

où, pour $k \in \mathbb{N}$, u^k désigne la composée $\underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}$ (avec la convention $u^0 = Id_E$).

Définition 6 *Soient $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in K[X]$, la matrice $P(A)$, appelé polynôme de la matrice A, est définie par*

$$P(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k$$

avec la convention $A^0 = I_n$.

Proposition 4 *Soit E un espace de dimension finie n et $\mathcal{B}$ une base de E. Si A est la matrice de $u \in \mathcal{L}(E)$ dans la base $\mathcal{B}$, alors, pour tout polynôme $P \in K[X]$, $P(A)$ est la matrice de $P(u)$ dans la base $\mathcal{B}$.*

[Ind] Si $\mathcal{B}$ est une base de E, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ est un isomorphisme d'algèbre.

[Dem] L'application $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ est un isomorphisme d'algèbre donc, pour tout entier positif n et tout scalaire a_n, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(a_n u^n) = a_n \left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)\right)^n = a_n A^n$. On finit la démonstration en utilisant la linéarité de l'application $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$.

Exercice 5 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et D l'endomorphisme de $E = C^{\infty}(I, \mathbb{R})$ qui, à la fonction f, associe f'. Trouver l'ensemble des polynômes de D.

[Ind] Appliquer la définition.

[Dem] L'ensemble des endomorphismes qui sont des polynômes de D est l'espace vectoriel engendré par la famille $(Id_E, D, D \circ D, ...)$. Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_n X^n$, pour tout élément y de E, $P(D)(y) = \sum_{k=0}^{n} a_n y^{(n)}$ où $y^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{ième}$ de y.

Exercice 6 Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et T l'endomorphisme de E qui, à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, associe la suite $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$. Soit P le polynôme $P(X) = 1 + X - X^2$. Trouver le noyau de $P(T)$.

[Ind] On a $P(T)((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (u_n + u_{n+1} - u_{n+2})_{n \in \mathbb{N}}$

[Dem] Le noyau de $P(T)$ est l'ensemble des suites réelles vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, c'est donc l'espace vectoriel engendré par les deux suites géométriques de raison $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

ATTENTION. Si u est à valeurs dans K et P un polynôme, ne confondez pas, pour $x \in E$, les valeurs $P(u)(x)$ (valeur sur x de l'endomorphisme $P(u)$) et $P(u(x))$ (valeur du polynôme P sur le scalaire $u(x)$).
On fait cette grave confusion en ne distinguant pas $u^n(x) = u \circ u \cdots \circ u(x)$ et $(u(x))^n = u(x) \times u(x) \times \cdots \times u(x)$.

Proposition 5 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'application de $K[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$ qui, au polynôme P, associe l'endomorphisme $P(u)$ est un morphisme d'algèbre dont l'image (ensemble des polynômes en u) est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.*

[Ind] Appliquer les définitions.

[Dem] Soit P et Q deux polynômes, il existe deux suites de scalaires nulles à partir d'un certain rang (a_n) et (b_n) telles que $P = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ et $Q = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n$.
On a alors, pour tout scalaire λ:

$$\begin{aligned}(P+\lambda Q)(u) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+\lambda b_n)u^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} b_n u^n \\ &= P(u)+\lambda Q(u)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(P.Q)(u) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k})u^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(\sum_{k=0}^{n}(a_k u^k)\circ(b_{n-k}u^{n-k})) \\ &= (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n)\circ(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n u^n) \\ &= P(u)\circ Q(u)\end{aligned}$$

Exercice 7 Soit $A \in \mathcal{M}_2(K)$, α sa trace et β son déterminant.
a) Montrer que $A^2 - \alpha A + \beta I_2 = 0$.
b) Montrer que la sous-algèbre $F = \{P(A)\ ,\ P \in K[X]\}$ est engendré par la famille $\{I_2, A\}$ et en donner une base.
c) On suppose $\beta \neq 0$, trouver les éléments inversibles de F.

[Ind] a) simple calcul
b) Utiliser la division euclidienne d'un polynôme par le polynôme $X^2 - \alpha X + \beta$.
c) Chercher l'inverse d'un élément inversible de F parmi les éléments de F.

[Dem] On part d'une matrice quelconque $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on calcule $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix}$ puis $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+dc & ad+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = 0.$
Avant de montrer que c'est une sous-algèbre nous allons montrer que toute polynôme en A est combinaison de I et A. Soit P un polynôme la division euclidienne de P par $B = X^2 - \alpha X + \beta$ donne un polynôme Q et un polynôme R de degré inférieur ou égal à 1 tels que $P = BQ + R$ soit $P(A) = B(A)Q(A) + R(A)$ et comme $B(A) = 0$ on a $P(A) = R(A) = xA + yI$. Voilà démontrer que $F = \{P(A)\ ,\ P \in K[X]\}$ est la sous-algèbre engendrée par A et I. Ces deux matrices étant indépendantes elles en forment une base.
Il suffit de chercher, les couples (a, b) pour lesquels il existe (x, y) tel que $(aA + bI)(xA + yI) = I$ ou $(bx + ay + \alpha ax)A + (by - \beta ax)I = I$. Si on suppose que la matrice donnée est inversible alors on : $x = \dfrac{a}{-\alpha ab - b^2 + \beta a^2}$ et $y = \dfrac{\alpha a + b}{\alpha ab + b^2 - \beta a^2}$. On peut remarquer que le dénominateur est le déterminant de la matrice $aA + bI$.

3.1.4 Étude des noyaux d'endomorphismes

Proposition 6 *Si u et v sont deux endomorphismes de E qui commutent,* $\operatorname{Ker} u$ *et* $\operatorname{Im} u$ *sont stables par v.*

[Ind] Vérifier...

[Dem] On a $u(v(\operatorname{Ker} u)) = (u \circ v)(\operatorname{Ker} u) = v(u(\operatorname{Ker} u)) = \{0\}$ donc $\operatorname{Ker} u$ est stable par v. par D'autre part $(v(\operatorname{Im} u)) = v \circ u(E) = u(v(E)) \subset \operatorname{Im} u$.

Exercice 8 Soit $P \in K[X]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\operatorname{Ker} P(u)$ et $\operatorname{Im} P(u)$ sont stables par u.

[Ind] Appliquer la proposition précédente.

[Dem] On peut le montrer directement mais ici il suffit de remarquer que u et $P(u)$ commutent car $P(u)$ est formé de puissances (réitérés) de u et d'appliquer la proposition précédente.

Exercice 9 Si les deux endomorphismes u et v commutent, les sous-espaces propres de u sont stables par v.

[Ind] Appliquer la proposition précédente.

[Dem] Un sous espace propre de u est $\ker(u - \lambda id)$ et $(u - \lambda id) \circ u = u^2 - \lambda u = u \circ (u - \lambda id)$. Ces endomorphisme commutent donc le noyau de l'un est stable par l'autre.

Proposition 7 *Soient P et Q deux éléments de $K[X]$ et u un endomorphisme de E. Si P divise Q alors* $\operatorname{Ker} P(u) \subset \operatorname{Ker} Q(u)$.

[Ind] Que signifie: P divise Q?

[Dem] Il exite un polynôme R tel que $Q = PR$, on a donc $Q(u) = R(u) \circ P(u)$ et donc $\operatorname{Ker} P(u) \subset \operatorname{Ker} Q(u)$.

Proposition 8 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in K[X]$. Si λ est une valeur propre de u alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$.*

[Ind] Calculer...

[Dem] Soit x un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ, on vérifie par récurrence que pour tout entier naturel k: $u^k(x) = \lambda^k x$, puis que P s'écrivant $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$:

$$P(u)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k x = P(\lambda)x$$

Proposition 9 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in K[X]$. Si $P(u) = 0$ alors toute valeur propre de u est un zéro de P.*

[Ind] Appliquer la proposition précédente.

[Dem] On applique la proposition précédente en remarquant que la seule valeur propre de l'endomorphisme nul est 0

3.2 Diagonalisation

E désigne désormais un Kev de dimension finie n.

3.2.1 Somme directe de sous-espaces stables

Théorème 1 *Soient F_1, F_2, ..., F_p des sous-espaces de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$.*
Notons n_1, n_2, ..., n_p leurs dimensions respectives, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, ..., $\mathcal{B}_p$ des bases de F_1, F_2, ..., F_p respectivement et $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_p$ la base de E adaptée à la décomposition.
Soit u un endomorphisme de E. Les sous-espaces F_1, F_2, ..., F_p sont stables par u si et seulement si la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est une matrice diagonale par blocs n_1, n_2, ..., n_p, c'est dire qu'il existe des matrices carrés A_1, A_2, ..., A_p de taille respective n_1, n_2, ..., n_p telles que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix}$$

Le déterminant de u est alors $\det u = \det A_1 \times \det A_2 \times \cdots \times \det A_p$.

[Ind] Se rapporter au chapitre 3 (matrices diagonales par blocs)

[Dem] Un sous-espace F_i de dimension finie est stable par u si et seulement si u laisse stable une base $\mathcal{B}_i$ si et seulement si $u_{|F_i}$ est un endomorphisme si et seulement si la matrice de u dans la base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_p$ est diagonale par blocs.

3.2.2 Polynôme caractéristique

Définition 7 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, le polynôme caractéristique de u est $p_u(X) = det(u - XId_E)$. Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$, le polynôme caractéristique de A est $p_A(X) = det(A - XI_n)$.*

Remarque: On trouve parfois la définition $P_A(X) = \det(XI_n - A)$ qui ne diffère de la définition précédente que par le produit par $(-1)^n$.

Proposition 10 *Soit $\mathcal{B}$ une base de E.*

$$p_u(X) = det(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) - XI_n) = p_{\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)}.$$

[Ind] Comment calcule-t-on le déterminant d'un endomorphisme?

[Dem] Le déterminant d'un endomorphisme est le déterminant de n'importe quelle matrice représentant l'endomorphisme.

Proposition 11 *Deux matrices semblables ont mÃªme polynôme caractéristique.*

[Ind] Elles représentent un mÃªme endomorphisme.

[Dem] Deux matrices A, B sont semblables si et seulement si il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$ et donc $P_B(X) = \det(B - XI) = \det(P^{-1}AP - XP^{-1}IP) = \det P^{-1}(A - XI)P = \det P^{-1} \det(A - XI) \det P = \det(A - XI) = P_A(X)$.

La réciproque est fausse. En effet $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et la matrice nulle $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ possède le mÃªme polynôme caractéristique : X^2.

Exercice 10 Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $p_A = p_{{}^tA}$.

[Ind] Écrire les définitions et utiliser qu'une matrice et sa transposée ont mÃªme déterminant.

[Dem]

Proposition 12 *Si le s.e.v. F est stable par l'endomorphisme u, en notant v la restriction de u à F ($v = u_{|F}$), p_v divise p_u.*

[Ind] Chercher une base adaptée.

[Dem] Prenons une base $\mathcal{B}_1$ de F que l'on complète grâce à $\mathcal{B}_2$ en une base $\mathcal{B}$ de E. La matrice de u dans $\mathcal{B}$ est de la forme : $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de u donc de M est :

$$p_u(X) = \begin{vmatrix} A - XI_F & B \\ 0 & C - XI \end{vmatrix}$$

ce qui donne grâce au déterminant par blocs : $p_u(X) = p_v(X) \times \det(C - XI)$. Donc p_v divise p_u.

Exercice 11 Si $E = F \oplus G$ et si F et G sont stables par u, en notant $v = u_{|F}$ et $w = u_{|G}$, on a $p_u = p_v p_w$.

[Ind] Reprendre la démonstration précédente.

[Dem] En prenant une base adaptée à $E = F \oplus G$ la matrice de u est $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ car F et G sont stables. Ainsi le polynôme caractéristique de u est $p_u(X) = \begin{vmatrix} A - XI_F & 0 \\ 0 & C - XI \end{vmatrix} = \det(A - XI) \times \det(C - XI)$. Mais A et C sont des matrices de v et w, donc $p_u(X) = p_v(X) \times p_w(X)$.

Calcul du polynôme caractéristique

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Notons $C_1, C_2, \dots, C_n$ les colonnes de A et $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ celles de I_n.

$$p_A(X) = \det(C_1 - X\Gamma_1, \dots, C_n - X\Gamma_n).$$

En développant le déterminant et en ordonnant suivant les puissances de X, on trouve que

$$p_A(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(A)X^{n-1} + \cdots - \mathrm{Tr}(\tilde{A})X + \det A$$

où $\tilde{A}$ est la matrice complémentaire de A (transposée de la matrice des cofacteurs de A).

Proposition 13 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure dont les éléments diagonaux sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Le polynôme caractéristique de A est : $(\lambda_1 - X) \cdots (\lambda_n - X)$.*

[Ind] Calculer...

[Dem] Le polynôme caractéristique est $\begin{vmatrix} \lambda_1 - X & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_2 - X & \ddots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1n} \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n - X \end{vmatrix}$ en développant le déterminant ou en se souvenant que le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des termes diagonaux on obtient le résultat.

Exercice 12 Matrice compagnon Soient $a_0, \dots, a_{n-1}$ des scalaires et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Montrer que le polynôme caractéristique de A est

$$p_A(X) = (-1)^n \left(X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_0 \right).$$

[Ind] Développer par rapport à la première ligne, trouver une relation de récurrence, vérifier que la forme proposée convient.

[Dem] En développant par rapport à la première colonne on obtient : $P_A(X) = -XP_{A(a_1,\dots,a_{n-1})} + (-1)^{n+1}a_0$
$= -X\left(-XP_{A(a_2,\dots,a_{n-1})} + (-1)^n a_1\right) + (-1)^{n+1}a_0$
$= (-X)^2 P_{A(a_2,\dots,a_{n-1})} + (-1)^{k+1}a_1 X + (-1)^{n+1}a_0$

$= (-X)^{n-2} \begin{vmatrix} -X & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-1} - X \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}(a_{n-3}X^{n-3} + \ldots + a_0)$
$= (-X)^{n-2}((-X)^2 - a_{n-1}X - a_{n-2}) + (-1)^{n+1}(a_{n-3}X^{n-3} + \cdots + a_0)$
$= (-X)^n + (-X)^{n-1}a_{n-1} - a_{n-2}(-X)^{n-2} + (-1)^{n+1}(a_{n-3}X^{n-3} + \ldots + a_0)$
$= (-X)^n + (-1)^{n+1}(a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0)$

3.2.3 Polynôme caractéristique et valeurs propres

Proposition 14 *λ est une valeur propre de u si et seulement si $p_u(\lambda) = 0$.*

[Ind] Qu'indique la nullité d'un déterminant?

[Dem] Un scalaire λ est valeur propre si et seulement si $\ker(u - \lambda id)$ n'est pas réduit à 0 c'est à dire si et seulement si $u - \lambda id$ n'est pas injectif donc pas inversible donc si et seulement si $\det(u - \lambda id) = 0$ c'est à dire si et seulement si λ est racine du polynôme caractéristique.

Définition 8 Multiplicité d'une valeur propre. *L'ordre de λ comme zéro de p_u est appelé multiplicité de λ.*

Proposition 15 *Soit λ une valeur propre de multiplicité m. On a $\dim E_\lambda \leq m$.*

[Ind] Le sous-espace E_λ est stable par u.

[Dem] Le sous espace propre E_λ est stable par u, donc si v est la restriction de u à E_λ on a p_v divise p_u. Mais v est une homothétie donc $p_v(X) = (\lambda - X)^\alpha$ où α est la dimension de E_λ. Comme p_v divise p_u on a $\alpha \leq m$.

Remarque: Si λ est une valeur propre simple de u, on a $\dim E_\lambda = 1$.
La réciproque est fausse.

Proposition 16 *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A possède n valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (comptées avec leur ordre de multiplicité) et*

$$\operatorname{Tr} A = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$$
$$\det A = \lambda_1 . \cdots . \lambda_n$$

[Ind] Appliquer le théorème de D'Alembert et les relations coefficients-racines

[Dem] Dans $\mathbb{C}$ tout polynôme de degré n possède n racines comptées avec leur ordre de multiplicité d'après le théorème de D'Alembert. Nous savons que $P_A(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1}\operatorname{Tr}(A)X^{n-1} + \cdots - \operatorname{Tr}(\tilde{A})X + \det A = (-1)^n \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$. D'où $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \operatorname{Tr}(A)$ et $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det A$.

Théorème 2 *(Théorème de Cayley Hamilton) Toute matrice A de $\mathcal{M}_n(K)$ annule son polynôme caractéristique, autrement dit le polynôme caractéristique est annulateur de A.*

[Ind] Admis.

[Dem] Admis.

Exercice 13 Soit $\alpha \in K$. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \cdots & \alpha \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha & \cdots & \alpha \end{pmatrix}$$

[Ind] Le rang donne la dimension du noyau donc la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0. Essayer de trouver ce qui vous manque.

[Dem] Il est évident que le rang de la matrice est 1 donc la dimension du noyau est $n-1$. 0 est donc valeur propre d'ordre $n-1$. Les vecteurs propres associés à 0 sont par exemple $e_1-e_2, e_1-e_3, \cdots, e_1-e_n$ (on a bien $n-1$ vecteurs indépendants). Le vecteur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est propre et $Au = n\alpha u$. La valeur propre qui nous manquait est donc $n\alpha$ d'ordre 1.

3.2.4 Compléments sur les polynômes

Définition 9 *On appelle idéal de $K[X]$, un s.e.v I de $K[X]$ qui vérifie:*

$$\forall P \in I \quad \forall Q \in K[X] \quad PQ \in I$$

Exemple fondamental: Si P_0 est un élément de $K[X]$, l'ensemble $P_0K[X]$ des multiples de P_0 est un idéal de $K[X]$.

Proposition 17 *Soit F une partie de $K[X]$ non vide et non réduite à $\{0\}$. Il existe un polynôme P non nul dans F vérifiant*

$$\forall Q \in F \quad Q \neq 0 \implies \mathrm{d}^\circ P \leq \mathrm{d}^\circ Q$$

[Ind] Considérer l'ensemble des degrés des polynômes non nuls appartenant à F.

[Dem] Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des degrés des polynômes non nuls appartenant à F. Cet ensemble est un partie non vide de $\mathbb{N}$, il possède donc un plus petit élément d. On prend alors P appartenant à F de degré d.

Proposition 18 *Soit I un idéal de $K[X]$, il existe $P_0 \in K[X]$ tel que $I = P_0K[X]$.*

[Ind] Appliquer la proposition précédente. Effectuer la division euclidienne d'un polynôme appartenant à I par le polynôme P_0 trouvé.

[Dem] Supposons $I \neq \{0\}$ et P_0 un polynôme appartenant à I de plus bas degré positif d.
Si P appartient à I, on peut effectuer la division euclidienne de P par P_0, il existe donc deux polynômes Q et R tels que $P = QP_0 + R$, le degré de R étant strictement inférieur à celui de P_0. Le polynôme $P - QP_0$ appartient à I et son degré est inférieur à d. On en déduit que $R = 0$.

Remarque: Avec les notations de la proposition précédente, il existe un unique polynôme Π_0 qui vérifie les conditions suivantes : $I = \Pi_0K[X]$, $\Pi_0 = 0$ si $I = \{0\}$ et le coefficient dominant de Π_0 est égal à 1 si $I \neq \{0\}$. Un tel polynôme est appelé le générateur de l'idéal.

Exercice 14 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E Montrer que l'ensemble des polynômes P qui vérifie $P(u) = 0$ est un idéal.

[Ind] Utiliser le morphisme de $K[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$ et vérifier.

[Dem] L'application de $K[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$ qui à un polynôme P associe l'endomorphisme $P(u)$ est un morphisme d'algèbre ainsi l'ensemble considéré est son noyau donc un sous-espace vectoriel de $K[X]$. Enfin si P vérifie $P(u) = 0$ alors pour tout polynôme Q on a $QP(u) = Q(u) \circ P(u) = 0$ donc QP est dans l'ensemble considéré qui est donc bien un idéal.

Proposition 19 *Soient P et Q deux éléments de $K[X]$, P divise Q, c'est à dire Q est un multiple de P si et seulement si $QK[X] \subset PK[X]$.*

[Ind] Que signifie P divise Q ?

[Dem] Si P divise Q, il existe un polynôme R tel que $Q = PR$, on en déduit que tout multiple de Q est un multiple de P. Réciproquement, si tout multiple de Q est un multiple de P, Q lui-même est un multiple de P.

Proposition 20 *Une intersection d'une famille quelconque (non vide) d'idéaux de $K[X]$ est un idéal.*

[Ind] Appliquer la définition.

[Dem] Une intersection d'une famille non vide d'idéaux $((F_i)_{i\in I}$ est déjà un sous groupe. Soit $P \in \bigcap_{i\in I} F_i$. Pour tout polynôme Q, le polynôme PQ appartient à F_i pour tout $i \in I$ car P appartient à l'idéal F_i, ainsi QP appartient à l'intersection de la famille qui est donc un idéal.

Proposition 21 *Soient $P_1, \ldots, P_n$ des éléments de $K[X]$. Il existe un polynôme M tel que l'ensemble des multiples communs aux polynômes $P_1, \ldots, P_n$ soit égal à l'idéal $MK[X]$. Le générateur de cet idéal est appelé plus petit commun multiple (PPCM) de la famille $P_1, \ldots, P_n$*

[Ind] Prendre l'intersection des idéaux $P_1K[X]$, …, $P_nK[X]$.

[Dem] Un multiple commun aux polynômes $P_1, \ldots, P_n$ appartient à $\bigcap_{i=1}^n P_iK[X]$ qui est un ideal. Ainsi, le générateur de cet idéal est un polynôme qui divise tout multiple commun à la famille $P_1, \ldots, P_n$.

Proposition 22 *Soit A une partie de $K[X]$, il existe un plus petit idéal (au sens de l'inclusion) contenant A et appelé idéal engendré par A.*

[Ind] Prendre l'intersection des idéaux qui contiennent A.

[Dem] L'ensemble des idéaux contenant A n'est pas vide car $K[X]$ est un idéal. L'intersection de tous les idéaux contenant A est donc un idéal et est le plus petit idéal contenant A.

Proposition 23 *Soient P et Q deux éléments de $K[X]$. L'idéal engendré par la partie $\{P, Q\}$ est égal à $PK[X] + QK[X]$ et son générateur D est appelé plus grand commun diviseur (PGCD) de P et Q: tout diviseur commun à P et Q est un diviseur de D*

[Ind] Traduire la divisibilité en termes d'idéaux.

[Dem] On remarque que tout idéal contenant P et Q contient alors l'ensemble $I = PK[X] + QK[X]$. Comme on vérifie aisément que ce dernier ensemble est un idéal, c'est donc l'idéal engendré par P et Q. Tout diviseur commun R à P et Q est tel que P et Q appartiennent à $RK[X]$, ainsi $I \subset RK[X]$ et le générateur D de I est donc un multiple de R.

Définition 10 *Deux polynômes sont appelés polynômes premiers entre eux si et seulement si leur $PGCD$ est égal à 1: ils n'ont pas d'autres diviseurs communs que les constantes.*

Théorème 3 Identité de Bezout *Soient P et Q deux éléments de $K[X]$ et D leur PGCD. Il existe deux polynômes U et V tels que $UP + VQ = D$ et on a l'équivalence*

$$D = 1 \iff \exists U, V \in K[X] \quad UP + VQ = 1$$

[Ind] Comment s'écrivent les éléments de l'idéal engendré par P et Q ?

[Dem] Le PGCD de P et Q appartient à l'idéal engendré par P et Q qui est égal à $PK[X] + QK[X]$ et donc il existe deux polynômes U et V tels que $UP + VQ = 1$.
S'il existe deux polynômes U et V tel que $UP + VQ = 1$ alors 1 appartient à l'idéal I engendré par P et Q et donc $1K[X] = K[X] \subset I$. On en déduit que 1 est le générateur de I, les polynômes P et Q sont donc premiers entre eux.

Exercice 15 Soient A et B deux polynômes premiers entre eux. Montrer que, pour tout polynôme C, la propriété A divise le produit BC entraîne que A divise C (théorème de Gauss).

[Ind] Adapter la démonstration dans $\mathbb{Z}$

[Dem] Les hypothèses avec Bezout donne l'existance de U , V des polynômes tels que $AU + BV = 1$. Ce qui permet d'écrire $C = CAU + CBV$. Si A divise BC il existe un polynôme Q tel que $BC = QA$. Ainsi $C = CAU + CBV = ACU + BCV = ACU + AQV = A(CU + QV)$ ou A divise C.

Exercice 16 Si un polynôme A est premier avec des polynômes B_1 , . . . , B_n, alors il est premier avec le produit $B_1 \cdots B_n$.

[Ind] Par contraposée en utilisant Gauss.

[Dem] Si A n'est pas premier avec le prosuit $B_1 \cdots B_n$ alors il existe un polynôme Q divisant A et le produit. Q divisant le produit $B_1 \cdots B_n$ si Q est premier avec B_1 il divise d'après Gauss $B_2 \cdots B_n$, si Q est aussi premier avec B_2 alors il divise $B_3 \cdots B_n$ et ainsi de suite. Ainsi Q divise forcément l'un des polynômes B_i. A n'est donc pas premier avec tous les polynômes B_i.

Exercice 17 Soient α et β deux scalaires distincts. Montrer que, pour tout entier n et m, les polynômes $(X - \alpha)^n$ et $(X - \beta)^m$ sont premiers entre eux.

[Ind] Quel serait un facteur commun.

[Dem] Un facteur commun s'écrirait $(X - \alpha)^p$ et $(X - \beta)^q$ on aurait donc $(X - \alpha)^p = (X - \beta)^q$. Ainsi $(X - \beta)$ diviserait $(X - \alpha)^p$ ou pour un polynôme Q : $(X - \alpha)^p = Q(X)(X - \beta)$ en faisant $X = \beta$ on obtiendrait $(\beta - \alpha)^p = 0$ d'où $\beta = \alpha$.

Exercice 18 En s'appuyant sur le théorème de décomposition de Lagrange, trouver une méthode pour découvrir le PGCD et le PPCM de deux polynômes à coefficients complexes puis ceux de deux polynômes à coefficients réels.

[Ind] Chercher les facteurs communs.

[Dem] Si P est complexe sa décomposition s'écrit : $P(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - z_i)^{p_i}$. De mÃªme $P(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - z_i)^{q_i}$ avec éventuellement p_i ou q_i nul si les racines sont différentes. Pour trouver le PGCD on prend les racines communes d'où les facteurs communs à la puissance le plus petit des entiers p_i et q_i. Pour le ppcm on prend tous les facteurs à la plus grande puissance.
Si le polynôme est réel il y a en plus des facteurs de la forme $(X^2 + aX + b)^p$ avec $a^2 - 4b < 0$. Néanmoins on fait le mÃªme raisonement pour le pgcd et le ppcm.

3.2.5 Théorème de décomposition des noyaux

Ce paragraphe est hors programme, nous utiliserons ces résultats pour la démonstration du théorème de diagonalisation.

Théorème 4 Théorème de décomposition des noyaux. *Soit u un endomorphisme de E et P, Q deux polynômes à coefficients dans K.*
a) Si D est le P.G.C.D. de P et Q,

$$\operatorname{Ker} D(u) = \operatorname{Ker} P(u) \cap \operatorname{Ker} Q(u)$$

b) Si P et Q sont premiers entre eux, alors

$$\operatorname{Ker}(PQ)(u) = \operatorname{Ker} P(u) \oplus \operatorname{Ker} Q(u).$$

[Ind] Travailler par double inclusion et utiliser l'identité de Bezout: il existe deux polynômes A et B tels que $D(u) = A(u) \circ P(u) + B(u) \circ Q(u)$.

[Dem] a) Le polynôme D divise P et Q donc $\operatorname{Ker} D(u)$ est inclus dans $\operatorname{Ker} P(u)$ et dans $\operatorname{Ker} Q(u)$ ainsi $\operatorname{Ker} D(u) \subset \operatorname{Ker} P(u) \cap \operatorname{Ker} Q(u)$. Puisqu'il existe deux polynômes A et B tel que $D = AP + BQ$, tout vecteur annulant $P(u)$ et $Q(u)$ annule $D(u) = A(u) \circ P(u) + B(u) \circ Q(u)$, on en conclut que $\operatorname{Ker} P(u) \cap \operatorname{Ker} Q(u) \subset \operatorname{Ker} D(u)$.
b) Les polynômes P et Q divisent PQ donc les noyaux de $P(u)$ et $Q(u)$ sont contenus dans le noyau de $PQ(u)$, ainsi $\operatorname{Ker} P(u) + \operatorname{Ker} Q(u) \subset \operatorname{Ker}(PQ)(u)$.
Puisque P et Q sont premiers entre eux, il existe deux polynômes A et B tels que $Id_E = A(u) \circ P(u) + B(u) \circ Q(u)$.
Soit $x \in \operatorname{Ker}(PQ)(u)$, on a donc $x = A(u) \circ P(u)(x) + B(u) \circ Q(u)(x)$, posons $y = A(u) \circ P(u)(x)$ et $z = B(u) \circ Q(u)(x)$.
On a $P(u)(z) = P(u)(B(u) \circ Q(u)(x)) = B(u) \circ (PQ)(u)(x) = 0$ et $Q(u)(y) = A(u)(A(u) \circ P(u)(x)) = A(u) \circ (PQ)(u)(x) = 0$, ainsi y appartient à $\operatorname{Ker} Q(u)$ et z appartient à $\operatorname{Ker} P(u)$, ce qui entraîne $x \in \operatorname{Ker} P(u) + \operatorname{Ker} Q(u)$.
On a donc démontré finalement que $\operatorname{Ker}(PQ)(u) = \operatorname{Ker} P(u) + \operatorname{Ker} Q(u)$.
Reste à montrer que la somme est directe, ce qui se vérifie en remarquant que $\operatorname{Ker} P(u) \cap \operatorname{Ker} Q(u) = \operatorname{Ker} Id_E = \{0\}$ car le PGCD de P et Q est égal à 1.

Proposition 24 Généralisation du théorème sur la décomposition des noyaux. *Soit u un endomorphisme de E. Si P_1, P_2, ..., P_n sont des polynômes à coefficients dans K premiers entre eux deux à deux,*

$$\operatorname{Ker}(P_1 \cdots P_n)(u) = \bigoplus_{k=1}^{n} \operatorname{Ker} P_k(u).$$

[Ind] Faire une démonstration par récurrence.

[Dem] La propriété est vraie pour $n = 2$. Supposons-la vraie pour l'entier $n \geq 2$. Soient $P_1, \ldots, P_n, P_{n+1}$ des polynômes premiers entre eux deux à deux. P_{n+1} étant premier avec tous les polynômes $P_1, \ldots, P_n$, il est premier avec le produit $P_1 \cdots P_n$, ainsi $\operatorname{Ker}(P_1 \cdots P_n)P_{n+1}(u) = \operatorname{Ker}(P_1 \cdots P_n)(u) \oplus \operatorname{Ker} P_{n+1}(u)$ et puisque $\operatorname{Ker}(P_1 \cdots P_n)(u) = \operatorname{Ker} P_1(u) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker} P_n(u)$, on a bien $\operatorname{Ker}(P_1 \cdots P_n P_{n+1})(u) = \bigoplus_{k=1}^{n+1} \operatorname{Ker} P_k(u)$.
La propriété est donc vraie pour l'entier $n + 1$, ce qui permet de conclure cette démonstration par récurrence.

Exercice 19 Retrouver, à l'aide du théorème sur la décomposition des noyaux, les propriétés suivantes:
a) Si p est un projecteur, $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Ker}(Id_E - p)$.
b) Si s est une symétrie, $E = \operatorname{Ker}(s - Id_E) \oplus \operatorname{Ker}(s + Id_E)$.

[Ind] Trouver des polynômes annulateurs.

[Dem] Si p est un projecteur alors $p^2 = p$ c'est dire que $P(X) = X^2 - X = X(X - 1)$ est annulateur de p. Mais X et $X - 1$ sont premiers entr'eux donc $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Ker}(Id_E - p)$. Pour la symétrie on a $s^2 = id$ on considère les polynômes premiers entr'eux : $(X - 1)$ et $(X + 1)$.

Revenons maintenant, pour un endomorphisme donné u, à notre morphisme $K[X] \to \mathcal{L}(E)$ qui à un polynôme P associe l'endomorphisme $P(u)$. Son noyau est donc un idéal de $K[X]$ et donc est principal. Si cet idéal n'est pas réduit à $\{0\}$, il existe un polynôme unitaire unique appelé polynôme minimal de u, notons le A tel que $A(u) = 0$ et si P est un polynôme tel que $P(u) = 0$ alors P est multiple de A. Enfin pour l'image c'est à dire l'ensemble des $P(u)$ où P décrit $K[X]$. Soit un tel élément $P(u)$, divisons P par A on obtient $P = QA + R$ avec $\deg R < \deg A$. Mais alors $P(u) = Q(u) \circ A(u) + R(u) = R(u)$ puisque $A(u) = 0$. Ainsi l'image est formé des éléments $R(u)$ où R est un polynôme de degré strictement inférieur à $\deg R$. En temps que sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ il est de dimension $\deg A$.

Définition 11 *Soit u un endomorphisme de E, on appelle polynôme annulateur de u tout polynôme P tel que $P(u) = 0$. L'ensemble formé des polynômes annulateurs forme un idéal de $K[X]$. Si cet idéal n'est pas réduit à $\{0\}$, tout génarateur de cet idéal est appelé* ***polynôme minimal****, M. Dans l'application $K[X] \to \mathcal{L}(E)$ qui à un polynôme P associe l'endomorphisme $P(u)$ le noyau est l'idéal annulateur et l'image est de dimension finie* $\deg M$.

Remarque: Si l'espace vectoriel E est de dimension finie alors l'idéal annulateur n'est jamais réduit à $\{0\}$. En effet dans ce cas $\dim \mathcal{L}(E)$ est n^2 si $\dim E = n$ et les éléments $i, u, u^2, \cdots u^{n^2}$ sont donc liés il existe donc une combinaison linéaire non trivial $\sum_{k=1}^{n^2} a_i u^i = 0$. Il existe donc un polynôme Q de degré inférieur à n^2 tel que $Q(u) = 0$.

3.2.6 Application de la décomposition des noyaux

Equations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants

Soient $a_0, \ldots, a_{p-1}$ des complexes. Cherchons les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$y^{(p)} + a_{p-1}y^{(p-1)} + \cdots + a_0 y = 0.$$

Proposition 25 *Soit P le polynôme $X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots a_0$ et $r_1, \ldots r_n$ les racines distinctes de P de multiplicité $m_1, \ldots, m_n$. L'ensemble S des solutions de l'équation*

$$y^{(p)} + a_{p-1}y^{(p-1)} + \cdots + a_0 y = 0.$$

est un s.e.v. de $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. En notant D l'opérateur de dérivation de E, on a

$$S = \bigoplus_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}(D - r_k Id)^{m_k}.$$

[Ind] Le polynôme P s'écrit $P(X) = \prod_{k=1}^{n}(X - r_k)^{m_k}$ et les polynômes $(X - r_1)^{m_1}, \ldots, (X - r_n)^{m_n}$ sont premiers entre eux deux à deux.

[Dem] L'ensemble S étant le noyau de $P(D)$, on en déduit que S est bien un s.e.v. de E et puisque les polynômes $(X - r_1)^{m_1}, \ldots, (X - r_n)^{m_n}$ sont premiers entre eux deux à deux, que $S = \bigoplus_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}(D - r_k Id)^{m_k}$.

Proposition 26 *Soit r un nombre complexe et notons $S_r^{(m)}$ le noyau de l'endomorphisme $(D - rId)^m$. On a*

$$S_r^{(m)} = e_r S_0^{(m)} = e_r \mathbb{C}_{p-1}[X]$$

en notant e_r la fonction qui,au réel x, associe e^{rx}.

[Ind] Si y appartient à $S_r^{(m)}$, appliquer la formule de Leibniz à l'expression $D^m(y\mathrm{e}^{-rx})$.

[Dem] Soit y appartenant à E, on a

$$\begin{aligned} D^m(y\mathrm{e}^{-rx}) &= \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} y^{(k)}(-r)^{m-k}\mathrm{e}^{-rx} \\ &= \mathrm{e}^{-rx}(D - rId)^m(y) \end{aligned}$$

Ainsi, puisque , pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-rx} \neq 0$, les assertions ye_{-r} appartient à $S_0^{(m)}$ et y appartient à $S_r^{(m)}$ sont équivalentes.
On termine alors la démonstration en remarquent que le noyau $S_0^{(m)}$ de D^m est bien l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à $m - 1$.

Exercice 20 Trouver l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y^{(3)} - 4y'' + 5y' - 2y = 0.$$

[Ind] Appliquer le cours.

[Dem] Il suffit de résoudre $r^3 - 4r^2 + 5r - 2 = 0$ qui admet 1 comme racine évidente et $r^3 - 4r^2 + 5r - 2 = (r-1)(r^2 - 3r + 2)$, finalement les racines sont 1 double et -2 simple. Des solutions linéairement indépendantes sont e^t , te^t , e^{-2t} et toutes les solutions sont de la forme $\lambda_1 e^t + \lambda_2 te^t + \lambda_3 e^{-2t}$.

3.2.7 Endomorphismes diagonalisables

Théorème 5 Caractérisation des endomorphismes diagonalisables. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*
1) Il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u.
2) Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.
3) $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i} = E$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ désignent les valeurs propres distinctes de u.
4) Le polynôme caractéristique de u est scindé (i.e. la somme des multiplicités des valeurs propres de u est égale à n) et pour toute valeur propre λ de u, la multiplicité de λ est égale à la dimension de E_λ.
5) u annule un polynôme scindé dont toutes les racines sont simples.

On dit alors que u est diagonalisable.

[Ind] Montrer que (1) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (4) $\Longrightarrow$ (1). Montrer que (1) $\Longrightarrow$ (5).
Pour montrer que (5) entraîne (1), on peut utiliser les polynômes d'interpolation élémentaires de Lagrange: si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des scalaires distincts tels que $P = (X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_p)$ annule u, on pose, pour tout $i \in [1,p]$, $L_i(X) = \dfrac{P(X)}{(X-\lambda_i)P'(\lambda_i)}$. Montrer que $L_1 + \cdots + L_p = 1$ puis que, pour tout $x \in E$ et tout $i \in [1,p]$, $L_i(u)(x) \in E_{\lambda_i}$. Ou bien utiliser le théorème de décomposition des noyaux

[Dem] Il existe une base propre $\Longleftrightarrow$ Il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale $\Longleftrightarrow$ Il existe $P \in GL_n(K)$ telle que $P^{-1}AP$ est diagonale où A est la matrice de u dans une base quelconque (i.e. La matrice est semblable à une matrice diagonale) $\Longleftrightarrow$ $E = F_1 \bigoplus \cdots \bigoplus F_p$ avec chaque F_i est stable par u et pour tout i la restriction de u à F_i est une homothétie de rapport λ_i. En effet Si on a une telle décomposition une base adaptée est une base propre. Si on a une base propre, en rangeant cette base par les différentes valeurs propres cela donne $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i} = E$ $\Longleftrightarrow$ Le polynôme caractéristique est scindé et $\forall i \in [1..p]$:
dim $E_{\lambda_i} = \mu_i$ où μ_i est l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i et $\mathrm{Sp}(u) = \lambda_1, \cdots, \lambda_p$. S'il en est ainsi alors dim $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{p} \mu_i = n$ et donc nous avons la condition précédente. Pour la partie directe on montre la contraposée : s'il existe i_0 tel que dim$E_{\lambda_{i_0}} < \mu_{i_0}$ alors dim $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i} < n$ $\Longleftrightarrow$ u annule un polynôme scindé à racines simples. en effet S'il en est ainsi soit $P(X) = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_p)$ alors les $(X-\lambda_i)$ étant premiers le théorème de décomposition des noyaux donne ker $P(u) = E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p}$ ker $(u - \lambda_i id)$ décomposition de E en sous espace stables sur lesquels u est une homothétie. Si u est diagonalisable soit $M(X) = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_p)$ et montrons que ce polynôme est annulateur. Écrivons pour $x \in E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$ on a $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_p$ et donc $u(x_i) = \lambda_i x_i$. Ainsi

$$M(u)(x) = (u-\lambda_1 id)\circ(u-\lambda_2 id)\circ\cdots\circ(u-\lambda_p id)(x_1+\cdots+x_p) = \sum_{i=1}^{p}\prod_{j\neq i}(u-\lambda_j id)\circ(u-\lambda_i id)(x_i) = 0.$$

Proposition 27 *Soit u un endomorphisme diagonalisable et F un sous-espace stable par u. La restriction v de u à F est diagonalisable.*

[Ind] Utiliser la caractérisation à l'aide des polynômes scindés à racines simples.

[Dem] Si u est diagonalisable alors il existe un polynôme M scindé à racines simples qui annule l'endomorphisme c'est à dire $\forall x \in E : M(u)(x) = 0$ on aura donc aussi $\forall x \in F : M(u)(x) = M(v)(x) = 0$ donc v est diagonalisable.

Exercice 21 Soit u un endomorphisme diagonalisable. Quelle est la nature des sous-espaces stables par u.

[Ind] Attention en général l'intersection d'un sous-espace avec une somme directe n'est pas la somme directe des intersections sauf si on fait des hypothèses supplémentaires.

[Dem] Soit F un sous espace stable alors $v = u|_F$ est diagonalisable. Ainsi $F = \bigoplus_{i=1}^{p} \ker(v - \lambda_i id)$ or $\ker(v - \lambda_i id) = F \cap \ker(u - \lambda_i id)$. Nous avons ainsi montré que F est somme directe de sous-espace des sous-espaces propres de u.

Exercice 22 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable et $P \in K[X]$. Montrer que $P(u)$ est diagonalisable et trouver ses valeurs propres.

[Ind] Chercher les éléments propres de $P(u)$.

[Dem] D'après la proposition 8 on sait que si λ est une valeur propre de u alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$, les vecteurs propres étant les mÃªmes. Ainsi si u est diagonalisable alors il existe une base de vecteurs propres qui sera aussi une base de vecteurs propres pour $P(u)$ qui est donc aussi diagonalisable.

Exercice 23 Soit u un endomorphisme diagonalisable, montrer que tout s.e.v. stable par u possède un supplémentaire stable par u.

[Ind] Utiliser les sommes directes et l'exercice 21.

[Dem] On sait d'après l'exercice 21 que si F est un sous-espace stable alors $F = \bigoplus_{i=1}^{p} F \cap V(\lambda_i)$ où les $V(\lambda_i)$ sont les sous-espaces propres de u. Soit pour tout i : G_i un suppléméntaire de $F \cap V(\lambda_i)$ dans $V(\lambda_i)$ alors $\bigoplus_{i=1}^{p} G_i$ est stable par u et est un supplémentaire de F dans E.

Exercice 24 Soit $a_1, \ldots, a_n$ des complexes et

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

Montrer que A est diagonalisable et en déduire son déterminant.

[Ind] Considérer les vecteurs ${}^t\begin{pmatrix} 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \end{pmatrix}$ où ω est une racine $n^{ième}$ de l'unité.

[Dem] Ou bien on vérifie simplement : Si $\Omega = {}^t\begin{pmatrix} 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \end{pmatrix}$ le produit $A\Omega = \begin{pmatrix} a_1 + a_2\omega + \cdots + a_n\omega^{n-1} \\ a_n + a_1\omega + \cdots + a_{n-1}\omega^{n-1} \\ \vdots \\ a_2 + a_3\omega + \cdots + a_1\omega^{n-1} \end{pmatrix}$

ou encore $A\Omega = (a_1 + a_2\omega + \cdots + a_n\omega^{n-1}) \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \vdots \\ \omega^{n-1} \end{pmatrix}$ ce qui prouve que Ω est bien vecteur propre. On a n vecteurs propres linéairement indépendants en faisant tourner ω parmi les racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité, donc A est diagonalisable. (le déterminant de ces vecteurs est un Vand der Mond). Le déterminant de A est donc le produit des valeurs propres soit $\prod\limits_{\omega^n=1}(a_1+a_2\omega+\cdots+a_n\omega^{n-1})$

ou bien on considère la matrice $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ Avec $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ en posant $P = ((\omega_{j-1}^{i-1}))_{1\leq i,j\leq n}$ on a $P^{-1} = ((\omega_{i-1}^{-j+1}))_{1\leq i,j\leq n}$ et avec $D = \mathrm{diag}(\omega_{i-1})_{1\leq i\leq n}$ on vérifie que $J_n = PDP^{-1}$. Il ne reste plus qu'à exprimer la matrice circulaire comme combinaison linéaire de puissances de J_n.

Proposition 28 *Si la dimension de E est n et si u admet n valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable.*

[Ind] Montrer que E est somme des sous-espaces propres.

[Dem] Si les valeurs propres sont simples alors $1 \leq \dim E_{\lambda_i} \leq 1$ donc $\dim E_{\lambda_i} = 1$ et donc E est somme directe des sous-espaces propres.

Exercice 25 Soit u un endomorphisme de E possédant n valeurs propres distinctes. Montrer que le commutant de u : $C(u) = \{v \in \mathcal{L}(E)\ ,\ v\circ u = u\circ v\}$ est égal à $K[u]$.

[Ind] Utiliser le morphisme intérieur $M \longmapsto P^{-1}MP$ où P est une matrice "diagonalisant" la matrice A de u.

[Dem] Il est facile mais important de montrer que $C(A)$ est une sous-algèbre de $M_n(K)$. Si $P \in GL_n(K)$ l'application $\varphi : M \longmapsto P^{-1}MP$ est un automorphisme appelé automorphisme intérieur de l'algèbre $M_n(K)$. Ainsi $MA = AM$ est équivalent à $\varphi(A)\varphi(M) = \varphi(M)\varphi(A)$ soit pour une application φ telle que $\varphi(A)$ est diagonale de diagonale les valeurs propres distinctes (α_i) on obtient pour tout i, j $\alpha_i m'_{ij} = \alpha_j m'ij$ soit $m'_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Ainsi $\varphi(M)$ est diagonale et $C(A)$ est de dimension n. Maintenant on a des candidats dans le commutant à savoir les puissances de A et $\left(I, A, A^2, \cdots, A^{n-1}\right)$ est une base de $C(A)$ en effet pour démontrer la liberté de cette famille il suffit de passer par φ.

3.3 Trigonalisation

3.3.1 Cas général

Théorème 6 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes:*
1) Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure
2) Le polynôme caractéristique de u est scindé.

On dit alors que u est trigonalisable.

[Ind] Effectuer une démonstration par récurrence sur la dimension de E.

[Dem] Si $\dim E = 1$ le résultat est vrai car u est alors une homothétie, u est mÃªme diagonal. Supposons que tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à p dont le polynôme caractéristique est scindé soit triangularisable. Donnons nous une endomorphisme d'un espace vectoriel de de dimension $p+1$ à polynôme caractéristiqe scindé. u possède donc au moins un vecteur propre ε_1, prenons un hyperplan H suppémentaire de $K\varepsilon_1$ et $\varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{p+1}$ une base de cet hyperplan. La matrice de u dans cette base est : $\begin{pmatrix} \lambda & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ Soit l'endomorphisme v de H de matrice B. On a $p_u(X) = (\lambda - X)p_v(X)$ ce qui prouve que v a un polynôme caractéristiqe scindé. Par hypothèse de récurrence il existe une base $(e_2, \cdots, e_{p+1})$ de H dans laquelle la matrice de v est triangualaire. Nous avons $u(e_i) = b_i\varepsilon_1 + v(e_i)$ et donc la matrice de u dans $(\varepsilon_1, e_2, \cdots, e_{p+1})$ est triangulaire. Le théorème de récurrence permet de conclure.

Proposition 29 *Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -ev est trigonalisable.*

[Ind] Appliquer le théorème de D'Alembert.

[Dem] Tout simplement parce que dans $\mathbb{C}$ tout polynôme se décompose en produit du premier degré.

Remarque: Le théorème ne donne pas une méthode performante pour réduire un endomorphisme. Cependant, l'existence de ce théorème permet de résoudre des problèmes en relation avec des manipulations de valeurs propres.

Exercice 26 Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-ev E de dimension n dont les valeurs propres sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Trouver le polynôme caractéristique de $P(u)$ où $P \in \mathbb{C}[X]$. La propriété est-elle encore vraie lorsque le corps de base est $\mathbb{R}$?

[Ind] Prendre une base dans laquelle la matrice de u triangulaire, où sont les valeuurs propres ?

[Dem] On peut trigonaliser u. Il existe une base dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \dots & \star \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

Dans cette mÃªme base la matrice de $P(u)$ est de la forme $\begin{pmatrix} P(\lambda_1) & \star & \dots & \star \\ 0 & P(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \dots & 0 & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$ le autres éléments sont changés mais sur la diagonale on a la maîtrise des valeurs propres. Le polynôme caractéristique de $P(u)$ est donc $\prod_{i=1}^{n}(X - P(\lambda_i))$

Dans $\mathbb{R}$ on ale mÃªme résultat quitte à plonger pour un instant dans $\mathbb{C}$.

Exercice 27 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \text{Trace}\, A^k = \sum_{p=1}^{n} \lambda_p^k.$$

En déduire qu'une matrice carrée complexe de taille n est nilpotente si et seulement si $\text{Trace}\, A^k = 0$ pour tout $k \in [1, n]$.

[Ind] Que vaut la diagonale de A^k dans le cas où A est triangulaire.

[Dem] C'est le mÃªme principe A est semblable à $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \dots & \star \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ avec pour matrice de changement de base P. On a donc $A = PTP^{-1}$ et par suite $A^k = PT^kP^{-1}$ avec T^k $\begin{pmatrix} \lambda_1^k & \star & \dots & \star \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$

La trace étant invariante par similitude on a $\text{Trace}\, A^k = \sum_{p=1}^{n} \lambda_p^k$.

Si la matrice est nilpotente alors toutes ses valeurs propres sont nulles donc on a bien $\operatorname{Trace} A^k = 0$.

Réciproquement si $\operatorname{Trace} A^k = 0$ pour tout $k \in [1, ..n]$ nous obtenons le système : $\begin{cases} \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1^n + \ldots + \lambda_n^n = 0 \end{cases}$

Ce sytème à coefficient les λ_i^j admet une solution non trivial. On en deduit que son déterminant (de Van der Mond) est nul donc au moins deux valeurs propres sont égales. En réitérant avec les valeurs propres restantes on finit par montrer que toutes les valeurs propres doivent Ãªtre égales ... à 0. Ainsi la matrice est nilpotente.

3.3.2 Cas particulier: dimension 2 ou 3

Donnons une méthode pratique de mise sous forme triangulaire d'une matrice A carrée de taille 2 ou de taille 3 non diagonalisable.

Notons u l'endomorphisme associé à A dans la base canonique de E ($E = \mathbb{C}^2$ ou $E = \mathbb{C}^3$).

Le premier cas est aisé à résoudre. La matrice possède une valeur propre double et en prenant une base de $\mathbb{C}^2$ dont le premier vecteur est un vecteur propre de la matrice, la matrice dans cette base de l'endomorphisme u est triangulaire supérieure.

Examinons le cas de la dimension 3.

a) A possède 2 valeurs propres distinctes λ et μ de multiplicité respective 1 et 2.

On prend alors une base dont les deux premiers vecteurs sont respectivement un vecteur propre relatif à la valeur propre λ et un vecteur propre relatif à la valeur propre μ. Dans une telle base, la matrice de u est de la forme:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & * \\ 0 & \mu & * \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

b) A possède une valeur propre μ de multiplicité 3.

Si $\dim E_\mu = 2$, on prend une base de $\mathbb{C}^3$ dont les deux premiers vecteurs forment une base de E_μ. Dans un telle base, la matrice de u est de la forme:

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 & * \\ 0 & \mu & * \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

Le cas où $\dim E_\mu = 1$ est le plus difficile à traiter. Notons $v = u - \mu\mathrm{Id}$. On pourra remarquer à chaque fois, mais c'est une conséquence du théorème de Cayley-Hamilton, que $v^3 = 0$.

Montrons tout d'abord que $v^2 \neq 0$: si $v^2 = 0$, alors $\operatorname{Im} v \subset \ker v$ ce qui implique $\dim \operatorname{Im} v \leq 1$, en contradiction avec le théorème du rang.

Puisque $v^2 \neq 0$, il existe $e \in E$ tel que $v^2(e) \neq 0$.

La famille $\{e, v(e), v^2(e)\}$ est alors une famille libre de E. Soient α, β et γ des complexes tes que

$$\alpha e + \beta v(e) + \gamma v^2(e) = 0.$$

En appliquant v et v^2 à cette égalité, on trouve alors le système

$$\begin{cases} \alpha e + \beta v(e) + \gamma v^2(e) & = 0 \\ \alpha v(e) + \beta v^2(e) & = 0 \\ \alpha v^2(e) & = 0 \end{cases}$$

que l'on peut alors résoudre, on en déduit progressivement $\alpha = 0$, puis $\beta = 0$ et $\gamma = 0$.

Notons $e_1 = v^2(e)$, $e_2 = v(e)$ et $e_3 = e$.

On a $v(e_1) = v^3(e) = 0$ donc $u(e_1) = \mu e_1$, $v(e_2) = v^2(e) = e_1$ et ainsi $u(e_2) = e_1 + \mu e_2$ et enfin de l'égalité $v(e_3) = e_2$, on déduit $u(e_3) = e_2 + \mu e_2$.

Dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$, la matrice de u est égale à

$$\begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

3.4 Applications de la réduction

3.4.1 Suites définies par une relation de récurrence linéaire à coefficients constants

Soient $a_0, \dots, a_{p-1}$ des complexes. Cherchons les suites (u_n) qui vérifient la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \cdots + a_0 u_n.$$

Proposition 30 *L'ensemble S des solutions est un s.e.v. de $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de dimension p.*

[Ind] L'application φ définie de S dans $\mathbb{C}^p$ par $\varphi((u_n)) = (u_0, \dots, u_{p-1}$ est un isomorphisme.

[Dem] L'application φ définie de S dans $\mathbb{C}^p$ par $\varphi((u_n)) = (u_0, \dots, u_{p-1})$ est bien linéaire car $\varphi((u_n) + \lambda(v_n)) = (u_0 + \lambda v_0, \cdots, u_{p-1} + \lambda v_{p-1}) = \varphi((u_n)) + \lambda\varphi((v_n))$, φ est bijective car la donnée de $(\mu_0, \cdots, \mu_{p-1})$ détermine entièrement une suite (u_n) ayant pour premier termes les μ_i. Par transfert de structure on en déduit que S est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension p.

Notons T l'endomorphisme de E qui à une suite (u_n) associe la suite (v_n) définie par $v_n = u_{n+1}$ pour tout entier n.
Résoudre l'équation revient donc à chercher le noyau de l'endomorphisme $P(T)$ où P est le polynôme $X^p - a_{p-1}X^{p-1} - \cdots a_0$.
En appliquant le théorème de D'Alembert sur les racines d'un polynôme, on trouve que P peut s'écrire sous la forme

$$P(X) = \prod_{i=1}^{q} (X - r_i)^{m_i}$$

où $r_1, \dots, r_q$ sont des complexes distincts et $m_1, \dots, m_q$ des entiers naturels non nuls.

Déterminons, pour un complexe r et un entier m le noyau S_r de l'endomorphisme $(T - r\mathrm{Id})^m$.
Si $r = 0$, on trouve l'ensemble des suites nulles à partir du rang m.
Si $r \neq 0$, on remarque que la suite v définie pour tout n par $v_n = r^n$ appartient à S_r.
Soit u une suite, on peut construire une suite w en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \dfrac{u_n}{r^n}$. On a alors, pour tout entier naturel n

$$\begin{aligned}
(T - r\mathrm{Id})^m(u)_n &= (T - r\mathrm{Id})^m(vw)_n \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} T^k(vw)_n(-r)^{m-k} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} T^k(w)_n r^{n+k}(-r)^{m-k} \\
&= r^{m+n} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} T^k(w)_n(-1)^{m-k} \\
&= r^{m+n}(T - \mathrm{Id})^m(w)_n
\end{aligned}$$

ainsi $S_r = v.S_1$. Notons $\Delta = T - \mathrm{Id}$

Proposition 31 $\operatorname{Ker}\Delta^m$ *est le sous espace vectoriel de E engendré par la famille libre de suites $u^{(0)}, \dots, u^{(m-1)}$ où la suite $u^{(k)}$ est définie pour tout n par $u_n^{(k)} = \dbinom{n}{k}$.*

[Ind] La famille de polynômes (P_k) où $P_0 = 1$ et où P_k est défini, pour tout entier $k > 1$ par

$$P_k(X) = \binom{X}{k} = \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$$

forme une base de $\mathbb{C}[X]$.
Procéder par récurrence sur l'entier m.

[Dem] La famille de polynômes (P_k) où $P_0 = 1$ et où P_k est défini, pour tout entier $k > 1$ par

$$P_k(X) = \binom{X}{k} = \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$$

forme une base de $\mathbb{C}[X]$, il suffit de vérifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le degré de P_k est k. On en déduit alors que la famille de suites $(u^{(k)})$ est une famille libre, en effet:

$$\forall k, n \in \mathbb{N} \quad P_k(n) = u_n^{(k)}$$

donc, si $a_0, \ldots, a_m$ sont des scalaires tels que

$$a_0 u^{(0)} + \cdots a_m u^{(m)} = 0$$

alors le polynôme $\sum_{k=0}^{m} a_k P_k$ possède une infinité de zéros, il est donc égal à 0 , ce qui signifie que, pour tout $k \in [0, m]$ $a_k = 0$.
Montrons maintenant la proposition par récurrence.
La propriété est vraie pour $m = 0$. Supposons la vraie pour l'entier m.
Soit $u \in E$

$$u \in \operatorname{Ker} \Delta^{m+1} \Longleftrightarrow \Delta(u) \in \operatorname{Ker} \Delta^m$$

donc

$$\operatorname{Ker} \Delta^{m+1} = \Delta^{-1}\left(\operatorname{Ker} \Delta^m\right).$$

Pour trouver une base de $\operatorname{Ker} \Delta^{m+1}$, il suffit donc d'ajouter à une base de $\operatorname{Ker} \Delta$, une famille d'antécédents d'une base de $\operatorname{Ker} \Delta^m$.
Or, on vérifie sans difficulté, que:

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \Delta(u^{(k)}) = u^{(k-1)}.$$

ainsi $\operatorname{Ker} \Delta^{m+1}$ possède comme base la famille $\{u^{(0)}, \ldots, u^{(m)}\}$.

Proposition 32 $S = \bigoplus_{i=1}^{q} \operatorname{Ker}(T - r_i Id)^{m_i}$.

[Ind] Vérifier que la somme des noyaux est directe et calculer la dimension de cette somme.

[Dem] Pour tout $i \in [1, q]$, $(X - r_i)^{m_i}$ divise $P(X)$ donc $\operatorname{Ker}(T - r_i Id)^{m_i} \subset \operatorname{Ker} P(T) = S$. Ainsi $\sum_{i=1}^{q} \operatorname{Ker}(T - r_i Id)^{m_i} \subset S$. Montrons alors que la somme est directe. Pour cela, il suffit de montrer que la collection de bases prises dans chaque sous-espace est une famille libre.
Notons φ l'application définie de S dans $\mathbb{C}^p$ par $\varphi((u_n)) = (u_0, \ldots, u_{p-1})$, puisque φ est un isomorphisme , il suffit de vérifier la propriété sur les images par φ des sous-espaces vectoriels.
Distinguons deux cas: a) Pour tout $i \in [1, q]$, $r_i \neq 0$. Prenons comme base de $\operatorname{Ker}(T - r_i Id)^{m_i}$, la famille $\mathcal{B}_i = \{(r_i^n), \ldots, (m_i - 1)! \binom{n}{p_i - 1} r_i^{n - m_i - 1}\}$.
Notons A la transposée de la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^p$ de l'image par φ de la famille $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_q$.
Les m_1 premières lignes de A sont $(1, r_1, r_1^2, \ldots, r_1^{p-1})$, $(0, 1, 2r_1, \ldots, (p-1)r_1^{p-2})$, ... Les m_2 lignes suivantes sont $(1, r_2, r_2^2, \ldots, r_2^{p-1})$, $(0, 1, 2r_2, \ldots, (p-1)r_2^{p-2})$, etc... et on obtient ainsi q blocs de lignes constitués de cette faÃ§on. On remarque que l'on passe dans un bloc d'une ligne à la suivante en dérivant terme à terme par rapport à la racine.Montrons A est inversible et étudions pour cela l'équation $AC = 0$ où $C = {}^t(x_0, \ldots, x_p)$.
En notant Q le polynôme $x_0 + x_1 X + \cdots x_{p-1} X^{p-1}$, on constate que les m_1 premières composantes du produit AC sont $Q(r_1); Q'(r_1), \ldots Q^{(m_1-1)}(r_1)$. Comme le phénomène se répète q fois, on trouve en définitive que

$$AC = \begin{pmatrix} Q(r_1) \\ Q'(r_1) \\ \vdots \\ Q^{(m_1-1)}(r_1) \\ Q(r_2) \\ \vdots \\ Q^{(m_2-1)}(r_2) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Résoudre l'équation $AC = 0$ où C est l'inconnue revient donc à trouver un polynôme Q qui vérifie

$$\forall i \in [1, q] \quad \forall j \in [0, m_i - 1] \quad Q^{(j)}(r_i) = 0$$

Le polynôme Q est donc divisible par $\prod_{i=1}^{q}(X - r_i)^{m_i}$ donc si $Q \neq 0$, le degré de P est supérieur ou égal à $m_1 + \cdots m_q = p$. Puisque le degré de P est inférieur ou égal à $p - 1$, on en déduit que $Q = 0$ donc que $C = 0$. La matrice A est donc inversible et donc $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_q$ est une famille libre de S. Puisque le nombre d'éléments de cette famille est p, on obtient alors la conclusion cherchée.b) Si l'une des racines est nulle, on peut supposer que c'est r_1, on prend alors comme base de $\operatorname{Ker} T_1^p$ la famille $(j!\delta_{jn})_{n\in\mathbb{N}}$ pour j variant de 1 à $m_1 - 1$, en notant comme précédemment A la transposée de la matrice dans la base canonique de K^p de la famille $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_q$, on trouve cette fois que

$$AC = \begin{pmatrix} Q(0) \\ Q'(0) \\ \vdots \\ Q^{(m_1-1)}(0) \\ Q(r_2) \\ \vdots \\ Q^{(m_2-1)}(r_2) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

La suite du raisonnement est alors la mÃªme, la nullité de r_1 n'intervenant que dans l'écriture de la famille $\mathcal{B}_1$.

En résumé, on a

Théorème 7 *Soient $a_0, \ldots, a_{p-1}$ des complexes. L'ensemble S des suites (u_n) qui vérifient la relation :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \cdots + a_0 u_n$$

est un s.e.v. de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de dimension p.
On appelle $P(X) = X^p - (a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_0)$ le polynôme caractéristique de cette relation et si $r_1, \ldots, r_q$ sont les racines de P d'ordre respectifs $m_1, \ldots, m_q$, une base de S est constituée de la famille $(u_{i,j})_{\substack{i\in[1,q]\\ j\in[0,m_i-1]}}$, ces suites étant définies par

$$\forall i \in [1, q] \quad \forall j \in [1, m_i - 1] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (u_{i,j})_n = n^j r_i^n$$

[Ind] Regrouper les informations déjà démontrées

[Dem] Tout a été montré ci-dessus.

Exercice 28 Trouver l'ensemble des suites (u_n) vérifiant, pour tout entier n:

$$u_{n+3} - 4u_{n+2} + 5u_{n+1} - 2u_n = 0$$

[Ind] Appliquer le cours.

[Dem] L'équation caractéristique est $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ qui admet pour racine 1 d'ordre 2 et 2 d'ordre 1. Les suites sont donc de la forme : $u_n = (\lambda_1 + \lambda_2 n) + \lambda_3 2^n$.

3.4.2 Systèmes linéaires d'ordre 1 à coefficients constants

Théorème de Cauchy-Lipschitz (cas linéaire)

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$ et u un endomorphisme de E. On appelle solution de l'équation différentielle $\overrightarrow{X}' = u(\overrightarrow{X})$ une fonction vectorielle $\overrightarrow{X}$ dérivable définie sur un intervalle ouvert non vide I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans E vérifiant: pour tout $t \in I$, $\overrightarrow{X}'(t) = u(\overrightarrow{X}(t))$.

En choisissant une base $\mathcal{B}$ de E, on transforme l'équation différentielle précédente en un système d'équations différentielles ou les fonctions inconnues sont les composantes $(x_1, \ldots, x_n)$ de la fonction vectorielle $\overrightarrow{X}$, en notant A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$, on est amené à étudier l'équation différentielle $X' = AX$ dont une solution est une fonction X dérivable définie sur un intervalle ouvert non vide I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans K^n et vérifiant: pour tout $t \in I$, $X'(t) = AX(t)$.

Remarque: Réciproquement, lorsqu'on étudie un système d'équations $X' = AX$, on peut le transformer en un problème vectoriel en introduisant l'endomorphisme $\tilde{A}$ canoniquement associé à la matrice A.

Théorème 8 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$ et u un endomorphisme de E . Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et tout $\overrightarrow{X}_0 \in E$, il existe une unique solution $\overrightarrow{X}$ définie sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $\overrightarrow{X}' = u(\overrightarrow{X})$ vérifiant $\overrightarrow{X}(t_0) = \overrightarrow{X}_0$.*

[Ind] Admis

A partir de ce théorème, on peut déterminer la structure des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de ce type d'équation:

Théorème 9 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$ et u un endomorphisme de E . L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $\overrightarrow{X}' = u(\overrightarrow{X})$ est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}, E)$ de dimension n.*

Si t_0 est un réel et $\{\overrightarrow{e}_1, \ldots, \overrightarrow{e}_n\}$ est une base de E, la famille $\{\overrightarrow{X}_1, \ldots, \overrightarrow{X}_n\}$ des solutions définies sur $\mathbb{R}$ et vérifiant, pour tout $i \in [1, n]$, $\overrightarrow{X}_i(t_0) = \overrightarrow{e}_i$ est une base de $\mathcal{S}$.

Soit $\{\overrightarrow{X}_1, \ldots, \overrightarrow{X}_n\}$ une base de $\mathcal{S}$. Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, la famille $\{\overrightarrow{X}_1(t_0), \ldots, \overrightarrow{X}_n(t_0)\}$ est une base de K^n.

[Ind] Appliquer les résultats de ce chapitre.

Exercice 29 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ Déterminer une base de l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation $X' = AX$.

[Ind] Appliquer le théorème précédent.

[Dem] Le système s'écrit $\left\{ \begin{array}{l} x' = x + y \\ y' = y \end{array} \right.$ ce qui donne $y = ke^{\lambda t}$ puis $x = \frac{1}{\lambda - 1} e^{\lambda t} + he^t$ si $\lambda \neq 1$. Si $\lambda = 1$ alors $x = (t + a)e^t$, avec a, h, k des constantes arbitraires.

Cas ou u est diagonalisable

Proposition 33 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable et soit $\{\overrightarrow{e}_1, \ldots, \overrightarrow{e}_n\}$ une base de E constituée de vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Si, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et pour $i \in [1, n]$, on note α_i la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\alpha_i(t) = \mathrm{e}^{\lambda_i(t-t_0)}$ alors la famille $\alpha_1 \overrightarrow{e}_1, \ldots, \alpha_n \overrightarrow{e}_n$ est une base de l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\overrightarrow{X}' = u(\overrightarrow{X})$.*

[Ind] Faire un changement de base.

[Dem] Voir le chapitre équations différentielles.

Lorsque u est un endomorphisme d'un espace vectoriel réel dont la matrice A dans une base $\mathcal{B}$ de E est une matrice réelle, diagonalisable dans $\mathbb{C}$, les valeurs propres complexes non réelles de A sont associées deux à deux par conjugaison, et si λ est une de ces valeurs propres et E_λ le sous-espace propre (de $\mathbb{C}^n$) associé, alors $E_{\bar{\lambda}} = \{\bar{x}\ ,\ x \in E_\lambda\}$. On remarque alors que si $\{f_1, \ldots, f_m\}$ est une base de E_λ, alors la famille $\{\Re(f_1), \mathrm{Im}(f_1), \ldots, \Re(f_m), \mathrm{Im}(f_m)\}$ est une base de $E_\lambda \oplus E_{\bar{\lambda}}$ constituée de vecteurs réels. Notons $r_1, \ldots, r_p$ les valeurs propres réelles distinctes de A d'ordre $n_1, \ldots, n_p$ et pour tout $k \in [1, p]$, $\{e_{k,1}, \ldots, e_{k,n_k}\}$ une base de vecteurs réels du sous-espace vectoriel E_{r_k}; notons les paires de valeurs propres complexes non réelles distinctes de A $\{\lambda_1, \bar{\lambda}_1\}, \ldots, \{\lambda_q, \bar{\lambda}_q\}$ et pour $l \in [1, q]$, $\{f_{l,1}, \ldots, f_{l,m_l}\}$ une base de vecteurs (complexes) du sous-espace vectoriel E_{λ_l}.
Une base de solutions réelles de l'équation $X' = AX$ est alors, pour $t_0 \in \mathbb{R}$:

$$(t \mapsto \mathrm{e}^{r_k(t-t_0)} e_{k,k'})_{k \in [1,p], k' \in [1,n_k]},$$

$$(t \mapsto \Re(\mathrm{e}^{\lambda_l(t-t_0)} f_{l,l'})_{l \in [1,q], k' \in [1,m_l]}),$$

$$(t \mapsto \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\lambda_l(t-t_0)} f_{l,l'})_{l \in [1,q], k' \in [1,m_l]})$$

Ces fonctions vectorielles colonnes sont alors les composantes dans la base $\mathcal{B}$ de fonctions vectorielles à valeurs dans E formant une base de $\mathcal{S}$

Exercice 30 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$. Déterminer une base de solutions réelles de l'équation différentielle $X' = AX$. Quelle interprétation géométrique peut-on donner à ce système d'équations différentielles ?

[Ind] Diagonaliser.

[Dem] Pour l'interprétation on reconnait la matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ et d'axe Ox. Les valeurs propres sont $1, -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ et une base propre $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,2+i)$ et $e_3 = (0,1,2-i)$. Les solutions sont donc $e^t e_1 + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)} e_2 + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)} e_3$. Solutions que l'on peut mettre sous la forme réelle.

Exercice 31 Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et $\overrightarrow{\omega}$ un vecteur non nul de E. Déterminer une base de solutions de l'équation différentielle $\overrightarrow{X}' = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{X}$.

[Ind] Écrire la matrice.

[Dem] On supposera le vecteur Ω normé et on se place dans la base $(\Omega, \Omega', \Omega \wedge \Omega')$ où Ω' est un vecteur orthogonal à Ω. Dans cette base la matrice du produit vectoriel par Ω est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres sont $0, i, -i$ et des vecteurs propres $V_1 = (1,0,0)$, $V_2 = (0,1,-i)$, $V_3 = (0,1,i)$. Une base de solutions est donc V_1, $e^{it} V_2$, $e^{-it} V_3$.

3.5 Exercices

Exercice 32 Soit E un espace vectoriel de dimension n, u un endomorphisme de E diagonalisable et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ ses valeurs propres distinctes. On note I l'identité de E.
On considère la suite $(L_i)_{1\leq i\leq p}$ des polynômes d'interpolation de Lagrange définie par:

$$\forall i \in \{1, \ldots, p\} \quad L_i(X) = \frac{\prod_{j=1,j\neq i}^{p}(X - \alpha_j)}{\prod_{j=1,j\neq i}^{p}(\alpha_i - \alpha_j)}$$

Pour $i \in \{1, \ldots, p\}$, on pose: $\Pi_i = L_i(u)$. Montrer que $(\Pi_i)_{i\in[1,p]}$ forme une famille de projecteurs associés et déterminer leurs noyaux et leurs images.
En déduire que les projections sur les s.e.v. propres sont des polynômes en u.

[Ind] Vérifier les conditions pour que ce soit une famille de projecteurs associés, penser à commuter.

[Dem] Calculons $\Pi_i(x)$. Pour cela décomposons x sur la somme directe des sous-espaces propres (u est diagonalisable) : $x = x_1 + \cdots + x_p$. On a $\Pi_i(x) = \dfrac{1}{\prod\limits_{j=1,j\neq i}^{p}(\alpha_i - \alpha_j)} \prod\limits_{j=1,j\neq i}^{p}(u - \alpha_j id)(\sum\limits_{k=1}^{p} x_k) = \dfrac{1}{\prod\limits_{j=1,j\neq i}^{p}(\alpha_i - \alpha_j)}(u - \alpha_j id)(x_i) = \dfrac{1}{\prod\limits_{j=1,j\neq i}^{p}(\alpha_i - \alpha_j)}(\alpha_i - \alpha_j)x_i = x_i$ car tant que $k \neq i$ dans le produit en commenÃ§ant à droite par $u - \alpha_k id$ on trouve $\alpha_k - \alpha_k$ il reste donc que la composante x_i. Il en résulte directement que les Π_i sont les projections sur les sous-espaces propres ils sont donc associés et nous connaissons image et noyau. En développant le produit on a que ces projections sont des polynômes en u.

Exercice 33 Montrer que l'inverse d'un automorphisme diagonalisable est diagonalisable. Quel est son polynôme caractéristique ?

[Ind] Partir de la relation $u(x) = \lambda x$ pour trouver les éléments propres de u^{-1}.

[Dem] Si λ est une valeur propre il existe un vecteur x non nul tel que : $u(x) = \lambda x$. En composant par u^{-1} on obtient $u^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda}x$. En effet u étant inversible 0 n'est pas valeur propre. Ainsi les valeurs propres de u^{-1} sont contenues dans $\{\frac{1}{\lambda}$: λ valeur propre de $u\}$. Mais en repartant de $u^{-1}(x) = \lambda x$ on retrouve $u(x) = \frac{1}{\lambda}x$. Donc les valeurs propres sont exactement les inverses des valeurs propres. Le polynôme caractéristique de u^{-1} est : $\prod\limits_{i=1}^{p}(X - \dfrac{1}{\lambda_i})$ où les λ_i sont les valeurs propres de u. Si u est diagonalisable il existe une base de vecteurs propres qui est aussi une base de vecteurs propres de u^{-1}.

Exercice 34 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et φ l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ défini, pour $v \in \mathcal{L}(E)$ par $\varphi(v) = u \circ v$. Montrer que φ est diagonalisable si et seulement si u est l'est également.

[Ind] Utiliser l'existence d'un polynôme annulateur à racines simples.

[Dem] Si u est diagonalisable alors u annule un polynôme scindé à racines simples $P(X) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k X^k$.
On a alors aussi $P(\varphi) = 0$. En effet pour tout v et tout x de E on a : $P(\varphi)(v)(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \varphi^k(v(x)) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k u^k(v(x)) = 0$. Donc φ est diagonalisable. Maintenant si φ est diagonalisable il annule un polynôme scindé à racines simples : $P(X) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k X^k$. Alors pour tout v on a $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k u^k \circ v = 0$ en prenant $v = id$ on obtient que u annule un polynôme scindé à racines simples et est donc diagonalisable.

Exercice 35 Soit $A = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} a & b \operatorname{sh} a \\ \frac{1}{b} \operatorname{sh} a & \operatorname{ch} a \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{Z}$

[Ind] On pourra utiliser que $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$.

[Dem] Le polynôme caractéristique est $P_A(X) = X^2 + 2 \operatorname{ch} aX + 1$, il y a deux valeurs propres distinctes (donc A est diagonalisable) $-\operatorname{ch} a - \operatorname{sh} a = -e^a$ et $-\operatorname{ch} a + \operatorname{sh} a = -e^{-a}$ et deux vexteurs propres $\begin{pmatrix} -b \operatorname{sh} a \\ \operatorname{ch} a + e^a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -b \operatorname{sh} a \\ \operatorname{ch} a + e^{-a} \end{pmatrix}$. Pour calculer A^n on utilise l'indication : $A^n = P \begin{pmatrix} (-1)^n e^{na} & 0 \\ 0 & (-1)^n e^{-na} \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} -b \operatorname{sh} a & -b \operatorname{sh} a \\ \operatorname{ch} a + e^a & \operatorname{ch} a + e^{-a} \end{pmatrix}$.

Exercice 36 Déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables, et les diagonaliser, le cas échéant.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

[Ind] Quelles sont les matrices semblables à la matrice identité ? La seconde s'écrit $3I + J$ où J est la matrice dont tous les termes sont égaux à 1. Pour la troisième calculer le polynôme caractéristique....

[Dem] La première est triangulaire, on lit donc les valeurs propres sur la diagonale, il n'y a que 1 valeur propre triple. Si A était diagonalsable elle serait semblable à la matrice identitée donc ce serait la matrice identitée ce qui n'est pas. A n'est pas diagonalisable.
Pour la seconde elle peut s'écrire $3I + J$ où J est la matrice formée que de 1. J est diagonalisable donc la matrice aussi.
Les valeurs propres de cette dernière sont 1, $3 + \sqrt{19}$; $3 - \sqrt{19}$ car le polynôme caractéristique est $P'X) = X^3 - 7X^2 - 4X + 10$. Comme il y a 3 valeurs propres distinctes elle est diagonalisable.

Exercice 37 Diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$ $(a \in \mathbb{C}^*)$

[Ind] Allez-y.

[Dem] Le polynôme caractéristique est $P(X) = X^3 - 3X + 2$, 2 est valeur propre simple, un vecteur propre associé est $\begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$. -1 est valeur propre double, le sous espace propre associé est de dimension 2 de base $\begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -a^2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On peut alors écrire la matrice de passage P et calculer $P^{-1}AP$ pour trouver la matrice diagonale de diagonale $2, -1, -1$.

Exercice 38 Calculer la puissance $n^{ième}$ de la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 & 0 \\ -12 & -7 & 0 & 0 \\ 20 & 11 & -6 & -12 \\ -12 & -6 & 6 & 11 \end{pmatrix}$$

[Ind] Regarder si la matrice est diagonalisable.

[Dem]

Exercice 39 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que si $A^n = I_n$, alors A est diagonalisable.

[Ind] Mais on a un polynôme....

[Dem] Si $P(X) = X^n - 1$ le polynôme P est scindé à racines simples (ses racines sont les racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité) et annulateur de A, donc A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Exercice 40 Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables tels que $uv = vu$. Montrer qu'il existe une base constituée de vecteurs propres communs à u et v.

[Ind] Montrer d'abord que tout sous-espace propre de l'un est stable par l'autre, puis faire une preuve par récurrence.

[Dem] Si λ est valeur propre de u alors pour tout x de $\ker(u - \lambda i)$ on a $u(x) = \lambda x$ d'où $v(f(x)) = u(v(x)) = \lambda v(x)$ et donc $v(x) \in \ker(u - \lambda i)$. Donc $\ker(u - \lambda i)$ est stable par v.

Pour $n = 1$ c'est clair, supposons la propriété vraie pour n et soit u, v des endomorphismes de E_{n+1}. L'endomorphisme y admet au moins une valeur propre λ (dans le champs complexe) soit $V_\lambda = \ker(u - \lambda i)$

Ou bien $\dim V_\lambda = n + 1$ et $u = \lambda i$ alors tout vecteur propre de v est propre pour f.

Ou bien $\dim V_\lambda \leq n$ et $u(V_\lambda) = V_\lambda$ et $v(V_\lambda) \subset V_\lambda$ ceci permet de considérer les endomorphismes de V_λ : $u_1 = u|V_\lambda$ et $v_1 = v|_{V_\lambda}$ on a $u_1 \circ v_1 = v_1 \circ u_1$, par l'hypothèse de récurrence u_1 et v_1 ont un vecteur propre en commun et donc u, v aussi.

$E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_u(\lambda_i)$ et $E_u(\lambda_i)$ est stable par v soit $v_i = v\,\big|_{E_u(\lambda_i)}$. v_i est un endomorphisme de $E_u(\lambda_i)$. On a que v est ddiagonalisable et donc v_i aussi. Il existe donc B_i base de $E_u(\lambda_i)$ formée de vecteurs propres de v et $\coprod_i B_i$ convient.

Exercice 41 Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les matrices AB et BA ont mÃªme polynôme caractéristique.

[Ind] On pourra commencer par le cas où A est inversible; dans le cas général, remplacer A par $A + \varepsilon I_n$.

[Dem] En suivant l'indication supposons d'abord A inversible. On peut écrire $AB = A(BA)A^{-1}$ donc AB et BA sont semblables et pars suite ont mÃªme polynôme caractéristique. Si A n'est pas inversible, l'ensemble des matrices non inversibles est un fermé de $\mathcal{M}_n(K)$ car c'est l'image réciproque de 0 par la fonction continue det. Ceci permet de construire une suite $A_n = A + \varepsilon_n I$ de matrices inversibles qui converge vers A. On a $\det(A_n B - XI) = \det(BA_n - XI)$. Le produit et le déterminant étant continus en passant à la limite nous obtenons le résultat.
Une autre méthode est de faire le produit par blocs de $\begin{pmatrix} \lambda I - BA & B \\ 0 & \lambda I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ A & I \end{pmatrix}$ et
$\begin{pmatrix} I & 0 \\ A & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I & B \\ 0 & \lambda I - AB \end{pmatrix}$

Exercice 42 Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des complexes. Calculer:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

[Ind] Faire apparaître des zéros.

[Dem] $$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 - a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 - a_n & a_2 - a_n & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(-1)^n \begin{vmatrix} a_1-a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1-a_3 & a_2-a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1-a_n & a_2-a_n & \cdots & a_{n-1}-a_n \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} a_1 \prod_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}).$$

Exercice 43 Trouver une matrice triangulaire semblable à

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculer A^n, pour $n \in \mathbb{Z}$

[Ind] Prendre un maximum de vecteurs propres puis compléter pour trouver une matrice triangulaire.

[Dem] C'est le cas pire 1 est valeur propre triple d'ordre 3, donc A n'estpas diagonalisable. On ne peut prendre qu'un seul vecteur propre associé à 1 par exemple $(1,1,1)$. On cherche alors $e_2 = (x,y,z)$ tel que $Ae_2 = e_1 + e_2$ ce qui donne $\begin{cases} y - x = 1 \\ z - y = 1 \\ x - 3y + 2z = 1 \end{cases}$. On peut prendre $e_2 = (0,1,2)$. On cherche ensuite $e_3 = (x,y,z)$ tel que $Ae_3 = e_2 + e_3$ ce qui donne $\begin{cases} y - x = 0 \\ z - y = 1 \\ x - 3y + 2z = 2 \end{cases}$. On peut prendre $e_3 = (0,0,1)$.

Dans la base (e_1, e_2, e_3) la matrice est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour calculer A^n on décompose $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $I + N$ somme de la matrice identité et d'une matrice nilpotente, on calcule $(I+N)^n$ par la formule du binôme car les deux matrices commutent. Puis on revient à A^n par l'automorhisme intérieur. On trouve succesivement $B^n = \begin{bmatrix} 1 & n & 1/2\,n\,(n-1) \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 - n + 1/2\,n\,(n-1) & n - n\,(n-1) & 1/2\,n\,(n-1) \\ 1/2\,n\,(n-1) & 1 - n - n\,(n-1) & 1/2\,n\,(n-1) + n \\ 1/2\,n\,(n-1) + n & -3\,n - n\,(n-1) & 1/2\,n\,(n-1) + 2\,n + 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 44 Trouver les matrices qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$.

[Ind] Diagonaliser puis utiliser un automorphisme intérieur.

[Dem] C'est une matrice de rang 1. $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} j \\ j^2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont dans le noyau et le vecteur $e_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ vérifie $Ae_3 = e_2$. La matrice est donc semblable à $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec pour matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & 0 \\ 1 & j^2 & 0 \end{pmatrix}$. Les matrices qui commutent avec J sont de la forme : $C(a,c,d,e,f) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$ et donc le commutant de A est formé des matrices de la forme $PC(a,c,d,e,f)P^{-1}$.

Exercice 45 Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Montrer que A n'est pas diagonalisable, mais qu'il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.

[Ind] Triangulariser.

[Dem] On a que 1 est valeur propre d'ordre 2 avec une droite propre portée par $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ frac52 \end{pmatrix}$ et -2 est valeur propre simple de vecteur propre par exemple : $e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Cherchons un vecteur e_3 tel que $Ae_3 = e_2 + e_3$ soit par exemple $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -3 \end{pmatrix}$. En posant $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{5}{2} & -3 \end{pmatrix}$ on a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 46 Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

et

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

[Ind] Allez y.

[Dem] Pour A : -2 est valeur propre simple de vecteur propre asocié par exemple : $\begin{pmatrix} -0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et 1 valeur propre double de sous-espace propre la droite portée par $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix}$.
Pour B une seule valeur propre 2 de sous-espace propre la droite portée par $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 47 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ et $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par: $a_{ij} = b_j + \delta_{ij} a_i$. Former le polynôme caractéristique de A. Montrer que si, pour tout i, $b_i > 0$ et que $a_1, \ldots, a_n$ sont deux à deux distincts, alors A est diagonalisable.

[Ind] Faire apparaître des zéros pour calculer le polynôme caractéristique.

[Dem] $\det A = \det(V + (b_1 - X)e_1, V + (b_2 - X)e_2, \cdots, V + (b_n - X)e_n)$ avec $V = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ et $e_1, \cdots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Ainsi $\det A = \det((a_1 - X)e_1, (a_2 - X)e_2, \cdots, (a_n - X)e_n) + \sum_{j=1}^{n} \det((a_1 - X)e_1, (a_2 - X)e_2, \cdots, (a_{j-1} - X)e_{j-1}, V, (a_{j+1} - X)e_{j+1}, \cdots, (a_n - X)e_n)$. Mais $V = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i$

donc $\det((a_1 - X)e_1, (a_2 - X)e_2, \cdots, (a_{j-1} - X)e_{j-1}, V, (a_{j+1} - X)e_{j+1}, \cdots, (a_n - X)e_n) = \sum_{j=1}^{n} \det((a_1 - X)e_1, \cdots, (a_{j-1} - X)e_{j-1}, b_i e_i, (a_{j+1} - X)e_{j+1}, \cdots, (a_n - X)e_n)$.
Or $\det(e_1, e_2, \cdots, e_{j-1}, e_i, e_{j+1}, \cdots, e_n) = \delta_{ij}$.
D'où $\det((a_1 - X)e_1, \cdots, (a_{j-1} - X)e_{j-1}, b_i e_i, (a_{j+1} - X)e_{j+1}, \cdots, (a_n - X)e_n) = (a_1 - X)(a_2 - X) \cdots (a_{j-1} - X) b_j (a_{j+1} - X) \cdots (a_n - X)$
et finalement

$$\det(A - XI) = \prod_{j=1}^{n} (a_j - X) + \sum_{j=1}^{n} (a_1 - X)(a_2 - X) \cdots (a_{j-1} - X) b_j (a_{j+1} - X) \cdots (a_n - X)!$$

Avec les hypothèses faites en rangeant les a_i en ordre croissants on n changements de signe du polynôme caractéristique donc n racines distinctes et A est diagonalisable.

Exercice 48 Résoudre les systèmes:

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = y + z \\ z' = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x + 2y + z \\ y' = 2x + 3y - z \\ z' = 5x + 6y - 7z \end{cases}$$

[Ind] Diagonaliser ou triangulariser.

[Dem] Pour les deux premières les systèmes sont triangulaires, ils se résolvent par le bas.
Pour la première on a :$y(t) = \lambda e^t$ puis $x(t) = (\lambda t + \mu)e^t$.
Pour la seconde on trouve $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}(\nu t^2 + 2\mu t + 2\nu t + 2\lambda)e^t \\ y(t) = (\nu t + \mu)e^t \\ z(t) = \nu e^t \end{cases}$.
Pour la troisième la matrice est diagonalisable ayant pour valeurs propres $0, -7, 4$ et l'on trouve $\begin{cases} x(t) = \nu + \mu e^{-7t} t + \lambda e^{4t} \\ y(t) = -\frac{5}{6}\mu e^{-7t} + \lambda e^{4t} - \frac{3}{5}\nu \\ z(t) = -\frac{19}{3}\mu e^{-7t} + \lambda e^{4t} + \frac{1}{5}\nu \end{cases}$.

Exercice 49 Résoudre le système:

$$\begin{cases} x'' + 3y' - 4x + 6y = 0 \\ y'' + x' - 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

[Ind] Diagonaliser ou triangulariser.

[Dem] On trouve : $\begin{cases} x(t) = \lambda e^{2t} + \mu e^{-2t} + \nu \sin(t) + \eta \cos(t) \\ y(t) = \frac{1}{2}\mu e^{-2t} - \frac{1}{3}\nu \cos(t) + \frac{1}{3}\eta \sin(t) + \frac{2}{3}\nu \sin(t) + \frac{2}{3}\eta \cos(t) \end{cases}$

3.6 Travaux Dirigés : Réduction

Exercice 50 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ chercher le polynôme caractéristique de A, en déduire les valeurs propres de A. A est-elle diagonalisable ? si oui, écrire la matrice de passage P de la base canonique à la base de vecteurs propres, vérifier que $D = P^{-1}AP$.

Même question avec $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (pour B on montrera que l'on pouvait conclure dès la connaissance des valeurs propres.)

Même question avec $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

[Dem] $P_A(X) = (-X)\left(X^2+3\right)$ en faisant par exemple la somme des colonnes pour mettre $(-X)$ en facteur et puis une combinaison des lignes pour faire apparaître des 0. Dans $\mathbb{R}$ la matrice n'est pas diagonalisable. $Ker(A)$ est engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et le sous-espace propre associé à la valeur propre $i\sqrt{3}$ est engendré par $\begin{pmatrix} j^2 \\ j \\ 1 \end{pmatrix}$ et pour $-i\sqrt{3}$ c'est $\begin{pmatrix} j \\ j^2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nous avons donc la matrice de assage $P = \begin{pmatrix} 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice inverse $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & j & 1 \end{pmatrix}$. Il est d'usage de vérifier que les calculs sont justes ! $P^{-1}AP = D$ avec $D = diag\left(0, j-j^2, j^2-j\right)$.

$P_B(X) = -(X-1)^3$ Il n'y a qu'une seule valeur propre et donc B n'est pas diagonalisable ca sinon elle serait semblable à la matrice Id or toute matricesemblable à Id sont égales à Id : $P^{-1}IdP = Id$. Le sous-espace propre associé à 1 est un plan $x+y-z=0$. Nous pouvons trigonaliser B sous la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$P_C(X) = (2-X)^2(4-X)$. $V(2)$ est un plan de base $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V(4)$ une droite engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'où la matrice de passage et son inverse $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et la vérification $P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 51 Dans E K-espace vectoriel de dimension finie n on considère des endomorphismes u et v qui ont chacun n valeurs propres dans K distinctes deux à deux. Montrer que :

$$u \circ v = v \circ u \Leftrightarrow u \text{ et } v \text{ ont mêmes vecteurs propres.}$$

[Dem] C'est une question de cours ! Pour la réciproque $\Longleftarrow$ il existe une base propre dans laquelle $A = \mathcal{M}(u)$ et $B = \mathcal{M}(v)$ sont diagonales donc $AB = BA$ et par suite $u \circ v = v \circ u$. Pour la partie directe on a si x est un vecteur propre associé à λ_1 pour u : $u(x)) = \lambda_1 x$ et $\lambda_1 v(x) = v \circ u(x) = u \circ v(x)$ ou $u(v(x)) = \lambda_1 v(x)$ ce qui donne $v(x)$ est un vecteur propre pour u associé à λ_1 qui est une droite donc il existe α_1 tel que $v(x) = \alpha_1 x$ et donc x est un vecteur propre de v. En faisant de même pour y vecteut propre de v associé à μ_1 on obtient que u et v ont même vecteurs propres.

Exercice 52 Soit la matrice circulante : $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$ avec $a_i \in \mathbb{C}$.

1°) Montrer que si ω est racine $\mathrm{n}^{\text{ème}}$ de l'unité alors le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \vdots \\ \omega^{n-1} \end{pmatrix}$ est propre.

2°) En déduire le déterminant de cette matrice.

[Dem] Il s'agit d'une vérification $Ae_\omega = \begin{pmatrix} a_1 + \omega a_2 + \cdots + \omega^{n-1} a_n \\ a_n + \omega a_1 + \cdots + \omega^{n-1} a_{n-1} \\ \vdots \\ a_2 + \omega a_3 + \cdots + \omega^{n-1} a_1 \end{pmatrix} = \left(a_1 + \omega a_2 + \cdots + \omega^{n-1} a_n\right) \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \vdots \\ \omega^{n-1} \end{pmatrix}$ en utilisant que $\omega^n = 1$. Il existe donc une base propre car il y a n racine $\mathrm{n}^{\text{ème}}$ de l'unité distincte donc n vecteurs propres distincts, dans cette base la matrice est diagonale (enfin l'endomorphisme....) et le déterminant est le produit des valeurs propres $\Delta = \prod\limits_{\omega^n=1} \left(a_1 + \omega a_2 + \cdots + \omega^{n-1} a_n\right)$.

Exercice 53 [Réduction d'une matrice antisymétrique.]

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$ une matrice antisymétrique de $M_3(\mathbb{R})$. On note f l'endomorphisme ayant pour matrice A dans la base canonique orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

1°) Préciser les valeurs propres réelles ou complexes de A.

2°) On suppose a, b, c non tous nuls. Démontrer que $\ker f$ est une droite vectorielle dont on précisera une base Ω. Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$, montrer qu'en choisissant bien Ω, on a $f(u) = u \wedge \Omega$, où $\wedge$ désigne le produit vectoriel.

3°) Donner l'équation du plan orthogonal à Ω, démontrer que ce plan est stable par f. En déduire qu'il existe une base orthonormée (Ω', v, w) dans laquelle la matrice de f a la forme : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$. On précisera α. Par contre il est inutile d'expliciter la base.

4°) Application : Réduire sous la forme précédente la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ en précisant la matrice de passage.

[Dem] C'est un exercice facile, il en faut $P_A(X) = -X\left(X^2 + \left(a^2 + b^2 + c^2\right)\right)$ si on suppose la matrice non nulle il y a trois valeurs propres : $0, \pm i\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. $\ker f$ est la droite engendrée par $\Omega = \begin{pmatrix} c \\ -b \\ a \end{pmatrix}$ on a par simple vérification : $f(u) = \begin{pmatrix} au_2 + bu_3 \\ -au_1 + cu_3 \\ -bu_1 - cu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \bigwedge \begin{pmatrix} c \\ -b \\ a \end{pmatrix} = \vec{u} \bigwedge \vec{\Omega}$.
Le plan $P = \Omega^\perp$ a pour équation $cx - by + az = 0$. Soit $x = (x_1, x_2, x_3)$ un point de P et $u(x) = (ax_2 + bx_3, -ax_1 + cx_3, -bx_1 - cx_2)$ et on a $c(ax_2 + bx_3) - b(ax_1 + cx_3) + a(-bx_1 - cx_2) = 0$. En fait pour tout x de E on a $u(x) \in P$ car $P = Imu$. Soit $\vec{e}_1 = \dfrac{\Omega}{\|\Omega\|}$, $\vec{e}_2$ un vecteur normé de P et $\vec{e}_3 = \vec{e}_2 \bigwedge \vec{e}_1$ on a $f(e_2) = e_2 \bigwedge \Omega = \|\Omega\| e_3; f(e_3) = e_3 \bigwedge \Omega = \|\Omega\| (e_2 \bigwedge e_1) \bigwedge e_1 = \|\Omega\| e_3 \bigwedge e_1 = \|\Omega\| e_2$. La matrice s'écrit dans cette base $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Dans l'application on a $\Omega = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, -1)$ puis $P = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$ enfin $e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, -1)$ et avec $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ on obtient $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 54 Soit E l'ensemble des matrices de la forme $M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$ où

a, b, c sont des réels.
1°) Montrer que E a une structure d'espace vectoriel, en donner la dimension et une base.
2°) Calculer le déterminant de $M(a, b, c)$. Discuter suivant a, b, c l'existence d'une matrice inverse.
3°) Dans le cas où $M(a, b, c)$ est régulière (inversible), calculer son inverse, $M(a, b, c)$ est-elle inversible dans E ?
4°) Montrer que l'on peut obtenir le polynôme caractéristique sans refaire les calculs. En déduire, en fonction de a, b, c les valeurs propres de $M(a, b, c)$.
5°) On pose $a = 2, b = \sqrt{2}, c = 1$ et on note A la matrice de E correspondante. Montrer sans calcul que les espaces propres sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. En déduire la relation $A^2-6A+5I = 0$.
6°) Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 6X + 5$. En déduire l'expression de A^n en fonction de A et de la matrice I. (I est la matrice unité)

[Dem] On écrit $M(a, b, c) = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = aI + bJ + cK.$
On a ainsi directement que E est un sous-espace vectoriel de dimension 3 de base (I, J, K).
$\det(M) = (a-c)\left((a+c)^2 - 2b^2\right) = (a-c)\left(a+\sqrt{2}b+c\right)\left(a-\sqrt{2}b+c\right)$ en faisant $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$ puis $L_3 \leftarrow L_1 + L_3$. La matrice M sera inversible si et seulement si $a \neq c$ et $a+\sqrt{2}b+c \neq 0, a-\sqrt{2}b+c \neq 0$.
La matrice inverse a pour expression $\frac{1}{\Delta}\left(a^2+ac-b^2\right)I + (bc-ab)J + \left(b^2-ac-c^2\right)K$ qui est bien dans E. En calculant les produits de la base on montre que E est une sous-algèbre et le fait que l'inverse soit dans E signifie que la sous-algèbre est pleine.
$P_M(X) = -(X-(a-c))\left(X-\left(a\sqrt{2}b+c\right)\right)\left(X-\left(a-\sqrt{2}b+c\right)\right)$ et $sp(M) = \left\{a-c, a+\sqrt{2}b+c, a-\sqrt{2}b+c\right\}$.
Dans ces conditions $sp(M) = \{1, 1, 5\}$ et la matrice $M - I = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 1 donc le sous-espace propre est de dimension 2. La matrice est diagonalisable et $V(1) \bigoplus V(5) = \mathbb{R}^3$. Pour obtenir la relation il suffit de vérifier que $D^2 - 6D + 5I = 0$ avec $D = diag(1, 1, 5)$ car $PD^2P^{-1} - 6PDP^{-1} + 5I = PDP^{-1}PDP^{-1} - 6A + 5I = A^2 - 6A + 5I = 0$.
La division euclidienne de X^n par X^2-6X+5 donne $X^n = (X-1)(X-5)Q + aX + b$ avec $1 = a + b$ et $5^n = 5a + b$ d'où $a = \frac{5^n-1}{4}$ et $b = \frac{3-5^n}{4}$ d'où $A^n = \frac{5^n-1}{4}A + \frac{3-5^n}{4}I$.

Exercice 55 Résoudre dans $\mathbb{C}$: $\left\{\begin{array}{r} (1+\lambda^2)x_1 + \lambda x_2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda x_{i-1} + (1+\lambda^2)x_i + \lambda x_{i+1} = 0 \quad (2 \leq i \leq n-1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda x_{n-1} + (1+\lambda^2)x_n = 0 \end{array}\right.$

On pourra poser $\mu = \lambda + \frac{1}{\lambda}$ si $\lambda \neq 0$.

[Dem] Si $\lambda = 0$ alors le système admet une unique solution $(0, 0, \cdots, 0)$. Sinon on pose $\mu = \lambda + \dfrac{1}{\lambda}$ et le système s'écrit $\left\{\begin{array}{l} \mu x_1 + x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_{i-1} + \mu x_i + x_{i+1} = 0 \\ \vdots \\ x_{n-1} + \mu x_n = 0 \end{array}\right.$ ainsi $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à la valeur propre $-\mu$ de la matrice presque circulane $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ le vecteur $V_\theta = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \sin 2\theta \\ \vdots \\ \sin n\theta \end{pmatrix}$ vérifie $JV_\theta = \begin{pmatrix} \sin 2\theta \\ \sin\theta + \sin 3\theta \\ \vdots \\ \sin(n-2)\theta + \sin n\theta \\ \sin(n-1)\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\theta\sin\theta \\ 2\cos\theta\sin 2\theta \\ \vdots \\ 2\cos\theta\sin(n-1)\theta \\ 2\cos\theta\sin n\theta - \sin(n+1)\theta \end{pmatrix}$ en utilisant $\sin(k-1)\theta +$

$\sin(k+1)\theta = 2\cos\theta\sin k\theta$ or en posant $\theta_k = \dfrac{k\pi}{n+1}$ $(1 \leq k \leq n)$ on a $\sin(n+1)\theta = 0$ et $JV_\theta = 2\cos\theta V_\theta$. Ainsi $V_k \neq 0$ et J admet n valeurs prores distinctes $\left(2\cos\dfrac{k\pi}{n+1}\right)_k$. Conclusion Si $\mu = \lambda + \dfrac{1}{\lambda} \neq -2\cos\dfrac{k\pi}{n+1}$ il y a une unique solution $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ par contre si il existe k tel que $\mu = -2\cos\dfrac{k\pi}{n+1}$ ou $\lambda^2 + 2\cos\dfrac{k\pi}{n+1}\lambda + 1 = 0$ alors le système admet une droite vectorielle engendrée par $\left(\sin\dfrac{k\pi}{n+1}, \sin\dfrac{2k\pi}{n+1}, \cdots, \sin\dfrac{nk\pi}{n+1}\right)$.

Exercice 56 Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, $u \in L(E)$, et F un sous-espace de E stable par u .
Montrer que : Si u est diagonalisable ALORS $v = u_{|F}$ est diagonalisable.

[Dem] Soit B=$((e_i))$ une base de E formé de vecteurs propres, $((e_i'))_{1\leq i\leq p}$ une base de F que l'on complète par des vecteurs de B en les réindexant au besoin en $e_{p+1}, \cdots, e_n$. On a $\mathcal{M}_B(u) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ avec D diagonale, $\mathcal{M}_B(u) = \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{pmatrix}$ avec $\mathcal{M}_{B,B'} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ Q & I_{n-p} \end{pmatrix}$ d'où $\begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} P & 0 \\ Q & I_{n-p} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ Q & I_{n-p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ -QP^{-1} & I_{n-p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AP & 0 \\ DQ & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{-1}AP & 0 \\ -QP^{-1}AP + DQ & D \end{pmatrix}$
ce qui prouve que $P^{-1}AP = \Delta_1$.

Exercice 57 Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$, f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$.
1°) Montrer que tout sous-espace propre pour f est stable par g.
2°) Montrer qu'il existe un vecteur propre non nul commun à f et g.
3°) f et g étant supposés diagonalisables, montrer qu'il existe une base de vecteurs propres communs à f et g.
(2 se démontre par récurrence sur la dimension de E).

[Dem] Si λ est valeur propre de f alors pour tout x de $\ker(f - \lambda i)$ on a $f(x) = \lambda x$ d'où $g(f(x)) = f(g(x)) = \lambda g(x)$ et donc $g(x) \in \ker(f - \lambda i)$.
Pour $n = 1$ c'est clair, supposons la propriété vraie pour n et soit f, g des endomorphismes de E_{n+1}. L'endomorphisme f admet au moins une valeur propre λ (dans le champs complexe) soit $V_\lambda = \ker(f - \lambda i)$
Ou bien $\dim V_\lambda = n + 1$ et $f = \lambda i$ alors tout vecteur propre de g est propre pour f.
Ou bien $\dim V_\lambda \leq n$ et $f(V_\lambda) = V_\lambda$ et $g(V_\lambda) \subset V_\lambda$ ceci permet de considérer les endomorphismes de V_λ : $f_1 = f\,|V_\lambda$ et $g_1 = g\,|_{V_\lambda}$ on a $f_1 \circ g_1 = g_1 \circ f_1$, par l'hypothèse de récurrence f_1 et g_1 ont un vecteur propre en commun et donc f, g aussi.
$E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_f(\lambda_i)$ et $E_f(\lambda_i)$ est stable par g soit $g_i = g\left|_{E_f(\lambda_i)}\right.$. g_i est un endomorphisme de $E_f(\lambda_i)$.
On a que g est ddiagonalisable et donc g_i aussi. Il existe donc B_i base de $E_f(\lambda_i)$ formée de vecteurs propres de g et $\coprod_i B_i$ convient.

Exercice 58 Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension 3 tel que :

$$f^2 \neq 0, f^3 = 0$$

Montrer que l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f est le sous-espace de $L(E)$ engendré par i, f, f^2.

[Dem] Avec ces hypothèses il existe x_0 un vecteur de E tel que $f^2(x_0) \neq 0$ et $f^3(x_0) = 0$ considérons le triplet $\left(x_0, f(x_0), f^2(x_0)\right) = B$. C'est une base car cette famille est libre : $ax_0 + bf(x_0) + cf^2(x_0) = 0$ donne en composant par f^2 : $af^2(x_0) = 0$ donc $a = 0$ puis en cmposant par f : $bf^2(x_0) = 0$ d'où $b = 0$ puis $c = 0$. Dans cette base la matrice de f s'écrit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pour le commutateur de f on travaille dans cette base une matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = M$ vérifie $MA = AM$ donne $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a' & 0 & 0 \\ a'' & a' & a \end{pmatrix} = aI + a'A + a''A^2$ on obtient une sous-algèbre de dimension 3.

Exercice 59 Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice ayant toutes ses valeurs propres distinctes. Trouver la dimension et une base de $C(A) = \{M \in M_n(\mathbb{C}); AM = MA\}$.

[Dem] Il est facile mais important de montrer que $C(A)$ est une sous-algèbre de $M_n(\mathbb{C})$. Si $P \in GL_n(\mathbb{C})$ l'application $\varphi : M \longmapsto P^{-1}MP$ est un automorphisme appelé automorphisme intérieur de l'algèbre $M_n(\mathbb{C})$. Ainsi $MA = AM$ est équivalent à $\varphi(A)\varphi(M) = \varphi(M)\varphi(A)$ soit pour une application φ telle que $\varphi(A)$ est diagonale de diagonale les valeurs propres distinctes (α_i) on obtient pour tout i, j $\alpha_i m'_{ij} = \alpha_j m'ij$ soit $m'_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Ainsi $\varphi(M)$ est diagonale et $C(A)$ est de dimension n. Maintenant on a des candidats dans le commutant à savoir les puissances de A et $\left(I, A, A^2, \cdots, A^{n-1}\right)$ est une base de $C(A)$ en effet pour démontrer la liberté de cette famille il suffit de passer par φ.

Exercice 60 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in L(E)$ tel que $u^2 = u$. Trouver les sous-espaces de E stables par u.

[Dem] On a $u \circ (u - i) = 0$. Les polynômes X et $X - 1$ sont premiers entr'eux et donc on a $E = \ker u \bigoplus \ker(u - i)$. L'endomorphisme est une projection. En général l'intersection d'une somme n'est pas la somme des intersections. Ici $v\,|_F$ est aussi une projection de F, il en résulte que $F = \ker v \bigoplus \ker(v - i)$ mais $\ker v = \ker u \cap F$ et $\ker(v - i) = \ker(u - i) \cap F$. Donc un sous-espace stable est de la formme $F = F_1 \cap F_2$ avec $F_1 \subset \ker u$ et $F_2 \subset \ker(u - i)$.

Exercice 61 Soient f, v, u trois endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et (λ, μ) un couple de réels tels que :

$$f = \lambda u + \mu v \ , \ f^2 = \lambda^2 u + \mu^2 v \ , \ f^3 = \lambda^3 u + \mu^3 v$$

Montrer que f est diagonalisable.

[Dem] En supposant λ, μ non nuls et $\lambda \neq \mu$ on cherche α, β, γ des réels tels que $\alpha f + \beta f^2 + \gamma f^3 = 0$, nous faisons comme si le couple (u, v) était libre, peut-importe du moment que l'on trouve des candidats...cela donne $\begin{cases} \alpha + \beta\lambda + \gamma\lambda^2 = 0 \\ \alpha + \beta\mu + \gamma\mu^2 = 0 \end{cases}$ ou $\beta = -\gamma(\lambda + \mu)$ et $\alpha = \gamma(\lambda + \mu)\lambda - \gamma\lambda^2 = \gamma\mu\lambda$. et donc $\lambda\mu f - (\lambda + \mu) f^2 + f^3 = 0$ cette expression se factorise par $f \circ (f - \lambda i) \circ (f - \mu i) = 0$. L'endomorphisme f annule un polynôme à racines simples et est donc diagonalisable. Si $\lambda = \mu$ alors $f \circ (f - \lambda i) = 0$ meme conclusion et enfin si $\lambda = 0$ e $\mu \neq 0$ on obtient le polynôme $f \circ (f - \mu i) = 0$ et donc dans tous les cas f est diagonalisable.

Exercice 62 Déterminer les puissances et les racines carrées de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[Dem] On peut écrire $A = I + 2J + 3J^2$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ on a $J^3 = 0$ et $\left\{M = aI + bJ + cJ^2\right\}$ est la sous-algèbre engendrée par J. Toute marice de cette sous-algèbre pour $a \neq 0$ est inversible avec $M^{-1} = \frac{1}{a}I - \frac{b}{a^2}J + \frac{b^2 - ac}{a^3}J^2$, la sous-algèbre est pleine. Ainsi $A^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(2J + 3J^2\right)^k$ mais pour $k \geq 3$ on a $\left(2J + 3J^2\right)^k = J^k \left(2I + 3J\right)^k = 0$. Pour $n \geq 2$: $A^n = I + n\left(2J + 3J^2\right) + \frac{n(n-1)}{2}\left(2J + 3J^2\right)^2$. Pour les raines carrées, pour celles qui sont dans la sous-algèbre on les cherche sous la forme $M = aI + bJ + cJ^2$ et $M^2 = A$ donne $\begin{cases} a^2 = 1 \\ ab = 1 \\ b^2 + 2ac = 3 \end{cases}$ ce qui donne $a = b = c = \varepsilon$ avec $\varepsilon = \pm 1$.

Exercice 63 Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

[Dem] En utilisant les matrices par blocs on a l'égalité .

Exercice 64 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$.

1°) Trouver trois vecteurs V_1, V_2, V_3 de R^3 tes que : $AV_1 = -V_1$, $AV_2 = V_1 - V_2$, $AV_3 = V_2 - V_3$.

2°) Calculer A^n, $n \in \mathbb{N}$.

3°) Calculer $\exp(xA) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n A}{n!}$.

[Dem] Le polynôme caractéristique de A est $P_A(X) = -(X+1)^3$ et $A + I = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $rg(A) = 2$ on peut choisir un vecteur propre de A : $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $A(V_1) = -V_1$. Pour $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ on a $(A+I)V_2 = V_1$ et pour $V_3 = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ on a $(A+I)V_3 = V_2$. La matrice A est semblable à $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Soit $B = A+I$ on a $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & -a \\ 0 & a & a \end{pmatrix}$ et $B^3 = 0$. Ainsi $A = B - I$ et $A^n = (-1)^n \left(I - nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2\right)$.

Un calcul simple donne $\exp(X) = e^x \begin{pmatrix} 1 & ax & ax \\ -x & 1-ax^2 & -ax^2 \\ x & ax^2 & 1+ax^2 \end{pmatrix}$.

Exercice 65 Trouver une matrice $M \in M_4(\mathbb{C})$ telle que $M^2 = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

[Dem] C'est un cas particulier de la matrice de taille $n - n$ avec des 1 partout sauf sur la diagonale. Elle est intérressante car elle permet de répondre à d'autres matrices du type $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$ $I + M$, ou $\begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix} = aI + bM$..... M est diagonalisable. Le polynôme caractéristique $P_M(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -X & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -X & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -X \end{vmatrix}$. En sommant toutes les colonnes pour la taille n on obtient $(-X+n+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & -X \end{vmatrix}$. Puis en retranchant aux lignes la première ligne on obtient

$(-X+n+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -X-1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -X-1 \end{vmatrix}$ ce qui donne $P_M(X) = (-1)^n (X-(n-1))(X+1)^{n-1}$.
De plus la méthode choisit pour calculer le polynôme caractéristique donne les vecteurs propres en effet $u = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ engendre V_{n+1} et pour $1 \leq i \leq n$: $v_i = e_1 - e_i$ sont $n-1$ vecteurs indépendants de V_{-1}. Dans notre cas de $n = 4$ on a $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ en inversant les e_i en fonction des vecteurs propres et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Les racines de M sont au nombre de 8 avec $E_i = diag\left(\pm\sqrt{3}, \pm i, \pm i, \pm i\right)$ puis $R_i = PE_iP^{-1}$.

Exercice 66 Déterminer toutes les matrices qui commutent avec : $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

[Dem]

Exercice 67 Triangulariser la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & -6 \\ 0 & 5 & 0 & 4 \\ -2 & 7 & -1 & 11 \\ 0 & -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

[Dem] On a $P_A(X) = (X-1)^4$ et $A - I = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ -2 & 7 & -2 & 11 \\ 0 & -4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ qui est de rang 3.
$\dim V(1) = 1$ on a $A(e_1 - e_3) = e_1 - e_3$ soit $u = e_1 - e_3$.
Cherchons ensuite un vecteur v tel que $A(v) = v + u$ ou $(A-I)v = u$ ou $(A-I)^2 v = 0$, on peut prendre $v = \frac{1}{2}e_3$.
Cherchons w tel que $Aw = w + v$ ou $(A-I)w = v$, ainsi $w = -\frac{1}{6}e_2 + \frac{1}{12}e_3 + \frac{1}{6}e_4$ convient et enfin t tel que $A(t) = t + w$ ou $(A-I)t = w$ on trouve $t = \frac{83}{72}e_2 - \frac{371}{144}e_3 - \frac{86}{72}e_4$. Dans la base (u, v, w, t) avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{83}{72} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & -\frac{371}{144} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{86}{72} \end{pmatrix}$ alors $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Une autre méthode $f_1 = e_1 - e_3$ est une base de $V(1)$, on la complète par exemple par $f_2 = e_2, f_3 = e_3, f_4 = e_4$. La matrice est semblable à $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ et on recommence avec $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. On prend $g_1 = f_1, g_2 = f_3, g_3 = f_2, g_4 = f_4$ et on trouve $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ avec $h_1 = g_1, h_2 = g_2, h_3 = g_3 - g_4, h_4 = g_4$ on obtient $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 68 Pour quelle valeur de t_0 la matrice $M(t)$ admet-elle la valeur propre 2 ?

$$M(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ t & 1 & 1 \\ 0 & t+1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres.

[Dem]

Exercice 69 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$.

Déterminer les valeurs propres de A. Préciser une décomposition diagonale de A : $A = P_0 D_0 P_0^{-1}$ (on classera les valeurs propres par ordre de valeurs croissantes et on choisira pour P_0 une matrice dont les vecteurs colonnes ont une première composante égale à 1).

[Dem]

Exercice 70 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I$, montrer que $\det A > 0$.

[Dem] Si λ est valeur propre alors $\lambda^3 - \lambda - 1 = 0$ et le déterminant est le produit des valeurs propres, les variations de ce plynômes donnent que P a ne seule racine réelle supérieure à $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Exercice 71 Soit $f : \mathbb{C}_n[X] \to \mathbb{C}_n[X]$ définie par $f(P) = (X^2-1)P'(X) - (nX-a)P(X)$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$. Trouver sa matrice dans la base canonique. Déterminer ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

[Dem] La dérivation étant linéaire on a que f est linéaire. Si $\deg(P) = n$ de coefficient dominant α, $f(P)$ est à priori de degré $n+1$ mais le coefficient de X^{n+1} est $n\alpha - n\alpha$ et donc $f(P) \in \mathbb{C}_n[X]$. L'image de la base canonque est donnée par $f(X^k) = (k-n)X^{k+1} + aX^k - kX^{k-1}$ si $k \geq 1$ et $f(1) = a - nX$ d'où $A = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -n & \ddots & -2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -(n-1) & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & a \end{pmatrix}$ Maintenant λ est valeur propre si il existe un polynôme P non nul tel que $(X^2-1)P' - (nX - a + \lambda)P = 0$ ce qui donne $P(X) = k\exp\left(\int \frac{nx - a + \lambda}{x^2-1}\right) = k|x-1|^{\frac{n-a+\lambda}{2}}|x+1|^{\frac{n+a+\lambda}{2}}$ en écrivant $\frac{nx-a+\lambda}{x^2-1} = \frac{n-a+\lambda}{2(x-1)} - \frac{-n-a+\lambda}{2(x+1)}$. Pour que $\frac{n-a+\lambda}{2}$ et $\frac{n+a+\lambda}{2}$ soient entiers il faut que $\lambda = 2p + a - n$ avec $p \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$ on a ainsi $(n+1)$ valeurs propres distinctes pour les vecteurs propres $(x-1)^p(x+1)^{n-p}$.

Exercice 72 Les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

[Dem] Oui elles sont toutes les deux semblables à $diag(4,2,2)$ nous avons le même polynôme caractéristique $P_A(X) = P_B(X) = (X-2)^2(X-4)$ et des bases propres.

Exercice 73 Trouver toutes les matrices X telles que $X^2 = \begin{pmatrix} -7 & 5 & -6 \\ -19 & 10 & -12 \\ -13 & 5 & -6 \end{pmatrix}$.

[Dem] $P_A(X) = -X(X^2 + 3X - 11)$ et $sp(A) = \left\{0, \frac{-3 \pm \sqrt{53}}{2}\right\}$ la matrice A est diagonalisable. S'il existe X tel que $X^2 = A$ alors X, A commutent donc les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre, dans une base propre de A la matrice X' semblable à X sera diagonale du type $(0, \mu_1, \mu_2)$ avec

$\mu_1^2 = \lambda_1$ et $\mu_2^2 = \lambda_2$ sur $\mathbb{R}$ il n'y a pas de solution car $\lambda_2 < 0$ mais sur $\mathbb{C}$ il y a quatre solutions et $X = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1\sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & 0 & i\varepsilon_2\sqrt{-\lambda_2} \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $\varepsilon_1 = \pm 1$ et $\varepsilon_2 = \pm 1$.

Exercice 74 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ sans racine réelle et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $AP(A) = 0$, montrer que le rang de A est pair. Résoudre $X^3 + X = 0$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

[Dem] D'après le théorème des noyaux $\mathbb{R}^n = \ker A \bigoplus \ker P(A)$ et donc $Rg(A) = n - \dim\ker A = \dim\ker(P(A))$. Si $u : E_n \to E_n$ avec $Sp_{\mathbb{R}}(u) = \emptyset$ alors n est pair. En effet si n était impair le polynôme caractéristique $P_C(X) = (-X)^n + \cdots$ et $\lim\limits_{+\infty} P_C(X) = +\infty$, $\lim\limits_{-\infty} P_C(X) = -\infty$ le théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence d'un zéro réel, ce qui n'est pas. Nous appliquons cela à $a\left|_{\ker(P(A))}\right.$.
$X^3 + X = X\left(X^2 + 1\right)$ et $Rg(X) = 2$ ou0 et $X = 0$ ou $Rg(X) = 2$. Ainsi $\mathbb{R}^3 = \ker(X) \bigoplus P$ où P est le plan $\ker\left(X^2 + I\right)$. La matrice X s'écrit $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ avec A matrice $2-2$ diagonalisable dans $\mathbb{C}$, de valeurs propres i et $-i$, c'est le cas de $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et comme deux matrices diagonalisables ayant même valeurs propres sont semblables on a que X est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Réciproquement elle convient.

Exercice 75 Méthode de Faddeev de calcul du polynôme caractéristique d'une matrice. Soit A une matrice carrée $n \times n$.
On construit la suite de matrices $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante:
On pose $A_0 = A$ et, pour $k \geq 1$, $A_k = A(A_{k-1} - \frac{1}{k}\mathrm{Tr}(A_{k-1})I_n)$.
On démontre alors que le polynôme caractéristique P_A de A s'écrit:

$$P_A(X) = (-1)^n \left[X^n - \mathrm{Tr}(A_0)X^{n-1} - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A_1)X^{n-2} - \cdots - \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(A_{n-1})\right].$$

[Dem] Preuve de la méthode.
On pose $B = XI_n - A$, $P(X) = \det(B)$ et $\tilde{B}$ la matrice complémentaire de B.
1) Montrer qu'ils existent $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n$ et des matrices C_0, C_1, $\ldots$, $C_{n-1} \in \mathcal{M}_n(K)$ telles que $P(X) = X^n + \alpha_1 X^{n-1} + \cdots \alpha_n$ et $\tilde{B} = C_0 X^{n-1} + C_1 X^{n-2} + \cdots C_{n-1}$.
Vérifier que $C_0 = I_n$, $-C_{n-1}A = \alpha_n I_n$, et $C_k - C_{k-1}A = C_k - AC_{k-1} = \alpha_k I_n$ pour $1 \leq k \leq n-1$ (Indication : $B\tilde{B} = \tilde{B}B = P(X)I_n$).
En déduire que

$$C_k = A^k + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{k-j} A^j \quad \text{pour} \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

2) Montrer que $\mathrm{Tr}(\tilde{B}) = P'(X)$. (Indication : Dériver par rapport à X le déterminant de B). En déduire que $\mathrm{Tr}(C_0) = n$, $\mathrm{Tr}(C_k) = (n-k)\alpha_k$, pour $1 \leq k \leq n-1$ puis que $\mathrm{Tr}(AC_{k-1}) = -k\alpha_k$ pour $1 \leq k \leq n$
3) Montrer alors que pour $0 \leq k \leq n-1$ $A_k = AC_k$ et donc que la suite (A_k) vérifie bien la propriété demandée.

Exercice 76 Compléments à la méthode.
a) L'égalité $C_{n-1}A + \alpha_n I = 0$ donne alors le théorème de Cayley - Hamilton, valable pour les corps de caractéristique quelconque:

Théorème 10 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$:*

$$p_A(A) = 0.$$

b) A l'aide de 1) on peut écrire un système triangulaire qui fournit $\mathrm{Tr}(A)$, $\mathrm{Tr}(A^2)$, $\ldots$, $\mathrm{Tr}(A^n)$ en fonction de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.
On peut alors en déduire que si $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$ pour $1 \leq k \leq n$, alors $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ ce qui signifie (avec l'aide du théorème de Cayley-Hamilton) que la matrice A est nilpotente.