Chapitre 2

Matrices et Déterminants

2.1 Matrices

Définition 1 *Soit n un entier naturel non nul. On appelle colonne de taille n la disposition verticale de n scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ entourée ou non de parenthèses:*

$$\begin{matrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{matrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

On appelle ligne de taille n la disposition horizontale de n scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ entourée ou non de parenthèses:

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \quad \text{ou} \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Définition 2 *Soient p et q deux entiers naturels non nuls et $(a_{i,j})_{i\in[1,p], j\in[1,q]}$ une famille de scalaires. On appelle matrice $A = (a_{ij})_{\substack{i\in[1,p]\\ j\in[1,q]}}$ à p lignes et q colonnes (ou encore de taille $p \times q$), le tableau rectangulaire*

$$\begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pq} \end{matrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

et, pour $i \in [1,p]$ et $j \in [1,q]$, on appelle $i^{\text{ième}}$ ligne de la matrice, la ligne

$$L_i = (a_{i1}, \dots, a_{iq})$$

et $j^{\text{ième}}$ colonne, la colonne

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{pj} \end{pmatrix}$$

ce qui permet de noter

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_p \end{pmatrix} = (C_1, \dots, C_q)$$

Lorsque $p = q$, on parle aussi de matrice carrée de taille p

Définition 3 *Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour tout $x \in E$, on note $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$ la matrice à n lignes et une colonne composée des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$:*

$$\forall(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n \quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Si $x_1, \dots, x_m$ sont des éléments de E, on appelle matrice des vecteurs $x_1, \dots, x_m$ dans la base $\mathcal{B}$ et on note $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_m)$ la matrice à n lignes et m colonnes dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $x_1, \dots, x_m$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_m) = (\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_1), \dots, \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_m))$$

Soient :
- E un K-espace vectoriel de dimension finie $q > 0$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_q)$ une base de E
- F un K-espace vectoriel de dimension finie $p > 0$ et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
Notons $e'_1, \dots, e'_q$ les images par u des vecteurs de la base $\mathcal{B}$.

$$\forall j \in [1, q] \quad \exists!(a_{1j}, \dots, a_{pj}) \in K^p \quad e'_j = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} f_i.$$

Définition 4 *La matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est la matrice à p lignes et q colonnes:*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = (a_{ij})_{\substack{i\in[1,p] \\ j\in[1,q]}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}\left(u(e_1), \dots, u(e_q)\right))$$

Exercice 1 Soit H l'hyperplan de $\mathbb{R}^n$ défini par l'équation $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ où les constantes (a_i) ne sont pas toutes nulles. Soit V le s.e.v. engendré par le vecteur $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. A quelle condition V et H sont-ils supplémentaires? Trouver alors, dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, la matrice de projection sur H parallèlement à V et la matrice de la projection sur V parallèlement à H.

[Ind] Il faut et il suffit que $v \notin H$.
Les deux projections sont associées et la première est de rang 1.

[Dem] Puisque H est un hyperplan, $H \oplus [v]$ si et seulement si $v \notin H$, donc si et seulement si $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i \neq 0$.
Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et f la forme linéaire qui à $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ associe $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$.
Le noyau de f est H et pour tout $i \in [1, n]$, il existe $\alpha_i \in \mathbb{R}$ et $y_i \in H$ tel que $e_i = \alpha_i v + y_i$. On a donc $f(e_i) = \alpha_i f(v) + f(y_i)$ donc $a_i = \alpha_i f(v)$, ainsi la matrice dans la base canonique de la projection p sur V parallèlement à H est

$$\frac{1}{f(v)} \begin{pmatrix} a_1 v_1 & a_2 v_1 & \cdots & a_n v_1 \\ a_1 v_2 & a_2 v_2 & \cdots & a_n v_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 v_n & a_2 v_n & \cdots & a_n v_n \end{pmatrix}$$

La projection sur H parallèlement à V est égale à $\mathrm{Id} - p$, on en déduit facilement sa matrice dans la base canonique.

2.1.1 Bases de $\mathcal{L}(E,F)$

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_q)$ une base de E et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F. Pour tout $j \in [1,q]$ et tout $i \in [1,p]$, notons u_{ij} l'application linéaire définie par l'image suivante de la base $\mathcal{B}$:

$$\forall k \in [1,q] \quad u_{ij}(e_k) = \delta_{jk} f_i.$$

Sa matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est donc $E_{ij} = (\delta_{il}\delta_{jm})_{\substack{l\in[1,p]\\ m\in[1,q]}}$. Elle est constituée de zéros et d'un seul 1 situé à l'intersection de la $i^{ième}$ ligne et de la $j^{ième}$ colonne.

Proposition 1 *La famille $(u_{ij})_{\substack{i\in[1,p]\\ j\in[1,q]}}$ est une base de $\mathcal{L}(E,F)$ qui est donc un K-espace vectoriel de dimension finie pq.*

[Ind] Appliquer le théorème de caractérisation des applications linéaires

[Dem] La famille considérée est libre car, si $(a_{ij})_{\substack{i\in[1,p]\\ j\in[1,q]}}$ est une famille de scalaires telle que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} a_{ij}u_{ij} = 0$ alors, pour tout $k \in [1,q]$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} a_{ij}u_{ij}(e_k) &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} a_{ij}\delta_{jk}f_i\\ &= \sum_{i=1}^{p} a_{ik}f_i\\ &= 0\end{aligned}$$

Puisque la famille $(f_1, \dots, f_p)$ est libre, on en déduit que, pour tout $i \in [1,p]$, $a_{ik} = 0$ et donc que la famille $(u_{ij})_{\substack{i\in[1,p]\\ j\in[1,q]}}$ est libre.
Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Pour tout $k \in [1,q]$, il existe une famille de scalaires $(a_{i,k})_{i\in[1,p]}$ telle que $u(e_k) = \sum_{i=1}^{p} a_{ik}f_i$. Les applications linéaires $\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} a_{ij}u_{ij}$ et u ont alors même image de la base $\mathcal{B}$ et sont donc égales. La famille $(u_{ij})_{\substack{i\in[1,p]\\ j\in[1,q]}}$ est donc génératrice.

Exercice 2 Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$, E et F des espaces vectoriels sur K de dimensions respectives p et q. Notons $n = \inf(p,q)$.
Existe-t-il une base de $\mathcal{L}(E,F)$ constituée d'applications linéaires de rang n ?

[Ind] Prendre des bases de E et F. Construire une partie génératrice constituée d'applications de rang n.

[Dem] Prenons des bases $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_q)$ de E et F.
L'application linéaire u définie par $u(e_i) = f_i$ pour $i \in [1,p]$ si $p \le q$ ou définie par $u(e_i) = f_i$ pour $i \in [1,q]$ et $u(e_i) = 0$ pour $i \in [q+1,p]$ si $q < p$ est de rang n. Considérons alors, en utilisant les notations de la proposition précédente, la base (u_{ij}) de $\mathcal{L}(E,F)$ déduite des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et pour $i \in [1,p]$ et $j \in [1,q]$, l'application linéaire $v_{ij} = u + u_{ij}$. On vérifie que pour tout $(i,j) \in [1,p] \times [1,q]$, v_{ij} est de rang n et que la famille $(u, (v_{ij}))$ est une famille génératrice de $\mathcal{L}(E,F)$. En appliquant le théorème de la base incomplète, on en déduit qu'il existe une partie de cette famille qui constitue une base de $\mathcal{L}(E,F)$ (en fait les pq premières suffisent)

Exercice 3 Soit E un K-e.v. de dimension $n \ge 1$.
a) Montrer qu'il existe une base de $\mathcal{L}(E)$ constituée d'automorphismes.
b) Montrer que, pour tout entier $r \in [1,n]$, il existe une base de $\mathcal{L}(E)$ constituée d'endomorphismes de rang r.

[Ind] On peut prouver une existence sans donner un moyen explicite de construction. Le théorème de la base incomplète est un moyen d'exhiber une base sans trop savoir comment on la construit.
Montrer que l'ensemble des endomorphismes de rang r engendre l'ensemble des automorphismes.

[Dem] a) On applique le procédé de l'exercice précédent
b) Soit $\mathcal{B}$ une base de E et u un automorphisme de E. Pour toute partie $P = i_1, \ldots, i_r$ à r éléments de l'ensemble $[1, n]$ construisons l'endomorphisme u_P défini par $u_P(e_i) = u(e_i)$ si $i \in P$ et $u_P(e_i) = 0$ si $i \notin P$. L'endomorphisme u_P est de rang r et puisqu'il existe $\begin{pmatrix} n-1 \\ r-1 \end{pmatrix}$ parties à r éléments de l'ensemble $[1, n]$ contenant un élément donné de $[1, n]$, la somme de toutes les applications u_P ainsi définies est donc égale à $\begin{pmatrix} n-1 \\ r-1 \end{pmatrix} u$. On en déduit que u est une combinaison linéaire d'endomorphismes de rang r.
Notons $\mathcal{R}$ l'ensemble des endomorphismes de rang r. L'espace vectoriel engendré par $\mathcal{R}$ contient donc $\mathcal{GL}(E)$ qui est une partie génératrice de $\mathcal{L}(E)$, ainsi $\mathcal{R}$ est elle-même une partie génératrice de $\mathcal{L}(E)$, on peut donc en extraire une base de $\mathcal{L}(E)$.

2.1.2 Calcul matriciel

Définition 5 *Soit $A = (a_{ij})_{\substack{i \in [1,p] \\ j \in [1,q]}} \in \mathcal{M}_{pq}(K)$. La transposée de A est la matrice, noté ${}^tA = (b_{ji})_{\substack{j \in [1,q] \\ i \in [1,p]}}$ appartenant à $\mathcal{M}_{qp}(K)$ et définie par:*

$$\forall (i,j) \in [1,p] \times [1,q] \quad b_{ji} = a_{ij}.$$

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A = (a_{ij})_{\substack{i \in [1,p] \\ j \in [1,q]}}$ sa matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
Soit $x \in E$ et $(x_1, \ldots, x_q)$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. Les coordonnées de $u(x)$ dans la base $\mathcal{C}$ sont : $(\sum_{j=1}^{q} a_{1j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{q} a_{pj}x_j)$ et l'on note

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{q} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{q} a_{pj}x_j \end{pmatrix}$$

Notons $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$ la matrice à q lignes et 1 colonne constituée des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$, on obtient alors

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(u(x)) = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x).$$

Définition 6 *Soient $A = (a_{ij})_{\substack{i \in [1,p] \\ j \in [1,q]}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{i \in [1,p] \\ j \in [1,q]}}$ deux éléments de $\mathcal{M}_{pq}(K)$ on note $A+B$ l'élément de $\mathcal{M}_{pq}$ défini par*

$$A + B = (a_{ij} + b_{i,j})_{\substack{i \in [1,p] \\ j \in [1,q]}}$$

Si $\lambda \in K$, on note $\lambda.A$ la matrice:

$$\lambda.A = (\lambda a_{ij})_{\substack{i \in [1,p] \\ j \in [1,q]}}$$

Définition 7 *On appelle $\mathcal{M}_{pq}(K)$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients dans K.*

Proposition 2 *Muni de ces opérations $\mathcal{M}_{pq}(K)$ est un K-espace vectoriel et l'application de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{M}_{pq}(K)$ qui à u associe $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ est un isomorphisme.*

[Ind] $\mathcal{M}_{pq}(K)$ est une autre façon de voir K^{pq}, construire une application bijective entre les deux qui respecte l'addition et le produit par les scalaires. Pour montrer que $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ est un isomorphisme, utiliser une base de $\mathcal{L}(E, F)$.

[Dem] Soit φ l'application de $\mathcal{M}_{pq}(K)$ dans K^{pq} qui, à une matrice A dont les lignes sont $L1, \ldots, L_p$ associe $\varphi(A) = (L_1, \ldots, L_p)$. φ est une bijection et pour tous éléments A et B de $\mathcal{M}_{pq}(K)$ et tout scalaire λ , on a $\varphi(A + \lambda.B) = \varphi(A) + \lambda.\varphi(B)$. On en déduit que $\mathcal{M}_{pq}(K)$ est un K-espace vectoriel : pour vérifier un axiome de la structure d'espace vectoriel, on le vérifie dans K^{pq} pour les images des éléments, puis on revient dans $\mathcal{M}_{pq}(K)$ en appliquant φ^{-1} à l'égalité obtenue.

L'application $\mathcal{M}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{M}_{pq}(K)$ est l'application qui à une application linéaire u associe ses coordonnées dans la base $(u_{ij})_{\substack{i\in[1,p]\\ j\in[1,q]}}$ ordonnées en une matrice.

Définition 8 *Soient $A = (a_{ij})_{\substack{i\in[1,p]\\ j\in[1,q]}}$ un élément de $\mathcal{M}_{pq}(K)$ et, r étant un entier strictement positif, $B = (b_{jk})_{\substack{j\in[1,q]\\ k\in[1,r]}}$ un élément de $\mathcal{M}_{qr}(K)$. Le produit des deux matrices A et B est la matrice, élément de $\mathcal{M}_{pr}(K)$, notée $A \times B$ ou AB, définie par*

$$A \times B = (\sum_{j=1}^{q} a_{ij} b_{jk})_{\substack{i\in[1,p]\\ k\in[1,r]}}$$

Exercice 4 Soient $A \in \mathcal{M}_{pq}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{qr}(K)$. On décrit la matrice A à l'aide de ses lignes $L_1, \dots , L_p$ et la matrice B à l'aide de ses colonnes $C_1, \dots , C_r$. Montrer que

$$AB = \begin{pmatrix} L_1B \\ \vdots \\ L_pB \end{pmatrix} = (AC_1, \dots , AC_r)$$

[Ind] Reconnaître les éléments de la matrice produit

[Dem] Soit $(i, k) \in [1, p] \times [1, r]$, l'élément d'indice (i, k) de la matrice AB est égal à L_iC_k, la ligne d'indice i de la matrice produit est donc $L_i(C_1, \dots , C_r) = L_iB$ et sa colonne d'indice k est égale à $\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_p \end{pmatrix} C_k = AC_k$.

Proposition 3 *Soient E, F et G des K-espaces vectoriels de dimension finie q, p et r et $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ des bases de E, F et G. Pour toutes applications $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$, on a*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(v \circ u) = \mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(v) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$$

[Ind] Calculer les coordonnées des images des éléments de $\mathcal{B}$.

[Dem] Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots , e_q)$, $\mathcal{C} = (f_1, \dots , f_p)$ et $\mathcal{D} = (g_1, \dots , g_r)$, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(u) = (a_{ij})_{\substack{i\in[1,p]\\ j\in[1,q]}}$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{C}\mathcal{D}}(v) = (b_{kl})_{\substack{k\in[1,r]\\ l\in[1,p]}}$. Pour tout $j \in [1, q]$

$$\begin{aligned} v \circ u(e_j) &= v \left(\sum_{i=1}^{p} a_{ij} f_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{p} a_{ij} v(f_i) \\ &= \sum_{i=1}^{p} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{r} b_{ki} g_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{p} b_{ki} a_{ij} \right) g_k \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice de $v \circ u$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$ est bien le produit cherché.

Proposition 4 *Soient A et B appartenant à $\mathcal{M}_{pq}(K)$ et $\lambda \in K$:*

$$^t(A + \lambda.B) = {}^tA + \lambda.{}^tB$$

Soient $A \in \mathcal{M}_{pq}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{qr}(K)$:

$$^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA$$

[Ind] Calculer ... Il ne faut pas hésiter à inventer de nouvelles notations pour des nouveaux objets et écrire, par exemple, ${}^tA = (a'_{lm})_{\substack{l\in[1,q]\\ m\in[1,p]}}$

[Dem] On vérifie sans peine que l'application transposée est linéaire.
Notons $A = (a_{ij})_{\substack{i\in[1,p]\\ j\in[1,q]}}$, $B = (b_{jk})_{\substack{j\in[1,q]\\ k\in[1,r]}}$, ${}^tA = (a'_{lm})_{\substack{l\in[1,q]\\ m\in[1,p]}}$ et ${}^tB = (b'_{nm})_{\substack{n\in[1,r]\\ m\in[1,q]}}$ avec $a'_{lm} = a_{ml}$ et $b'_{nm} = b_{mn}$.
On a

$$\begin{aligned}
{}^tB\,{}^tA &= \left(\sum_{m=1}^{q} b'_{nm}a'_{ml}\right)_{\substack{n\in[1,r]\\ l\in[1,p]}} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{q} b'_{jk}a'_{ki}\right)_{\substack{j\in[1,r]\\ i\in[1,p]}} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{q} a_{ik}b_{kj}\right)_{\substack{j\in[1,r]\\ i\in[1,p]}}
\end{aligned}$$

On reconnaît alors dans cette dernière matrice ${}^t(AB)$.

Définition 9 *On note $\mathcal{M}_n(K)$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes à coefficients dans K.*

Définition 10 *Si u est un endomorphisme de E, sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u)$, notée, plus simplement, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$.*

Proposition 5 *$(\mathcal{M}_n(K), +, \times, .)$ est une K-algèbre et l'application qui, à un endomorphisme u de E, associe sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est un isomorphisme d'algèbre.*

[Ind] Pour montrer que $(\mathcal{M}_n(K), +, \times, .)$ est une algèbre, on le fait par "transport de structure" sachant que $(\mathcal{L}(E), +, \circ, .)$ en est une.

[Dem] Soit $\mathcal{B}$ une base de E. L'application $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{M}_n(K)$ qui, à un endomorphisme u, associe sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est un isomorphisme entre K-espaces vectoriels et vérifie de plus: pour tous éléments u et v de $\mathcal{L}(E)$, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v \circ u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$. On vérifie alors que $\mathcal{M}_n(K), +, \times, .)$ est une K-algèbre en utilisant cette bijection qui devient alors un isomorphisme d'algèbre.

Notation: I_n est l'élément unité de $\mathcal{M}_n(K)$.

Exercice 5 Soit E un K-ev muni de la base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$. Soit u et v les endomorphismes de E caractérisés par leurs matrices respectives A et B dans la base $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & 4 & 4 \\ 4 & -1 & 8 \\ 4 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que u est une projection et que v est une symétrie. Caractériser les.

[Ind] Calculer u^2, v^2 et les sous-espaces appropriés.

[Dem] On vérifie que $A^2 = A$ et $B^2 = I_3$, on en déduit que $u^2 = u$ et $v^2 = \mathrm{Id}_E$ puisque l'application $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ est bijective.

Le noyau de u est l'ensemble des vecteurs dont les coordonnées (x, y, z) dans la base $\mathcal{B}$ vérifient $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On résout alors le système

$$\begin{cases} & -2y & +z & = 0 \\ x & +3y & -z & = 0 \\ 2x & +4y & -z & = 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des triplets de la forme $(\lambda, -\lambda, -2\lambda)$ où λ est un scalaire arbitraire, ainsi le noyau de u est l'espace vectoriel F engendré par le vecteur $e_1 - e_2 - 2e_3$, l'image de u est l'espace vectoriel G engendré par les vecteurs $e_2 + 2e_3, -2e_1 + 3e_2 + 4e_3, e_1 - e_2 - e_3$ dont on peut donner une base : $(e_2 + 2e_3, e_1 - 3e_3)$ et donc u est la projection sur G parallèlement à F.
Pour déterminer s, qui est la symétrie par rapport à $F' = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $G' = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$, on étudie les systèmes $(B - I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $(B + I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou les systèmes équivalents

$$\begin{cases} -16x & +4y & +4z & = 0 \\ 4x & -10y & +8z & = 0 \\ 4x & +8y & -10z & = 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} 2x & +4y & +4z & = 0 \\ 4x & +8y & +8z & = 0 \\ 4x & +8y & +8z & = 0 \end{cases}$$

On trouve ainsi que F' est l'espace vectoriel engendré par $e_1 + 2e_2 + 2e_3$ et que G' est l'espace vectoriel engendré par $2e_1 - e_2$ et $e_2 - e_3$.

Définition 11 *On note $GL_n(K)$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(K)$.*

Proposition 6 $(GL_n(K), \times)$ *est un groupe et l'application qui à un automorphisme u de E associe sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est un isomorphisme du groupe $\mathcal{GL}(E)$ dans le groupe $GL_n(K)$.*

[Ind] L'ensemble des éléments inversibles d'un anneau est un groupe pour la multiplication.

[Dem] Soit $\mathcal{B}$ une base de E. L'application $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ étant un isomorphisme d'algèbre, les groupes des éléments inversibles sont isomorphes.

Proposition 7 *Soit $A \in GL_n(K)$, on a ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$.*

[Ind] Calculer ${}^t(AA^{-1})$.

[Dem] Il existe $B \in GL_n(K)$ tel que $AB = BA = I_n$. Ainsi ${}^t(BA) = {}^tA\,{}^tB = I_n$ et ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA = I_n$, on en déduit que ${}^tA$ est inversible d'inverse ${}^t(A^{-1})$.

Exercice 6 Que valent les produits des éléments de la base canonique de $\mathcal{L}(K^n)$?

[Ind] Utiliser les symboles de Kronecker pour effectuer par exemple un produit de matrices.

[Dem] Soit $(p, q) \in [1, n]$. La matrice E_{pq} de l'endomorphisme u_{pq} dans la base canonique de K^n est $(\delta_{ip}\delta_{jq})_{i,j \in [1,n]}$.
Soit p, q, r et s des éléments de $[1, n]$, on a

$$\begin{aligned} E_{pq}E_{rs} &= \left(\sum_{k=1}^{n} \delta_{ip}\delta_{kq}\delta_{kr}\delta_{js}) \right)_{i,j \in [1,n]} \\ &= (\delta_{ip}\delta_{qq}\delta_{qr}\delta_{js}))_{i,j \in [1,n]} \\ &= \delta_{qr}E_{ps} \end{aligned}$$

Exercice 7 Étudier la structure de l'ensemble des matrices de la forme

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} -(x+y) & y & x \\ x & -(x+y) & y \\ y & x & -(x+y) \end{pmatrix} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

[Ind] C'est un sous-espace vectoriel, trouver en une base.

[Dem] L'ensemble E considéré est l'espace vectoriel engendré par les matrices $M(1,0)$ et $M(0,1)$ car pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $M(x,y) = xM(1,0) + yM(0,1)$.
La famille $\{M(1,0), M(0,1)\}$ est libre car on vérifie sans difficulté que l'équation $M(x,y) = (0)$ possède comme seule solution $x = y = 0$. On en déduit que E est un sous-espace de dimension 2 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

E ne contient pas la matrice I_3 donc ce n'est pas une sous-algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, en revanche on peut vérifier que E est stable par multiplication, il suffit pour cela de vérifier que les produits $M(1,0)^2 = M(-2,1)$, $M(0,1)^2 = M(1,-2)$ et $M(1,0) \times M(0,1) = M(0,1) \times M(1,0) = M(-1,-1)$ sont des éléments de E.

Exercice 8 On note $E = \mathcal{M}_n(K)$.
a) Montrer que l'application qui, à $A, B \in E$, associe $[A,B] = AB - BA$ est une application bilinéaire de $E \times E$ dans E et que, pour $A, B, C \in E$,

$$[A, BC] = [A,B]C + B[A,C]$$

Soit $A \in E = \mathcal{M}_n(K)$. On définit une suite $(E_p)_{p\geq 0}$ de parties de E par:

$$E_0 = \{B \in E \mid [A,B] = 0\}$$

$$E_p = \{B \in E \mid [A,B] \in E_{p-1}\} \quad (p \geq 1)$$

b) Montrer que la suite (E_p) est croissante et stationnaire.
c) Montrer que $F = \bigcup_{p\geq 0} E_p$ est une sous algèbre de E.

[Ind] a) Calculer.
b) L'application u qui, à $B \in \mathcal{M}_n(K)$, associe $[A,B]$ est linéaire, que sont les espaces E_p par rapport à u ?
c) Montrer que $u^p(BC) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} u^k(B)u^{p-k}(C)$. Où se trouve le produit de deux éléments de E_p ?

[Dem] a) Clair.
b) On vérifie sans difficulté que u est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(K)$ et on a $E_0 = \operatorname{Ker} u$, $E_1 = \operatorname{Ker} u^2$, $\dots$, $E_p = \operatorname{Ker} u^{p+1}$. La suite (E_p) est donc une suite de sous-espaces vectoriels et on a clairement $E_p \subset E_{p+1}$ pour tout entier p.
La suite des dimensions des espaces E_p est donc une suite croissante d'entiers majorée par n^2, elle est donc nécessairement constante à partir d'un certain rang, ce qui implique que la suite (E_p) est stationnaire.
c) À partir de la formule $u(BC) = u(B)C + Bu(C)$, on montre par récurrence la formule

$$u^p(BC) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} u^k(B)u^{p-k}(C)$$

pour tout entier $p \geq 1$ en utilisant la construction du triangle de Pascal des coefficients binomiaux.
On en déduit que si B et C sont dans E_p, $u^{2p}(BC) = 0$, ainsi la somme, le produit par un scalaire et le produit de deux matrices quelconques de F est dans F en effet si B et C sont deux éléments de F, alors il existe des entiers p et q tels que $B \in E_p$ et $C \in E_q$ et donc B et C appartiennent à E_{p+q}, on en déduit que, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $B + \lambda C \in E_{p+q}$ et $BC \in E_{2p+2q}$. D'autre part I_n appartient a E_0 donc F est une sous-algèbre de E.

2.1.3 Applications linéaires de K^q dans K^p

En général, on identifie K^n et $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ et les éléments de K^n sont vus comme des matrices unicolonnes.

Proposition 8 *Soit $u \in \mathcal{L}(K^q, K^p)$. Il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_{pq}(K)$, appelée canoniquement associée, telle que pour tout X appartenant à K^q, $u(X) = AX$.*
Réciproquement, si $A \in \mathcal{M}_{pq}(K)$, l'application de K^q dans K^p qui, à $X \in K^q$ associe $AX \in K^p$ est une application linéaire u, appelée canoniquement associée de K^q dans K^p.
A est alors la matrice, dans les bases canoniques de K^q et K^p, de l'application linéaire u.

[Ind] C'est la dernière phrase qui est la clef.

[Dem] Notons $\mathcal{C}_p$ et $\mathcal{C}_q$ les bases canoniques de K^p et K^q. Pour tout $X \in K^q$, on a $X = \mathcal{M}_{\mathcal{C}_q}(X)$. Ainsi $u(X) = \mathcal{M}_{\mathcal{C}_p}(u(X)) = \mathcal{M}_{\mathcal{C}_q,\mathcal{C}_p}(u)\mathcal{M}_{\mathcal{C}_q}(X)$ Donc en notant $A = \mathcal{M}_{\mathcal{C}_q,\mathcal{C}_p}(u)$, on a bien $u(X) = AX$. La matrice A est bien unique, car, s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_{pq}(K)$ telle que, pour tout $X \in K^q$, $u(X) = BX$ alors, nécessairement, B est la matrice de u dans les bases canoniques de K^q et K^p.
Réciproquement, si $A \in \mathcal{M}_{pq}(K)$, l'application u qui à $X \in K^q$ associe $AX \in K^p$ est bien linéaire et la matrice de u dans les bases canoniques de K^q et K^p est A.

Remarque: On identifie souvent $A \in \mathcal{M}_{pq}$ et l'application correspondante $u \in \mathcal{L}(K^q, K^p)$, mais l'identification est réductrice, en effet, il est parfois intéressant de prendre d'autres bases dans K^p ou K^q que les bases canoniques, l'application u reste alors la même tandis que sa(?) matrice change.

Exercice 9 Donner une interprétation géométrique des endomorphismes associés aux éléments de la base canonique de $\mathcal{L}(K^n)$.

[Ind] Ce sont des projections et des composées de projections.

[Dem] En notant $(e_i)_{i\in[1,n]}$ la base canonique de K^n, la famille $(u_{ii})_{i\in[1,n]}$ est une famille de projecteurs associés dont les images sont les sous-espaces $E_i = [e_i]$.
l'endomorphisme u_{ij} est égal par exemple à la composée de la projection p sur E_i parallèlement à $[e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_{j-1}, e_j - e_i, e_{j+1}, \dots, e_n]$ et de u_{jj}.

Exercice 10 Soit $f \in \mathcal{L}(K^q, K^p)$ de rang r. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(K^q, K^r)$ et $h \in \mathcal{L}(K^r, K^p)$ telles que $f = h \circ g$.

[Ind] L'image de f est isomorphe à K^r

[Dem] La dimension de $\operatorname{Im} u$ est r. Il existe donc un isomorphisme φ de $\operatorname{Im} u$ dans K^r. Notons g l'application linéaire de K^q dans K^r qui à $x \in K^q$ associe $\varphi(f(x)) \in K^r$ et h l'application de K^r dans K^p qui à $y \in K^r$ associe $\varphi^{-1}(y) \in K^p$. Alors, pour tout $x \in K^q$, $h \circ g(x) = \varphi^{-1}(\varphi(f(x))) = f(x)$.

2.1.4 Changements de bases

Définition 12 *Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ des bases de E. La matrice de l'identité de E dans les bases $\mathcal{B}'$ au départ et $\mathcal{B}$ à l'arrivée est constituée des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$. Elle est appelée matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et notée $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.*

Remarque: Une matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$ est inversible. Réciproquement, si M est une matrice inversible, elle peut être considérée comme une matrice de passage: si $\mathcal{B}$ est une base de E, il existe une unique base $\mathcal{B}'$ de E telle que $M = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

Proposition 9 *Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ des bases de E. On a $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = P^{-1}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$*

[Ind] Id_E est son propre inverse.

[Dem] On a $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(Id_E)^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(Id_E^{-1}) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(Id_E)$.

Proposition 10 *Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ des bases de E. Pour tout $x \in E$*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(x)$$

[Ind] Une matrice de passage est la matrice de l'identité dans les bases choisies.

[Dem] En calculant les coordonnées de l'image d'un vecteur x par Id_E, on trouve $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(Id_E)\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(x)$.

Proposition 11 *Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ des bases de E et $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ des bases de F. Pour tout $u \in \mathcal{L}(E,F)$.*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u) = P_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}^{-1}\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$$

[Ind] Une matrice de passage est la matrice de l'identité dans les bases choisies.

[Dem] On a $u = Id_F \circ u \circ Id_E$ et donc

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}(u) &= \mathcal{M}_{\mathcal{C}\mathcal{C}'}(Id_F)\mathcal{M}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(u)\mathcal{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(Id_E)\\ &= P_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}^{-1}\mathcal{M}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(u)P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\end{aligned}$$

Proposition 12 *Soient $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ des bases de E. En notant $P_{i,j}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_i$ à la base $\mathcal{B}_j$ ($i, j \in [1,n]$):*

$$P_{1,n} = P_{1,2}P_{2,3}\cdots P_{n-1,n}$$

[Ind] Une matrice de passage est la matrice de l'identité dans les bases choisies.

[Dem] En partant de $Id_E = Id_E \circ \cdots \circ Id_E$, on trouve

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_n\mathcal{B}_1}(Id_E) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(Id_E)\cdots\mathcal{M}_{\mathcal{B}_n\mathcal{B}_{n-1}}(Id_E)$$

et donc l'égalité cherchée.

Formules mnémotechniques $Q = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, $P = P_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$; les lettres Q et P faisant référence aux dimensions de E et F.
Avec les notations $X = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$, $X' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(x)$ et $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$, $A' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u)$, les formules deviennent:

$$X = QX' \text{ ou } X' = Q^{-1}X$$
$$A = PA'Q^{-1} \text{ ou } A' = P^{-1}AQ$$

Exercice 11 Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de l'espace vectoriel E et u un endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $A = (a_{ij})$. Quels sont les coefficients de la matrice de u dans la base $(e_n, \dots, e_1)$?

[Ind] Noter $(f_1, \dots, f_n)$ la nouvelle base et chercher les coordonnées des images des vecteurs de cette base.

[Dem] Soit $A = (a_{i,j})_{i,j\in[1,n]}$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$. Pour tout $j \in [1,n]$:

$$\begin{aligned}u(f_j) &= u(e_{n+1-j})\\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1-j}e_i\\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1-j}f_{n+1-i}\\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{n+1-i,n+1-j}f_i\end{aligned}$$

La matrice de u dans la nouvelle base est donc $(a_{n+1-i,n+1-j})_{i,j\in[1,n]}$

2.1.5 Rang d'une matrice

Définition 13 *Soit $A \in \mathcal{M}_{pq}(K)$. Le rang de A est la dimension du s.e.v. engendré dans K^p par les q vecteurs colonnes de A. Il est donc inférieur à p et à q.*

Proposition 13 *Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie, u une application linéaire de E dans F et des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de E et F. Le rang de u est le rang de sa matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.*

[Ind] Un isomorphisme conserve les dimensions

[Dem] L'application $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ est un isomorphisme de F dans K^p (où $p = \dim F$). La dimension du sous-espace engendré par $u(\mathcal{B})$ est donc celle du sous-espace engendré par son image, c'est à dire le sous-espace engendré par les colonnes de la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Définition 14 *Deux matrices A et B éléments de $\mathcal{M}_{pq}(K)$ sont équivalentes si*

$$\exists Q \in GL_q(K) \quad \exists P \in GL_p(K) \quad A = PBQ$$

Remarque: Cette relation est une relation d'équivalence et on peut la traduire par: deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles sont les matrices d'une même application linéaire dans des choix de bases différents.

Théorème 1 *Soit $A \in \mathcal{M}_{pq}(K)$ une matrice de rang r. A est équivalente à la matrice*

$$I_{r,p,q} = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,q-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,q-r} \end{pmatrix}$$

où $0_{n,m}$ est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{nm}(K)$.

[Ind] Utiliser l'application linéaire $\tilde{A}$ canoniquement associé à A. Que doivent vérifier des bases de K^q et K^p pour que la matrice de $\tilde{A}$ dans ces bases ait la forme voulue ?

[Dem] L'application linéaire $\tilde{A}$ canoniquement associée à la matrice A est de rang r. Soit $(e_{r+1}, \ldots, e_q)$ une base de $\operatorname{Ker} \tilde{A}$, complétée en une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_q)$ de K^q, l'image par $\tilde{A}$ de la famille $(e_1, \ldots, e_r)$ qui engendre un supplémentaire du noyau de $\tilde{A}$ est donc une base de l'image de $\tilde{A}$. Complétons cette famille libre en une base $\mathcal{C} = (u(e_1), \ldots, u(e_r), f_{r+1}, \ldots, f_p)$ de K^p. La matrice de $\tilde{A}$ dans les bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ est bien de la forme indiquée et est équivalente à la matrice A.

Proposition 14 *Deux matrices appartenant à $\mathcal{M}_{pq}(K)$ sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.*

[Ind] Une relation d'équivalence est transitive

[Dem] Elle sont toutes les deux équivalents à $I_{r,p,q}$ et sont donc équivalentes.

Proposition 15 *Le rang d'une matrice est celui de sa transposée.*

[Ind] Prendre des matrices équivalentes

[Dem] Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$ une matrice de rang r, elle est équivalente à $I_{r,p,q}$ et il existe des matrices $P \in \mathcal{GL}_p(K)$ et $Q \in \mathcal{GL}_q(K)$ telles que $A = PI_{r,p,q}Q$. On a alors, ${}^tA = {}^tQ{}^tI_{r,p,q}{}^tP$ et puisque ${}^tP$ et ${}^tQ$ sont inversibles, ${}^tA$ et ${}^tI_{r,p,q} = I_{r,q,p}$ sont équivalentes, ainsi le rang de ${}^tA$ est r.

Définition 15 *Soit $A = (a_{ij})_{\substack{i\in[1,p]\\ j\in[1,q]}} \in \mathcal{M}_{pq}(K)$. On appelle matrice extraite de A une matrice de la forme $(a_{ij})_{\substack{i\in I\\ j\in J}}$ où $I \subset [1,p]$ et $J \subset [1,q]$.*

Proposition 16 *Le rang d'une matrice A est la taille maximale des matrices carrées inversibles extraites de A.*

[Ind] Travailler sur la dimension de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes ou lignes des différentes matrices considérées.

[Dem] Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$ et r son rang. Notons $(C_1, \dots, C_q)$ la famille des colonnes de A, on peut extraire de cette famille une famille libre $(C_{j_1}, \dots, C_{j_r})$ et la matrice $B = ((C_{j_1}, \dots, C_{j_r})$ est de rang r. La matrice ${}^tB$ est donc de rang r et on peut donc extraire de la famille $(C'_1, \dots, C'_p)$ des vecteurs colonnes de ${}^tB$, une famille libre $(C'_{i_1}, \dots, C'_{i_r})$. On constate alors que la matrice $C = (C'_{i_1}, \dots, C'_{i_r})$ est une matrice carrée de taille r et de rang r, elle est donc inversible et ${}^tC$ est une matrice extraite de A. En notant s la taille maximale des matrices carrées inversibles extraites de A , on a donc $r \leq s$.
Soit $A' = (a_{ij})_{\substack{i\in I \\ k\in J}}$ une matrice carrée inversible extraite de A et notons $(C'_j)_{j\in J}$ la famille de ses vecteurs colonnes. Soit $\mathcal{C}_p = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de K^p et Π la projection sur l'espace engendré par la famille $\mathcal{D} = (e_i)_{i\in I}$ parallèlement à l'espace engendré par la famille $(e_k)_{k\in[1,p]\setminus I}$. L'application P de K^p dans K^r qui à un vecteur X associe $\mathcal{M}_{\mathcal{D}}(\Pi(X))$ est linéaire et l'image par P de l'espace engendré E' par la famille $(C_j)_{j\in J}$ est l'espace E'' engendré par la famille $(C'_j)_{j\in J}$. La dimension s de E'' est donc inférieure à celle de E' et donc $s \leq \dim E' \leq r$. Au total, on a bien $r = s$.

Définition 16 *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$. A et B sont semblables s'il existe $P \in GL_n(K)$ telle que $A = P^{-1}BP$.*

Remarque: Cette relation est une relation d'équivalence

Proposition 17 *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$. A et B sont semblables si et seulement s'il existe un K-espace vectoriel E de dimension n, un endomorphisme u de E et deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de E tels que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = A$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(u) = B$.*

[Ind] Une matrice inversible peut être vue comme une matrice de passage entre deux bases.

[Dem] Si A et B sont semblables, il existe $P \in GL_n(K)$ telle que $A = P^{-1}BP$. Soit u l'endomorphisme de K^n canoniquement associé à B et $\mathcal{B} = (C_1, \dots, C_n)$ la famille des vecteurs colonnes de P. Puisque P est de rang n, $\mathcal{B}$ est une base de K^n et P est la matrice de passage de la base canonique de K^n à la base $\mathcal{B}$. on a bien $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = P^{-1}BP = A$.
Réciproquement, la relation qui lie deux matrices d'un même endomorphisme dans des bases différentes est bien celle de la définition de deux matrices semblables.

Proposition 18 *Deux matrices carrées semblables sont équivalentes.*

[Ind] Appliquer la définition

[Dem] Clair en comparant les deux définitions.

Exercice 12 Trouver deux matrices carrées équivalentes et non semblables

[Ind] Seule l'identité est semblable à l'identité.

[Dem] Les matrices $2I_n$ et I_n sont équivalentes car elles ont le même rang et elles sont non semblables.

Exercice 13 Soient A et B deux matrices carrées de taille n telles que $AB = 0$ et $A + B$ inversible. Montrer que $\operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B = n$.

[Ind] Utiliser la formule du rang.

[Dem] Soit u et v les endomorphismes associés a A et B, on a $uv = 0$ donc $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u$ et donc $\operatorname{rang} v \leq n - \operatorname{rang} u$. D'autre part $K^n = \operatorname{Im}(u + v) \subset \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$ donc $n \leq \dim(\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v) \leq \operatorname{rang} u + \operatorname{rang} v$, d'où l'égalité cherchée.

Exercice 14 Soit A une matrice carrée de taille n et de rang 1. Montrer qu'il existe $X, Y \in K^n$ vérifiant $A = X\,{}^tY$. En déduire qu'il existe $\alpha \in K$ tel que $A^2 = \alpha A$. Pour quelle valeur de α la matrice $I + A$ est-elle inversible ?

[Ind] Comment s'écrivent les colonnes d'une matrice de rang 1 ?
Une matrice est inversible si on peut calculer son inverse.

[Dem] L'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes $C_1, \dots, C_n$ de la matrice A est de dimension1, il existe donc une colonne X est des scalaires $y_1, \dots, y_n$ tels que, pour tout $j \in [1, n]$, $C_j = y_j X$, on a donc $A = C \times (y_1, \dots, y_n)$.
On en déduit que $A^2 = X\,{}^tYX\,{}^tY = X({}^tYX){}^tY = ({}^tYX)A$. On a donc $A^2 = \alpha A$ avec $\alpha = {}^tYX$.
Si $\alpha + 1 \neq 0$, on remarque que $(I + A)(I - \dfrac{1}{\alpha + 1}A) = I$, on en déduit que la matrice $I + A$ est inversible.
Si $\alpha = -1$, on a $A^2 = -A$ et donc $A(A + I) = 0$ on en déduit donc que $A + I$ est non inversible car sinon en multipliant cette dernière égalité à droite par l'inverse de $I + A$ on trouverait $A = 0$ ce qui est exclus par l'hypothèse.

2.1.6 Trace d'une matrice ou d'un endomorphisme

Définition 17 *Soit $A = (a_{ij})_{i,j \in [1,n]} \in \mathcal{M}_n(K)$. La trace de A est le scalaire* $\operatorname{Trace} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Remarque: Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $\operatorname{Trace} A = \operatorname{Trace} {}^tA$.

Proposition 19 *L'application* Trace *est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(K)$.*

[Ind] Vérifier ...

[Dem] Cette application est une combinaison des formes linéaires coordonnées de la base canonique de $\mathcal{M}_n(K)$.

Proposition 20 *Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(K)$:*

$$\operatorname{Trace}(AB) = \operatorname{Trace}(BA)$$

[Ind] Calculer ...

[Dem] Notons $A = (A_{ij})_{i,j \in [1,n]}$ et $B = (b_{ij})_{i,j \in [1,n]}$

$$\begin{aligned}\operatorname{Trace}(AB) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik} \\ &= \operatorname{Trace}(BA)\end{aligned}$$

Remarque: Si $A, B, C \in \mathcal{M}_n(K)$, $\operatorname{Trace}(ABC) = \operatorname{Trace}(CAB) = \operatorname{Trace}(BCA)$, mais, en général, $\operatorname{Trace}(ABC) \neq \operatorname{Trace}(BAC)$.

Exercice 15 Trouver trois éléments A, B et C de $\mathcal{M}_2(K)$ telles que $\operatorname{Trace}(ABC) \neq \operatorname{Trace}(BAC)$

[Ind] L'égalité n'a lieu que de façon exceptionnelle: chercher des matrices simples.

[Dem] Par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
En effet $ABC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BAC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 16 Soient A et B deux matrices appartenant à $\mathcal{M}_n(K)$ telles que, pour tout $X \in \mathcal{M}_n(K)$, on ait:

$$\mathrm{Tr}(AX) = \mathrm{Tr}(BX)$$

Montrer que $A = B$.

[Ind] Utiliser les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(K)$.

[Dem] Soit $(p, q) \in [1, n]^2$ et notons E_{pq} la matrice de la base canonique de $\mathcal{M}_n(K)$ définie par $E_{pq} = (\delta_{ip}\delta_{iq})$.
On a, en posant $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$:

$$\mathrm{Tr}(AE_{pq}) = a_{qp} = b_{qp} = \mathrm{Tr}(AE_{pq})$$

On en déduit donc que $A = B$.

Exercice 17 Montrer qu'à toute forme linéaire f définie sur l'ensemble des matrices carrées $n \times n$, on peut associer une matrice F telle que, pour toute matrice carrée A, on a:

$$f(A) = \mathrm{Tr}(AF)$$

[Ind] Développer $\mathrm{Tr}(AF)$, peut on faire une identification ?

[Dem] Toute forme linéaire f sur $\mathcal{M}_n(K)$ est définie par n^2 scalaires α_{ij} tels que, pour toute matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(K)$, on ait

$$f(A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} a_{ij}$$

On vérifie alors que cette expression est aussi la trace du produit de la matrice $F = (f_{ij})$ et de la matrice A si on pose, pour tous $i, j \in [1, n]$, $f_{ij} = \alpha_{ji}$.

Exercice 18 Soit f une forme linéaire définie sur l'ensemble des matrices carrées de taille n telle que, pour toutes matrices A et B: $f(AB) = f(BA)$. Montrer qu'il existe un scalaire α tel que $f = \alpha\mathrm{Tr}$.

[Ind] Utiliser les exercices précédents.

[Dem] Il existe donc une matrice F telle que, pour toute matrice M, $f(M) = \mathrm{Tr}(FM)$, on en déduit que, pour toutes matrices A et B, $\mathrm{Tr}(FAB) = \mathrm{Tr}(FBA)$.
Or $\mathrm{Tr}(FAB) = \mathrm{Tr}(BFA)$, donc, pour toute matrice A on a $\mathrm{Tr}((BF)A) = \mathrm{Tr}((FB)A)$, on en déduit que $BF = FB$. La matrice F commute avec toute matrice B, la matrice F est donc une matrice d'homothétie et il existe donc $\alpha \in K$ tel que $F = \alpha I_n$, ainsi, pour toute matrice M, $f(M) = \mathrm{Tr}(\alpha I_n M) = \alpha\mathrm{Tr}(M)$

Proposition 21 *Deux matrices semblables ont même trace.*

[Ind] Appliquer la définition et la proposition précédente

[Dem] Si A et B sont semblables, il existe une matrice carrée $P \in GL_n(K)$ telle que $A = P^{-1}BP$, ainsi

$$\begin{aligned} \mathrm{Trace}(A) &= \mathrm{Trace}(P^{-1}(BP)) \\ &= \mathrm{Trace}((BP)P^{-1}) \\ &= \mathrm{Trace}(B) \end{aligned}$$

Proposition 22 *Soit u un endomorphisme d'un K-ev E de dimension finie. Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, les traces des matrices de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont égales. Ce scalaire, qui ne dépend pas de la base choisie, s'appelle la trace de u.*

[Ind] Appliquer la proposition précédente

[Dem] Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, les matrices de u dans ces deux bases sont semblables, elles ont donc même trace.

Proposition 23 *Soit p un projecteur d'un K-ev E de dimension finie, la trace de p est un entier égal à son rang.*

[Ind] Prendre une base de E adaptée à p.

[Dem] On a $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$. Si r est la rang de p, notons $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\operatorname{Im} p$ et $f_1, \dots, f_{n-r}$ une base de $\operatorname{Ker} p$, la famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_{n-r})$ est une base de E et la matrice de p dans cette base a pour trace r.

Exercice 19 Montrer que la trace d'une symétrie s est égale à $\dim \operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id}_E) - \dim \operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}_E)$.

[Ind] Prendre une base de E adaptée à s.

[Dem] On a $E = \operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id}_E)$. Prenons une base adaptée à la décomposition en somme directe, la matrice de s dans cette base est diagonale et sa trace est bien celle demandée.

Exercice 20 Soit E un espace vectoriel de dimension au moins 2. Montrer que, si f est un endomorphisme qui n'est pas une homothétie, alors il existe une base $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de $\mathcal{E}$ telle que $f(e_1) = e_2$.
En déduire que toute matrice carrée réelle de trace nulle est semblable à une matrice dont tout élément diagonal est nul.

[Ind] Quelle est la caractérisation des homothéties ? La déduction proposée peut s'effectuer par récurrence

[Dem] Si f n'est pas une homothétie, il existe alors un vecteur x tel que la famille $\{x, f(x)\}$ soit libre (négation de la caractérisation des homothéties), en notant $e_1 = x$ et $e_2 = f(x)$, on peut compléter la famille (e_1, e_2) en une base de E possédant la propriété demandée.
Montrons la dernière propriété par récurrence sur la taille de la matrice. Celle-ci est vraie pour les matrices de taille 1.
Supposons la propriété vraie pour les matrices de taille $n-1$ ($n \geq 2$).
Soit M de taille n et de trace nulle. Si M est une matrice d'homothétie de trace nulle, elle est alors nulle. Si cette matrice n'est pas une matrice d'homothétie l'application linéaire associée $\tilde{M}$ n'est pas une homothétie, il existe donc une base dans laquelle sa matrice M_1 est de la forme

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & L_2 \\ 1 & \\ 0 & \\ \vdots & M_2 \\ 0 & \end{pmatrix}$$

où L_2 est une ligne de $n-1$ éléments et M_2 est une matrice carrée de taille $n-1$ de trace nulle, il existe donc une matrice inversible P_2 de taille $n-1$ telle que $N_2 = (P_2)^{-1} M_2 P_2$ soit une matrice dont la diagonale est nulle. Considérons la matrice

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \\ \vdots & P_2 \\ 0 & \end{pmatrix}$$

dont l'inverse est

$$(P_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \\ \vdots & (P_2)^{-1} \\ 0 & \end{pmatrix}$$

On vérifie alors que

$$(P_1)^{-1} M_1 P_1 = \begin{pmatrix} 0 & L_2 P_2 \\ C_2 & N_2 \end{pmatrix}$$

où C_2 est la première colonne de $(P_2)^{-1}$. Cette dernière matrice étant bien de diagonale nulle, la propriété est donc démontrée.

Exercice 21 Soit E un K-ev de dimension finie et $(p_i)_{i \in [1,n]}$ une famille de projecteurs de E. Démontrer que:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \text{ est un projecteur} \Longleftrightarrow \forall i, j \in [1, n]\ i \neq j \implies p_i \circ p_j = 0.$$

[Ind] Montrer que les images des projecteurs sont en somme directe si leur somme est un projecteur.

[Dem] La réciproque est claire car $\left(\sum_i p_i\right)\left(\sum_j p_j\right) = \left(\sum_{i,j} p_i p_j\right) = \left(\sum p_i\right)$. Pour la partie directe : suivons l'indication. Si la somme est un projecteur $p \circ p = p$ ce qui donne $\sum_{j \neq i} p_i \circ p_j = 0$. Si maintenant nous prenons pour tout i un élément de $\operatorname{Im} p_i \bigcap \sum_{j \neq i} \operatorname{Im} p_j$, il s'écrit $y = p_i(x_i) = \sum_{j \neq i} p_j(x_j)$ et en composant des deux côtés par p_i on obtient $y = p_i \circ p_i(x_i) = 0$ donc la somme des images est directe. Maintenant pour tout $x \in E$ le vecteur $\sum_{j \neq i} p_j \circ p_i(x)$ est nul et est dans $\bigoplus \operatorname{Im} p_i$ donc chaque vecteur est nul ce qui donne pour tout (i, j) : $p_j \circ p_i = 0$.

2.2 Déterminants

2.2.1 Déterminants de n vecteurs

Formes n-linéaires

Définition 18 *on appelle forme n-linéaire sur le $K-$ espace vectoriel E une application $f : E^n \to K$ qui est linéaire par rapport à chaque variable. $f : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \longmapsto f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Elle est dîte alternée si elle s'annule lorsque deux des variables prennent des valeurs égales.*

Remarque: Si le corps K est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, une forme n-linéaire est alternée si et seulement si elle est antisymétrique c'est à dire si elle est changée en son opposée dès que l'on permute deux éléments.(on développe $f(\cdots, X_i + X_j, \cdots, X_i + X_j, \cdots)$ et on obtient alternée$\Longrightarrow$antisymétrique dans l'autre sens on a $f(\cdots T, \cdots T, \cdots) = -f(\cdots T, \cdots T, \cdots)$ par antisymétrie et donc f est alternée)

Théorème 2 *Si E est de dimension n l'espace vectoriel des applications n-linéaires alternées est de dimension* 1.
Ce théorème est admis.

[Dem]
Il est claire que cet ensemble $\Lambda^n(E)$ est un espace vectoriel. En écrivant $x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji} e_j$ on obtient par développement $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum\limits_{\kappa \in F_{n,n}} a_{\kappa(1),1} \cdots a_{\kappa(n),n} f\left(e_{\kappa(1)}, \cdots, e_{\kappa(n)}\right)$ où $F_{n,n}$ est l'ensemble de toutes les fonctions de I_n. Comme les termes correspondant à des applications κ non bijectives sont nuls on obtient $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum\limits_{\sigma \in G_n} a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} f\left(e_{\sigma(1)}, \cdots, e_{\sigma(n)}\right) = \sum\limits_{\sigma \in G_n} \epsilon_\sigma a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} f(e_1, \cdots, e_n)$.ainsi f est multiple de l'application définie par : $\sum\limits_{\sigma \in G_n} \epsilon_\sigma a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$. Ceci montre que $\dim \Lambda^n(E) \leq 1$.
Il suffit alors de montrer que $\Delta(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum\limits_{\sigma \in G_n} \epsilon_\sigma a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$ est bien n-linéaire alternée et non nulle. Il est clair que Δ est n-linéaire. Nous allons montrer que si $x_i = x_j$ alors $\Delta(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$. Soit $\tau_{i,j}$ la transposition $(1 \leq i < j \leq n)$. On a : $\Delta(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum\limits_{\sigma \in A_n} \epsilon_\sigma a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} +$

$\sum\limits_{\sigma\in G_n\backslash A_n} \epsilon_\sigma a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n}$ or l'application $\sigma \longmapsto \sigma\circ\tau$ est une bijection de $A_n \to S_n\backslash A_n$. Ceci permet d'écrire que :$\Delta(x_1,x_2,\cdot\cdot\cdot,x_n) = \sum\limits_{\sigma\in A_n} \epsilon_\sigma a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n} + \sum\limits_{\sigma\in A_n} \epsilon_{\sigma\tau} a_{\sigma\tau(1),1}\cdots a_{\sigma\tau(n),n}$ et comme $\epsilon_{\sigma\tau} = -\epsilon_\sigma$ on a $\Delta(x_1,x_2,\cdot\cdot\cdot,x_n) = \sum\limits_{\sigma\in A_n} \epsilon_\sigma a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n} - \sum\limits_{\sigma\in A_n} \epsilon_\sigma a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n}$ Or, comme $x_i = x_j$, on a $a_{k,i} = a_{k,j}$ pour tout $k = 1,2,\cdots,n$ d'où $a_{\sigma(j),i} = a_{\sigma(j),j}$ et $a_{\sigma(i),j} = a_{\sigma(i),i}$. Donc $\Delta(x_1,\cdots x_n) = 0$. Enfin Δ n'est pas nulle car en écrivant $e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \delta_{ij}e_j$ on a : $\Delta(e_1,\cdots,e_n) = \sum\limits_{\sigma\in G_n} \epsilon_\sigma \delta_{\sigma(1),1}\cdots\delta_{\sigma(n),n} = \delta_{11}\cdots\delta_{nn} = 1$.

Proposition 24 *Si $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ est une base de l'espace vectotiel E, il existe une forme n-linéaire alternée unique Δ sur E vérifiant $\Delta(e_1,e_2,\cdots,e_n) = 1$.*

Ce n'est qu'une reformulation du théorème ci-dessus qui permet de donner la définition suivante:

déterminant de n vecteurs

Définition 19 *Le déterminant de n vecteurs $x_1,x_2,\cdots,x_n$ de E par rapport à la base $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ est le scalaire $\Delta(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ où Δ est l'unique forme n-linéaire alternée du corollaire ci-dessus.*

En considèrant une autre base $\mathcal{C} = (f_1,f_2,\cdots,f_n)$ et $\mathcal{B} = (e_1,e_2,\cdots,e_n)$ on a la formule :
$\det_{\mathcal{B}}(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \det_{\mathcal{C}}(x_1,x_2,\cdots,x_n) \times \det_{\mathcal{B}}(f_1,f_2,\cdots,f_n)$ en effet les deux membres sont deux formes n-linéiares alternées en $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ sur E qui prennent la même valeur en $(f_1,f_2,\cdots,f_n)$, elles sont donc égales.

Théorème 3 *caractérisation des bases*
Soit E un K-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1,\cdots,e_n)$. Les vecteurs $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ sont linéairement indépendants (donc forment une base) si et seulemnt si $\det_{\mathcal{B}}(x_1,x_2,\cdots,x_n) \neq 0$.

[Dem] Si la famille n'est pas libre, un des vecteurs est combinaison linéaire des autres et par le caractère alterné du déterminant on a donc $\det_B(x_1,x_2,\cdots,x_n) = 0$. Si la famille est libre alors c'est une base de E appelons-la C. La formule ci-dessus donne $\det_B(B) = \det_C(B)\times\det_B(C) = 1$ ceci prouve que $\det_B(C) \neq 0$.

Application : formule de Cramer.

Soit un système linéaire $n\times n$ que l'on peut écrire $U(x) = b$ où x, b sont des vecteurs de E (espace vectoriel de dimension n) et U un endomorphisme de E. Si ce système possède une solution unique (ce qui revient à dire que U est un automorphisme) il est dit de Cramer.
Soit $\mathcal{B} = (e_1,e_2,\cdots,e_n)$ une base de E et pour tout i de 1 à n $a_i = U(e_i)$. L'application étant bijective on a que $\mathcal{C} = (a_1,a_2,\cdots,a_n)$ est une base. Il en résulte que le vecteur b s'écrit : $b = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i a_i$ et que la solution est le vecteur $x = (\xi_1,\cdots,\xi_n)$en effet $u\left(\sum \zeta_\iota e_i\right) = \sum \zeta_i u(e_i) = \sum \zeta_i a_i = b$. Calculons $\det_{\mathcal{B}}(a_1,\cdots,a_{j-1},b,a_{j+1},\cdots,a_n) = \xi_j \det_{\mathcal{B}}(a_1,\cdots a_{j-1},a_j,a_{j+1},\cdots,a_n)$. Nous en déduisons les formules de Cramer :

$$\xi_j = \frac{\det_{\mathcal{B}}(a_1,\cdots,a_{j-1},b,a_{j+1},\cdots,a_n)}{\det_{\mathcal{B}}(a_1,\cdots,a_{j-1},a_j,a_{j+1},\cdots,a_n)} \text{ pour } 1\le j\le n$$

2.2.2 Déterminant d'un endomorphisme

Définitions

Nous savons que $\Lambda^n(E)$, espace vectoriel des formes n-linéaires alternées sur l'espace vectoriel E de dimension n est de dimension 1 (c'est une droite). Soit u un endomorphisme de E. Pour toute forme linéaire alternée f définissons $f_u : E^n \to K$ par $(x_1,x_2,\cdots,x_n) \longmapsto$

$f\left(u(x_1), u(x_2), \cdots u\left(x_n\right)\right)$ on a immédiatement que f_u est une forme n-linéaire alternée. Elle est donc proportionnelle à f (car $\Lambda^n(E)$ est une droite), le coefficient de proportionnalité est appelé $\det u$.

Définition 20 *Si u est un endomorphisme de E espace vectoriel de dimension finie, l'application $f \longmapsto f_u$ de la droite $\Lambda^n(E)$ est une homothétie de rapport $\det u$. Ainsi le déterminant de u vérifie la relation fondamentale : Pour toute forme n-linéaire alternée f et tout n-uplet de vecteurs $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$: $f\left(u(x_1), \cdots, u(x_n)\right) = (\det u)\, f\left(x_1, \cdots, x_n\right)$.*

Ainsi en prenant une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ on a $\det u = \det_{\mathcal{B}}\left(u(e_1), u(e_2), \cdots, u(e_n)\right)$ et cette formule est indépendante de la base choisie.

Théorème 4 *-1- Le déterminant de l'application identique est 1.*
-2- Si v, u sont des endomorphismes de E alors $\det(v \circ u) = \det(v)\det(u)$.
-3- L'endomorphisme u est inversible si et seulement si $\det u \neq 0$.

[Dem] La première assertion est évidente, pour la seconde on a $f\left(v \circ u\left(x_1\right), \cdots, v \circ u(x_n)\right) = \det(v \circ u)\, f\left(x_1, \cdots, x_n\right)$ et d'autre part $f\left(v \circ u\left(x_1\right), \cdots, v \circ u(x_n)\right) = \det(v)\, f\left(u\left(x_1\right), \cdots, u(x_n)\right) = \det(v)\det(u)\, f\left(x_1, \cdots, x_n\right)$ en choisissant une forme n-linéaire alternée non nulle on obtient $\det(v \circ u) = \det(v)\det(u)$. La dernière assertion si u est un automorphisme on a $\det(u)\det\left(u^{-1}\right) = 1$ donc $\det(u) \neq 0$. Si u n'est pas inversible alors si $B = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base son image $(u(e_1), u(e_2), \cdots, u(e_n))$ n'est pas une base et $\det u = \det_B\left(u(e_1), u(e_2), \cdots, u(e_n)\right) = 0$.

Application : Orientation

Si E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$ deux bases $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ et $\mathcal{C} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ sont dîtes de même orientation si l'endomorphisme u ayant $\mathcal{C}$ comme image de $\mathcal{B}$ a un déterminant positif. En effet $\det(u) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ est non nul donc est ou bien positif ou négatif. Ceci permet de classer l'ensemble des bases en deux classes disjointes. Orienter l'espace E c'est choisir une des deux classes et de les décreter directes. Regarder en dimension 2 ou 3.

2.2.3 Déterminant d'une matrice carrée

Définition

Nous avons vu que le déterminant d'un endomorphisme est le déterminant des images des vecteurs d'une base.

Définition 21 *Soit $M = \left((a_{ij})\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre n, on appelle déterminant de M, noté $\det(M)$ ou $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ le déterminant de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de K^n. De plus pour toute base $\mathcal{B}$ de E on a : $\det\left(M_{\mathcal{B}}(u)\right) = \det(u)$ où u est l'endomorphisme associé à M.*

Théorème 5 *Si $M = \left((a_{ij})\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ alors $\det(M) = \sum\limits_{\sigma \in G_n} \epsilon_\sigma a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$ et on a :*
-1- pour toutes matrices A, B : $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
-2- A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.
-3- pour toute matrice A : $\det\left({}^tA\right) = \det(A)$
L'assertion 3 est admise.

[Dem] Nous avons à montrer l'assertion -3- Si $A = \left((a_{ij})\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ on a $\det(A) = \sum\limits_{\sigma \in G_n} \epsilon_\sigma a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$ et $\det({}^tA) = \sum\limits_{\rho \in G_n} \epsilon_\sigma a_{1,\rho(1)} \cdots a_{n,\rho(n)}$ or $a_{1,\rho(1)} \cdots a_{n,\rho(n)} = a_{\sigma(1),\rho\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n),\rho\sigma(n)}$ car ce produit est invariant si on fait subir à ses éléments une permutation quelconque σ. Choisissons $\sigma = \rho^{-1}$ on obtient $a_{1,\rho(1)} \cdots a_{n,\rho(n)} = a_{\rho^{-1}(1),1} \cdots a_{\rho^{-1}(n),n}$ ainsi $\det({}^tA) = \sum\limits_{\rho \in G_n} \epsilon_\rho a_{\rho^{-1}(1),1} \cdots a_{\rho^{-1}(n),n} = \sum\limits_{\sigma \in G_n} \epsilon_\sigma a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$. Car $\epsilon_{\rho^{-1}} = \epsilon_\rho$ et $\rho \longmapsto \rho^{-1}$ est une bijection de S_n dans lui-même.

Développement suivant une ligne ou une colonne

Définition 22 *Soit* $A = ((a_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n}$ *une matrice. On appelle mineur associé au terme* a_{ij} *le déterminant* Δ_{ij} *d'ordre* $n-1$ *obtenu en supprimant dans* A *la* $i^{\text{ème}}$ *ligne et la* $j^{\text{ème}}$ *colonne.*

Théorème 6 *Avec les notations ci-dessus on a* $\det(A) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj}\Delta_{kj}$ *(développement par rapport aux colonnes) et* $\det(A) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik}\Delta_{ik}$ *(développement par rapport aux lignes)*

[Dem] Posons dans K^n : $B = (e_1, \cdots e_n)$ la base canonique et $(a_1, \cdots, a_n)$ les vecteurs colonnes de A. Par transposition il suffit de faire la démonstration de la première assertion. On a $\det(A) = \det_B(a_1, a_2, \cdots, a_n)$. Soit j un entier de 1 à n la décomposition de a_j dans la base B s'écrit : $a_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$ et l'on a donc $\det(A) = (-1)^{j-1} \det_B(a_j, a_1, \cdots, a_{j-1}, a_{j+1}, \cdots, a_n) = (-1)^{j-1} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} \det_B(a_i, a_1, \cdots, a_{j-1}, a_{j+1}$ donc $\det(A) = (-1)^{j-1} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} \det(A_{ij})$ où A_{ij} a pour colonnes $(e_i, a_1, \cdots, a_{j-1}, a_{j+1}, \cdots, a_n)$. Si on échange successivement la $i^{\text{ème}}$ ligne avec les $i-1$ premières on obtient $\det(A_{ij}) = (-1)^{i-1} \det(M'_{ij})$ où $M'_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_{ij} \end{pmatrix}$ et on a $\det(M'_{ij}) = \Delta_{ij}$. D'où le résultat.

Nous utilisons un résultat important digne d'être revu : **déterminant d'une matrice triangulaire de matrices.**
Soit $M = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{rr} \end{pmatrix}$ une matrice décomposée en blocs. Par récurrence il suffit de faire le cas $r = 2$. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$, où A est de taille p, B de taille $p, n-p$ et D de taille $n-p$. Soit $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ la base canonique de K^n, F le sous-espace vectoriel de K^n engendré par $(e_1, \cdots, e_p)$, G celui engendré par $(e_{p+1}, \cdots, e_n)$. Notons U l'endomorphisme de K^n canoniquement associé à M, V celui de F associé à A et W celui de G associé à D. Soit $\mathbf{f}$ le déterminant dans la base canonique de K^n. Par définition de $\det(M)$ on a $\det(M) = \mathbf{f}(U(e_1), \cdots, U(e_n))$ (1). Or puisque M est décomposée en blocs trigonaux, pour tout j de 1 à p on a $U(e_j) = V(e_j)$. Nous sommes donc amené à étudier l'application $\mathbf{g}$ définie sur F^p dans K par $\mathbf{g}(x_1, \cdots, x_p) = \mathbf{f}(x_1, x_2, \cdots, x_p, U(e_{p+1}), \cdots, U(e_n))$(2). Il est clair que $\mathbf{g}$ est une forme p-linéaire alternée sur F. Par définition du déterminant de l'endomorphisme V, il en découle que $\mathbf{g}(V(e_1), \cdots, V(e_p)) = \det(V)\, \mathbf{g}(e_1, \cdots, e_p)$(3). On déduit de (1),(2),(3) que $\det(M) = \det(A)\, \mathbf{f}(e_1, \cdots, e_p, U(e_{p+1}), \cdots, U(e_n))$. Or pour tout j de $p+1$ à n, le vecteur $U(e_j) - W(e_j)$ appartient à F c'est donc une combinaison linéaire de $e_1, \cdots, e_p$. $\mathbf{f}$ étant multilinéaire on a donc $\mathbf{f}(e_1, e_2, \cdots, e_p, U(e_{p+1}), \cdots, U(e_n)) = \mathbf{f}(e_1, e_2, \cdots, e_p, W(e_{p+1}), \cdots, W(e_n))$. Nous sommes amener à étudier l'application $\mathbf{h}$ de G^{n-p} dans K définie par $\mathbf{h}(x_{p+1}, \cdots, x_n) = \mathbf{f}(e_1, \cdots, e_p, x_{p+1}, \cdots, x_n)$. Or $\mathbf{h}(W(e_{p+1}), \cdots, W(e_n)) = \det(W)\, \mathbf{h}(e_{p+1}, \cdots, e_n)$. On en déduit que $\det(W) = \det(D)$ et puis $\det(M) = \det(A)\det(D)$.
Nous remarquons que nous avons ici les déterminats classique diagonaux, triangulaires.

Matrices inverses

Définition 23 *Etant donné une matrice* $A = ((a_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n}$ *on appelle cofacteur de l'élément* a_{ij} *le scalaire* $a'_{ij} = (-1)^{i+j}(A_{ij})$ *où* A_{ij} *est le mineur d'ordre* i, j *. On définit ensuite la matrice des cofacteurs* $A' = \left((a'_{ij})\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ *et la matrice complémentaire de* A : $\tilde{A} =^t A'$.

Théorème 7 *Avec les notations ci-dessus on a* $A \times \tilde{A} = \tilde{A} \times A = (\det(A))\, I_n$.

[Dem] Nous allons montrer que $A = (\det(A))\, I_n$ c'est à dire $\sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+h} a_{ij} \det(A_{ih}) = \delta_{hj} \det(A)$. Soit $(a_1, \cdots, a_n)$ les vecteurs colonnes de A et $A_1 = (\gamma_{lm})$ la matrice obtenue en remplaçant dans A le vecteur a_h par le vecteur a_j. Le déterminant de A_1 est nul, si $h \neq j$ car il a deux colonnes identiques, et son développement suivant la $h^{\text{ème}}$ colonne s'écrit $\det(A_1) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+h} \gamma_{ih} \det(A_{ih})$, puisque la matrice mineure de A_1 associée à γ_{ih} n'est autre que A_{ih}. Comme pour tout i de 1 à n on a $\gamma_{ih} = \alpha_{ij}$ nous obtenons la formule si $h \neq j$. Dans le cas où $h = j$ on obtient le déterminant de A.

Théorème 8 *Soit A une matrice carrée inversible on a :* $A^{-1} = \frac{1}{(\det(A))}\tilde{A}$.

[Dem] Si une matrice est inversible alors son déterminant est non nulle et il suffit d'applique le théorème précèdent.

Exercice 22 Déterminant de Van Der Monde. Soient $x_1, \dots, x_n$ des scalaires. Montrer que

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

[Ind] Si on note $V(x_1, \dots, x_n)$ ce déterminant, quels sont les zéros du polynôme $V(X, x_2, \dots, x_n)$? son degré ? son coefficient dominant ?

[Dem] Si les scalaires $x_1, \dots, x_n$ ne sont pas tous distincts, la matrice possède deux lignes identiques et son déterminant est nul. Supposons que les scalaires $x_1, \dots, x_n$ sont tous distincts. Le polynôme $V(X, x_2, \dots, x_n)$ possède donc $n-1$ zéros distincts $x_2, \dots, x_n$; en développant le déterminant suivant la première ligne, on s'aperçoit que ce polynôme est de degré $n-1$ et que son coefficient dominant est $(-1)^{n+1}V(x_2, \dots, x_n)$. Ainsi

$$V(X, x_2, \dots, x_n) = (-1)^{n+1}V(x_2, \dots, x_n)(X - x_2) \cdots (X - x_n)$$

et donc

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = V(x_2, \dots, x_n)(x_2 - x_1) \cdots (x_n - x_1)$$

On montre alors facilement par récurrence que

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Exercice 23 Soient P_1, P_2, $\cdots$, P_{n-1} des polynômes unitaires de degré respectifs 1, 2, $\cdots$, $n-1$. Montrer que

$$\begin{vmatrix} 1 & P_1(x_1) & \cdots & P_{n-1}(x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & P_1(x_n) & \cdots & P_{n-1}(x_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

en déduire, si $a_1, \dots, a_{n+1}$ sont des réels, la valeur du déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(a_1) & \cdots & \cos(na_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos(a_{n+1}) & \cdots & \cos(na_{n+1}) \end{vmatrix}$$

[Ind] Utiliser le caractère n-linéaire alterné du déterminant.
Développer $\cos n\alpha$ en polynôme de $\cos\alpha$ pour se ramener à la forme précédente à un coefficient multiplicatif près.

[Dem] P_1 étant de degré 1 et unitaire est de la forme : $X + a$.En remplaçant la colonne C_2 par $C_2 - aC_1$ on trouve la deuxième colonne du déterminant de Van der Monde. En supposant avoir transformer les p premières colonnes on remplacera la $p^{\text{ème}}$ par $C_p - a_{p-2}C_{p-1} - \cdots - a_0C_1$ si dans la colonne p on a $P_{p-1} = a_0 + a_1X + \cdots + a_{p-2}X^{p-2} + X^{p-1}$ pour obtenir la bonne colonne du

déterminant de Van der Monde. $\cos n\alpha$ se transforme en un polynôme en $\cos\alpha$. L'écriture est : $\cos n\alpha = \sum_{p=0}^{E(\frac{n}{2}})\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p+k}C_n^pC_p^k\cos^{n-2p+2k}\alpha$. Seule le coefficient en $\cos^n\alpha$ nous interesse et il vaut $\sum_{p=0}^{E(\frac{n}{2}})C_n^p\cos^n\alpha$.
On devrait trouver :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{p=0}^{E(\frac{k}{2}})C_k^p\cos^k\alpha\right)\prod_{1\le i<j\le n}(\cos^j\alpha - cos^i\alpha)$$

.

Exercice 24 Soit P un polynôme à coefficients complexes de degré n et $a_0, a_1, \dots, a_n$ une suite de $n+1$ complexes distincts. La famille de polynômes $P(X+a_0), \dots, P(X+a_n)$ est-elle libre ?

[Ind] Calculer la matrice de la famille dans la base canonique à l'aide de la formule de Taylor.

[Dem] La formule de taylor pour un ploynôme peut s'écrire avec un reste nul et donne les coordonnées dans la base canonique. En effet $P(\alpha+X) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}P^{(k)}(\alpha)X^k$. D'où la matrice des $(P(X+a_i)$ dans la base canonique :

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ P(a_0) & P(a_1) & \cdots & P(a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P^{(n)}(a_0) & P^{(n)}(a_1) & \cdots & P^{(n)}(a_n) \end{vmatrix}$$

. La famille est libre si et seulement si le déterminant est non nul. Il est donc nécessaire que $deg(P) \ge n$. En retranchant à la première ligne une combinaison des suivantes on seramène au déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

qui par Van der Mond est non nul si et seulement si les a_i sont disticts 2 à 2. Cette condition avec P de degré supérieur à n.

Exercice 25 Déterminant de Cauchy. Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ des réels tels que pour tous $i, j \in [1, n]$, $x_i + y_j \neq 0$. Calculer le déterminant de la matrice $\left(\frac{1}{x_i+y_j}\right)_{i,j\in[1,n]}$

Application: Calculer le déterminant et l'inverse de la matrice de Hilbert $\left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{i,j\in[1,n]}$.

[Ind] Retrancher la première ligne à toutes les autres, puis la première colonne de la matrice qui en résulte aux autres colonnes, mettre en facteur ce qui est possible.

[Dem] $\begin{vmatrix} \frac{1}{x_1+y_1} & \frac{1}{x_1+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1+y_n} \\ \frac{1}{x_2+y_1} & \ddots & \ddots & \frac{1}{x_2+y_n} \\ \vdots & \ddots & \frac{1}{x_i+y_j} & \vdots \\ \frac{1}{x_n+y_1} & \frac{1}{x_n+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_n+y_n} \end{vmatrix}$ que l'on transforme comme l'indication l'indique :

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1+y_1} & \frac{1}{x_1+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1+y_n} \\ \frac{x_1-x_2}{(x_1+y_1)(x_2+y_1)} & \ddots & \ddots & \frac{x_1-x_2}{(x_1+y_n)(x_2+y_n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{x_1-x_n}{(x_1+y_1)(x_n+y_1)} & \cdots & \cdots & \frac{x_1-x_n}{(x_1+y_n)(x_n+y_n)} \end{vmatrix}$$

puis $= \prod_{j=2}^{n}\frac{x_1-x_j}{x_1+y_j}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{x_2+y_1} & \frac{1}{x_2+y_2} & \ddots & \frac{1}{x_2+y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{x_n+y_1} & \frac{1}{x_n+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_n+y_n} \end{vmatrix}$ en faisant apparaître des zéros sur la première ligne :

$$= \prod_{j=2}^{n} \frac{x_1 - x_j}{x_1 + y_j} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{x_2+y_1} & \frac{y_1-y_2}{(x_2+y_1)(x_2+y_2)} & \ddots & \frac{y_1-y_2}{(x_2+y_1)(x_2+y_n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{x_n+y_1} & \frac{y_1-y_2}{(x_n+y_1)(x_n+y_2)} & \cdots & \frac{y_1-y_n}{(x_n+y_1)(x_n+y_n)} \end{vmatrix} \text{ en mettant en facteur :}$$

$$\prod_{j=2}^{n} \frac{x_1 - x_j}{x_1 + y_j} \prod_{j=2}^{n} \frac{y_1 - y_j}{y_1 + x_j} \begin{vmatrix} \frac{1}{x_2+y_2} & \cdots & \cdots & \frac{1}{x_2+y_n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{x_n+y_2} & \frac{1}{x_n+y_3} & \cdots & \frac{1}{x_n+y_n} \end{vmatrix}$$

soit $\mathcal{H}(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n) = \prod_{j=2}^{n} \frac{x_1 - x_j}{x_1 + y_j} \prod_{j=2}^{n} \frac{y_1 - y_j}{y_1 + x_j} \mathcal{H}(x_2, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)$.

Exercice 26 Calculer

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & b & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & 0 & b & a \end{vmatrix}$$

[Ind] Établir une formule de récurrence

[Dem] En développant par exemple par rapport à la première colonne : $\Delta_n = a\Delta_{n-1} - b \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & b & 0 & \vdots \\ 0 & b & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & 0 & b & a \end{vmatrix}$

puis en développant par rapport à la première ligne : $\Delta_n = a\Delta_{n-1} - b^2\Delta_{n-2}$. Ou bien on résoud à l'aide de l'équation caractéristique cette relation de récurrence linéaire d'ordre 2 ou bien on devine et on vérifie :

Exercice 27 a) Soit $M = (a_{ij})_{i,j \in [1,n]}$ une matrice à coefficients complexes. Montrer que le déterminant de la matrice $M(X) = (a_{ij} + X)_{i,j \in [1,n]}$ est un polynôme du premier degré.
b) Calculer le déterminant de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} r_1 & a & \cdots & a \\ b & r_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & r_n \end{pmatrix}$$

[Ind] a) Le déterminant d'une matrice est une forme n-linéaire alternée de ses colonnes.
b) Le déterminant cherché est la valeur en 0 de $\det M(X)$.

[Dem] En retranchant à toutes les colonnes la première et en gardant la première on obtient : $\begin{vmatrix} a_{11} + X & a_{12} - a_{11} & \cdots & a_{1n} - a_{11} \\ a_{21} + X & a_{22} - a_{21} & \ddots & a_{2n} - a_{21} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + X & a_{n2} - a_{n1} & \cdots & a_{nn} - a_{n1} \end{vmatrix}$

en développant par rapport à la première colonne on a : $\sum_{k=1}^{n} (-1)_k (a_{nk} + X)\Delta_k$ qui est un polynôme du premier degré c'est à dire de la forme $\alpha X+\beta$. Pour le déterminant de M on a $|M(X)| = \alpha X + \beta$ et vaut en $-a\prod(r_i-a)$ et en $-b\prod(r_i-b)$. D'où le système $\begin{cases} -\alpha a+\beta = \prod(r_i-a) \\ -\alpha b+\beta = \prod(r_i-b)\end{cases}$ ce qui donne $\alpha = \dfrac{\prod(r_i-b)-\prod(r_i-a)}{a-b}$ et $\beta = \dfrac{a\prod(r_i-b)-b\prod(r_i-a)}{a-b}$ et le déterminant pour $X=0$ soit $|M| = \dfrac{a\prod(r_i-b)-b\prod(r_i-a)}{a-b}$ on suppose $a\neq b$.

Exercice 28 Montrer que:

$$x<y<z \implies \begin{vmatrix} e^x & e^y & e^z \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} < 0$$

[Ind] La fonction exponentielle est convexe.

[Dem] Le développement du déterminant donne $\Delta = e^x(y-z) - e^y(x-z) + e^z(x-y)$. En écrivant que $y = \frac{y-z}{x-z}x + \frac{x-y}{x-z}z$ la convexité de la fonction exponentielle donne que $\Delta < 0$.

Exercice 29 Trouver les zéros du polynôme:

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}$$

[Ind] Le scalaire $a+b+c$ en est un.

[Dem] Il s'agit de développer : $\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = (x+(a+b+c))\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & x & c & b \\ 1 & c & x & a \\ 1 & b & a & x \end{vmatrix} = (x+a+b+c)\begin{vmatrix} x-a & c-b & b-c \\ c-a & x-b & a-c \\ c-a & 0 & a-c \end{vmatrix} = (x+a+b+c)\begin{vmatrix} x-a & c-b & b-c \\ c-a & x-b & a-c \\ 0 & b-x & 0 \end{vmatrix} = (x+a+b+c)(x-b)\begin{vmatrix} x-a & b-c \\ c-a & a-c \end{vmatrix} = (x+a+b+c)(x-b)\begin{vmatrix} x-a+b-c & b-c \\ 0 & a-c \end{vmatrix} = (x+a+b+c)(x-b)(x-a+b-c)$.

Exercice 30 Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des fonctions du type $P.\exp$ où P est un polynôme de degré au plus n. Quel est le déterminant de l'endomorphisme de $\mathcal{E}$ induit par la dérivation?

[Ind] Calculer la matrice de la dérivation dans une base de E.

[Dem] Prenons comme base $(x^ke^x)_{0\leq k\leq n}$ ainsi $(x^ke^x)' = kx^{k-1}e^x + X^ke^x$ et la matrice de l'endomorphisme dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & n \\ 0 & \cdots & \cdots & \ddots & 1 \end{pmatrix}$$

. Le déterminant est 1.

Exercice 31 Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall i \in [1,n] \quad \sum_{j\neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}|$$

Montrer que A est inversible.

[Ind] Résoudre l'équation $AX = 0$.

[Dem] Il s'agit de matrice à diagonale strictement dominante. Si nous savons qu'il existe $X \neq 0$ tel que $AX = 0$ posons $X = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ on a : $\forall i$: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0$ posons j_0 l'indice pour lequel $|x_{j_0}| = \sup_{1\leq j\leq n} |x_j|$ on a $a_{ij_0}x_{j_0} = \sum_{j\neq j_0} a_{ij}x_j$ et $|a_{ij_0}x_{j_0}| = \sum_{j\neq j_0} |a_{ij}x_j|$. Si $X \neq 0$ alors $x_{j_0} \neq 0$ et en divisant $|a_{ij_0}| \leq \sum_{j\neq j_0} \frac{|a_{ij}|}{|x_{j_0}|} |x_j| \leq \sum_{j\neq j_0} |a_{ij}|$. Ce qui contredit l'hypothèse et donc A est inversible.

2.3 Calcul matriciel

2.3.1 Matrices décomposées en blocs

Nous considérerons, par ordre de généralité croissante, les matrices diagonales, triangulaires, diagonales par blocs, triangulaires par blocs et enfin, pour terminer, la théorie générale

Matrices diagonales

Définition 24 *Soit* $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$*, la matrice diagonale notée* $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ *est la matrice*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

L'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(K)$ *se note* $D_n(K)$

Remarque: $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\delta_{ij}\lambda_i)_{i,j\in[1,n]} = (\delta_{ij}\lambda_j)_{i,j\in[1,n]}$.

Proposition 25 *Soit* E *un* K*-espace vectoriel de dimension* n *et* $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ *une base de* E*. Un endomorphisme* u *possède, dans* $\mathcal{B}$*, une matrice diagonale si et seulement si*

$$\forall i \in [1, n] \quad u([e_i]) \subset [e_i].$$

[Ind] Appliquer la définition de la matrice dans une base donnée d'un endomorphisme.

[Dem] Si $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale alors $\forall i$ on a $u(e_i) = \lambda_i e_i$ et donc on a bien $u([e_i]) \subset [e_i]$. Réciproquement si $\forall i$: $u([e_i]) \subset [e_i]$ cela signifie que $\forall i$: $\exists \lambda_i \in K$: $u(e_i) = \lambda_i e_i$ et donc $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.

Théorème 9 $D_n(K)$ *est une sous-algèbre pleine commutative de* $\mathcal{M}_n(K)$ *de dimension* n.
Une matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ *a pour déterminant* $\lambda_1 \cdots \lambda_n$*. Elle est inversible si et seulement si pour tout* $i \in [1, n]$ $\lambda_i \neq 0$*. Son inverse est alors la matrice diagonale* $\mathrm{Diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1})$.

[Ind] Calculer le produit de deux matrices diagonales. Calculer le déterminant en le développant suivant la première colonne et conclure en effectuant une démonstration par récurrence.

[Dem] $D_n(K)$ est non vide car il contient par exemple la matrice identité I et est contenu dans l'algèbre $\mathcal{M}_n(K)$. La somme et le produit par un scalaire de matrices diagonales est diagonale car ce sont des opérations termes à termes. Pour le produit on a $Diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \times Diag(\mu_1, \cdots, \mu_n) = Diag(\lambda_1\mu_1, \cdots, \lambda_n\mu_n)$. En effet $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}\lambda_k\delta_{kj}\mu_j = \delta_{ij}\lambda_j\mu_j$. Puisque $I \in D_n(K)$ on a bien une sous algèbre. Puisque $Diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E_{ii}$ où E_{ij} sont les matrices élémentaires qui forment une base de $\mathcal{M}_n$ la dimension du sous espace vectoriel des matrices diagonales est n. Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit des termes diagonaux, il suffit de développer par rapport à la première colonne $det(Diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)) = \lambda_1 det(Diag(\lambda_2, \cdots, \lambda_n)) = \cdots = \lambda_1 \cdots \lambda_n$.En utilisant la formule du produit si une matrice diagonale est inversible alors ses coefficients sont tous non nuls et son inverse est $Diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)^{-1} = Diag(\frac{1}{\lambda_1}, \cdots, \frac{1}{\lambda_n})$.

Matrices triangulaires

Définition 25 *La matrice $A = (a_{ij})_{i,j\in[1,n]} \in \mathcal{M}_n(K)$ est:*
- triangulaire supérieure si $\forall i, j \in [1, n] \quad j < i \implies a_{ij} = 0.$
- triangulaire inférieure si $\forall i, j \in [1, n] \quad i < j \implies a_{ij} = 0.$

Proposition 26 *Soit E un Kev de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Un endomorphisme u possède, dans $\mathcal{B}$, une matrice triangulaire supérieure si et seulement si*

$$\forall k \in [1, n] \quad u([e_1, \ldots, e_k]) \subset [e_1, \ldots, e_k].$$

[Ind] Appliquer la définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base donnée.

[Dem] La $\mathcal{M}_\mathcal{B}(u)$ est triangulaire sup. $\iff \quad \forall i, j \in [1, n] \quad j < i \implies a_{ij} = 0. \iff \forall i \quad u(e_i) = \sum_{j\le i} a_{ji}e_j \iff \quad \forall k \in [1, n] \quad \forall \ell \le k \quad u(e_\ell) \in [e_1, \ldots, e_k]. \iff \quad \forall k \in [1, n] \quad u([e_1, \ldots, e_k]) \subset [e_1, \ldots, e_k]$..

Proposition 27 *Soit E un Kev de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Si l'endomorphisme u possède, dans la base $\mathcal{B}$, une matrice triangulaire supérieure, alors la matrice de u dans la base $(e_n, \ldots, e_1)$ est triangulaire inférieure.*

[Ind] Calculer...

[Dem] Si on a $u(e_j) = \sum_{i=1}^{j} a_{ij}e_i$ alors $u(e_{n-j}) = \sum_{i\ge j} a_{n+1-i,n+1-j}e_{n+1-i}$.

Théorème 10 *L'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(K)$ est une sous-algèbre pleine (non commutative si $n \ge 2$) de $\mathcal{M}_n(K)$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.*
Une matrice $A = (a_{ij})_{i,j\in[1,n]} \in \mathcal{M}_n(K)$ triangulaire supérieure a pour déterminant le produit des éléments diagonaux $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. Elle est inversible si et seulement si pour tout $i \in [1, n] \quad a_{ii} \ne 0$. Son inverse est alors une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont, terme à terme, les inverses des éléments diagonaux de la matrice A.

[Ind] Appliquer la proposition précédente en se ramenant aux endomorphismes de K^n associés aux matrices considérées

[Dem] L'ensemble $\mathcal{T}_n(K)$ des matrices triangulaires supérieures est non vide et bien inclus dans l'algèbre $\mathcal{M}_n(K)$. La somme et le produit par un scalaire de matrices triangulaires sont des matrices triangulaires. Pour le produit on utilise la proposition précèdente. Soit u, v des endomorphismes tels que leurs matrices dans la base $\mathcal{B}$ soient triangulaires. Ainsi $\forall k \in [1, n] \quad u([e_1, \ldots, e_k]) \subset [e_1, \ldots, e_k]$ et $\forall k \in [1, n] \quad v([e_1, \ldots, e_k]) \subset [e_1, \ldots, e_k]$. et tout simplement $\forall k \in [1, n] \quad \forall \ell \le k \quad v \circ u(e_\ell) = v(u(e_\ell)) \in v([e_1, \ldots, e_k]) \subset [e_1, \ldots, e_k]$.. Si une matrice triangulaire est inversible alors $\forall k \in [1, n] \quad u([e_1, \ldots, e_k]) = [e_1, \ldots, e_k]$. car u transforme une base en une base. Ainsi $\forall k \in [1, n] \quad [e_1, \ldots, e_k]) = u^{-1}([e_1, \ldots, e_k])$. et M^{-1} est triangulaire. Pour la dimension $(E_{ij})_{i,j}$ est une base de $\mathcal{M}_n(K)$ et $(E_{i,j})_{i\le j}$ est une base de $\mathcal{T}_n(K)$ qui est donc de dimension le nombre d'éléments de la base à savoir $\frac{n(n+1)}{2}$. Le déterminant est le produit des termes diagonaux en développant à chaque fois par rapport à la première colonne. Pour tout j : $u(e_j) = \sum_{i\le j} a_{ij}e_i$ et ainsi $e_j = a_{1j}u^{-1}(e_1) + \cdots + a_{jj}u^{-1}(e_j)$

ce qui donne que $u^{-1}(e_j) = \frac{1}{a_{jj}} e_j + \sum_{i<j} a'_{ij} e_i$. les termes diagonaux de la matrice inverse sont les inverses des termes diagonaux on ne peut rien dire de plus.

Remarque: Si $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \bigotimes \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \bigotimes \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$ alors

$$AB = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & & \bigotimes \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$$

Matrices diagonales par blocs

Définition 26 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $n_1, \ldots, n_p \in \mathbb{N}^*$ tels que $n_1 + \cdots n_p = n$. A est diagonale par blocs $n_1, \ldots, n_p$ s'il existe des matrices carrées $A_1, \ldots, A_p$ de tailles respectives $n_1, \ldots, n_p$ (appelées blocs diagonaux) telles que*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_p \end{pmatrix}$$

Proposition 28 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Notons $s_1 = 0$ et pour tout $k \in [2, p]$, $s_k = n_1 + \cdots + n_{k-1}$ et enfin, pour tout $k \in [1, p]$, $E_k = [e_{s_k+1}, \cdots, e_{s_k+n_k}]$. La matrice de l'endomorphisme u est diagonale par blocs $n_1, \ldots, n_p$ si et seulement si*

$$\forall k \in [1, p] \quad u(E_k) \subset E_k.$$

[Ind] Appliquer la définition de la matrice dans une base donnée d'un endomorphisme.

[Dem] Si on a une matrice diagonale par blocs en prenant la définition des E_{n_k} on a $\forall k \in [1, p]$: $\forall \ell \in [s_k, \cdots, s_k + n_k]$ l'image de e_{n_ℓ} est combinaison linéaire des $(e_i)_{s_k \leq i \leq s_k + n_k}$ donc $u(E_{n_k} \subset E_{n_k}$. Et réciproquement s'il en est ainsi alors la matrice de u est diagonale par blocs.

Théorème 11 *Soient $A_1 \in \mathcal{M}_p(K)$, $A_2 \in \mathcal{M}_q(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{pq}(K)$.*

$$\begin{vmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{vmatrix} = \det A_1 . \det A_2$$

[Ind] L'application qui, à une matrice $A_1 \in \mathcal{M}_p(K)$, associe $\begin{vmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{vmatrix}$ est une forme p-linéaire alternée des colonnes de A_1.

[Dem] Posons $\begin{vmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{vmatrix} = det(C_1, \cdots, C_p, C_{p+1}, \cdots, C_n)$. L'application $(C_1, \cdots, C_p) \longmapsto \begin{vmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{vmatrix}$ est une forme p-linéaire des colonnes de A_1 donc colinéaire à $det(A_1)$ c'est à dire $\begin{vmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{vmatrix} = \lambda_1 det A_1$. Mais pour $A_1 = Id$ on a, e n développant par rapport aux premières colonnes $det(A_2) = \lambda$ d'où le résultat.

Proposition 29 *Le déterminant d'une matrice diagonale par blocs $n_1, \ldots, n_p$, dont les blocs diagonaux sont $A_1, \ldots, A_p$, est égal au produit des déterminants de ses blocs diagonaux.*

[Ind] Appliquer le théorème précédent.

[Dem] Par récurrence ona $det A = det A_1 det M_1 = \cdots = det A_1 \cdots det A_p$ où M_1 est formé des $p - 1$ derniers blocs.

Théorème 12 *L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(K)$, diagonales par blocs $n_1, \dots, n_p$ est une sous-algèbre pleine de $\mathcal{M}_n(k)$ de dimension $n_1^2 + \cdots + n_p^2$.*
Une matrice A, diagonale par blocs, est inversible si et seulement si ses blocs diagonaux sont inversibles. Son inverse est alors la matrice diagonale par blocs dont les éléments diagonaux sont, terme à terme, les inverses des blocs diagonaux de A.

[Ind] Utiliser les endomorphismes de K^n associés aux matrices considérées.

[Dem] Cet ensemble est non vide. La somme et la multiplication par un scalaire dematrices par blocs de même dimension sont des matrices par blocs. Pour la multiplication on utilise la proposition 4. Si v, u sont des endomorphismes associés à A, B avec les notations de la proposition : $v \circ u(E_{n_k}) \subset v(E_{n_k}) \subset E_{n_k}$ et le produit est bien par blocs. Sa dimension est le cardinal d'une base. Pour chaque bloc il faut et il suffit de n_i^2 matrices élémentaires. Une matrice diagonale par blocs est inversible si et seulement si chaque bloc est inversible par la proposition 5. Si u est inversible on a alors $\forall k \quad : u(E_k) = E_k$ et donc $u^{-1}(E_k) = E_k$ et donc chaque bloc de la matrice inverse correspond à A_k^{-1}. Il faur bien voir que $A_k = \mathcal{M}(u_{|E_k}$.

Matrices triangulaires par blocs

Définition 27 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $n_1, \dots, n_p \in \mathbb{N}^*$ tels que $n_1 + \cdots n_p = n$. A est triangulaire supérieure par blocs $n_1, \dots, n_p$ s'il existe des matrices carrées $A_1, \dots, A_p$ de tailles respectives $n_1, \dots, n_p$ (appelées blocs diagonaux) et une famille de matrices $(B_{kl})_{\substack{k \in [1,p-1] \\ l \in [k+1,p]}}$ vérifiant, pour tout $k \in [1, p-1]$ et tout $l \in [k+1, p]$, $B_{kl} \in \mathcal{M}_{n_k n_l}$, telles que*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_{12} & \cdots & B_{1,p} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & B_{p-1,p} \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix}$$

Proposition 30 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Notons $s_1 = 0$ et pour tout $k \in [2, p]$, $s_k = n_1 + \cdots + n_{k-1}$ et enfin, pour tout $k \in [1, p]$, $F_k = [e_1, \cdots, e_{s_k + n_k}]$. La matrice de l'endomorphisme u est triangulaire supérieure par blocs $n_1, \dots, n_p$ si et seulement si*

$$\forall k \in [1, p] \quad u(F_k) \subset F_k.$$

[Ind] Appliquer la définition de la matrice dans une base donnée d'un endomorphisme.

[Dem] Dire que la matrice est triangulaire par blocs signifie que l'image d'un vecteur de F_k s'exprime comme combinaison linéaire des précèdents c'est à dire exactement $u(F_k) \subset F_k$.

Proposition 31 *Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs $n_1, \dots, n_p$, dont les blocs diagonaux sont $A_1, \dots, A_p$, est égal au produit des déterminants de ses blocs diagonaux.*

[Ind] Utiliser le théorème sur le déterminant des matrices du type $\begin{vmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{vmatrix}$.

[Dem] Par récurrence en appliquant le théorème 3. $det A = det A_1 det M_1 = \cdots = det A_1 \cdots det A_p$ où $M_1 = \begin{vmatrix} A_1 & B' \\ 0 & A' \end{vmatrix}$.

Théorème 13 *L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(K)$, triangulaires par blocs $n_1, \dots, n_p$, est une sous-algèbre pleine de $\mathcal{M}_n(k)$ de dimension $n_1(n_1 + \cdots + n_p) + n_2(n_2 \cdots + n_p) + \cdots n_p^2$.*
Une matrice A, triangulaire supérieure par blocs, est inversible si et seulement si ses blocs diagonaux sont inversibles. Son inverse est alors une matrice triangulaire supérieure par blocs.

[Ind] Utiliser des endomorphismes de K^n associés aux matrices considérées.

[Dem] Cet ensemble est non vide. La somme et la multiplication par un scalaire de matrices par blocs de même dimension sont des matrices par blocs. Pour la multiplication on utilise la proposition 6. Si v, u sont des endomorphismes associés à A, B avec les notations de la proposition : $v \circ u(F_k) \subset v(F_k) \subset F_k$ et le produit est bien triangulaire par blocs. Sa dimension est le cardinal d'une base. Pour chaque ligne de blocs il faut et il suffit de $n_i(n_1 + \cdots + n_p)$ matrices élémentaires. Une matrice triangulaire par blocs est inversible si et seulement si chaque bloc diagonal est inversible par la proposition 7. Si u est inversible on a alors $\forall k \quad : u(F_k) = F_k$ et donc $u^{-1}(F_k) = F_k$ et donc la matrice inverse est triangulaire par blocs de même dimension.

Proposition 32 *L'inverse d'une matrice A inversible, triangulaire supérieure par blocs, est une matrice triangulaire supérieure par blocs dont les éléments diagonaux sont, terme à terme, les inverses des blocs diagonaux de A.*

[Ind] Quel est le produit de deux matrices triangulaires supérieures par blocs (de même tailles) ?

[Dem] Le produit de deux matrices triangulaires supérieures par blocs de même tailles a sur la diagonale le produit des blocs diagonaux. Si on veut obtenir l'identité c'est à dire les blocs identités on a $A_{ii} \times A_{ii}^{-1} = I_{ii}$.

Exercice 32 Soit $T \in \mathcal{M}_n(K)$, une matrice inversible, triangulaire supérieure en blocs p, q:

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Déterminer T^{-1}.

[Ind] Quelle est la forme de T^{-1} ?

[Dem] Tout d'abord par le calcul du déterminant la matrice est inversible si et seulement si A, C le sont. Le produit $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' & AB' + BC' \\ 0 & CC' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ donne $AA' = I$, $AB' + BC' = 0$, $CC' = I$ d'où $A' = A^{-1}$, $C' = C^{-1}$, $B' = -A^{-1}BC^{-1}$.

2.3.2 Endomorphismes et matrices nilpotents

Proposition 33 *Soit E un Kev et $u \in \mathcal{L}(E)$. Notons, pour $k \in \mathbb{N}$, $N_k = \operatorname{Ker} u^k$ et $I_k = \operatorname{Im} u^k$. Les suites de s.e.v. (N_k) et (I_k) sont respectivement croissante et décroissante et s'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $N_{k_0} = N_{k_0+1}$ (resp. $I_{k_0} = I_{k_0+1}$), alors, pour tout entier k supérieur à k_0, on a $N_k = N_{k_0}$ (resp. $I_k = I_{k_0}$).*

[Ind] Pour montrer l'égalité de deux ensembles, on peut procéder par double inclusion.

[Dem] On a pour tout p : $\ker u^{p+1} \supset \ker u^p$ car si $u^p\left(x\right) = 0$ alors $u^{p+1}\left(x\right) = 0$. Ainsi $\left(\ker u^p\right)_p$ est une suite croissante de sev de E. De même on a $\operatorname{Im m} u^{p+1} \subset \operatorname{Im m} u^p$ car si $x = u^{p+1}\left(y\right)$ on a $x = u^p\left(u\left(y\right)\right)$. S'il existe s tel que $I_s = I_{s+1}$. alors la suite stationne car si $y \in I_{s+1}$ alors $y = u^{s+1}(x) = u(u^s(x)) = u(u^{s+1}(x')) = u^{s+2}(x')$ et donc $y \in I_{s+2}$ ceci prouve que $I_s = I_{s+1} = I_{s+2}$ et on recommence. De même pour les noyaux.

Remarque: Si E est de dimension finie, les deux suites (N_k) et (I_k) sont stationnaires et le théorème du rang assure que lorsque l'une des deux suites (N_k) ou (I_k) est stationnaire elles le sont toutes les deux à partir du même rang.

Exercice 33 Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. On pose, pour tout entier naturel p: $K_p = \operatorname{Ker} u^p$ et $I_p = \operatorname{Im} u^p$.
Montrer que les suites (K_p) et (I_p) sont stationnaires; de plus si s est le plus petit des entiers p tels que $I_p = I_{p+1}$ alors $K_s = K_{s+1}$ et si $s \geq r$: $K_{r-1} \neq K_r$. Montrer enfin que E est somme directe de K_s et I_s.

[Ind] Une suite d'entiers décroissante minorée est convergente donc stationnaire.

[Dem] Prenons les noyaux : on a $\ker u^p \subset \ker u^{p+1}$, la suite est donc croissante. La suite des dimensions $(dim\ \ker u^p)_p$ est une suite d'entiers croissante et majorée par la dimension de E, elle est donc convergente. Mais une suite d'entiers convergente est stationnaire. Il existe donc un plus petit entier s tel que $\ker u^s = \ker u^{s+1}$. De la même façon la suite des images est décroissante et donc la suite des dimensions décroisante, minorée par 0 et donc convergente et par suite stationnaire.
Si la suite des noyaux stationne en s alors la formule du rang $\dim E = \dim \ker u^s + \dim \operatorname{Im} u^s$ donne que les deux suites stionnes au même rang. Enfin $\ker u^s \cap \operatorname{Im} u^s = 0$ car si $u^s(x) = 0$ et $x = u^s(y)$ alors $u^{2s}(y) = 0 = u^s(y)$ d'où $x = 0$. Ainsi la somme est directe.

Définition 28 *Soit E un Kev et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est nilpotent s'il existe un entier naturel non nul m tel que $u^m = 0$. L'ordre de l'endomorphisme nilpotent est alors le plus petit entier naturel p tel que $u^p = 0$.*

Exercice 34 Soit $\Delta : K_n[X] \to K_n[X]$; $P \mapsto P(X+1) - P(X)$. Montrer que Δ est nilpotent.

[Ind] Suivre les degrés des polynômes images.

[Dem] On deg $\Delta(P) \leq$ deg $(P) - 1$ car les termes de plus haut degré s'annulent. Ainsi pour tout polynôme P de degré inférieur à n : deg $\Delta^{n+1}(P) = 0$ et par suite $Delta$ est nilpotent.

Théorème 14 *Soit E un Kev de dimension finie et u un endomorphisme de E nilpotent. Alors l'ordre de u est inférieur ou égal à* $\dim E$.

[Ind] Étudier la suite $(\dim I_k)$.

[Dem] Avec les notations de la proposition précédente, notons $n = \dim E$ et, pour $k \in \mathbb{N}$, $d_k = \dim I_k$. Montrons que $d_n = 0$.
L'endomorphisme u étant nilpotent, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $d_m = 0$. La suite (d_k) est donc décroissante et stationnaire à partir du rang m. Soit $p = \inf\{k \in \mathbb{N}$; $d_k = 0$. Si $u \neq 0$, $p \geq 1$ et donc $d_{p-1} > d_p = 0$, on en déduit que la suite $d_0 = n, d_1, \ldots, d_p$ est strictement décroissante, car l'égalité de deux termes consécutifs dans la suite (d_k) entraîne l'égalité de tous les termes suivants.
La suite d'entiers $d_0 = n, d_1, \ldots, d_{p-1}$ étant strictement décroissante, on en déduit que $\forall k \in [0, p] \quad d_k \leq n - k$ et donc que $d_p = 0 \leq n - p$.

Définition 29 *Soit $N \in \mathcal{M}_n(K)$. On dit que N est nilpotente s'il existe un entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^m = 0$. L'ordre de N est alors le plus petit entier naturel p tel que $N^p = 0$.*

Proposition 34 *Soit $N \in \mathcal{M}_n(K)$. Si N est nilpotente, $N^n = 0$.*

[Ind] Utiliser le théorème précédent.

[Dem] L'ordre de l'endomorphisme canoniquement associé à N qui est nilpotent est inférieur ou égal à $\dim E$ donc on aura au pire $N^n = 0$

Proposition 35 *Une matrice triangulaire supérieure est nilpotente si et seulement si ses éléments diagonaux sont nuls.*

[Ind] Calculer...

[Dem] Si la matrice est nilpotente alors ses puissances ont pour termes diagonaux les puissances des termes diagonaux qui doivent donc être nuls. Réciproquement si les termes diagonaux sont nuls avec les notations précèdentes : $u(E_k) \subset E_{k-1}$ et plus généralement $u^p(E_k \subset E_{k-p}$ ainsi u^n est nul et la matrice est nilpotente.

Exercice 35 Une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure) par blocs est nilpotente si et seulement si ses blocs diagonaux sont nilpotents.

[Ind] Adapter le raisonnement précèdent en faisant attention à ce qui marche encore si la matrice est diagonale par blocs.

[Dem] Dans le cas d'une matrice T triangulaire par blocs, nous retrouvons sur la diagonale de T^p les puissances $p^{\text{ème}}$ des blocs diagonaux. D'où le résultat.

Proposition 36 *Soit u un endomorphisme nilpotent d'ordre p . Alors $\mathrm{Id}_E - u$ est inversible et $(\mathrm{Id}_E - u)^{-1} = \mathrm{Id}_E + u + \cdots + u^p$.*

[Ind] Calculer la composée des endomorphismes proposés.

[Dem] Le plus simple est de vérifier on a: $(\mathrm{Id}_E + u + \cdots + u^p) \circ (\mathrm{Id}_E - u) = rmId - u + u - u^2 + u^2 + \cdots - u^{p-1} + u^{p-1} + u^p$ et comme $u^p = 0$ on a le résultat.

2.3.3 Transformations élémentaires

Matrices de permutation

Définition 30 *Soit $n \in N^*$ et $\sigma \in \mathcal{S}_n$ un élément du groupe des permutations de l'ensemble d'entiers $[1, n]$. On appelle matrice de permutation associée à σ, la matrice $M_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{i,j \in [1,n]}$.*

Proposition 37 *Soit E un Kev de dimension $n \geq 1$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. La matrice de l'endomorphisme u est une matrice de permutation associée à la permutation σ si et seulement si $\quad \forall i \in [1, n] \quad u(e_i) = e_{\sigma(i)}$.*

[Ind] Appliquer la définition de la matrice dans une base donnée d'un endomorphisme.

[Dem] Les colonnes sont les coordonnées des images de vecteur de base. $u(e_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \delta_{i,\sigma(j)} e_i = e_{\sigma(j)}$. Nous avons bien là l'équivalence.

Remarque: Une matrice de permutation est inversible.

Proposition 38 *L'application M qui, à une permutation σ appartenant $\mathcal{S}_n$, associe la matrice M_σ appartenant à $GL_n(K)$ est un morphisme de groupes injectif. Son image est appelée groupe des matrices de permutation de taille n.*

[Ind] Utiliser les endomorphismes associés.

[Dem] $(S_n, \circ)$ est bien un groupe et on a $M_{\sigma\circ\sigma'} = M_{\sigma \times M_{\sigma'}}$, ceci résulte de $\forall i \quad : v \circ u(e_i = v(e_{\sigma'(i)} = e_{\sigma(\sigma'(i))}$ en prenant les endomorphismes associés. Par transfert de structure on a l'ensemble des matrices de permutations muni du produit est un groupe. L'application $\sigma \longmapsto M_\sigma$ est injective car $M_{\sigma=Id}$ donne $\sigma = id$.

Proposition 39 (Effet d'un produit à gauche par une matrice de permutation) *Soient $A \in \mathcal{M}_{pq}(K)$ et $\sigma \in \mathcal{S}_p$. Notons $(L_1, \ldots, L_p)$ la famille des vecteurs lignes de A. La matrice $M_\sigma A$ est la matrice appartenant à $\mathcal{M}_{pq}(K)$ dont la famille des vecteurs lignes est $(L_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, L_{\sigma^{-1}(p)})$.*

[Ind] Calculer les lignes du produit $M_\sigma A$

[Dem] La matrice M_σ s'écrit $(\delta_{i,\sigma(j)})_{i,jin[1,n]}$. Soit $A = (a_{il})_{\substack{i\in[1,p]\\ l\in[1,q]}}$. Soit $i \in [1, p]$, la ligne i du produit$M_\sigma A$ est donc:

$$\begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \delta_{i,\sigma(k)} a_{k1} & \cdots & \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \delta_{i,\sigma(k)} a_{kp} \end{pmatrix}$$

elle est donc égale à

$$\begin{pmatrix} a_{\sigma^{-1}(i)1} & \cdots & a_{\sigma^{-1}(i)p} \end{pmatrix}$$

Ainsi, à la $i^{e\grave{e}me}$ place, on trouve la ligne $L_{\sigma^{-1}(i)}$.

Proposition 40 (Effet d'un produit à droite par une matrice de permutation) *Soient $A \in \mathcal{M}_{pq}(K)$ et $\tau \in \mathcal{S}_q$. Notons $(C_1, \dots, C_q)$ la famille des vecteurs colonnes de A. La matrice AM_τ est la matrice appartenant à $\mathcal{M}_{pq}(K)$ dont la famille des vecteurs colonnes est $(C_{\tau(1)}, \dots, C_{\tau(p)})$.*

[Ind] Les colonnes de A sont les lignes de ${}^tA$.

[Dem] ${}^t(AM_\tau) = M_{\tau^{-1}}{}^tA$. On applique alors la proposition précédente et on revient au produit de départ par transposition.

Exercice 36 Trouver les matrices carrées de taille n qui commutent avec toutes les matrices de permutations (de taille n).

[Ind] Ecrire le produit.

[Dem] Si nous prenons pour commencer la transpoqition τ_{12} la multiplication à droite échange c_2 et C_1, tandis que la multiplication à gauche échange L_2 et L_1. L'égalité du résultat donne pour tout indice i : $a_{i1} = a_{i2}$. En recommençant avec les autres transpositions on doit avoir tous les termes égaux soit la matrice αI qui commute bien avec toutes les permutations.

Matrices de transvection

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $(E_{pq})_{p,q} \in [1, n]$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(K)$:

$$E_{pq} = (\delta_{ip}\delta_{jq})_{i,j \in [1,n]}.$$

Définition 31 *On appelle matrice de transvection, une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telle qu'il existe $\lambda \in K$ et $i, j \in [1, n]$ $(i \neq j)$ tels que $A = I_n + \lambda.E_{ij}$, on la note alors $T_{ij}(\lambda)$..*

Proposition 41 (Effet d'un produit à gauche par une matrice de transvection) *Soient $A \in \mathcal{M}_{pq}(K)$ et $T_{ij}(\lambda)$ une matrice carrée $p \times p$ de transvection ($i, j \in [1, p]$, $i \neq j$ et $\lambda \in K$). Notons $(L_1, \dots, L_p)$ la famille des vecteurs lignes de A. La matrice $T_{ij}(\lambda)A$ est la matrice appartenant à $\mathcal{M}_{pq}(K)$ dont la famille des vecteurs lignes est $(L_1, \dots, L_{i-1}, L_i + \lambda L_j, L_{i+1}, \dots, L_p)$.*

[Ind] Calculer le produit $E_{ij}A$.

[Dem] $E_{ij}A$ est la matrice dont toutes les lignes sont nulles, sauf la $i^{eème}$ qui est égale à L_j. On termine aisément la démonstration.

Proposition 42 (Effet d'un produit à droite par une matrice de transvection) *Soient $A \in \mathcal{M}_{pq}(K)$ et $T_{ij}(\lambda)$ une matrice carrée $q \times q$ de transvection ($i, j \in [1, q]$, $i \neq j$ et $\lambda \in K$). Notons $(C_1, \dots, C_q)$ la famille des vecteurs colonnes de A. La matrice $AT_{ij}(\lambda)$ est la matrice appartenant à $\mathcal{M}_{pq}(K)$ dont la famille des vecteurs colonnes est $(C_1, \dots, C_{j-1}, C_j + \lambda C_i, C_{j+1}, \dots, C_q)$.*

[Ind] Calculer le produit AE_{ij}.

[Dem] AE_{ij} est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles, sauf la $j^{eème}$ qui est égale à C_i. On termine alors la démonstration.

Exercice 37 Soit E un K-ev de dimension finie $n > 0$, H un hyperplan de E et u un endomorphisme de E laissant invariant tout élément de H. Notons α le déterminant de u.
a) Montrer que si $\alpha \neq 1$, il existe une droite D supplémentaire de H et une seule, stable par u; u est alors l'affinité relative à l'hyperplan H, d'axe D et de rapport α.
b) Montrer, lorsque $\alpha = 1$, que pour toute forme linéaire f sur E dont le noyau est H, il existe un vecteur e et un seul de H tel que, pour tout vecteur x de E

$$u(x) = x + f(x)e$$

on dit alors que u est une transvection relative à l'hyperplan H.

[Ind] Se rappeler la définition d'un hyperplan.

[Dem]
Nous avons $H \subset \ker(u - id)$. $\ker(u - id) = E$ donne $u = id$ et $\alpha = 1$.
Ainsi si $\alpha \neq 1$ alors $H = \ker(u - id)$. Soit $e_1, \cdots, e_{n-1}$ une base de H que l'on complète par e_n en une base de E. La matrice de u dans cette base est de la forme : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$
où α est le déterminant de u (c'est le produit des termes diagonaux). En fait α est valeur propre simple et donc $\ker(u - \alpha id)$ n'est pas réduit à 0 et est en somme directe avec $\ker u - id$. Comme $E = \ker(u - id) \bigoplus \ker(u - \alpha id)$. La droite $\ker(u - \alpha id)$ convient.
Si on a deux vecteurs, définissant des droites stables par u en somme directe avec H disons e_n et e'_n on a $(1)u(e_n) = \alpha e_n$ et $u(e'_n) = \alpha e'_n$. Soit φ la forme linéaire définissant H. Puisque e_n, e'_n n'appartiennent pas à H on a $\varphi(e'_n) = \lambda\varphi(e_n)$ et donc $e'_n - e_n \in H$. On a $h = 0$ sinon $u(e'_n)$ aurait une composante sur H donc $e'_n = \lambda e_n$ et ces deux vecteurs engendrent la même droite.
Le cas $\alpha = 1$. Ou bien $u = id$ et il suffit de prendre $e = 0$. Si e existe comme $u = id$ forcément $e = 0$.
On suppose donc $\alpha = 1$ et $u \neq id$. Il existe une base dans laquelle la matrice est de la forme : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$. et $u - id$ à pour matrice : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a donc $\mathrm{Im}(u - id) \subset H$, plus précisément $\mathrm{Im}(u - id)$ est une droite de H. Ce qui équivalent à $(u - id)^2 = 0$.Ainsi $\forall x \in E$ on a $(u - id)(x) = f(x)e$ avec $e \in H$ et $H = \ker f$ (il suffit de prendre $x \in H$ pour voir que $f(x) = 0$). Pour toute forme linéaire définissant H la droite $\mathrm{Im}\, u - id$ est dans H il existe donc un unique e de H tel que pour tout x de E on a $u(x) - x = f(x)e$.

Matrices d'affinités

Définition 32 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in K$. On note $D_i(\lambda)$ la matrice* $\mathrm{Diag}(1, \ldots, 1, \lambda, 1, \ldots, 1)$ *avec λ est placé à la $i^{\text{ème}}$ place et on dit que $D_i(\lambda)$ est une matrice de l'affinité de base l'hyperplan $\mathcal{H}_i = [e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_n]$, de direction la droite $\mathcal{D}_i = [e_i]$ et de rapport λ.*

Proposition 43 (Effet d'un produit à gauche par une matrice d'affinité) *Soient A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{pq}(K)$ et $D_i(\lambda)$ une matrice carrée $p \times p$ d'affinité ($i \in [1, p]$ et $\lambda \in K$). Notons $(L_1, \ldots, L_p)$ la famille des vecteurs lignes de A. La matrice $D_i(\lambda)A$ est la matrice appartenant à $\mathcal{M}_{pq}(K)$ dont la famille des vecteurs lignes est $(L_1, \ldots, L_{i-1}, \lambda L_i, L_{i+1}, \ldots, L_p)$.*

[Ind] Calculer...

[Dem] Nous pouvons faire un clacul purement algèbrique. La matrice d'une affinité peut s'écrire : $I + (\lambda E_{ii}$ et la matrice $A = \sum_{kl} E_{kl}$le produit : $(I + (\lambda - 1)E_{ii}) \sum_{kl} a_{kl}E_{kl} = A + (\lambda - 1) \sum_{kl} E_{ii}E_{kl}$. Or on a vu que $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ d'où $(I + (\lambda - 1)E_{ii}) \sum_{kl} a_{kl}E_{kl} = A + (\lambda - 1) \sum_{kl} a_{kl}\delta_{ik}E_{il} = A + (\lambda - 1) + \sum_{l} a_{il}E_{il}$.
Or $\sum_{l} a_{il}E_{il}$ est la $i^{\text{ème}}$ ligne et donc le résultat du produit est $L_1, \cdots, L_{i-1}, L_i + (\lambda - 1)L_i, L_{i+1}, \cdots, L_n$.

Proposition 44 (Effet d'un produit à droite par une matrice d'affinité) *Soient A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{pq}(K)$ et $D_i(\lambda)$ une matrice carrée $q \times q$ d'affinité ($i \in [1, q]$ et $\lambda \in K$).*

Notons $(C_1, \dots, C_q)$ la famille des vecteurs colonnes de A. La matrice $AD_i(\lambda)$ est la matrice appartenant à $\mathcal{M}_{pq}(K)$ dont la famille des vecteurs colonnes est $(C_1, \dots, C_{i-1}, \lambda C_i, C_{i+1}, \dots, C_q)$.

[Ind] Calculer...

[Dem] Nous pouvons faire un clacul purement algèbrique. La matrice d'une affinité peut s'écrire : $I + (\lambda E_{ii}$ et la matrice $A = \sum_{kl} E_{kl}$le produit : $(\sum_{kl} a_{kl}E_{kl})(I + (\lambda-1)E_{ii}) = A + (\lambda-1)\sum_{kl} E_{kl}E_{ii}$. Or on a vu que $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ d'où $\sum_{kl} a_{kl}E_{kl}(I + (\lambda-1)E_{ii}) = A + (\lambda-1)\sum_{kl} a_{kl}\delta_{li}E_{ki} = A + (\lambda - 1) + \sum_k a_{ki}E_{ki}$. Or $\sum_k a_{ki}E_{ki}$ est la $i^{\text{ème}}$ colonne e t donc le résultat du produit est $C_1, \cdots, C_{i-1}, C_i + (\lambda-1)C_i, C_{i+1}, \cdots, C_n$.

Exercice 38 Trouver les matrices carrées de taille n qui commutent avec toutes les matrices d'affinités élémentaires (de taille n).

[Ind] Faire le produit des deux côtés.

[Dem] En multipliant la matrice à droite par $D_i(\lambda)$ et en égalant avec le produit à gauche pour $\lambda \neq 1$ on obtient $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$. La matrice doit donc être diagonale. Réciproquement les matrices diagonale commutent avec les affinités.

Opérations élémentaires

Les opérations élémentaires sur les LIGNES d'une matrice A:
a) permutation
b) ajout à une ligne d'une autre ligne multipliée par un scalaire
c) multiplication d'une ligne par un scalaire non nul
se traduisent, par le produit à GAUCHE de A par des matrices de transformations, respectivement:
a) une matrice de permutation
b) une matrice de transvection
c) une matrice d'affinité.Les opérations élémentaires sur les COLONNES se traduisent, quant à

elles, par le produit à DROITE de A par des matrices de transformations.

Une matrice de transformation agit donc sur les lignes ou les colonnes d'une matrice et pour connaître ou se rappeler son effet, il suffit de l'appliquer à l'identité. La matrice de transformation est donc l'effet qu'elle produit par multiplication à gauche sur les lignes de l'identité et par multiplication à droite sur les colonnes de l'identité.

Exercice 39 Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que les coefficients de A et A^{-1} sont positifs ou nuls si et seulement si les coefficients de A sont positifs et chaque ligne et chaque colonne de A contient un seul élément non nul.

[Ind] Étudier les égalités $AA^{-1} = I_n$ et $A^{-1}A = I_n$. Pour la réciproque, remarquer qu'alors A est le produit d'une matrice de permutation et d'une matrice diagonale.

[Dem] Supposons que pour $k \neq \ell$ on ait $a_{ik} \neq 0$ et $a_{i\ell} \neq 0$ alors en notant $A^{-1} = ((b_{ij}))$ on doit avoir pour tout j : $\sum_{m=1}^{n} a_{im}b_{mj} = 0$. On en déduirait que $b_{kj} = 0$ et $b_{\ell j} = 0$. Mais A^{-1} aurait deux lignes identiques et ne serait donc pas de rang n.
S'il n'y a qu'un élément non nul par ligne et par colonne à l'aide d'une permutation des colonnes on trouve une matrice diagonale. On peut écrire $A = P_\sigma D$ avec D diagonale (à éléments diagonaux non nuls, positifs). Mais alors $A^{-1} = D^{-1}P_{\sigma^{-1}}$ et de nouveau A^{-1} possède qu'un seul élément par ligne et par colonne non nuls et positif comme A.

Applications pratiques

Une suite d'opérations élémentaires effectuées sur les lignes d'une matrice, pour la transformer en une matrice diagonale, triangulaire supérieure ou tout autre forme désirable, peuvent donc s'effectuer en multipliant successivement à gauche cette matrice par des matrices de transformations.

- Calcul du rang

  Une matrice de transformation est inversible et donc ne modifie pas le rang d'un produit, la matrice obtenue possède le même rang que la matrice de départ, ce qui permet le calcul du rang de la matrice par manipulation de lignes et/ou de colonnes.

- Calcul du déterminant

  Seules les matrices d'affinités changent le déterminant d'un produit. Si on prend soin de conserver les rapports des affinités utilisées lors d'une transformation, on peut retrouver le déterminant de la matrice de départ, en divisant le déterminant de la matrice obtenue par le produit de tous les rapports utilisés.

- Calcul de l'inverse

  Nous savons que l'on peut transformer, par manipulation de lignes, une matrice carrée inversible A en l'identité, c'est la méthode de Gauss du pivot partiel. Il existe alors des matrices de transformations inversibles $T_1, T_2, \dots, T_N$ telles que $T_N \cdots T_2 T_1 A = I_n$. Le produit $T_N \cdots T_1$ est donc l'inverse de A, on peut le connaître car il est égal au résultat obtenu en appliquant ces mêmes transformations à l'identité.

  Il est clair que, pour appliquer cette méthode, il faut manipuler exclusivement les lignes (ou exclusivement les colonnes) de la matrice.

2.4 Travaux Dirigés

Exercice 40 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire de matrice dans la base canonique $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Montrer que $\ker f \oplus im f = \mathbb{R}^3$.Ecrire la matrice de f dans une base adaptée à cette décomposition.

[Dem] On détermine le noyau : $\left\{ \begin{array}{l} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{array} \right.$ La première équation est combinaison des deux autres. Le noyau est donc la droite ayant pour équation : $\left\{ \begin{array}{l} -x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{array} \right.$. On peut prendre pour base : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. L'image est engendrée par exemple par les deux dernières colonnes de la matrice soit $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Le noyau et l'image sont bien supplémentairs et dans cette base la matrice est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 41 On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que l'on a, pour tout n : $M^n = a_n M + b_n I$ et expliciter $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$.

[Dem] Pour $n=0$ il suffit de prendre $a_0=0$ et $b_0=1$, pour $n=1$ on prend $a_1=1$ et $b_1=0$. La propriété est donc vrai pour $n=0$ et 1. Si on la suppose vraie au rang n alors $M^{n+1}=a_nM^2+b_nM$ or $M^2=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}=M+2I$ d'où $M^{n+1}=(a_n+b_n)M+2a_n$. La propriété est donc vraie avec $a_{n+1}=a_n+b_n$ et $b_{n+1}=2a_n$. Les coefficients a_n vérifient la relation de récurrence $a_{n+1}=a_n+2a_{n-1}$. L'équation donnant les solutions géométriques est $r^2-r-2=0$ dont les solutions sont 2 et -1 et $a_n=\lambda(2)^n+\mu(-1)^n$ où λ,μ sont déterminées par les conditions initiales, ce qui donne $\lambda=\frac{1}{3}$ et $\mu=-\frac{1}{3}$. Ainsi $M^n=\left(\frac{2^n}{3}-\frac{(-1)^n}{3}\right)M+2\left(\frac{2^{n-1}}{3}-\frac{(-1)^{n-1}}{3}\right)I$ pour $n\geq 1$.

Exercice 42 E est un K-ev de dimension finie n et $u\in L(E)$ tel que $\operatorname{Ker}u=\operatorname{Im m}u$. Montrer que n est pair et qu'il existe une base de E où la matrice de u s'écrit en blocs: $\begin{pmatrix}0&I\\0&0\end{pmatrix}$.

[Dem] La formule du rang donne $\dim E=\dim\ker u+\dim\operatorname{Im m}u=2p$. Prenons une base du noyau $(e_1,e_2,\cdots,e_p)$ comme $\ker u=imu$ on peut relever ces vecteurs et donc trouver $e_{p+1},\cdots,e_n$ tel que $u(e_{p+i})=e_i$. Vérifions que cette famille (e_i) forme une base, il suffit de vérifier qu'elle est libre. $\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_pe_p+\lambda_{p+1}e_{p+1}+\cdots\lambda_ne_n=0$ donne en compasant par u : $\lambda_{p+1}e_1+\cdots+\lambda_ne_p=0$ soit $\lambda_{p+1}=\lambda_{p+2}=\cdots=\lambda_n=0$ puis en reportant on obtient $\lambda_1=\cdots=\lambda_p=0$. Dans cette base la matrice de u a bien la forme voulue.

Exercice 43 Calculer $\Delta_{2n}=\begin{vmatrix}a&\cdot 0\cdot&b\\\dot{0}&\ddots\cdot&\dot{0}\\\dot{b}&\cdot 0\cdot&\dot{a}\end{vmatrix}$. Puis $C_n=.\begin{vmatrix}\cos\theta&1&0\cdots&0\\1&2\cos\theta&\ddots&\dot{0}\\\dot{0}&\ddots&\ddots&1\\\dot{0}&\cdot 0&1&2\cos\theta\end{vmatrix}$

[Dem] En développant Δ_{2n} suivant la première ligne on obtient $\Delta_{2n}=a\begin{vmatrix}a&\cdot 0\cdot&\cdots&0\\\dot{0}&\ddots&b&\dot{0}\\b&&\ddots&\vdots\\0&\cdot 0\cdot&&\dot{a}\end{vmatrix}-b\begin{vmatrix}0&\cdot 0\cdot&\cdots&b\\a&\ddots&b&\dot{0}\\b&&a&\vdots\\0&\cdot 0\cdot&&0\end{vmatrix}=a^2\Delta_{2(n-1)}-b^2\Delta_{2(n-1)}$ on trouve donc $\Delta_{2n}=\left(a^2-b^2\right)^n$. Pour le second on développe par rapport à la dernière colonne pour trouver la relation $C_n=2\cos\theta C_{n-1}-C_{n-2}$ avec $C_1=\cos\theta$ et $C_2=\cos 2\theta$ et finalemant $C_n=\cos n\theta$.

Exercice 44 Inverse de $A=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\0&1&\cdots&n-1\\\vdots&\cdots&\cdots&\vdots\\0&\cdots&0&1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}C_0^0&\cdots&C_n^0\\0\cdot&\ddots&\vdots\\\dot{0}&\cdot 0&C_n^n\end{pmatrix}$, pour cette dernière introduire un endomorphisme associé.

[Dem] Pour le second on considère dans $\mathbb{R}_n[X]$ muni de sa base canonique l'endomorphisme ayant cette matrice ainsi $u\left(X^k\right)=C_k^0+C_k^1X+\cdots+C_k^kX^k=(X+1)^k$. L'endomorphisme est donc défini par $u(P)=P(X+1)$ et à pour inverse $u^{-1}(P)(X)=P(X-1)$. Ce qui permet d'écrire la matrice inverse dont une colonne générique est $\left((-1)^kC_k^0,(-1)^{k-1}C_k^1,\cdots,C_k^k\right)$.

Exercice 45 Soit $A=((a_{ij}))\in M_n(\mathbb{R})$ avec: $a_{ii}=2$, $a_{i,i+1}=1$, $a_{i,i-1}=3$ et $a_{ij}=0$ pour les autres $(|i-j|\geq 2)$. Calculer $detA$.

[Dem] En développant par rapport à la première colonne $\Delta_n=2\Delta_{n-1}-3\Delta_{n-2}$ pour $n\geq 3$ avec $\Delta_1=2$ et $\Delta_2=1$. Par compatibilité de la relation on pose $\Delta_0=1$. La résoltion de l'équation caractéristique donne $x_1=1+i\sqrt{2}$ et $x_2=1-i\sqrt{2}$ et $\Delta_n=\lambda_1x_1^n+\lambda_2x_2^n$. Les conditions initiales donnent $\lambda_1+\lambda_2=1$ et

$(\lambda_1+\lambda_2)+i\sqrt{2}\,(\lambda_1-\lambda_2)=2$ soit $\lambda_1=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{i\sqrt{2}}\right)=\frac{x_1}{2i\sqrt{2}}$ et $\lambda_2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{i\sqrt{2}}\right)=-\frac{x_2}{2i\sqrt{2}}$ et finalement $\Delta_n=\frac{1}{2i\sqrt{2}}\left(x_1^{n+1}-x_2^{n+1}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}im\left(1+i\sqrt{2}\right)^{n+1}$.

Exercice 46 Calculer le déterminant $D_n=\begin{vmatrix} & & \vdots \\ a+b & b\cdots & b \\ a & \ddots & \dot{b} \\ \vdots & & \\ a\cdots & a & a+b \end{vmatrix}$ d'ordre n.

[Dem] En faisant la transformation $l_i\to l_i-l_{i-1}$ et en développant par rapport à la dernière colonne on obtient $D_n=aD_{n-1}+b^n$ avec $D_1=a^2+ab+b^2$ et $D_2=a^3+a^2b+ab^2+b^3$. Soit $D_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a^kb^{n-k}$ et si $a\neq b$ $D_n=\dfrac{a^n-b^n}{a-b}$.

Exercice 47 Soit p dans $\mathbb{N}$. Quel est le rang de la matrice $M\in M_n(\mathbb{R})$:

$$M=\begin{pmatrix} p^2 & (p+1)^2 & \cdots & (p+n-1)^2 \\ (p+1)^2 & (p+2)^2 & \cdots & (p+n)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (p+n-1)^2 & (p+n)^2 & \cdots & (p+2n-2)^2 \end{pmatrix}$$

[Dem] Si $n=1$ alors $M=\left(p^2\right)$ et $rg\,(M)=1$ en supposant $p\neq 0$.
Si $n\geq 2$ alors $rg\,(M)=Rg\,(l_1,l_2-l_1,\cdots,l_n-l_{n-1})$
$=rg\begin{pmatrix} p^2 & (p+1)^2 & \cdots & (p+n-1)^2 \\ 2p+1 & 2p+3 & \cdots & 2p+2n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2p+2n-3 & 2p+2n-1 & \cdots & 2p+4n-5 \end{pmatrix}$. Ainsi si $n=2$ le déterminant de $M'=\begin{pmatrix} p^2 & (p+1)^2 \\ 2p+1 & 2p+3 \end{pmatrix}$ est $-2p^2-4p-1\neq 0$ et le rang est 2. Si $n\geq 3$ alors on remarque que $l_3-l_2=l_4-l_3=\cdots l_n-l_{n-1}=(2,2,\cdots,2)$ et $Rg\,(M)=Rg\begin{pmatrix} p^2 & (p+1)^2 & (p+n-1)^2 \\ 2p+1 & 2p+3 & 2p+2n-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=Rg\begin{pmatrix} p^2 & 2p+1 & 2p+3 \\ 2p+1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dont la matrice a -4 pour déterminant et donc le rang est 3.

Exercice 48 Résoudre, dans $\mathbb{C}$, le système. $\begin{cases} x+\alpha y+\alpha^2 z=0 \\ \bar{\alpha}x+y+\alpha z=0 \\ \bar{\alpha}^2x+\bar{\alpha}y+z=0 \end{cases}$

Pour quelles valeurs de m le système suivant n'est-il pas de Cramer ? Le résoudre dans ces cas particuliers. $\begin{cases} x+my+2mz=a \\ mx+y+mz=b \\ 2mx+2my+\ z=c \end{cases}$.

[Dem] Le système a pour déterminant $\left(1-|\alpha|^2\right)^2$ et s'il n'est pas nul, le système n'a que la solution triviale, si $|\alpha|=1$ le système est de rang 1.

Exercice 49 Résoudre le système:

$$\begin{cases} x_1+x_2=\alpha_1 \\ x_2+x_3=\alpha_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1}+x_n=\alpha_{n-1} \\ x_n+x_1=\alpha_n \end{cases}\quad \text{avec } (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$$

[Dem] Le déterminant est $A_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-1)^n$. Si n est impair le système est de cramer et $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \alpha_k = \left(1 + (-1)^{n-1}\right) x_1 = 2x_1$ et pour $i \geq 2$ on a $x_i = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=i}^{n} (-1)^{k-i} \alpha_k - \sum_{k=1}^{i-1} (-1)^{k-i} \alpha_k \right)$. Par contre si n est pair le carctéristique est $C_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \alpha_k$. Si $C_n \neq 0$ alors il n'y a pas de solution et si $C_n = 0$ alors l'ensemble des solutions est une droite affine et $x_p = \sum_{k=p}^{n-1} (-1)^{n-k} \alpha_k + (-1)^{n-p} x_n$ pour $1 \leq p \leq n-1$.

Exercice 50 Pour $A \in M_n(K)$, déterminer le rang de $\tilde{A}$, la transposée de la matrice des cofacteurs de A.

[Dem] Si $Rg\,(A) = n$ alors A est inversible et $A^{-1} = (\det A)^{-1} \tilde{A}$ donc $Rg\left(\tilde{A}\right) = n$. D'autre part $A\tilde{A} = \det A$ et si $Rg\,(A) \leq n-1$ on a $A\tilde{A} = 0$ ce qui donne $im\tilde{A} \subset \ker A$ en prenant les dimensions avec la formule du rang on obtient $Rg\tilde{A} + RgA \leq n$. Si $Rg\left(\tilde{A}\right) \geq 1$ l'un des cofacteurs est non nul et donc $RgA = n-1$ et par suite $Rg\tilde{A} \leq n - RgA$ ce qui donne $Rg\tilde{A} = 1$. Si $Rg\tilde{A} = 0$ alors $\tilde{A} = 0$ et tous les cofacteurs sont nuls et $RgA \leq n-2$. Résumons $\begin{cases} RgA = n \Longleftrightarrow Rg\tilde{A} = n \\ RgA = n-1 \Longleftrightarrow Rg\tilde{A} = 1 \\ 0 \leq RgA \leq n-2 \Longleftrightarrow Rg\tilde{A} = 0 \end{cases}$

Exercice 51 On se place dans $M_n(K)$
1) Soient A et B deux matrices carrées telles que, pour toute matrice carrée X, on ait $Tr(AX) = Tr(BX)$. Montrer que $A = B$.
2) Montrer qu'à toute forme linéaire f définie sur l'ensemble des matrices carrées, on peut associer une matrice F telle que, pour toute matrice carrée A, on ait: $f(A) = Tr(AF)$.
3) Soit f une forme linéaire définie sur l'ensemble des matrices carrées vérifiant pour toutes matrices $A, B : f(AB) = f(BA)$. Montrer qu'il existe un complexe α tel que $f = \alpha Tr$ (i.e. pour toute matrice $A : f(A) = \alpha Tr(A)$).

[Dem] Pour la première question on particularise X de la même façon que pour déterminer le centre de $M_n(K)$. Pour la seconde on considère l'application de $M_n(K)$ dans son dual $(M_n(K))^*$ qui à une matrice A associe la forme linéaire $X \longmapsto Tr\,(AX)$ cette application étant injective est bijective d'où l'existence de F. Pour la troisième d'aprs ce qui précède on a $f\,(AB) = Tr\,(ABF) = Tr\,(FAB)$ et $f\,(BA) = Tr\,(BAF) = Tr\,(AFB)$ ceci étant vrai pour toute matrice B on en déduit que pour toute matrice A on a $FA = FB$ et donc F est la matrice d'une homothétie, d'où le résultat.

Exercice 52 $E = M_n(\mathbb{R})$. A et B étant deux élments donnés de E, α un réel donné discuter et résoudre l'équation sur E: $\alpha X + (TrX)A = B$.

[Dem] Considèrons l'application h de $\mathcal{M}_n\,(\mathbb{R})$ telle que $h\,(X) = Tr\,(X)\,A$. En supposant $\alpha = 1$ on a ainsi à résoudre $f\,(X) = B$ avec $f = Id + h$. On a $h^2 = Tr\,(A)\,h$ et $(f - Id)^2 = Tr\,(A)\,(f - Id)$ soit $f^2 - (2 + Tr\,(A))\,f + (1 + Tr\,(A))\,Id = 0$. Si $Tr\,(A) \neq 1$ alors f est inversible d(inverse $f^{-1} = \frac{(2 + Tr\,(A))\,Id - f}{1 + Tr\,(A)}$ ou $f = Id - \frac{h}{1 + Tr\,(A)}$; L'équation $f\,(X) = B$ admet une unique solution $X = B - \frac{Tr\,(B)}{1 + Tr\,(A)} A$. Si $Tr\,(A) = -1$ alors $f^2 = f$ et f est un projecteur de noyau $\ker f = \{X; Tr\,(X)\,A = -X\} = \mathbb{R}A$ et $imf = \ker\,(f - Id) = \ker h = \ker Tr$. Ainsi si $Tr\,(B) \neq 0$ l'équation $f\,(X) = B$ n'a pas de solution, si $Tr\,(B) = 0$ alors $f\,(X) = B = f\,(B)$ a pour solution les matrices de la droite $\mathcal{D} = B + \ker f = B + \mathbb{R}A$.

Exercice 53 [Décomposition LU (voir Info)]

Soit A une matrice carrée d'ordre n, à coefficients réels. On suppose que les mineurs principaux Δ_k de A sont tous non nuls. ($\Delta_k = \det(A_k)$ où A_k est la matrice extraite de A formée des k premières lignes et des k premières colonnes de A). Montrer par récurrence qu'il existe un unique couple T_-, T_+ de matrices triangulaires inférieure et supérieure de diagonale formée de 1 telle que : $A = T_-\Delta T_+$ où $\Delta = diag\left(\Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \cdots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right)$. En déduire une application pour la résolution des systèmes de Cramer.

[Dem] Faisons une démonstration par récurrence sur n. Le résultat est vrai pour $n = 1$. Le supposant vrai pour les matrices de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ on a A_{n-1} qui s'écrit de façon unique $L_{n-1}U_{n-1}$ où L_{n-1} est triangulaire inférieure avec sur la diagonale $\left(\Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \cdots, \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}}\right)$ et U_{n-1} est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. On cherche L, U où écrites par blocs $L = \begin{pmatrix} T & 0 \\ \ell & b \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} T' & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec T triangulaire inférieure et T' triangulaire supérieure avec des 1 en diagonale, $\ell \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\})$ et $c \in \mathcal{M}_{n_{1,1}}(\mathbb{R})$.

Ainsi $LU = \begin{pmatrix} TT' & Tc \\ \ell T' & \ell c + b \end{pmatrix} = A = a_{ij}$ ce qui est équivalent à $\begin{cases} TT' = A_{n-1} \\ \ell T' = (a_{n,1}, \cdots, a_{n,n-1}) \\ Tc =^t (a_{1,n}, \cdots, a_{n-1,n}) \\ \ell c + b = a_{n,n} \end{cases}$. D'où l'existence et l'unicité de TT'', de plus T' est inversible car $\det(T') = 1$ et T est inversible car $\det(T) = \Delta_1 \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1} \cdots \dfrac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}} = \Delta_{n-1} \neq 0$. Le système précédent donne ℓ, c, b de façon unique. $\Delta_n = \det(A) = \det(L)\det(U) = 1\Delta_1 \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1} \cdots \dfrac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}} b = \Delta_{n-1}b$. D'où b et la fin de la démonstration. Pour les systèmes de Cramer on a $AX = b \Longleftrightarrow LUX = b \Longleftrightarrow \begin{cases} UX = Y \\ LY = b \end{cases}$ on est donc ramené à la résolution de deux systèmes triangulaires.

Exercice 54 Dans $M_n(K)$, démontrer qu'une matrice A commutant avec toutes les autres matrices X (i.e. $AX = XA$) est la matrice d'une homothétie.

[Ind] Faire le produit matriciel.

[Dem] Il suffit de particulariser X en prenant $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ on obtient $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $a_{j1} = 0$ si $j \neq 1$. Il suffit alors de faire descendre le 1 sur la diagonale pour obtenir que A est diagonale et enfin de faire parcourir le 1 sur la première ligne pour obtenir que A est la matrice d'une homothétie.

Exercice 55 Dans tout cet exercice, $M_n(K)$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n sur le corps K.

a) On désigne par E_{ij} la matrice dont tous les termes sont nuls sauf le terme intersection de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne qui est égal 1. Vérifier que $E_{jk}.E_{qr} = \delta_{kq}E_{jr}$ où $\delta_{kq} = 0$ si $k \neq r$ et $\delta_{qq} = 1$ si $k = q$.

b) Soit A une matrice de $M_n(K)$. Montrer que l'addition à un vecteur ligne de A d'un vecteur proportionnel à un autre vecteur ligne peut se faire en multipliant A à gauche par une matrice convenable.

Démontrer qu'on peut effectuer une opération analogue avec les vecteurs colonnes par une multiplication à droite.

c) On suppose que la premire ligne de A comporte au moins un élment non nul. Montrer qu'il existe des matrices P et Q, produits de matrices de la forme $I + \lambda E_{ij}$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in K$, telles que $P.A.Q$ soit de la forme:

$P.A.Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{B'} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = B$ (On pourra, dans un premier temps, transformer la matrice A en une matrice qui comporte un élément égal à 1 à l'intersection de la première ligne et de la première colonne)

d) On suppose que A est de rang $r > 0$. Montrer qu'il existe des matrices P et Q, produits de matrices de la forme $I + \lambda E_{ij}$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in K$ telles que:

$P.A.Q = B = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & \mathbf{0} & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & d & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & \mathbf{0} & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$ le terme d étant à la place d'indice r sur la diagonale et $d \neq 0$. Montrer en outre que si $r < n$, on peut choisir $d = 1$. (On pourra utiliser un raisonnement par récurrence)

e) En déduire que le groupe $S_n(K)$ des matrices carrées d'ordre n et de déterminant égal à 1 est engendré par les matrices $I + \lambda E_{ij}$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in K$. (Extrait de TPE)

[Ind] C'est du cours.

[Dem] C'est du cours et tout est dit dans l'énoncé.

Exercice 56 [Info]
la méthode du pivot

Calcul de A^{-1} si $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & -4 \\ 3 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

$1^{ère}$ méthode: En se plaçant dans $\mathbb{R}^3$ l'endomorphisme associé peut s'écrire $AX = X'$

$$\left\{\begin{array}{l} x - 3y + z = x' \\ 2x - 5y - 4z = y' \\ 3x - 4y + 3z = z' \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - 3y + z = x' \\ y - 6z = -2x' + y' \\ 5y = -3x' + z' \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \frac{1}{5}(-3x' + z') \\ z = \frac{1}{6}(y + 2x' - y') \\ x = x' + 3y - z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{30}(-31x' - 15y' + 17z') \\ y = \frac{1}{30}(-18x' + 6z') \\ z = \frac{1}{30}(7x' - 5y' + z') \end{array}\right.$$

Nous avons ainsi $A = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} -31 & -15 & 17 \\ -18 & 0 & 6 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

Autre méthode (du pivot). calcul de l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underbrace{\xrightarrow{C_2 \longleftrightarrow C_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \underbrace{\xrightarrow{C_3 \longleftrightarrow C_3 - 2C_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underbrace{\xrightarrow{C_1 \longleftrightarrow C_1 - C_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underbrace{\xrightarrow{C_3 \longleftrightarrow -C_3}}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\xrightarrow{C_1 \longleftrightarrow C_1 - 2C_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Effectuer les mêmes transformations à partir de la matrice identitée on trouve $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ qui n'est autre que A^{-1} .

Soit A une matrice inversible les trois opérations élmentaires permettent de transformer A en la matrice unitée.

1 changer des colonnes d'indices p et q

2 multiplication par $a \neq 0$ des élments de la $p^{ème}$ colonne

3 ajouter à la $q^{ème}$ colonne α fois la $p^{ème}$.

Il existe au moins un élément non nul dans la premire ligne.Une opération du type 1 le place dans la première colonne, une opération du type 2 le transforme en 1.En appliquant $(n-1)$ fois une opération du type 3 on peut transformer tous les autres éléments de la première ligne en 0.Ces opérations n'affectant pas le rang de la matrice trouvée on recommence. Les mêmes transformations transforment la matrice unitée en A^{-1} . Pour chaque Φ, opération élémentaire on a $\Phi(A)=A.\Phi(I)$, donc si $\xi(A)=I; A\xi(I)=I$

Résolution d'un système. $\left\{\begin{array}{r} x_2+2x_4=1 \\ 2x_1+5x_2+x_3-x_4=0 \\ 4x_1+2x_2+3x_3=2 \\ -x_1+4x_3+5x_4=-5 \end{array}\right.$ la matrice associée est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Multiplier par $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ par $E_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{2} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$E_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $E_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{2} & 1 \end{pmatrix}$ à gauche on trouve $A_3=E_3E_2E_1PA$ toutes ces matrices ont pour déterminant 1, le système est transformé de la façon suivante....

[Ind] Vérifier.

[Dem] La preuve est faîte dans l'énoncé.

Exercice 57 [Décomposition LU (voir Info)]
Soit A une matrice carrée d'ordre n, à coefficients réels. On suppose que les mineurs principaux Δ_k de A sont tous non nuls. ($\Delta_k=\det(A_k)$ où A_k est la matrice extraite de A formée des k premières lignes et des k premières colonnes de A). Montrer par récurrence qu'il existe un unique couple T_-, T_+ de matrices triangulaires inférieure et supérieure de diagonale formée de 1 telle que : $A=T_-\Delta T_+$ où $\Delta=diag\left(\Delta_1,\frac{\Delta_2}{\Delta_1},\cdots,\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right)$. En déduire une application pour la résolution des systèmes de Cramer.

[Dem] Faisons une démonstration par récurrence sur n. Le résultat est vrai pour $n=1$. Le supposant vrai pour les matrices de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ on a A_{n-1} qui s'écrit de façon unique $L_{n-1}U_{n-1}$ où L_{n-1} est triangulaire inférieure avec sur la diagonale $\left(\Delta_1,\frac{\Delta_2}{\Delta_1},\cdots,\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}}\right)$ et U_{n-1} est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. On cherche L,U où écrites par blocs $L=\begin{pmatrix} T & 0 \\ \ell & b \end{pmatrix}$, $U=\begin{pmatrix} T' & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec T triangulaire inférieure et T' triangulaire supérieure avec des 1 en diagonale, $\ell\in\mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$ et $c\in\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$.
Ainsi $LU=\begin{pmatrix} TT' & Tc \\ \ell T' & \ell c+b \end{pmatrix}=A=a_{ij}$ ce qui est équivalent à $\left\{\begin{array}{l} TT'=A_{n-1} \\ \ell T'=(a_{n,1},\cdots,a_{n,n-1}) \\ Tc={}^t(a_{1,n},\cdots,a_{n-1,n}) \\ \ell c+b=a_{n,n} \end{array}\right.$. D'où l'existence et l'unicité de TT', de plus T' est inversible car $\det(T')=1$ et T est inversible car $\det(T)=\Delta_1\dfrac{\Delta_2}{\Delta_1}\cdots\dfrac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}}=\Delta_{n-1}\neq 0$. Le système précédent donne ℓ,c,b de façon unique. $\Delta_n=\det(A)=\det(L)\det(U)=1\Delta_1\dfrac{\Delta_2}{\Delta_1}\cdots\dfrac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}}b=\Delta_{n-1}b$. D'où b et la fin de la démonstration. Pour les systèmes de Cramer on a $AX=b\Longleftrightarrow LUX=b\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{l} UX=Y \\ LY=b \end{array}\right.$ on est donc ramené à la résolution de deux systèmes triangulaires.