Chapitre 1

Espaces vectoriels

Dans tout ce qui suit, le corps K désigne un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Introduction

L'étude des équations et systèmes d'équations du premier degré était reléguée au début du $19^{\text{ème}}$ siècle dans l'enseignement élémentaire et négligée des mathématiciens. Mais une axiomatique convenable montra la puissance des notions nouvelles ainsi mises en évidence.Sous sa forme actuelle l'algèbre linéaire est une remarquable synthèse conduisant à un outil universel. La linéarisation est encore utilisée dans de nombreux domaines. Gauss, étudiant la représentation géométrique des nombres complexes est amené à définir l'addition des vecteurs. Grassmann, möbius et Hamilton pendant la première moitié du $19^{\text{ème}}$ siècle aboutissent à la définition d'un espace vectoriel de dimension quelconque. L'étude des systèmes linéaires dans ce nouveau cadre amène Frobenius à définir le rang, Kronecker et Weierstrass donnent une définition axiomatique du déterminant qui était déjà connu depuis le $18^{\text{ème}}$ siècle. Le calcul matriciel est élaboré par Cayley. Dès 1888, Peano donne une définition axiomatique des espaces vectoriels sur le corps des nombres réels ainsi que la définition des applications linéaires. C'est au début du $20^{\text{ème}}$ siècle que Toeplitz, élève de Hilbert donne la définition d'un espace vectoriel sur n'importe quel corps. A l'époque contemporaine H. Cartan a vu avec d'autres l'intérêt d'étendre ces définitions aux anneaux pour obtenir la notion de modules...L'algèbre non commutative dont l'exemple le plus simple est l'algèbre des matrices se développe parallèlement. Lie, Frobenius, Burnside, Shur, Cartan ont utilisé cette notion d'algèbre de 1896 à 1910 pour la représentation linéaire des groupes.

1.2 Structures

Définition 1 *On appelle groupe tout ensemble G muni d'une loi de composition interne, c'est à dire une application $G \times G \longmapsto G$ qui a tout couplet d'éléments (x, y) asocie l'élément noté $x * y$. Cette loi doit vérifier les propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned}
&\forall (x, y, z) \in G \times G \times G : (x * y) * z = x * (y * z) \\
&\exists 0 \in G :\ \forall x \in G : x * 0 = 0 * x = x \\
&\forall x \in G\ \exists x^{-1} \in G : x * x^{-1} = x^{-1} * x = 0
\end{aligned}$$

de plus ce groupe est commutatif s'il vérifie

$$\forall (x, y) \in G \times G : x * y = y * x$$

Définition 2 *On appelle sous groupe du groupe $(G, *)$ toute partie H de G telle que $(H, *)$ est un groupe.*

Proposition 1 *H est un sous groupe de G si et seulement si*

$$\begin{array}{l} H \textit{ est non vide} \\ \forall (x,y) \in H \times H \ : \ x * y^{-1} \in H \end{array}$$

[Ind] Dans le sens direct la stabilité de la loi donne le résultat
Pour la réciproque: vérifier les axiomes de définition.

[Dem] La partie directe est claire puisque $\forall y \in H \; y^{-1} \in H$ et le produit aussi
Pour la réciproque, comme H est non vide il existe au moins un élément x et $0 = x * x^{-1} \in H$ la loi étant associative dans G elle l'est dans H et enfin $\forall x \in H \; 0 * x^{-1} = x^{-1} \in H$ ce dernier résultat donne que $\forall (x,y)$ dans H on a bien $x * (y^{-1})^{-1} = x * y \in H$

1.3 Espaces vectoriels

Définition 3 *Soit E un ensemble, K un corps, $+$ une loi interne sur E et $\cdot$ une loi externe sur E à opérateurs dans K.*
$(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur K (noté en abrégé Kev) si et seulement si:

$$\begin{array}{l} (E,+) \textit{ est un groupe commutatif} \\ \forall \lambda \in K \quad \forall x, y \in E \quad \lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y \\ \forall \lambda, \mu \in K \quad \forall x \in E \quad (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x \\ \forall \lambda, \mu \in K \quad \forall x \in E \quad (\lambda \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x) \\ \forall x \in E \quad 1_K \cdot x = x \end{array}$$

Terminologie: Les éléments de E sont appelés vecteurs (du latin *vehere*, transporter), la notion d'espace vectoriel (composé de vecteurs) provient de l'étude des translations en géométrie: une translation qui transporte les points correspond à un vecteur.
Les éléments du corps K sont appelés scalaires (du latin *scala*, échelle): la multiplication des vecteurs par un même scalaire modifie l'échelle des transformations ponctuelles qui leur sont associées.

Remarque: Un espace vectoriel contient toujours au moins un élément: 0_E, élément neutre du groupe $(E, +)$.

Exemple 1 Le corps K lui-même, muni de son addition et de la loi externe correspondant à la multiplication, est un K-espace vectoriel.

Proposition 2 $\forall \lambda \in K \quad \forall x \in E \qquad \lambda \cdot x = 0_E \Longleftrightarrow \lambda = 0_K$ *ou* $x = 0_E$.

[Ind] Dans le sens direct: pour montrer que $x = 0_E$, il suffit de montrer que $1_K.x = 0$.
Pour la réciproque: pour montrer qu'un élément $y \in E$ est nul, il suffit de montrer que $y + y = y$.

[Dem] Soit $x \in E$ et $\lambda \in K$ tels que $\lambda.x = 0$. Si $\lambda \neq 0$, alors $\frac{1}{\lambda}(\lambda.x) = (\frac{\lambda}{\lambda}).x = x = 0_E$.
Soit $x \in E$, $0_K.x = (0_K + 0_K).x = 0_K.x + 0_K.x$ donc $0_k.x = 0_E$. Soit $\lambda \in K$, $\lambda.0_E = \lambda.(0_E + 0_E) = \lambda.0_E + \lambda.0_E$ d'où $\lambda.0_E = 0_E$.

Exercice 1 Montrer que pour tout scalaire λ et tout vecteur x: $(-\lambda).x = \lambda.(-x) = -\lambda.x$

[Ind] Se rapporter à la définition du symétrique d'un élément dans un groupe additif.

[Dem] Soit $\lambda \in K$ et $x \in E$. En appliquant les règles définissant un espace vectoriel, on vérifie que $\lambda.x + (-\lambda).x = \lambda.x + \lambda.(-x) = 0_E$.

Proposition 3 *Si A est un ensemble quelconque et si $(E, +, .)$ est un K-espace vectoriel, l'ensemble $\mathcal{F}(A, E)$ des applications de A dans E, muni des lois:*

- *addition : Pour tous éléments $f, g \in \mathcal{F}(A, E)$, l'application $f + g$ est définie pour tout $x \in A$ par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$*
- *multiplication par un scalaire : Pour tout $f \in \mathcal{F}(A, E)$ et pour tout $\lambda \in K$, l'application $\lambda.f$ est définie pour tout $x \in A$ par $(\lambda.f)(x) = \lambda.f(x)$.*

est un K-espace vectoriel.

[Ind] Appliquer la définition.

[Dem] Les propriétés des lois de E déterminent les résultats suivants:
$(\mathcal{F}(A, E), +)$ est un groupe commutatif, l'application nulle étant l'élément neutre du groupe.
Soient f, g des éléments de $\mathcal{F}(A, E)$ et λ, μ des scalaires.

$$\begin{aligned}
\forall x \in A \quad \lambda.(f+g)(x) &= \lambda.(f(x)+g(x)) = \\
&= \lambda.f(x) + \lambda.g(x) \\
&= (\lambda.f + \lambda.g)(x) \\
((\lambda+\mu).f)(x) = (\lambda+\mu).f(x) &= \lambda.f(x) + \mu.f(x) \\
&= (\lambda.f + \mu.f)(x) \\
((\lambda \times \mu).f)(x) &= (\lambda \times \mu).f(x) \\
&= \lambda.(\mu.f(x)) \\
&= \lambda.((\mu.f)(x)) \\
&= (\lambda.(\mu.f))(x) \\
(1_K.f)(x) &= 1_K.f(x) \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

On en déduit l'égalité entre applications suivantes : $\lambda.(f + g) = (\lambda.f + \lambda.g)$, $(\lambda + \mu).f = \lambda.f + \mu.f$, $(\lambda \times \mu).f = \lambda.(\mu.f)$ et $1_K.f = f$; ce qui implique que $\mathcal{F}(A, E)$ est un K-espace vectoriel.

Exemple 2 L'ensemble des suites d'éléments de K: $K^{\mathbb{N}} = \mathcal{F}(\mathbb{N}, K)$ est un K-espace vectoriel.

Proposition 4 *Soit I un ensemble fini et $(E_i)_{i\in I}$ une famille de K-espaces vectoriels. Muni des lois suivantes:*

- *Addition :* $\forall (x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} E_i \quad (x_i)_{i\in I} + (y_i)_{i\in I} = (x_i + y_i)_{i\in I}$
- *Multiplication par un scalaire:* $\forall \lambda \in K \quad \forall (x_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} E_i \quad \lambda.(x_i)_{i\in I} = (\lambda.x_i)_{i\in I}$

$\prod\limits_{i\in I} E_i$ *est un K-espace vectoriel.*

[Ind] Utiliser les propriétés des lois sur chaque espace E_i.

[Dem] $(\prod\limits_{i\in I} E_i, +)$ est une groupe commutatif d'élément neutre $(0_{E_i})_{i\in I}$ et on vérifie les propriétés des lois externes en appliquant les propriétés de celles définie sur chacun des espaces E_i

Exemple 3 Si E est un K-espace vectoriel, $K \times E$ est muni d'une structure naturelle de K-espace vectoriel.
Si E est un K-espace vectoriel et n un entier naturel non nul $E^n = E \times E \cdots \times E$ est muni d'une structure naturelle de K-espace vectoriel.

1.3.1 Sous-espaces vectoriels

Définition 4 *Soit E un K-espace vectoriel et $F \subset E$. F est un sous-espace vectoriel (s.e.v.) de E si F est stable pour les lois de E et si, muni de la restriction de ces lois, F est un K-espace vectoriel.*

Cette définition sert peu, on utilise en revanche la

Proposition 5 Caractérisation des s.e.v.

$$F \text{ est un s.e.v.} \iff \begin{cases} F \neq \emptyset \\ \forall \lambda \in K \quad \forall x, y \in F \quad \lambda x + y \in F. \end{cases}$$

[Ind] Pour la réciproque, il suffit de montrer que $(F,+)$ est un sous-groupe de $(E,+)$

[Dem] Un s.e.v. F de E est non vide car $(F,+)$ étant un groupe, il contient au moins un élément : son élément neutre et il est stable par addition et multiplication par un scalaire. Réciproquement, si $F \neq \emptyset$, soit $x \in F$, on a alors $(-1).x + x = 0 \in F$ donc, pour tout $\lambda \in K$ et tout $x \in F$, $\lambda.x + 0 = \lambda.x \in F$ ainsi F est stable pour la loi externe, d'autre part, pour tout x et y dans F, $(1).x + y = x + y \in F$ donc $(F,+)$ est un sous-groupe de E et puisque la restriction de la loi externe à F possède les propriétés requises, on en déduit que F est un s.e.v. de E.

Remarque: Un sous-espace vectoriel contient toujours 0_E.

Exemple 4 $\{0_E\}$, E sont des s.e.v. de E

Exemple 5 Si I est un ensemble quelconque, l'ensemble $K^{(I)}$ constitué des familles d'éléments de K dont tous les éléments, sauf un nombre fini d'entre eux, sont nuls est un sous-espace vectoriel de K^I. L'ensemble $K[X] = K^{(\mathbb{N})}$ des polynômes sur K est donc un espace vectoriel et l'ensemble $K_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n sur K en est un sous-espace vectoriel.

Exercice 2 Si I est un ensemble quelconque, montrer que $K^{(I)}$ est un K-espace vectoriel.

[Ind] Utiliser la caractérisation des sous-espaces vectoriels

[Dem] Caractérisons les éléments de $K^{(I)}$ parmi les éléments de K^I. Soit $x = (x_i)_{i \in I} \in K^I$ en utilisant l'ensemble $\mathcal{PF}(I)$ des parties finies de I:

$$x \in K^{(I)} \iff \exists J_x \in \mathcal{PF}(I) \quad \forall i \in I \setminus J_x \quad x_i = 0$$

La suite nulle appartient à $K^{(I)}$ qui est donc non vide. Soient $\lambda \in K$ et $x, y \in K^{(I)}$, pour tout $i \in I \setminus (J_x \cup J_y)$, $\lambda.x_i + y_i = 0$ donc $\lambda.x + y$ appartient à $K^{(I)}$. Ainsi $K^{(I)}$ est un sous-espace vectoriel de K^I.

Proposition 6 *Une intersection quelconque de s.e.v. est un s.e.v.*

[Ind] Appliquer la caractérisation des s.e.v.

[Dem] Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille non vide de s.e.v. et notons $F = \bigcap_{i \in I} F_i$. Pour tout $i \in I$, 0 appartient à F_i, donc $0 \in F$. Soient x et y appartenant à F et $\lambda \in K$, pour tout $i \in I$, $x, y \in F_i$ et puisque F_i est un s.e.v., $\lambda x + y \in F_i$, ainsi $\lambda x + y \in F$.

Définition 5 *Soit $A \subset E$. L'intersection de tous les s.e.v. de E contenant A est un s.e.v. noté $[A]$ ou $\mathrm{Vect}\, A$. Ce s.e.v. est le plus petit s.e.v. (au sens de l'inclusion) de E contenant A et est appelé s.e.v. engendré par A.*

Remarque: si F est un s.e.v. $F = [F]$.

Exercice 3 Parmi les parties suivantes de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, déterminer les s.e.v.:
a) l'ensemble des suites ne prenant qu'un nombre fini de valeurs.
b) l'ensemble des suites croissantes.
c) l'ensemble des suites monotones.
d) l'ensemble des suites (u_n) telles que $(|u_n|)$ converge.
e) l'ensemble des suites convergentes dans $\overline{\mathbb{R}}$.
f) l'ensemble des suites (u_n) telles que $(u_{n+1} - u_n)$ converge.
g) l'ensemble des suites négligeables devant la suite harmonique $(1/(n+1))$.
h) l'ensemble des suites (u_n) telles qu'à partir d'un certain rang $u_n < n!$
i) l'ensemble des suites périodiques.

[Ind] a) oui b) non c) non d) non e) non f) oui g) oui h) non i) oui

[Dem] Notons F l'ensemble étudié dans chaque question.
a) Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^N$, $u \in F \iff S_u = \{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ est fini. On constate alors que $0 \in F$, que, si λ est un réel et u et v appartiennent à F, l'ensemble $S_{\lambda.u+v}$ est fini de cardinal inférieur à la somme des cardinaux de S_u et de S_v.
b) (n) est une suite croissante, mais $-(n)$ est non croissante.
c) Les suites $(1, 0, 0, \cdots)$ et $(0, 0, 1, 1, \cdots)$ sont monotones, alors que leur somme $(1, 0, 1, 1 \cdots)$ ne l'est pas.
d) $((-1)^n)$ et $\left((-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\right)$ (où $\left[\frac{n}{2}\right]$ désigne la partie entière de $\frac{n}{2}$) sont des éléments de F alors que leur somme est une suite périodique de période 4: $(2, 0, 0, -2, \text{etc..})$ qui n'appartient pas à F.
e) $(n + (-1)^n)$ et $(-n)$ sont deux éléments de F et leur somme $(-1)^n$ n'est pas convergente.
f) F est non vide car il contient 0, si u et v sont deux éléments de F et λ est un réel, la suite $(\lambda.u + v)_{n+1} - (\lambda.u + v)_n = \lambda(u_{n+1} - u_n) + (v_{n+1} - v_n)$ est convergente donc $\lambda.u + v$ appartient à F.
g) On vérifie que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en caractérisant parmi les suites réelles celles qui appartiennent à F: $u \in F \iff \lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$.
h) La suite $(n! - 1)$ appartient à F, mais la suite $2.(n! - 1)$ n'y appartient pas.
i) F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ car F est non vide ($(0) \in F$), le produit par un scalaire non nul d'une suite périodique est une suite périodique de même période, la somme de deux suites périodiques est une suite périodique dont une période est le produit de deux périodes des deux suites.

Exercice 4 Parmi les parties suivantes de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, déterminer les s.e.v.:
a) l'ensemble des fonctions affines par morceaux.
b) l'ensemble des fonctions périodiques.
c) l'ensemble des fonctions discontinues en au moins un point.
d) l'ensemble des fonctions lipschitziennes.
e) l'ensemble des fonctions continues telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)|$ existe.

[Ind] a) oui b) non c) non d) oui e) oui

[Dem] Notons F l'ensemble étudié dans chaque question.
a) Une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ est affine par morceaux si et seulement si, pour tous réels a et b ($a < b$), il existe un entier naturel non nul n et une suite strictement croissante $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ tels que; pour tout $i \in [0, n-1]$, la restriction de f à chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ est affine.
On en déduit alors que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car, pour tous réels α et β, l'ensemble des fonctions affines sur l'intervalle $]\alpha, \beta[$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(]\alpha, \beta[, \mathbb{R})$. Le seul point délicat à vérifier se situe lorsqu'on étudie la somme de deux fonctions affines par morceaux, si f et g sont des fonctions affines par morceaux, si $a < b$ sont des réels et $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ et $a = b_0 < b_1 < \cdots < c_m = b$ des suites adaptées à f et à g, on ordonne alors du plus petit au plus grand l'ensemble $\{a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m\}$ en une suite $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_p = b$, et puisque chaque intervalle de la forme $]c_i, c_{i+1}[$ est inclus dans l'un des intervalles de la forme $[a_j, a_{j+1}[$ et $]b_k, b_{k+1}[$, la restriction à $]c_i, c_{i+1}[$ de $f + g$ est affine par morceaux.
b) La fonction $f : x \mapsto \cos x + \cos(\sqrt{2}x)$ n'est pas périodique, car $f(0) = f(T)$ entraîne $\cos T = \cos(\sqrt{2}T) = 1$ ce qui implique $T = 0$ car sinon, on en déduirait que $\sqrt{2}$ est rationnel (ce qui est faux).
c) La fonction nulle est continue donc n'appartient pas à F.

d) La fonction nulle est lipschitzienne de rapport 0 et si λ est un réel et f et g sont lipschitziennes de rapports respectifs k_1 et k_2, alors la fonction $\lambda f + g$ est lipschitzienne de rapport $|\lambda|\, k_1 + k_2$.
e) La principale difficulté est de démontrer que si f est continue et si $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)| = l$ existe, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe.
La propriété est vraie si $l = 0$. Supposons $l \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $a_\varepsilon \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \geq a_\varepsilon$ entraîne $l - \varepsilon \leq |f(x)| \leq l + \varepsilon$. En particulier, en prenant $\varepsilon = \frac{|l|}{2}$, on en déduit que l'image par f de l'intervalle $[a_\varepsilon, +\infty[$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ (car f est continue) qui ne contient pas O, ainsi f garde un signe constant sur l'intervalle $[a_\varepsilon, +\infty[$ d'où le résultat.
On vérifie alors facilement que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 5 Montrer que l'ensemble des suites complexes (u_n), vérifiant $(\sqrt[n]{|u_n|})$ est une suite bornée, est un sous espace vectoriel de l'ensemble des suites complexes.

[Ind] Pour montrer que l'ensemble est stable pour l'addition, montrer que si a et b sont des réels positifs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt[n]{a^n + b^n} \leq a + b$.

[Dem] Notons S cet ensemble; il est non vide car la suite nulle lui appartient et il est stable par multiplication par un scalaire. Soient u et v des éléments de S, il existe deux réels positifs M et N tels que, pour tout entier n, $|u_n| \leq M^n$ et $|v_n| \leq N^n$. Ainsi, pour tout entier n, $|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq M^n + N^n$, en appliquant la formule du binôme pour $n \geq 1$, on a $(M+N)^n = M^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} M^{n-k} N^k + N^n \geq M^n + N^n$ et donc, $|u_n + v_n| \leq (M+N)^n$, on en déduit que S est stable par addition.

Exercice 6 F et G étant des s.e.v., à quelle condition $F \cup G$ est-il un s.e.v?

[Ind] Il faut que F et G soient emboîtés. Pour le montrer, travailler par dichotomie (principe du tiers exclus): supposer que F n'est pas inclus dans G et montrer qu'alors G est inclus dans F.

[Dem] Soient F et G des sous-espaces vectoriels et supposons que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel. Si F n'est pas inclus dans G, il existe un élément x appartenant à F et n'étant pas dans G. Le sous-espace vectoriel $F \cup G$ étant stable par addition, pour tout élément y de G, la somme $x + y$ appartient à $F \cup G$, ainsi $x + y$ appartient à F ou à G, s'il appartient à G, $x = (x + y) - y$ est un élément de G ce qui est exclus, ainsi, $x + y$ est un élément de F et $y = (x + y) - x$ appartient à F, G est donc inclus dans F.

Exercice 7 F, G et H étant des s.e.v. de l'e.v. E, démontrer que si $F \subset G \cup H$ alors $F \subset G$ ou $F \subset H$.

[Ind] Supposer que F n'est pas inclus dans G et montrer qu'alors F est inclus dans H.

[Dem] Supposons que F n'est pas inclus dans G, il existe donc un élément x de F qui n'est pas dans G et donc appartient à H. Soit $y \in F$, montrons que y appartient à H. Si $y \notin H$, alors y appartient à G et $x + y$ appartient à G ou à H. Si $x + y$ est un élément de G alors $x = (x + y) - y \in G$ ce qui est faux, si $x + y \in H$, alors $y = (x + y) - y \in H$ ce qui est contradictoire avec l'hypothèse, ainsi y appartient à H et donc F est inclus dans H.

1.3.2 Combinaisons linéaires

Définition 6 *Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille finie de vecteurs de E. On dit que $x \in E$ est combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{i\in I}$ s'il existe une famille de scalaires $(\lambda_j)_{j\in I}$ telle que*

$$x = \sum_{j\in I} \lambda_j x_j.$$

Proposition 7 *Soit $A \subset E$. $[A]$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de A.*

[Ind] Noter A' l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de A et montrer que A' est un s.e.v. contenant A, montrer ensuite qu'il est inclus dans tout s.e.v. possédant cette dernière propriété.

[Dem] L'ensemble A' des combinaisons linéaires des éléments de A est non vide car en prenant la famille vide $\sum_{i\in\emptyset} x_i = 0$. Il est stable par l'addition et par la multiplication par les scalaires, A' est donc un s.e.v. de E contenant A. Soit F un s.e.v. de E contenant A, toute combinaison linéaire d'éléments de A est un élément de F et donc $A' \subset F$. A' est donc le plus petit s.e.v de E contenant A.

Exercice 8 Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$. Trouver α et β tels que $(\alpha, \beta, 2, 3)$ appartienne au s.e.v. engendré par $(1, 2, 1, 1)$ et $(1, 3, 0, 1)$.

[Ind] Trouver α et β pour que l'équation $(\alpha, \beta, 2, 3) = \lambda(1, 2, 1, 1) + \mu(1, 3, 0, 1)$ soit vérifiée.

[Dem] Résolvons l'équation $(\alpha, \beta, 2, 3) = \lambda(1, 2, 1, 1) + \mu(1, 3, 0, 1)$, on a $\alpha = \lambda + \mu$, $\beta = 2\lambda + 3\mu$, $2 = \lambda$ et $3 = \lambda + 2\mu$, les deux dernières équations donnent $\lambda = 2$ et $\mu = 1$ et donc les deux conditions $\alpha = 3$ et $\beta = 7$ sont celles cherchées.

Exercice 9 La fonction exponentielle est-elle combinaison linéaire des fonctions puissances entières?

[Ind] Comparer les fonctions dérivées

[Dem] Une combinaison linéaire f des fonctions puissances entières est une fonction polynomiale. Il existe donc un entier n tel que la fonction dérivée d'ordre n de f est nulle ce qui n'est pas le cas pour la fonction exponentielle.

1.3.3 Sommes de s.e.v.

Définition 7 *Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille finie de s.e.v., la somme des s.e.v. F_i est le s.e.v. engendré par $\bigcup_{i\in I} F_i$ et noté $\sum_{i\in I} F_i$.*

Proposition 8 *Soient $F_1, \dots, F_p$ des s.e.v.,*

$$F_1 + \cdots + F_p = \{x_1 + \cdots + x_p \mid x_1 \in F_1, \dots, x_p \in F_p\}$$

[Ind] Traduire la propriété en terme de combinaisons linéaires.

[Dem] L'ensemble $\{\sum_{i\in I} x_i \mid \forall i \in I \quad x_i \in F_i, \}$ est inclus dans l'ensemble $[\cup_{i\in I} F_i]$. Réciproquement, puisque les s.e.v. sont stables par addition et multiplication par les scalaires, toute combinaison linéaire d'éléments de $\cup_{i\in I} F_i$ s'écrit sous la forme précédente.

Exercice 10 Soient F et G des s.e.v. de l'e.v. E. Montrer que $F + F = F$ et que $F + G = F \iff G \subset F$.

[Ind] Expliciter les éléments d'une somme de sous-espaces vectoriels.

[Dem] Un sous-espace vectoriel F étant stable par addition, on a $F + F \subset F$, d'autre part, O appartient à F, $F = \{x + 0 \mid x \in F\} \subset F + F$.
Si G est un sous-espace vectoriel inclus dans F, on a $F \subset F + G \subset F + F \subset F$ et donc $F + G = F$. Réciproquement, si $F + G = F$ alors, $G \subset F + G \subset F$.

Exercice 11 Soient F, G et H des s.e.v. de l'e.v. E; comparer:
a) $F + (G \cap H)$ et $(F + G) \cap (F + H)$
b) $F \cap (G + H)$ et $(F \cap G) + (F \cap H)$.
Démontrer que $F \cap (G + (F \cap H)) = (F \cap G) + (F \cap H)$.

[Ind] a) Le premier est inclus dans le second.
b) Le second est inclus dans le premier.
Pour montrer l'égalité, travailler par double inclusion.

[Dem] a) Si x est un élément de $F+(G\cap H)$, il existe $y\in F$ et $z\in G\cap H$ tels que $x=y+z$ et donc x appartient à la fois à $F+G$ et à $F+H$ et donc à leur intersection.
b) Si x est un élément de $(F\cap G)+(F\cap H)$, il existe $y\in F\cap G$ et $z\in F\cap H$ tels que $x=y+z$ ainsi, x appartient à F et à $G+H$.
En utilisant la réponse à la deuxième question, on a $(F\cap G)+(F\cap H)=(F\cap G)+(F\cap(F\cap H))\subset F\cap(G+(F\cap H))$. Si x est un élément de $F\cap(G+(F\cap H))$, x appartient à F et il existe y dans G et z dans $F\cap H$ tels que $x=y+z$, mais alors $y=x-z$ appartient à F donc à $F\cap G$ et donc x appartient à $(F\cap G)+(F\cap H)$.

Exercice 12 Soient F, G et H des s.e.v. de l'e.v. E tels que $F+G=F+H$ et $F\cap G=F\cap H$; a-t-on $G=H$?

[Ind] Non, trouver un exemple.

[Dem] Prenons $E=\mathbb{R}^2$ et F, G et H les sous-espaces vectoriels engendrés respectivement par $(1,0)$, $(0,1)$ et $(1,1)$, on a $F+G=E=F+H$, $F\cap G=\{0\}=F\cap H$ et $G\neq H$.

1.3.4 Sommes directes

Définition 8 *On dit que la somme de la famille $(F_i)_{i\in I}$ est directe si et seulement si pour toute famille $(x_j)_{j\in I}$ d'éléments de E vérifiant $\forall j\in I\quad x_j\in F_j$, on a*

$$\sum_{j\in J}x_j=0\implies\forall j\in I\quad x_j=0$$

Notation: $\bigoplus_{i\in I}F_i$ désigne la somme et représente la propriété.

Terminologie: Lorsqu'un nombre fini de sous-espaces sont en somme directe, leur somme est en bijection avec le produit direct (ou encore produit cartésien) de ces sous-espaces. Une démonstration possible de ce fait est donné par la proposition suivante.

Proposition 9 *Soient $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ deux familles d'éléments de $(F_i)_{i\in I}$. Si $\bigoplus_{i\in I}F_i$ alors:*

$$\sum_{i\in I}x_i=\sum_{i\in I}y_i\implies\forall i\in I\quad x_i=y_i.$$

et réciproquement.

[Ind] Se ramener à la définition

[Dem] $\sum_{i\in I}x_i=\sum_{i\in I}y_i$ est équivalent à $\sum_{i\in I}x_i-y_i=0$ ou, pour tout $i\in I$ on a $x_i=y_i$.

Proposition 10 *Soient F_1, F_2, ..., F_p des s.e.v. de E.*

$$F_1\oplus F_2\iff F_1\cap F_2=\{0\}$$
$$F_1\oplus F_2\oplus F_3\iff F_1\cap F_2=\{0\}\ \textit{et}\ (F_1+F_2)\cap F_3=\{0\}$$
$$F_1\oplus\cdots\oplus F_p\iff F_1\cap F_2=\{0\}\ \textit{et}\ \forall i\in[3,p]\ (F_1+\cdots F_{i-1})\cap F_i=\{0\}.$$

[Ind] Pour deux s.e.v.: se demander comment obtenir les conclusions désirées.
Raisonner par récurrence dans le cas général (plus de deux s.e.v.) en remarquant que $F_1\oplus\cdots\oplus F_p$ équivaut à $F_1\oplus\cdots\oplus F_{p-1}$ et $(F_1+\cdots+F_{p-1})\oplus F_p$.

[Dem] Supposons $F_1\oplus F_2$, si $x\in F_1\cap F_2$ alors $-x\in F_2$ et $x+(-x)=0$ donc $x=0$. Réciproquement, si $F_1\cap F_2=\{0\}$, soient $x\in F_1$ et $y\in F_2$, l'égalité $x+y=0$ entraîne $x=-y$, on en déduit que $x\in F_1\cap F_2$ et donc que $x=y=0$.

Supposons alors la propriété vraie pour $p-1$ ($p \geq 3$) sous-espaces vectoriels. Soient $F_1, \ldots, F_p$ sous-espaces vectoriels, si $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ alors, en notant G la somme $F_1 + \cdots + F_{p-1}$, on a $G = F_1 \oplus \cdots \oplus F_{p-1}$ et $G \oplus F_p$. On en déduit alors l'implication cherchée.
Réciproquement, si $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ et $\forall i \in [3,p]$ $(F_1 + \cdots F_{i-1}) \cap F_i = \{0\}$, alors, en appliquant l'hypothèse de récurrence, on en déduit que $F_1 \oplus \cdots \oplus F_{p-1}$ et que $(F_1 + \cdots + F_{p-1}) \oplus F_p$, ce qui entraîne $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ en appliquant la définition des sommes directes.

Définition 9 *Deux s.e.v. F et G de E sont dits supplémentaires si et seulement si $F \oplus G = E$.*

Terminologie: Méfiez-vous des termes supplémentaire et complémentaire. Ils ne correspondent qu'imparfaitement aux définitions de la langue naturelle : ce qui s'ajoute à quelque chose pour le compléter, car le verbe ajouter est ambigu dans le langage mathématique. Si on entend par cela additionner pour compléter, alors effectivement un supplémentaire d'un sous-espace est quelque chose qui s'ajoute à celui-ci pour le compléter. Mais si on conçoit ajouter comme mettre en plus par juxtaposition comme on le comprend pour des angles complémentaires ou supplémentaires ou simplement pour des parties complémentaires d'un ensemble, on commet une grave erreur en l'appliquant à cette notion de sous-espace supplémentaire: un sous-espace vectoriel possède, en général, une infinité de sous-espaces vectoriels supplémentaires alors que son complémentaire (le sous-ensemble des éléments de E qui ne lui appartiennent pas) n'est pas un sous-espace vectoriel: il ne contient pas 0 et n'est pas stable par addition.

Proposition 11 *Si $A \in K[X]$ et $d^\circ A = n > 0$, $K[X] = A.K[X] \oplus K_{n-1}[X]$.*

[Ind] Utiliser la division euclidienne.

[Dem] Pour tout polynôme $B \in K[X]$, il existe un unique polynôme Q et un unique polynôme R de degré strictement inférieur à celui de A tel que $B = QA + R$. L'existence de ces polynômes indique que $K[X] = A.K[X] + K_{n-1}[X]$ et l'unicité implique que $A.K[X] \oplus K_{n-1}[X]$.

Exercice 13 Montrer que les sous ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$:
$F = \{(x,y,z) \mid \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ ,\ x = \lambda + \mu, y = \mu, z = -3\lambda + 5\mu\}$
$G = \{(x,y,z) \mid x + y + z = 0\ ,\ x - z = 0\}$

[Ind] Les sous-espaces vectoriels F et G sont engendrés respectivement par $\{(1,0,-3),(1,1,5)\}$ et $\{(1,-2,1)\}$. Montrer alors que $F + G = \mathbb{R}^3$.

[Dem] Soit $X = (x,y,z)$ appartenant à F et à G, il existe donc des réels λ et μ tels que $x = \lambda + \mu$, $y = \mu$ et $z = -3\lambda + 5\mu$ et on a $x + y + z = -2\lambda + 7\mu = 0$ et $x - z = 4\lambda - 5\mu = 0$, on en déduit, en résolvant ce système d'équations dont les inconnues sont λ et μ que $\lambda = \mu = 0$.
Soit $X = (x,y,z)$ un élément de $\mathbb{R}^3$. On cherche trois réels λ, μ et ν tels que $X = (\lambda + \mu + \nu, \mu - 2\nu, -3\lambda + 5\mu + \nu)$, en résolvant le système de trois équations qui en résulte, on trouve $\lambda = 5/18(x+y+z)$, $\mu = 2/9(x+y+z)$ et $\nu = x/9 - 7y/18 + z/9$ ainsi X est la somme de $\lambda(1,0,-3) + \mu(1,1,5)$ et $\nu(1,-2,1)$ qui appartiennent à F et G respectivement, on en déduit que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Exercice 14 Démontrer que l'ensemble des fonctions paires et celui des fonctions impaires sont des s.e.v. supplémentaires de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

[Ind] Travailler par analyse-synthèse

[Dem] On vérifie sans peine qu'une fonction paire et impaire est nulle, ainsi l'ensemble des fonctions paires $\mathcal{P}$ et celui des fonctions impaires $\mathcal{I}$ sont en somme directe. Soit f un élément de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Posons, pour tout réel x, $f_p(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ et $f_i(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$. La fonctions f_p est paire tandis que f_i est impaire, d'autre part on a $f = f_p + f_i$, ainsi $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathcal{P} + \mathcal{I}$.

Exercice 15 Démontrer que $K[X] = K[X^2] \oplus (XK[X^2])$.

[Ind] Comment s'écrit un polynôme pair, un polynôme impair ?

[Dem] Un polynôme s'écrit de façon unique comme la somme d'un polynôme pair et d'un polynôme impair. Il suffit alors de vérifier que $K[X^2]$ est le s.e.v. des polynômes pairs tandis que $XK[X^2]$ est celui des polynômes impairs.

Exercice 16 Soit $E = \mathrm{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, F le sous ensemble de E des fonctions constantes et G l'ensemble des fonctions f de E vérifiant $\displaystyle\int_0^1 f = 0$. Montrer que $F \oplus G = E$.

[Ind] Travailler par analyse-synthèse.

[Dem] Seule la fonction nulle appartient à $F \cap G$. Si e est un élément de E, posons, pour tout réel x de $[0,1]$, $f(x) = \displaystyle\int_0^1 e$ et $g(x) = e(x) - \displaystyle\int_0^1 e$; on a bien $f \in F$, $g \in G$ et $e = f + g$, ainsi $E = F + G$.

Exercice 17 Soient $E = \mathbb{C}[X]$, $F = \{P \in E \mid P(0) = 0\}$ et $G = \{P \in E \mid P'(0) = 0\}$.
a) Montrer que F et G sont des s.e.v. et trouver $F + G$.
b) Trouver des supplémentaires dans E de F, G et $F \cap G$.

[Ind] Chercher la forme des polynômes appartenant respectivement à F et G.

[Dem] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, il existe un entier n et une suite $(a_k)_{k\in[0,n]}$ de complexes tels que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.
Le polynôme P appartient à F si et seulement si $a_0 = 0$ et il appartient à G si et seulement si $a_1 = 0$.
a) On vérifie en appliquant la caractérisation des sous-espaces vectoriels que F et G sont bien des sous-espaces vectoriels. Si P est un polynôme qui s'écrit $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors $Q = a_0$ appartient à G, $R = P - Q$ appartient à F et $P = Q + R$ ainsi $E = F + G$.
b) Un supplémentaire de F est $\mathbb{C}_0[X]$, un supplémentaire de G est $\mathbb{R}.X$. Les éléments de $F \cap G$ sont les polynômes de valuation supérieure ou égale à 2, ainsi un supplémentaire de $F \cap G$ est $C_1[X]$.
Exercice complémentaire: chercher la forme générale des supplémentaires de F, G et $F \cap G$.

1.3.5 Bases

Définition 10 *Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de E est dite génératrice si l'espace engendré par cette famille est E.*

Définition 11 *Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille finie de E. On dit que la famille est libre si pour toute famille $(\lambda_j)_{j\in I}$ de scalaires:*

$$\sum_{j\in I} \lambda_j x_j = 0 \implies \forall j \in J \ \lambda_j = 0.$$

On dit que la famille est liée si elle n'est pas libre On dit qu'une partie L de E est libre (resp liée) si la famille des éléments de L indexée par L est libre (resp liée) . Si la famille est infinie on dit qu'elle est libre si et seulement si toute sous famille finie est libre

Terminologie: On dit qu'une famille est libre lorsqu'il n'existe pas de relations entre les vecteurs de cette famille qui puissent s'écrire en termes de combinaisons linéaires (autre que celle où tous les scalaires sont nuls. En ce sens, cette famille est libre de relations linéaires significatives entre ses vecteurs.

Remarque: Une partie qui contient le vecteur 0 est liée. Soit $x \in E$. $\{x\}$ est libre si et seulement si $x \neq 0$.

Proposition 12 *Toute sous famille d'une famille libre est libre.*

[Ind] Une combinaison linéaire des éléments d'une sous-famille s'étend naturellement en une combinaison linéaire de la famille toute entière.

[Dem] Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille libre et $J \subset I$. Si K est une partie finie de J, elle est aussi une partie finie de I donc, pour toute famille $(\lambda_k)_{k\in K}$ de scalaires, $\sum_{k\in K} \lambda_k x_k = 0$ entraîne pour tout $k \in K$, $\lambda_k = 0$.

Proposition 13 *Une partie est liée si et seulement si l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.*

[Ind] La négation de “ La partie L est libre ” est : il existe des éléments $x_1, \dots, x_n$ de L et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$.

[Dem] Soit L une partie de E. Si L est liée, il existe des éléments $x_1, \dots, x_n$ de L et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$. Soit $k \in [1, n]$ tel que $\lambda_k \neq 0$, on a $x_k = -\sum_{i\in[1,n]\setminus\{k\}} \frac{\lambda_i}{\lambda_k} x_i$ donc x_k est combinaison linéaire des vecteurs de $L \setminus \{x_k\}$.
Réciproquement, s'il existe $y \in L$ et $x_1, \dots, x_n \in L \setminus \{y\}$ tels que y soit combinaison linéaire de $\{x_1, \dots, x_n\}$, on peut trouver des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, mais alors $1.y - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$ et puisque $1 \neq 0$, on en déduit que $\{y, x_1, \dots, x_n\}$ est liée et donc que L est liée.

Proposition 14 *Soit L une partie libre et $x \in E - L$.*

$$L \cup \{x\} \text{ est liée} \iff x \in [L].$$

[Ind] Montrer le sens direct en étudiant une combinaison linéaire des éléments de $L \cup \{x\}$. Pour la réciproque: appliquer la proposition précédente

[Dem] Supposons que L soit une partie libre.
Si $L \cup \{x\}$ est liée, alors il existe des scalaires $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls et des éléments distincts $x_1, \dots, x_n$ de L tels que $\lambda x + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$. On a nécessairement $\lambda \neq 0$ car $\lambda = 0$ entraîne que L est liée et donc $x = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i \in [L]$.
Réciproquement, si $x \in [L]$, alors x est une combinaison linéaire des autres éléments de $L \cup \{x\}$ donc cette dernière partie est liée.

Proposition 15 *Soient L_1 et L_2 des parties libres; si $[L_1] \oplus [L_2]$ alors $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ et $L_1 \cup L_2$ est une partie libre*

[Ind] Étudier une combinaison linéaire nulle des éléments de $L_1 \cup L_2$.

[Dem] Si $[L_1] \oplus [L_2]$ alors $L_1 \cap L_2 \subset \{0\}$ mais puisque $0 \notin L_1$, $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. Notons $(x)_{x\in L_1}$ et $(y)_{y\in L_2}$ les familles d'éléments de L_1 et L_2 respectivement. Si $(\lambda_z)_{z\in L_1\cup L_2}$ est une famille de scalaires dont tous les éléments, sauf un nombre fini d'entre eux, sont nuls telle que $0 = \sum_{z\in L_1\cup L_2} \lambda_z z$. On a $\sum_{z\in L_1\cup L_2} \lambda_z z = \sum_{z\in L_1} \lambda_z z + \sum_{z\in L_2} \lambda_z z$ avec $\sum_{z\in L_1} \lambda_z z \in [L_1]$ et $\sum_{z\in L_2} \lambda_z z \in [L_2]$ et on en déduit donc que $\sum_{z\in L_1} \lambda_z z = -\sum_{z\in L_2} \lambda_z z = 0$ puis que, pour tout $z \in L_1 \cup L_2$, $\lambda_z = 0$.

Théorème 1 (Construction de sommes directes) *Soit L une partie libre et $(L_i)_{i\in I}$ une partition de L, on a $[L] = \bigoplus_{i\in I} [L_i]$.*

[Ind] Appliquer la définition des sommes directes

[Dem] Soient $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs nuls sauf un nombre fini d'entre eux telle que, pour tout $i \in I$, $x_i = [L_i]$ et $\sum_{i\in I} x_i = 0$. Notons J l'ensemble des indices des vecteurs non nuls de la famille. Si

$J \neq \emptyset$ alors, pour tout $j \in J$, il existe un entier non nul n_j, des vecteurs distincts $x_{j,1}, \dots, x_{j,n_j}$ de L_j et des scalaires $\lambda_{j,1}, \dots, \lambda_{j,n_j}$ tel que $x_j = \sum_{k=1}^{n_j} \lambda_{j,k} x_{j,k}$. On a alors

$$\sum_{j \in J} \sum_{k=1}^{n_j} \lambda_{j,k} x_{j,k} = 0$$

La famille $(x_{j,k})_{j \in K, k \in [1,n_j]}$ est libre puisqu'elle est constituée de vecteurs distincts de L, on en déduit que pour tout $j \in J$ et tout $k \in [1, n_j]$, $\lambda_{j,k} = 0$, mais ceci entraîne que, pour tout $j \in J$, $x_j = 0$ en contradiction avec le fait que $J \neq \emptyset$.
Ainsi $J = \emptyset$ et donc, pour tout $i \in I$, $x_i = 0$.

Définition 12 *Une base $\mathcal{B}$ est une famille de vecteurs qui est libre et génératrice.*

Théorème 2 (Caractérisation des bases) *Soit $\mathcal{B}$ une famille de vecteurs. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes:*
a) $\mathcal{B}$ est base.
b) $\mathcal{B}$ est une famille libre maximale, c'est à dire que si on incorpore un nouveau vecteur à la famille, la famille résultante n'est plus libre
c) $\mathcal{B}$ est une famille génératrice minimale, c'est à dire que si on tronque la famille d'un de ses éléments, la famille résultante n'est plus génératrice.

[Ind] Montrer que (a) entraîne (b), que (b) entraîne (c) puis que si $\mathcal{B}$ est génératrice et non libre alors elle n'est pas une famille génératrice minimale.

[Dem] Si $\mathcal{B}$ est une base de E, elle est donc libre et, pour tout $x \in E$, $x \in [\mathcal{B}]$, ainsi la famille $(\mathcal{B}, x)$ est liée.
Si $\mathcal{B}$ est une partie libre maximale, pour tout $x \in E$, $(\mathcal{B}, x)$ est liée on en déduit que $x \in [\mathcal{B}]$ et donc que $\mathcal{B}$ est génératrice. Si y est un élément de $\mathcal{B}$, la famille $\mathcal{B}'$, obtenue en supprimant de $\mathcal{B}$ l'élément y n'est plus génératrice, sinon on aurait $y \in [\mathcal{B}']$ et donc $\mathcal{B}$ ne serait pas libre.
Montrons que (c) entraîne (a) par la contraposée. Si $\mathcal{B}$ n'est pas une base et qu'elle n'est pas génératrice, elle ne peut être génératrice minimale, si elle n'est pas libre, il existe un élément y de $\mathcal{B}$ qui est combinaison linéaire des autres éléments de $\mathcal{B}$ et l'espace vectoriel engendré par la famille $\mathcal{B}'$, obtenue en supprimant de $\mathcal{B}$ l'élément y est celui engendré par $\mathcal{B}$. Ainsi, si $\mathcal{B}$ est génératrice, elle ne peut être génératrice minimale.

Ces propriétés se traduisent par la notion fondamentale suivante:

Théorème 3 *Une famille est une base si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de cette famille, c'est à dire: en notant $\mathcal{B} = (x_i)_{i \in I}$, pour tout $x \in E$ il existe une unique famille de scalaires $(\lambda_i)_{i \in I}$ telle que $x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$.*

[Ind] Appliquer la définition d'une base.

[Dem] Si $\mathcal{B} = (x_i)_{i \in I}$ est une base, l'existence de la famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ se déduit du caractère générateur de $\mathcal{B}$ tandis que l'unicité provient de son caractère libre.
Réciproquement, pour tout $x \in E$, l'existence de la famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ entraîne que $\mathcal{B}$ est génératrice. Pour montrer que la famille $\mathcal{B}$ est libre, il suffit de considérer l'unicité de la combinaison linéaire donnant O. En effet si la famille de scalaires $(\lambda_i)_{i \in I}$ constituée d'éléments nuls sauf un nombre fini d'entre eux est telle que $0 = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ alors, puisque $0 = \sum_{i \in I} 0.x_i$, on en déduit que pour tout $i \in I$, $\lambda_i = 0$.

Exemple 6 La famille $\{1, X, X^2, \dots X^n, \dots\}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$, en revanche, elle constitue une famille libre mais non génératrice de $\mathbb{R}[[X]]$ (ensemble des séries formelles à une indéterminée)

Exercice 18 Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si $r \in \mathbb{R}$, on note f_r l'élément de E défini par $f_r(x) = |x - r|$. Montrer que la famille $(f_r)_{r\in\mathbb{R}}$ est libre.

[Ind] La fonction nulle est dérivable en tout point tandis que la fonction f_r $(r \in R)$ n'est pas dérivable en r.

[Dem] Soit n un entier naturel et soit $(r_k)_{k\in[0,n]}$ une suite de réels distincts et $(\lambda_k)_{k\in[0,n]}$ un suite de réels quelconques. Supposons que $f = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_{r_k}$ est la fonction nulle. Soit $p \in [0, n]$, la fonction $\sum_{k\in[0,n]\setminus\{p\}} \lambda_k f_{r_k}$ est dérivable en r_p. Ainsi, pour que f soit dérivable en r_p, il faut que le réel λ_p soit nul.

Exercice 19 Trouver une base de l'espace vectoriel des fonctions d'une variable réelle, définies sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ et qui sont constantes par morceaux.

[Ind] Notons χ_A la fonction indicatrice de la partie A inclus dans $\mathbb{R}$. La définition d'une fonction constante par morceaux sur $[a, b]$ peut se traduire par : une fonction f est constante par morceaux sur $[a, b]$ si et seulement si elle est combinaison linéaire de fonctions indicatrices d'intervalles inclus dans $[a, b]$: il existe une suite $a = c_1 < c_2 < \ldots < c_n = b$, des réels $\alpha_1, \ldots , \alpha_n$ et $\beta_1, \ldots , \beta_{n-1}$ tels que

$$f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{\{c_k\}} + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k \chi_{]c_k,c_{k+1}[}$$

La famille $(\chi_{]a,c[})_{c\in]a,b]}$ est libre, la compléter en une base de l'espace considéré.

[Dem] Montrons que la famille $\mathcal{I} = (\chi_{[a,c]})_{c\in[a,b]}$ est libre. Soit $a \leq c_1 < c_2 < \ldots < c_n \leq b$ une suite croissante de réels et $(\lambda_k)_{k\in[1,n]}$ une suite de réels quelconques. Supposons que $f = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{[a,c_k]} = 0$. On a $f(c_n) = \lambda_n = 0$ et on en déduit alors par récurrence descendante que, pour tout $k \in [1, n]$, $\lambda_k = 0$.
Notons F l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{I}$.
On vérifie que la famille $\mathcal{P} = (\chi_{\{c\}})_{c\in[a,b]}$ est libre et que l'espace vectoriel G qu'elle engendre est celui des fonctions nulles sauf en un nombre fini de points de $[a, b]$. Puisqu'une fonction f non nulle de F est non nulle en un infinité de points, on en déduit que F et G sont en somme directe et que la réunion des familles $\mathcal{I}$ et $\mathcal{P}$ est libre.
Soit c et d $(c < d)$ deux éléments de $]a, b]$, $\chi_{[c,d[} = \chi_{]a,d[} - \chi_{]a,c[}$ appartient au sous-espace vectoriel F engendré par $\mathcal{I}$ et donc $\chi_{]c,d[} = \chi_{[c,d[} - \chi_{\{c\}}$ appartient à $F + G$.
Tous les types d'intervalles nécessaires à l'écriture d'une fonction constantes par morceaux sont donc dans $F + G$, ainsi la réunion des familles $\mathcal{I}$ et $\mathcal{P}$ est une base de l'espace considéré.

1.3.6 Applications linéaires

Définition 13 *Soient E et F des K-espaces vectoriels, $u : E \to F$ est une application linéaire si et seulement si*

$$\forall x, y \in E \ \forall \lambda \in K \quad u(x + \lambda.y) = u(x) + \lambda.u(y)$$

Terminologie: Une application linéaire est simplement un morphisme d'espace vectoriel. On l'appelle linéaire car elle respecte les relations linéaires (c'est à dire les égalités entre combinaisons linéaires): l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images affectés des mêmes coefficients scalaires

Un **endomorphisme** est une application linéaire de E dans E, tandis qu'une application linéaire de E dans K est appelée **forme linéaire**.L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$, en général; $\mathcal{L}(E)$ si $E = F$ et E^* (appelé espace dual) si $F = K$.

Exemple 7 E étant l'ensemble des fonctions numériques réelles continues par morceaux définies sur l'intervalle $[a, b]$, $u : E \to \mathbb{R}$, $u(f) = \int_a^b f$ est une forme linéaire.

Exemple 8 $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $F = \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $u : E \to F$, $u(f) = f'$ est linéaire.

Proposition 16 *Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. L'image directe et réciproque par u d'un s.e.v. est un s.e.v.. En particulier le noyau*

$$\mathrm{Ker}\, u = u^{-1}(\{0\}) = \{x \in E \mid u(x) = 0\}$$

et l'image

$$\mathrm{Im}\, u = u(E) = \{y \in F \mid \exists x \in E\ u(x) = y\}$$

sont des s.e.v. de E et F respectivement.

[Ind] Appliquer la caractérisation des s.e.v.

[Dem] Soit H un sous-espace vectoriel de E. H contenant 0_E, l'ensemble $u(H)$ est non vide et contient 0_F car $u(0_E) = u(O.O_E) = 0.u(0_E) = 0_F$. Soient $x', y' \in u(H)$ et $\lambda \in K$, il existe x et y dans H tels que $x' = u(x)$ et$y' = u(y)$, ainsi $\lambda.x' + y' = \lambda.u(x) + u(y) = u(\lambda.x + y)$ et puisque H est un sous-espace, l'élément $\lambda.x + y$ appartient à H, ainsi $\lambda.x' + y' \in u(H)$.
Soit H' un sous-espace vectoriel de F, $0_E \in u^{-1}(H')$ donc $u^{-1}(H') \neq \emptyset$. Soient $x, y \in u^{-1}(H')$ et $\lambda \in K$, $u(\lambda.x+y) = \lambda.u(x)+u(y)$ or $u(x)$ et $u(y)$ appartenant à H', on a $u(\lambda.x+y) \in H'$ ce qui signifie que $\lambda.x + y \in u^{-1}(H')$.

Définition 14 *Soit u un endomorphisme de E. On dit que le s.e.v. F de E est stable par u si et seulement si $u(F) \subset F$.*

Proposition 17 *Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Si G est une partie génératrice de E alors $u(G)$ est une partie génératrice de $u(E)$.*

[Ind] Se demander comment obtenir la conclusion désirée.

[Dem] Soit $x' \in u(E)$, il existe $x \in E$ tel que $x' = u(x)$, or il existe des éléments $x_1, \ldots, x_n$ de G et des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, ainsi $x' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(x_i)$ et donc $u(G)$ est bien une partie génératrice de $u(E)$.

Proposition 18 *Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. L'application linéaire u est injective si et seulement si* $\mathrm{Ker}\, u = \{0\}$.

[Ind] Remarquer, si cela n'a pas déjà été fait, que u linéaire entraîne $u(0) = 0$.

[Dem] Si u est injective alors $u(x) = u(0) = 0$ entraîne $x = 0$. Réciproquement, si x et y sont des éléments de E vérifiant $u(x) = u(y)$ alors, $u(x) - u(y) = u(x - y) = 0$ ainsi $x - y \in \mathrm{Ker}\, u$, donc si $\mathrm{Ker}\, u$ est réduit à 0, u est injective.

Proposition 19 *Si L est une partie libre de E et si u est injective alors $u(L)$ est une partie libre de F. Plus généralement, si L est une partie libre et si $[L] \cap \mathrm{Ker}\, u = \{0\}$ alors $u(L)$ est une partie libre.*

[Ind] Comment obtenir la conclusion?

[Dem] Il suffit de prouver la deuxième propriété, plus générale que la première. Soit $x'_1, \ldots, x'_n$ des éléments distincts de $u(L)$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des scalaires tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x'_i = 0$. Il existe des éléments nécessairement distincts de L tels que, pour tout $i \in [1, n]$, $u(x_i) = x'_i$, on en déduit donc que $u\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = 0$, ainsi, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in [L] \cap \mathrm{Ker}\, u = \{0\}$ et donc, puisque la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre, on a, pour tout $i \in [1, n]$, $\lambda_i = 0$.

Théorème 4 (Construction et identification d'une application linéaire) *Si E possède une base $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$, alors pour toute famille $(y_i)_{i\in I}$ d'éléments de F, il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ vérifiant: $\forall i \in I \quad u(e_i) = y_i$.*

[Ind] Travailler par analyse-synthèse

[Dem] Montrons l'unicité. Soient u et v deux applications linéaires (s'il en existent) vérifiant la propriété. Alors, pour tout $x \in E$, il existe une famille de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I}$ dont tous les éléments, sauf un nombre fini d'entre eux sont nuls, telle que $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$, ainsi $u(x) = u\left(\sum_{i\in I} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i\in I} \lambda_i u(e_i) = \sum_{i\in I} \lambda_i y_i = v(x)$, ainsi $u = v$.
Construisons une application linéaire qui vérifie la condition souhaitée. Pour tout $x \in E$, il existe une unique famille de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I}$ dont tous les éléments, sauf un nombre fini d'entre eux sont nuls, telle que $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$, on pose $u(x) = \sum_{i\in I} \lambda_i y_i$ et on vérifie alors que u est linéaire et que pour tout $i \in I$, $u(e_i) = y_i$.

Remarque: C'est le théorème central de la représentation matricielle des applications linéaires.

Proposition 20 *E et F étant des K-espaces vectoriels, $\mathcal{L}(E, F)$ est un K-espace vectoriel.*

[Ind] Montrer que l'ensemble considéré est un s.e.v. d'un e.v. plus gros

[Dem] Puisque F est un espace vectoriel, l'ensemble des applications de E dans F est un espace vectoriel, on vérifie alors qu'il est non vide, l'application nulle étant linéaire, et qu'il est stable pour la multiplication par un scalaire et pour l'addition des applications.

Proposition 21 *La composée de deux applications linéaires est linéaire.*

[Ind] Appliquer la définition.

[Dem] Soient E, F et G des K-espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Pour tous éléments x et y de E et tout scalaire λ, on a $v\circ u(\lambda.x+y) = v(u(\lambda.x+y)) = \lambda.v(u(x))+v(u(y)) = \lambda.v\circ u(x)+v\circ u(y)$.

Proposition 22 *L'application réciproque d'une application linéaire bijective est linéaire.*

[Ind] Appliquer la définition.

[Dem] Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Supposons que u soit bijective et notons v sa réciproque. Pour tous éléments x' et y' de F et tout scalaire λ, on a $u(v(\lambda.x'+y')) = \lambda.x'+y' = \lambda u(v(x'))+u(v(y')) = u(\lambda.v(x')+v(y'))$ et puisque u est injective, on en déduit que $v(\lambda.x' + y') = \lambda.v(x') + v(y')$.

Une telle application est appelée un **isomorphisme** (**automorphisme** si $E = F$).
L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathcal{GL}(E)$.

Proposition 23 *Soient E et F des K-espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Si E possède une base $\mathcal{B}$, alors*
u est injective si et seulement si l'image de $\mathcal{B}$ est une famille libre de F,
u est surjective si et seulement si l'image de $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de F,
u est un isomorphisme si et seulement l'image de $\mathcal{B}$ est une base de F.

[Ind] Comment obtenir la conclusion?

[Dem] Si une application linéaire est injective, l'image d'une famille libre donc d'une base est une famille libre. Réciproquement, si l'image d'une base est une famille libre, soit x un élément de E tel que $u(x) = 0$. Il existe une famille de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I}$ dont tous les éléments, sauf un nombre fini d'entre eux sont nuls, telle que $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$ en notant $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$. On a alors $\sum_{i\in I} \lambda_i u(e_i) = 0$ ce qui entraîne que, pour tout $i \in I$, $\lambda_i = 0$ et donc que $x = 0$.

L'image par une application linéaire u d'une famille génératrice est une famille génératrice de l'image de u. L'équivalence proposée est donc immédiate.
La troisième équivalence est une conséquence des deux premières.

Théorème 5 *Soient E et F des K-espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\operatorname{Ker} u$ admet un supplémentaire H alors la restriction de u à H est un isomorphisme de H sur $\operatorname{Im} u$.*

[Ind] Chercher le noyau de la restriction de u.

[Dem] Notons v l'application définie de H dans $\operatorname{Im} u$ par $v(x) = u(x)$ pour tout $x \in H$. v est linéaire et son noyau est constitué des éléments de H dont l'image est nulle, c'est à dire que l'on a $\operatorname{Ker} v = \operatorname{Ker} u \cap H = \{0\}$, on en déduit que v est injective. Soit $x' \in \operatorname{Im} u$, il existe $x \in E$ tel que $u(x) = x'$ or, il existe $y \in H$ et $z \in \operatorname{Ker} u$ tel que $x = y + z$ donc $u(x) = u(y) + u(z) = v(y) = x'$. L'application linéaire v étant injective et surjective est donc un isomorphisme entre H et $\operatorname{Im} u$.

Proposition 24 $(\mathcal{GL}(E), \circ)$ *est un groupe (non commutatif en général).*

[Ind] Montrer que l'ensemble considéré est un sous-groupe d'un groupe plus gros. Pour montrer qu'il n'est pas commutatif en général, trouver un contre-exemple en prenant $E = \mathbb{R}^2$.

[Dem] L'ensemble des bijections de E dans E muni de la loi de composition est un groupe. Le sous-ensemble $\mathcal{GL}(E)$ est non vide, stable pour la composition et l'inverse d'un automorphisme est linéaire.

Exercice 20 Soit f une application linéaire entre les espaces vectoriels E et F. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille libre d'éléments de E et H l'espace vectoriel qu'elle engendre. Que peut-on dire de H si la famille image $(f(x_i))_{i \in I}$ est libre ? Si la famille image est génératrice de $f(E)$? Si la famille image est une base de $f(E)$?

[Ind] Étudier $H \cap \operatorname{Ker} f$ et $H + \ker f$.

[Dem] Si la famille $(f(x_i))_{i \in I}$ est libre, une combinaison linéaire non nulle de la famille $(x_i)_{i \in I}$ a une image non nulle, ainsi H et $\operatorname{Ker} f$ sont en somme directe et on ne peut rien dire de plus, car si $H \oplus \operatorname{Ker} f$, l'image d'une famille libre d'éléments de H est une famille libre.
Si la famille image est génératrice de $f(E)$, pour tout $x \in E$, il existe $y \in H$ tel que $f(x) = f(y)$ donc $x - y \in \operatorname{Ker} f$, ainsi $E = H + \operatorname{Ker} f$. Réciproquement, si $E = H + \operatorname{Ker} f$, l'image d'une famille génératrice de H est génératrice de $f(E)$, on ne peut donc, là aussi, rien dire de plus.
Si enfin, la famille image est une base de $f(E)$ alors $E = H \oplus \operatorname{Ker} f$.

Exercice 21 Soit $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (0, x_1, \ldots, x_{n-1})$.
a) Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$.
b) Que vaut $f^2 = f \circ f$? f^n ? f est-elle bijective ?
c) Déterminer $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$.

[Ind] Appliquer les définitions.

[Dem] a) Simple vérification
b) Pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $f^2(x) = (0, 0, x_1, \ldots, x_{n-2})$ et $f^n(x) = (0, \ldots 0)$. L'application f n'est pas bijective car elle n'est pas injective, l'image de $(0, \ldots, 0, 1)$ est nulle.
c) Si on note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, le noyau de f est l'espace vectoriel engendré par e_n, son image est l'espace vectoriel engendré par la famille $(e_2, \ldots, e_n)$ et on a donc $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$.

Exercice 22 Soit f un endomorphisme de l'e.v. E tel que pour tout élément x de E, $(x, f(x))$ est un système lié. Montrer que f est une homothétie.

[Ind] L'hypothèse signifie que, pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in K$ tel que $f(x) = \lambda_x.x$.
Prendre un vecteur x non nul. Montrer que si $\{x, y\}$ est une partie libre alors $\lambda_x = \lambda_y$.
Vérifier la propriété sur la droite engendrée par x.

[Dem] On peut déjà remarquer que si $x \neq 0$, la valeur λ_x donnée par la définition est déterminée de façon unique.

Soit $x_0 \in E - \{0\}$. Pour tout $y \in E$, on a deux possibilités: soit y est colinéaire à x_0, c'est à dire qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $y = \lambda x_0$, soit $\{x_0, y\}$ est une partie libre.
Dans le premier cas, on a $f(y) = \lambda_y y = \lambda f(x_0) = \lambda \lambda_{x_0} x_0 = \lambda_{x_0} y$. Si $y \neq 0$, on en déduit que $\lambda_{x_0} = \lambda_y$. Si $y = 0$, on ne peut rien conclure, λ_0 n'étant pas unique.
Dans le deuxième cas, on a $y \neq 0$ et $f(x_0 + y) = \lambda_{x_0+y}(x + y) = f(x) + f(y) = \lambda_{x_0} x_0 + \lambda_y y$, on en déduit que $(\lambda_{x_0+y} - \lambda_{x_0})x_0 + (\lambda_{x_0+y} - \lambda_y)y = 0$ et puisque la famille (x_0, y) est libre, $\lambda_{x_0+y} = \lambda_{x_0} = \lambda_y$.
Ainsi, pour tout $y \in E$ (y compris 0), on a $f(y) = \lambda_{x_0} y$ et f est bien une homothétie.

Exercice 23 Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que $f(\operatorname{Ker} g \circ f) = \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f$.

[Ind] Montrer l'égalité par une double inclusion.

[Dem] Soit $x \in \operatorname{Ker} g \circ f$, on a $g \circ f(x) = 0$ donc $f(x)$ appartient à $\operatorname{Ker} g$ et puisque $f(x)$ appartient à $\operatorname{Im} f$, on a bien $f(\operatorname{Ker} g \circ f) \subset \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f$.
Soit $x \in \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f$, on a $x \in \operatorname{Im} f$ et il existe donc $x' \in E$ tel que $x = f(x')$. L'appartenance de x à $\operatorname{Ker} g$ entraîne que $g(x) = g \circ f(x') = 0$ donc $x' \in \operatorname{Ker} g \circ f$, ainsi x appartient à $f(\operatorname{Ker} g \circ f)$.

Exercice 24 Soit $f \in \mathcal{GL}(E)$. Soit F un s.e.v. de E stable par f. F est-il stable par f^{-1}, par f^k $(k \in \mathbb{Z})$, par $\alpha \mathrm{Id} + \beta f$ $(\alpha, \beta \in K)$?

[Ind] Non (trouver un contre-exemple lorsque $E = K[X]$) , oui si $k \geq 0$, oui

[Dem] Si F est stable par f, on a $f(F) \subset F$, ce qui entraîne $F \subset f^{-1}(F)$. Si F est de dimension finie, $f(F)$ a la même dimension que F car f est un automorphisme, ainsi, on a bien $f(F) = F$ et $F = f^{-1}(F)$ donc F est stable par f^{-1}. En revanche, si F n'est pas de dimension finie, on peut avoir $f(F) \neq F$ et donc $F \neq f^{-1}(F)$. Prenons $E = K[X]$ et définissons l'application linéaire f par l'image de la base canonique de $K[X]$: si p est un entier pair, $f(X^p) = X^{p+2}$, $f(X) = 1$ et pour tout entier impair p supérieur ou égal à 3, $f(X^p) = X^{p-2}$. L'application linéaire f est bien un automorphisme car l'image de la base canonique est une base, d'autre part, en prenant $F = K[X^2]$, on a bien $f(F) = X^2K[X^2] \subset F$ alors que $f^{-1}(F) = F \oplus \mathrm{Vect}(X)$, F n'est donc pas stable par f^{-1}.
On montre facilement par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ $f^k(F) \subset f^{k-1}(F) \subset \cdots \subset F$.
On a $(\alpha\mathrm{Id} + \beta\mathrm{f})(\mathrm{F}) \subset \alpha\mathrm{Id}(\mathrm{F}) + \beta\mathrm{f}(\mathrm{F}) \subset \alpha\mathrm{F} + \beta\mathrm{F} \subset \mathrm{F}$.

Exercice 25 Soit E un K e.v. et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que:

$$u^2 = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$$

et qu'alors $u + \mathrm{Id}_E$ est un automorphisme de E.

[Ind] Pour montrer que $u + \mathrm{Id}_E$ est un automorphisme de E, trouver l'application réciproque.

[Dem] Si $u^2 = 0$, puisque, pour tout $x \in \operatorname{Im} u$, il existe $y \in E$ tel que $x = u(y)$, on a donc $u(x) = u^2(y) = 0$, ainsi x appartient à $\operatorname{Ker} u$. Réciproquement si $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$, alors pour tout $x \in E$, $u(x) \in \operatorname{Im} u$ donc $u^2(x) = 0$ donc $u^2 = 0$.
Si $u^2 = 0$, alors $(u + \mathrm{Id}_E) \circ (-u + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Id}_E$ donc $u + \mathrm{Id}_E$ est bien un automorphisme de E.

Exercice 26 Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ (E et F K e.v.). Soit $\varphi \in \mathcal{F}(E \times F, E \times F)$, définie par $\varphi(x, y) = (x, y - f(x))$. Montrer que φ est un automorphisme de $E \times F$.

[Ind] Trouver l'inverse de φ

[Dem] Il suffit de vérifier que l'application ψ définie pour $(x, y) \in E \times F$ par $\psi(x, y) = (x, y + f(x))$ est l'application inverse de φ.

Exercice 27 On considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}[X]$ déterminé par $\varphi(P) = P + P'$ pour tout polynôme P. Déterminer $\operatorname{Ker} \varphi$. Montrer que φ est bijective, calculer $\varphi^{-1}(X^p)$ pour un entier positif p.

[Ind] Étudier le degré de $\varphi(P)$, étudier l'équation différentielle $y' + y = Q$ où Q est une fonction polynomiale.

[Dem] On vérifie que, pour tout polynôme réel P, le degré de $\varphi(P)$ est celui de P donc $\varphi(P) = 0$ implique $P = 0$.
Si Q est une fonction polynomiale, il existe une solution particulière de l'équation différentielle $y' + y = Q$ qui est un polynôme, on en déduit que φ est surjective. La méthode de variation de la constante appliquée à l'équation $y' + y = x^p$ donne comme solution particulière $x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \int \mathrm{e}^x x^p dx$, en intégrant par parties l'intégrale à calculer en en ajustant judicieusement la constante d'intégration arbitraire , on trouve alors $\varphi^{-1}(X^p) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k! \binom{p}{k} X^{p-k}$

1.3.7 Algèbres

Définition 15 *Soit A un ensemble, deux lois internes $+$ et $\times$ et une loi externe . à opérateurs dans le corps K. On dit que $(A, +, \times, .)$ est une K-algèbre si*
a) $(A, +, \times)$ est un anneau,
b) $(A, +, .)$ est un K-espace vectoriel,
c) $\forall \lambda \in K \quad \forall x, y \in A \quad \lambda.(x \times y) = (\lambda.x) \times y = x \times (\lambda.y)$
On l'appelle algèbre commutative si $\times$ est une loi commutative.

Exemple 9 $(K, +, \times, \times)$ est une K-algèbre ainsi $(\mathbb{C}, +, \times, \times)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre, mais aussi une $\mathbb{R}$-algèbre en restreignant le multiplication externe aux réels.

Proposition 25 *Si I est un ensemble quelconque et si $(A, +, \times, .)$ est une K-algèbre, l'ensemble $\mathcal{F}(I, A)$ des applications de I dans A, muni des lois usuelles d'addition, de multiplication par un scalaire et de la multiplication des applications:*

- *Pour tous éléments $f, g \in \mathcal{F}(I, A)$, l'application $f \times g$ est définie pour tout $x \in I$ par $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$*

est une K-algèbre.

[Ind] Appliquer la définition.

[Dem] Les propriétés des lois de A déterminent les résultats suivants:
$(\mathcal{F}(I, A), +, \times)$ est un anneau et $(\mathcal{F}(I, A), +, .)$ est un K-espace vectoriel. On vérifie alors sans difficulté la dernière propriété.

Proposition 26 *Soit $(E, +, .)$ un K-espace vectoriel. L'ensemble $\mathcal{L}(E)$ muni des lois d'addition et de composition des applications et de la loi externe de multiplication des applications par les scalaires est une K-algèbre.*

[Ind] Appliquer la définition

[Dem] On sait déjà que $(\mathcal{L}(E), +, .)$ est un K-espace vectoriel.
Montrons que $\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau :

- l'application identique Id_E est l'élément unité pour la composition
- La loi $\circ$
  - est associative
  - distributive à droite sur la loi $+$ par définition de la loi $\circ$
  - distributive à gauche sur la loi $+$ car les éléments de $\mathcal{L}(E)$ sont linéaires

$$\begin{aligned} \forall f, g, h \in \mathcal{L}(E) \quad \forall x \in E \quad f \circ (g + h)(x) &= f(g(x) + h(x) \\ &= f(g(x)) + f(h(x)) \\ &= (f \circ g + f \circ h)(x) \end{aligned}$$

Ce qui signifie que $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un sous-anneau.

- Soit $\lambda \in K$ et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned}\lambda.f \circ g(x) &= (\lambda.f) \circ g(x)\\ &= \lambda.f(g(x))\\ &= f(\lambda g(x))\\ &= f \circ (\lambda g)(x)\end{aligned}$$

Définition 16 *Soit A une K-algèbre et $B \subset A$. B est une sous-algèbre de A si B est stable pour les lois de A et si, muni de la restriction de ces lois, B est une K-algèbre.*

Proposition 27 (Caractérisation des sous-algèbres) *Soit $(A, +, \times, .)$ une K-algèbre et B une partie de l'algèbre A*

$$B \text{ est une sous-algèbre.} \iff \begin{cases} B \text{ est un sous-espace vectoriel} \\ 1_A \in B \\ \forall x, y \in B \quad x \times y \in B. \end{cases}$$

[Ind] Appliquer la définition

[Dem] Le sens direct est clair. Pour la réciproque, on constate que $(B, +, \times)$ est alors un sous-anneau de A et la dernière propriété des algèbres est vérifiée dans B puisqu'elle est vraie dans A.

Définition 17 (Morphisme d'algèbre) *Soit A et B des K-algèbres, on dit qu'une application φ de A dans B est un morphisme d'algèbre si φ est linéaire et est un morphisme d'anneau.*

1.3.8 Endomorphismes remarquables

Définition 18 *Un endomorphisme p de E est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$.*

Proposition 28 *Un endomorphisme p de E est un projecteur si et seulement $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(Id_E - p)$ et $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$.*

[Ind] Travailler par analyse-synthèse

[Dem] Soit $x \in E$, si x appartient à $\operatorname{Ker}(Id_E - p)$ alors $x = p(x)$ donc $x \in \operatorname{Im} p$. Réciproquement, si $x \in \operatorname{Im} p$, il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$, mais alors $p(x) = p(p(y)) = p(y) = x$ donc $x \in \operatorname{Ker}(Id_E - p)$. Soit $x \in E$, on a $p(x) \in \operatorname{Im} p$, $x - p(x) \in \operatorname{Ker} p$ et $x = p(x) + (x - p(x))$ ainsi $E = \operatorname{Ker} p + \operatorname{Im} p$. De plus, si $x \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} p$, alors $x = p(x)$ et $p(x) = 0$, ainsi $x = 0$.

Réciproquement, si $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Ker}(Id_E - p)$, alors, pour tout $x \in E$, il existe $y \in \operatorname{Ker} p$ et $z \in \operatorname{Ker}(Id_E - p)$ tels que $x = y + z$. On a donc $p(x) = p(y) + p(z) = z$ et $p(p(x)) = p(z) = z = p(x)$ ce qui implique $p \circ p = p$.

Proposition 29 *Soient F et G des s.e.v. supplémentaires de E, il existe alors un unique projecteur p de E tel que $\operatorname{Ker} p = F$ et $\operatorname{Im} p = G$. Il est défini par:*
Tout élément x de E s'écrivant (de façon unique) sous la forme $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$, $p(x) = x_2$.
p est alors appelée projection sur $G = \operatorname{Im} p$ parallèlement à $F = \operatorname{Ker} p$.

[Ind] Vérifier que l'application donnée est un projecteur qui satisfait aux propriétés demandées

[Dem] L'application p définie par la proposition est bien linéaire, vérifie $p \circ p = p$, $G = \operatorname{Im} p$ et enfin $F = \operatorname{Ker} p$.

Définition 19 *$(p, q) \in (\mathcal{L}(E))^2$ est un couple de projecteurs associés si et seulement si $p^2 = p$, $q^2 = q$, $p \circ q = q \circ p = 0$ et $p + q = Id_E$.*

Proposition 30 *Soit p un projecteur de E. p et $Id_E - p$ forment un couple de projecteurs associées.*

[Ind] Appliquer la définition

[Dem] Si p est un projecteur, posons $q = Id_E - p$, on a $q^2 = Id_E - p - p + p \circ p = q$, $p \circ q = q \circ p = 0$ et $p + q = Id_E$.

Proposition 31 *Si p et q forment un couple de projecteurs associés,* $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Im} q$, $\operatorname{Ker} q = \operatorname{Im} p$ *et donc* $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Ker} q = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$.

[Ind] Remarquer que si p est un projecteur $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Im}(I - p)$.

[Dem] C'est une simple reformulation de deux propositions précédentes.

Définition 20 *Une famille d'endomorphismes de E, $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ est une famille de projecteurs associés si et seulement si $\forall i \in [1, n]$ $p_i^2 = p_i$, $\forall i, j \in [1, n]$ $(i \neq j \implies p_i \circ p_j = 0)$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = Id_E$.*

Proposition 32 *On a alors* $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Im} p_i$ *et pour tout $i \in [1, n]$* $\operatorname{Ker} p_i = \displaystyle\bigoplus_{j \in [1,n] - \{i\}} \operatorname{Im} p_j$.

[Ind] Comment montrer que E est bien la somme directe proposée? Pour trouver le noyau de p_i, travailler par double inclusion

[Dem] Puisque $Id_E = p_1 + \cdots + p_n$, pour tout $x \in E$, $x = p_1(x) + \cdots + p_n(x)$ donc $E = \operatorname{Im} p_1 + \cdots \operatorname{Im} p_n$. Pour tout $i \in [1, n]$ prenons $x_i \in \operatorname{Im} p_i$ tel que $x_1 + \cdots + x_n = 0$, on a alors, pour tout $i \in [1, n]$, $x_i = p_i(x_i)$ et donc $p_i(x_1 + \cdots + x_n) = p_i p_1(x_1) + \cdots p_i p_n(x_n) = p_i(x_i) = 0$.
Pour tout $j \in [1, n] \setminus \{i\}$, et tout $x \in \operatorname{Im} p_j$, $p_i(x) = p_i(p_j(x)) = 0$ donc $\displaystyle\sum_{j \in [1,n] \setminus \{i\}} \operatorname{Im} p_j \subset \operatorname{Ker} p_i$. Soit $x \in \operatorname{Ker} p_i$, $x = p_1(x) + \cdots + p_{i-1}(x) + p_{i+1}(x) + \cdots + p_n(x) \in \displaystyle\bigoplus_{j \in [1,n] - \{i\}} \operatorname{Im} p_j$.

Proposition 33 *Soient $F_1, \dots, F_n$ des s.e.v.. Si $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} F_i$ alors il existe une famille de projecteurs associés $p_1, \dots, p_n$ tels que pour tout $i \in [1, n]$* $F_i = \operatorname{Im} p_i$.

[Ind] Travailler par analyse-synthèse

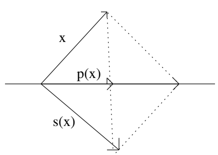
[Dem] Pour tout x dans E, et pour tout $i \in [1, n]$, il existe un unique élément $x_i \in F_i$ tel que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$. On peut donc construire une application p_i de E dans E en posant $p_i(x) = x_i$. On vérifie alors que la famille $p_1, \dots, p_n$ est une une famille de projecteurs associés.

Définition 21 *Un endomorphisme s de E est une* **symétrie** *si et seulement si $s \circ s = Id_E$.*

Proposition 34 *s est une symétrie si et seulement s'il existe un couple de projecteurs associés p et q tel que $s = p - q$. s est alors appelée symétrie par rapport à* $\operatorname{Im} p$ *parallèlement à* $\operatorname{Im} q$.

[Ind] Trouver p en fonction de s

[Dem] Si s est une symétrie, $p = \frac{1}{2}(Id_E + s)$ est un projecteur qui vérifie $s = p - (Id_E - p)$



Exercice 28 Démontrer qu'un endomorphisme u commute avec un projecteur p ($p \circ u = u \circ p$) si et seulement si le noyau et l'image de p sont stables par u.

[Ind] L'image de p est l'ensemble des vecteurs x vérifiant $p(x) = x$.

[Dem] Supposons $p \circ u = u \circ p$. Si $x \in \operatorname{Ker} p$, $p \circ u(x) = u \circ p(x) = 0$ donc $u(x) \in \operatorname{Ker} p$ et donc $\operatorname{Ker} p$ est stable par u. Si $x \in \operatorname{Im} p$, $p \circ u(x) = u \circ p(x) = u(x)$ donc $u(x)$ vérifie la propriété caractéristique des éléments de $\operatorname{Im} p$ ainsi $u(x) \in \operatorname{Im} p$ et donc $\operatorname{Im} p$ est stable par u.
Supposons que le noyau et l'image de p soient stables par u. Pour tout $x \in E$, il existe $y \in \operatorname{Ker} p$ et $z \in \operatorname{Im} p$ tel que $x = y + z$, on a alors $p \circ u(x) = p(u(y)) + p(u(z))$, or $u(y) \in \operatorname{Ker} p$ et $u(z) \in \operatorname{Im} p$, donc $p \circ u(x) = u(z) = u(p(x))$, ainsi p et u commutent.

Exercice 29 Soit E un K e.v. et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que:

$$u \text{ est une symétrie } \iff p = \frac{1}{2}(u + \operatorname{Id}_E) \text{ est un projecteur.}$$

[Ind] Calculer p^2.

[Dem] Les applications u et Id_E commutent donc , si $p = \frac{1}{2}(u + \operatorname{Id}_E)$, alors $p^2 = \frac{1}{4}(u^2 + 2u + \operatorname{Id}_E)$ et donc $p^2 - p = \frac{1}{4}(u^2 - \operatorname{Id}_E)$, on en déduit l'équivalence proposée.

Exercice 30 p et q étant des projecteurs, démontrer que:

$$p + q \text{ projecteur } \iff p \circ q = q \circ p = 0$$

[Ind] Effectuer des calculs algébriques

[Dem] On a $(p + q)^2 = p^2 + q^2 + pq + qp$ donc si $qp = pq = 0$, on a alors $(p + q)^2 = p + q$ et $p + q$ est bien un projecteur.
Réciproquement, si $p + q$ est un projecteur, on a $pq + qp = 0$, ce qui implique, en composant à gauche et à droite par p, $pq + pqp = 0$ et $pqp + qp = 0$. On en déduit donc que $qp = pq$ puis que $pq = qp = 0$.

1.4 Espaces vectoriels de dimension finie

1.4.1 Dimension d'un espace vectoriel

Définition 22 *Un K-espace vectoriel est dit de dimension finie s'il existe une partie génératrice finie de E.*

Théorème 6 (Théorème de la base incomplète) *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, G une partie génératrice finie de E et L une partie libre de E. Il existe une partie H de G telle que $L \cap H = \emptyset$ et $L \cup H$ soit une base de E.*

[Ind] Le nombre de parties de G est fini. Prendre une partie de G de cardinal maximal complétant L en une partie libre.

[Dem] Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des parties de G complétant L en une partie libre. $\mathcal{H}$ est non vide car $\emptyset \in \mathcal{H}$. L'ensemble des cardinaux des éléments de $\mathcal{H}$ est une partie bornée de $\mathbb{N}$, il possède alors un plus grand élément p et il existe un élément G' de $\mathcal{H}$ de cardinal p. Pour tout $x \in G \setminus G'$, la partie $L \cup (G' \cup \{x\})$ est donc liée et donc $G \setminus G' \subset [L \cup G']$, on en déduit que $G \subset [L \cup G']$ et donc que $L \cup G'$ est une partie libre et génératrice de E.

Proposition 35 *Si une partie A possède $p + 1$ vecteurs qui sont combinaisons linéaires des vecteurs d'une partie G à p éléments alors A est une partie liée.*

[Ind] Démontrer la proposition par récurrence: à partir d'une partie A à $p + 2$ éléments engendrée par une partie G à $p + 1$ éléments, construire une partie A' engendrée par A à $p + 1$ éléments qui soit aussi engendrée par une partie $G' \subset G$ à p éléments.

[Dem] La propriété est vraie pour $p = 0$ car la seule combinaison linéaire d'une partie vide est 0. Si on préfère éviter ce cas, on peut supposer que p est supérieur ou égal à 1 et démontrer la propriété pour $p = 1$
Supposons la propriété vraie pour un entier $p \geq 0$.
Soit $A = \{a_1, \ldots, a_{p+2}\}$ engendrée par $G = \{e_1, \ldots, e_{p+1}\}$.
Il existe une famille de scalaires $(\alpha_{i,j})_{\substack{i \in [1,p+1] \\ j \in [1,p+2]}}$ telle que

$$\forall j \in [1, p+2] \quad a_j = \sum_{i=1}^{p+1} \alpha_{i,j} e_i$$

Si A est engendré par $G' = \{e_1, \ldots, e_p\}$, alors, en appliquant l'hypothèse de récurrence, A est liée car elle contient une partie liée. Sinon, il existe au moins $j \in [1, p+2]$ tel que $\alpha_{p+1,j} \neq 0$ et la partie $A' = \{a_k - \frac{\alpha_{p+1,k}}{\alpha_{p+1,i}} a_j \mid k \in [1, p+2] \setminus \{j\}\}$ à $p+1$ éléments est engendrée par G'. Elle est donc liée et il existe des scalaires $\beta_1, \ldots, \beta_{j-1}, \beta_{j+1}, \ldots, \beta_{p+2}$ non tous nuls tels que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{p+2} \beta_k \left(a_k - \frac{\alpha_{p+1,k}}{\alpha_{p+1,i}} a_j \right) \\ &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{p+2} \beta_k a_k - \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{p+2} \beta_k \frac{\alpha_{p+1,k}}{\alpha_{p+1,i}} \right) a_j \end{aligned}$$

On en déduit alors que A est liée.

Théorème 7 (Théorème de la dimension) *Deux bases d'un K-espace vectoriel de dimension finie sont finies et ont même nombre d'éléments appelé dimension de l'espace noté* $\dim E$.

[Ind] En utilisant le théorème de la base incomplète, montrer qu'il existe dans un espace de dimension finie au moins une base de cardinal fini. Déduire alors de la proposition précédente que le cardinal d'une partie libre est fini et inférieur ou égal à celui de cette base.

[Dem] Soit E un espace de dimension finie et G une partie génératrice finie de E. Appliquons le théorème de la base incomplète à partir de $L = \emptyset$ qui est une partie libre. On peut donc extraire de G une base de cardinal fini n. Toute partie libre de E possède donc un cardinal inférieur ou égal à n et donc toute base de E possède un cardinal fini. Si G et G' sont deux bases de E, toujours en appliquent la proposition précédente, on a alors que $\operatorname{card} G \leq \operatorname{card} G' \leq \operatorname{card} G$. Ainsi toute base a pour cardinal n.

Théorème 8 *Dans un K-espace vectoriel de dimension n:*
Toute partie libre a au plus n éléments.
Toute partie génératrice a au moins n éléments.
Toute partie libre (resp. génératrice) de n éléments est une base.

[Ind] Utiliser une base de E et le théorème de la base incomplète.

[Dem] S'il existe une base de cardinal n, toute partie à $n + 1$ éléments est liée, donc une partie libre a au plus n éléments.
De toute partie génératrice on peut extraire une base, donc toute partie génératrice a au moins n éléments.
Une partie libre à n éléments est une base de E, sinon, à l'aide du théorème de la base incomplète, on pourrait la compléter en une base de E possédant au moins $n+1$ éléments. Une partie génératrice G de E à n éléments est libre, sinon, n n'étant pas nul, il existerait au moins un élément x de G combinaison linéaire de éléments de $G \setminus \{x\}$ et donc $G \setminus \{x\}$ serait une partie génératrice à $n - 1$ éléments, ce qui est impossible.

Proposition 36 *Tout s.e.v. F d'un espace vectoriel E de dimension finie est de dimension finie et* $\dim F \leq \dim E$. *De plus* $\dim F = \dim E$ *implique* $E = F$.

[Ind] Toute partie libre de F possède au plus $\dim E$ éléments. Poser p le nombre maximal de vecteurs composant une partie libre de F et montrer que $\dim F = p$.

[Dem] Une partie libre de F est une partie libre de E, donc toute partie libre de F possède au plus $n = \dim E$ éléments. Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des partie libres de F. $\mathcal{H}$ est non vide et l'ensemble des cardinaux des éléments de $\mathcal{H}$ est une partie bornée de $\mathbb{N}$ qui possède donc un plus grand élément p. Soit $L \in \mathcal{H}$ de cardinal p. Tout élément de $F \setminus L$ vérifie alors que $L \cup \{x\}$ est une partie liée, ainsi $F \subset [L] \subset F$ et donc L est une base de F. Si $p = n$, L est alors une partie libre à n éléments, c'est donc une base de E et on a alors $E = F$.

Définition 23 *Soient x_1, x_2, ..., x_p des éléments d'un K-espace vectoriel E alors l'espace vectoriel F engendré par la famille $(x_i)_{i\in[1,p]}$ est un s.e.v. de dimension finie. Sa dimension est appelée* **rang** *de la famille $(x_i)_{i\in[1,p]}$.*

Proposition 37 *Le rang d'une famille de p vecteurs $(x_i)_{i\in[1,p]}$ est inférieur ou égal à p, ce rang est égal à p si et seulement si la famille $(x_i)_{i\in[1,p]}$ est une famille libre.*

[Ind] Appliquer la proposition précédente.

[Dem] L'espace vectoriel engendré par une partie finie A est de dimension finie inférieure ou égale au cardinal de G. Si cette dimension est égale au cardinal de A alors A est une partie libre.

Le rang d'une famille S est donc le nombre maximum de vecteurs que l'on peut prendre dans S pour former une famille libre.

Proposition 38 *On ne modifie pas le rang d'une famille en:*
- supprimant de cette famille un vecteur qui est combinaison linéaire des autres,
- en ajoutant à un vecteur de la famille une combinaison linéaire des autres.

[Ind] L'espace vectoriel engendré par la partie ne change pas lorsqu'on fait ces manipulations

[Dem] Soit A une partie de E. On vérifie sans difficulté que si un élément x appartient à $[A]$, $[A] = [A\cap\{x\}]$ et donc $\dim[A] = \dim[A\cap\{x\}]$ ce qui est une traduction en terme de parties des deux assertions.

Exercice 31 Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, trouver une condition nécessaire et suffisante sur le polynôme P pour que le système $(P, P(X + a), P(X + 2a), \dots, P(X + na))$ soit libre.

[Ind] Poser $T(P) = P(x + a)$ et $\Delta = T - \mathrm{Id}$. Montrer que le rang du système proposé est celui du système $(P, \Delta(P), \Delta^2(P), \dots, \Delta^n(P))$.

[Dem] Les application linéaires T et Id commutent donc, pour tout entier strictement positif n:

$$\Delta^n = T^n + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} T^{n-k}$$

Puisqu'on ne modifie pas le rang d'une famille en ajoutant à l'un des vecteurs une combinaison linéaire des autres vecteurs, le rang du système proposé $(P, T(P), \dots, T^{n-1}(P), T^n(P))$ est celui du système $(P, T(P), \dots, T^{n-1}, \Delta^n(P))$ en recommençant le procédé, on découvre alors que le rang cherché est celui du système $(P, \Delta(P), \Delta^2(P), \dots, \Delta^n(P))$.
On montre alors, sans difficulté, en étudiant par exemple l'image par Δ de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ que si P est un polynôme de degré $p > 0$, $\Delta(P)$ est un polynôme de degré $p-1$ puis de proche en proche que $\Delta^k(P)$ est de degré $p - k$ si $k \le p$ et est nul si $k > p$. On en déduit, en examinant le degré d'une combinaison linéaire de la famille $(P, \Delta(P), \Delta^2(P), \dots, \Delta^n(P))$ que celle-ci est libre si et seulement si le degré de P est supérieur ou égal à n.

Théorème 9 *Tout s.e.v. F d'un espace vectoriel E de dimension finie admet des supplémentaires et la dimension d'un quelconque de ces supplémentaires est $\dim E - \dim F$.*

[Ind] Appliquer le théorème de la base incomplète pour compléter une base de F en une base de E.

[Dem] Soit L une base de F et B une base de E, L est une partie libre de E, on peut donc la compléter en prenant une partie G de B en une base de E et en posant $H = [G]$, on a alors $F \oplus H = E$.
G étant une partie libre et génératrice de H, on a $\dim H = \operatorname{card} G = \operatorname{card}(L \cup G) - \operatorname{card} L = \dim E - \dim F$.

Théorème 10 (Caractérisation des sommes directes en dimension finie) *Soit E un espace vectoriel. Si $F_1, F_2, \dots, F_p$ sont des s.e.v. de dimension finie, alors:*
$F = F_1 + F_2 + \cdots F_p$ *est un s.e.v. de dimension finie vérifiant*

$$\dim F \leq \dim F_1 + \dim F_2 + \cdots \dim F_p.$$

de plus

$$\dim F = \sum_{i=1}^{p} \dim F_i \iff F = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i.$$

[Ind] Prendre une base pour chacun des F_i et observer les propriétés de l'union de ces bases.

[Dem] Soient $B_1, \dots, B_p$ des bases de $F_1, \dots, F_p$. $\bigcup_{i \in [1,p]} B_i$ est une partie génératrice finie de $\sum_{i \in [1,p]} F_i$ donc cette somme est de dimension finie et sa dimension est inférieure à card $\bigcup_{i \in [1,p]} B_i \leq \sum_{i=1}^{p} \dim F_i$.
Si $\dim F = \sum_{i=1}^{p} \dim F_i$ alors nécessairement $B = \bigcup_{i \in [1,p]} B_i$ est de cardinal $\dim F$, c'est donc une base de F, de plus, l'ensemble des parties $B_1, \dots, B_p$ forme une partition de B, ainsi $F = \bigoplus_{i \in [1,p]} [B_i] = \bigoplus_{i \in [1,p]} F_i$ (théorème de construction des sommes directes).
Si $F = \bigoplus_{i \in [1,p]} F_i$, alors on a , pour tous éléments distincts i et j de $[1,p]$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ et $B = \bigcup_{i \in [1,p]} B_i$ est une partie libre de F, en effet, $[B_1] \oplus [B_2]$ et B_1, B_2 parties libres entraîne $B_1 \cup B_2$ libre, puis on démontre par récurrence que, pour tout $k \in [1,p]$ $\bigcup_{i=1}^{k} B_i$ est une partie libre, puisque, si $k < p$, $[\bigcup_{i=1}^{k} B_i] \oplus [B_{k+1}]$.
Ainsi B est une base de F de cardinal $\sum_{i=1}^{p} \dim F_i$.

Théorème 11 (Base adaptée à une décomposition en somme directe) *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $F_1, \dots, F_p$ des s.e.v. vérifiant $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$. Si pour tout $i \in [1,p]$, $(e_1^i, \dots e_{n_i}^i)$ est une base de F_i, alors $((e_j^i)_{j \in [1,n_i]})_{i \in [1,p]})$ est une base de E.*

[Ind] C'est le cas d'égalité sur les dimensions dans le théorème précédent

[Dem] La famille $((e_j^i)_{j \in [1,n_i]})_{i \in [1,p]})$ est génératrice de E et possède $\dim E$ éléments, c'est donc une base de E.

Théorème 12 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Si F et G sont des s.e.v. de E alors:*

$$\dim F + G = \dim F + \dim G - \dim F \cap G.$$

[Ind] Prendre des supplémentaires F' et G' de $F \cap G$ dans F et dans G. Montrer que $F + G = (F \cap G) \oplus F' \oplus G'$.

[Dem] Il existe des sous-espaces vectoriels F' et G' de F et G respectivement tels que $(F \cap G) \oplus F' = F$ et $(F \cap G) \oplus G' = G$. $G' \cap F \subset G' \cap G \cap F = \{0\}$ donc $F \oplus G' = F + (F \cap G) + G' = F + G$. Ainsi $\dim(F+G) = \dim F' + \dim(F \cap G) + \dim G'$ et donc $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - 2\dim(F \cap G) + \dim(F \cap G)$.

Exercice 32 Soient F et G des sous-espaces d'un K-espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que F et G possèdent un supplémentaire commun si et seulement si ils ont même dimension.

[Ind] Pour la réciproque, essayer de construire un supplémentaire commun à F et G dans $F+G$ à partir d'un supplémentaire de $F \cap G$ dans F et d'un supplémentaire de $F \cap G$ dans G

[Dem] Si F et G possèdent un supplémentaire commun H , leurs dimensions sont donc égales à $\dim E - \dim H$.
Réciproquement, supposons que $\dim F = \dim G$. Notons p la dimension commune de ces sous-espaces, q la dimension de $F \cap G$ et $r = 2p - q$ la dimension de $F + G$.
Soient F_1 et G_1 des supplémentaires de $F \cap G$ dans F et dans G respectivement, les dimensions de F_1 et G_1 sont égales à $p - q$ et notons $(f_{q+1}, \dots, f_p)$ et $(g_{q+1}, \dots, g_p)$ des bases de F_1 et G_1, soit alors H_1 le sous-espace engendré par la famille $(f_{q+1} + g_{q+1}, \dots, f_p + g_p)$. Puisque $F_1 \cap G_1 \subset F \cap G$, on a $F_1 \cap G_1 \subset F_1 \cap (F \cap G) = \{0\}$, les sous-espaces F_1 et G_1 sont donc en somme directe et la famille $(f_{q+1} + g_{q+1}, \dots, f_p + g_p)$ est libre car si $\lambda_{q+1}, \dots, \lambda_p$ sont des scalaires tels que $\lambda_{q+1}(f_{q+1} + g_{q+1}) + \cdots + \lambda_p(f_p + g_p) = 0$ alors $\lambda_{q+1} f_{q+1} + \cdots + \lambda_p f_p \in F_1 \cap G_1 = \{0\}$ et les scalaires $\lambda_{q+1}, \dots, \lambda_p$ sont donc nuls puisque la famille $(f_{q+1}, \dots, f_p)$ est libre. On en déduit que la dimension de H_1 est $p - q$.
L'espace vectoriel engendré par $F \cup H_1$ est celui engendré par $F \cup \{f_{q+1} + g_{q+1}, \dots, f_p + g_p\}$ donc celui engendré par $F \cup \{g_{q+1}, \dots, g_p\}$ car les vecteurs $f_1, \dots, f_p$ appartiennent à F, ainsi $F + H_1 = F + G_1 = F + (F \cap G) + G_1 = F + G$, or la somme des dimensions de F et H_1 est égale à celle de $F + G$, on en déduit donc que $F \oplus H_1 = F + G$, de la même façon, on a $G \oplus H_1 = F + G$, en prenant finalement un supplémentaire H_2 de $F + G$ dans E, on construit un supplémentaire $H_1 \oplus H_2$ commun à F et à G dans E.

Exercice 33 Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille d'éléments non nuls de $K[X]$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: degré$(P_n) <$ degré(P_{n+1}).
a) Montrer que la famille est libre.
b) Montrer qu'elle forme une base de $K[X]$ si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, degré$(P_n) = n$.

[Ind] Étudier le degré d'une combinaison linéaire de ces polynômes.

[Dem] a) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ des scalaires. Si la famille de scalaires n'est pas nulle, il existe un plus grand indice $m \in [0, n]$ tel que $\lambda_m \neq 0$, le polynôme $P = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k P_k$ est donc égal à la somme de $\lambda_m P_m$ qui est un polynôme de degré égal à celui de P_m et d'un polynôme de degré strictement inférieur, le polynôme $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k$ a donc un degré égal à celui de P_m, ce polynôme n'est donc pas nul. Ainsi, en prenant la contraposée de ce que l'on vient de démontrer, la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est libre. On en déduit que la famille complète $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre.
b) Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, degré$(P_n) = n$. La famille est donc libre, montrons qu'elle est génératrice de $K[X]$. Soit Q un polynôme non nul et d son degré, la famille $(P_0, \dots, P_d)$ est une famille libre à $d + 1$ éléments de $K_d[X]$, elle en constitue donc une base, ainsi Q est une combinaison linéaire des éléments de la famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
On déduit de la question précédente que le degré d'une combinaison linéaire non nulle de la famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est celui d'un des polynômes de cette famille. Montrons alors la réciproque par la contraposée de cette implication
Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que degré$(P_n) \neq n$, notons m le premier entier positif vérifiant cette inégalité, Si $m = 0$, on a donc degré$(P_0) > 0$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, degré$(P_n) \geq$ degré$(P_0) > 0$, ainsi, les polynômes constants ne peuvent être combinaison linéaire de cette famille. Si $m > 0$, pour tout $k \in [0, m - 1]$, on a degré$(P_k) = k$ et le degré de P_m est donc strictement supérieur à $m - 1$ et, étant différent de m, il est donc supérieur ou égal à $m + 1$, on en déduit que m n'est pas le degré d'un polynôme de cette famille, ainsi, X^m ne peut être combinaison linéaire de cette famille.

1.4.2 Applications linéaires en dimension finie.

Proposition 39 *Si E et F sont des espaces vectoriels isomorphes et que l'un d'entre eux est de dimension finie, alors l'autre l'est également et leurs dimensions sont égales.*

[Ind] Qu'elle est l'image d'une base par un isomorphisme?

[Dem] L'image d'une base par un isomorphisme est une base de l'image et toutes les deux possèdent le même nombre d'éléments.

Théorème 13 (Théorème du rang) *Soient E et F des K-espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Si E est de dimension finie, alors* $\operatorname{Im} u$ *est isomorphe à un supplémentaire du noyau dans E et donc est de dimension finie et sa dimension, appelée* **rang** *de u, vérifie*

$$\dim \operatorname{Im} u = \dim E - \dim \operatorname{Ker} u.$$

[Ind] Un supplémentaire du noyau est isomorphe à l'image.

[Dem] Puisque E est de dimension finie, $\operatorname{Ker} u$ possède un supplémentaire H dans E. Or H et $\operatorname{Im} u$ sont isomorphes, donc $\dim H = \dim E - \dim \operatorname{Ker} u = \dim \operatorname{Im} u$.

Proposition 40 *Soient E et F des K-espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et G un s.e.v. de E de dimension finie.*
$u(G)$ est de dimension finie et $\dim u(G) \leq \dim G$ *de plus*

$$G \oplus \operatorname{Ker} u \Longleftrightarrow \dim u(G) = \dim G$$

.

[Ind] Prendre l'image d'une base de G.

[Dem] L'image d'une base B de G est une partie génératrice de $u(G)$, donc si G est de dimension finie, $\dim u(G) \leq \operatorname{card} u(B) \leq \operatorname{card} B$.
Si de plus $G \cap \operatorname{Ker} u = \{0\}$, l'image de B est une partie libre et génératrice de $u(G)$, les deux dimensions sont donc égales.

Remarque: En général, si u est un endomorphisme, $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ ne sont pas supplémentaires, même si la somme des dimensions de ces s.e.v. est celle de E. Par exemple l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$, qui à $\overrightarrow{\imath}$ associe $\overrightarrow{0}$ et à $\overrightarrow{\jmath}$ associe $\overrightarrow{\imath}$, vérifie $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u$!.

Proposition 41 *Soient E et F des K-espaces vectoriels de dimension finie. Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$, alors*

$$\begin{aligned} \operatorname{rang}(u) = \dim F &\implies u \textit{ surjective} \\ \operatorname{rang}(u) = \dim E &\implies u \textit{ injective} \end{aligned}$$

[Ind] Appliquer le théorème du rang.

[Dem] Si $\operatorname{rang}(u) = \dim F$, alors $\operatorname{Im} u$ et F sont des sous-espaces emboîtés de même dimension, ils sont donc égaux.
Si $\operatorname{rang}(u) = \dim E$, alors $\dim \operatorname{Ker} u = 0$ donc $\operatorname{Ker} u = \{0\}$ et l'application linéaire u est injective.

Théorème 14 (Caractérisation des isomorphismes en dimension finie) *Soient E et F des K-espaces vectoriels de dimension finie. Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et si* $\dim E = \dim F$*, alors:*

$$u \textit{ injective} \Longleftrightarrow u \textit{ surjective} \Longleftrightarrow u \textit{ bijective}$$

[Ind] Appliquer le théorème du rang.

[Dem] Si les deux espaces E et F ont même dimension, $\operatorname{rang}(u) = \dim E$ équivaut à $\operatorname{rang}(u) = \dim F$. On applique alors la proposition précédente.

Exemple 10 Polynôme d'interpolation de Lagrange.
Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des scalaires distincts et u l'application de $K[X]$ dans K^{n+1} qui à un polynôme P associe $(P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_n))$. L'application u est linéaire et un polynôme P appartient au noyau de u si et seulement si il possède les scalaires a_0, a_1, ..., a_n comme zéros. On a donc $\operatorname{Ker} u = \pi K[X]$ où $\pi = \prod_{k=0}^{n}(X - a_k)$. $K_n[X]$ est un supplémentaire du noyau de u, la restriction $\tilde{u}$ de u à $K_n[X]$ est donc un isomorphisme entre $K_n[X]$ et l'image de u. Ainsi $\operatorname{Im} u$ est de dimension $n+1$, inclus dans l'espace K^{n+1} et donc $\tilde{u}$ est un isomorphisme entre $K_n[X]$ et K^{n+1}. Ainsi

$$\forall (y_0, \ldots, y_n) \in K^{n+1} \quad \exists! P \in K_n[X] \quad \forall k \in [0, n] \quad P(a_k) = y_k.$$

Ce polynôme P s'appelle polynôme d'interpolation de Lagrange sur les couples (a_0, y_0), ..., (a_n, y_n)

Exercice 34 Soit N et F deux sous-espaces d'un espace vectoriel E de dimension finie. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $N = \operatorname{Ker} u$ et $F = \operatorname{Im} u$.

[Ind] Il faut et il suffit que $\dim N + \dim F = \dim E$.

[Dem] Le théorème du rang montre que s'il existe une telle application, $\dim N + \dim F = \dim E$.
Réciproquement, supposons que $\dim N = p$, $\dim F = q$ et $\dim E = p + q$. En appliquant le théorème de la base incomplète, on peut trouver une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ de E telle que $(e_1, \ldots, e_p)$ soit une base de N et construisons par ailleurs une base de F: $(f_{p+1}, \ldots, f_n)$, l'endomorphisme u défini par l'image suivante de la base $\mathcal{B}$: pour tout $i \in [1, p]$, $u(e_i) = 0$ et pour tout $i \in [p+1, n]$,$u(e_i) = f_i$ est tel que $\operatorname{Im} u = F$ et $N \subset \operatorname{Ker} u$, mais alors N et $\operatorname{Ker} u$ ont la même dimension $p = n - q$ donc ces deux sous-espaces sont égaux, on a donc trouvé une application linéaire qui répond à la question.

Exercice 35 Soit u une application linéaire d'un espace vectoriel E de dimension finie dans un espace vectoriel E'. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que:

$$\dim u(F) = \dim F - \dim (F \cap \operatorname{Ker} u).$$

Soit F' un sous-espace vectoriel de E'. Montrer que:

$$\dim u^{-1}(F') = \dim F' \cap u(E) + \dim \operatorname{Ker} u.$$

[Ind] a) Appliquer le théorème du rang à la restriction de u à F.
b) Appliquer le théorème du rang à la restriction de u à $u^{-1}(F')$.

[Dem] a) Soit v la restriction de u à F. Le noyau de v est l'ensemble des éléments de E qui sont éléments de F et d'image nulle, ainsi $\operatorname{Ker} v = F \cap \operatorname{Ker} u$ et puisque l'image de v est $u(F)$, l'égalité désirée s'obtient donc en appliquant le théorème du rang à v. b) Soit w la restriction de u à $u^{-1}(F')$. L'image de w est $F' \cap u(E)$ et puisque $\operatorname{Ker} u \subset u^{-1}(F')$, on a $\operatorname{Ker} w = \operatorname{Ker} u$. L'égalité s'en déduit aussitôt.

Exercice 36 Soient f et g deux endomorphismes d'un espace E de dimension finie. Montrer que

$$\dim \operatorname{Ker} f \circ g \leq \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g.$$

[Ind] Étudier la restriction de g à $\operatorname{Ker} f \circ g$.

[Dem] Soit h l'application linéaire de $F = \operatorname{Ker} f \circ g$ dans E qui, à un élément x de F associe $g(x)$. Le noyau de h est égal à $F \cap \operatorname{Ker} g$ et son image est incluse dans $\operatorname{Ker} f$. Appliquons le théorème du rang, on a: $\dim F = \dim F \cap \operatorname{Ker} g + \dim \operatorname{Im} h \leq \dim \operatorname{Ker} g + \dim \operatorname{Ker} f$.

Exercice 37 Soient f et g deux endomorphismes d'un espace E de dimension finie n. Montrer que
$$\operatorname{rang} f + \operatorname{rang} g - n \leq \operatorname{rang} f \circ g \leq \min(\operatorname{rang} f, \operatorname{rang} g).$$

[Ind] Pour la première inégalité, étudier la restriction de f à l'image de g.

[Dem] Soit h la restriction de f à $\operatorname{Im} g$, le noyau de h est égal à $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g$ et son image est $f(\operatorname{Im} g) = \operatorname{Im} f \circ g$. Appliquons le théorème du rang: $\dim \operatorname{Im} g = \dim \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g + \dim \operatorname{Im} f \circ g$ soit $\operatorname{rang} f \circ g = \operatorname{rang} g - \dim \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g$. Puisque $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g$ est inclus dans $\operatorname{Ker} f$, on a $\dim \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g \leq n - \operatorname{rang} f$, ainsi $\operatorname{rang} g - (n - \operatorname{rang} f) \leq \operatorname{rang} f \circ g \leq \operatorname{rang} g$. La première inégalité est donc démontrée. D'autre part, on a $\operatorname{Im} f \circ g \subset \operatorname{Im} f$ et on en déduit alors la deuxième inégalité

Exercice 38 Soient f et g deux applications linéaires d'un espace vectoriel E de dimension finie dans un espace vectoriel F. Montrer que
$$|\operatorname{rang} f - \operatorname{rang} g| \leq \operatorname{rang}(f+g) \leq \operatorname{rang} f + \operatorname{rang} g.$$

[Ind] Montrer que $(f+g)(E) \subset f(E) + g(E)$, en déduire la deuxième inégalité. Remarquer que $f = (f+g) + (-g)$ et en déduite la première inégalité.

[Dem] On a $(f+g)(E) = \{f(x) + g(x) \,|\, x \in E\} \subset \{f(x) + g(y) \,|\, x, y \in E\} = f(E) + g(E)$. Ainsi $\operatorname{rang}(f+g) \leq \operatorname{rang} f + \operatorname{rang} g$. On en déduit aussi que $\operatorname{rang}(f+g-g) \leq \operatorname{rang}(f+g) + \operatorname{rang}(-g)$ et puisque $g(E) = -g(E)$, on a $\operatorname{rang}(f) - \operatorname{rang} g \leq \operatorname{rang}(f+g)$. En échangeant les rôles de f et g, on a aussi $\operatorname{rang}(g) - \operatorname{rang} f \leq \operatorname{rang}(g+f)$. On en déduit aussitôt la première inégalité.

Exercice 39 Soient E un K espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2 \iff \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$.

[Ind] Dans l'égalité $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$, seule l'inégalité $\operatorname{Ker} f^2 \subset \operatorname{Ker} f$ est remarquable.

[Dem] Pour tout endomorphisme f, on a $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$.
Supposons que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$ et soit $x \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$, on a $f(x) = 0$ et il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$, on a donc $f^2(y) = 0$ ce qui entraîne $x = f(y) = 0$.
Réciproquement, supposons $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$. Soit $x \in \operatorname{Ker} f^2$, on a $f(f(x)) = 0$ donc $f(x) \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$ ce qui entraîne $f(x) = 0$, ainsi $x \in \operatorname{Ker} f$.

Exercice 40 Soient E un K espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f \iff \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.

[Ind] Dans l'égalité $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$, seule l'inégalité $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} f^2$ est remarquable.
Utiliser l'exercice précédent.

[Dem] Pour tout endomorphisme f, on a $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$.
Supposons que $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$ et soit $x \in \operatorname{Im} f$. Il existe donc $y \in E$ tel que $x = f(y)$, de plus, il existe $y' \in E$ et $z' \in \operatorname{Ker} f$ tel que $y = f(y') + z'$. On en déduit que $x = f(f(y') + z') = f^2(y')$ et donc $x \in \operatorname{Im} f^2$.
Réciproquement, supposons $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$. On en déduit, en appliquant le théorème du rang, que les dimensions des noyaux de f et de f^2 sont égales, et puisque $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$, on a donc $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$. Ainsi, en appliquant l'exercice précédent $\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$. La dimension de $\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$ est donc égale à $\operatorname{rang} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim E$, ce qui implique $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

Exercice 41 Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie supérieure ou égale à 2.
a) Soit x un élément de E, montrer qu'il existe un projecteur dont l'image est $[x]$. En déduire qu'un endomorphisme de E qui commute avec tous les projecteurs est une homothétie.
c) Soit x un élément non nul de E, montrer qu'il existe une symétrie dont l'ensemble des vecteurs invariants est $[x]$. En déduire qu'un endomorphisme de E qui commute avec toutes les symétries est une homothétie.

[Ind] Prendre un supplémentaire de $[x]$. Que vérifie un endomorphisme qui commute avec une projection? Comment caractériser une homothétie ?

[Dem] a) Soit $x \in E$ et F un supplémentaire de l'espace vectoriel engendré par x. La projection sur ce dernier sous-espace parallèlement à F est un des projecteurs cherchés.
Supposons que l'endomorphisme u commute avec tous les projecteurs. Soit $x \in E$ et p un projecteur dont l'image est $[x]$, de l'égalité $u \circ p = p \circ u$, on en déduit facilement que l'image de p est stable par u et donc que $u(x) \in [x]$. Ainsi, pour tout $x \in E$, $\{x, u(x)\}$ est une partie lié, ceci étant une propriété caractéristique des homothéties, on en déduit que u est une homothétie.
b) Soit $x \in E$ et F un supplémentaire de l'espace vectoriel engendré par x. La symétrie par rapport à $[x]$ parallèlement à F est une des symétries cherchées.
Supposons que l'endomorphisme u commute avec toutes les symétries. Soit $x \in E$ et s une symétrie dont l'ensemble des vecteurs invariants est $[x]$. On a $u \circ s(x) = u(x) = s(u(x))$, on en déduit que $u(x)$ est un vecteur invariant par s et donc que $u(x) \in [x]$. Comme précédemment, il en résulte que u est une homothétie.

1.5 Espace dual

Définition 24 *On appelle forme linéaire sur le K-espace vectoriel E toute application linéaire de E dans K, les formes linéaires sont donc les éléments de $\mathcal{L}(E, K)$ noté E^* et appelé espace dual de E.*

Exemple 11 Soit $E = \mathcal{F}(A, K)$ et $x_0 \in A$. $\varphi_{x_0} : E \to K$; $f \mapsto f(x_0)$ est une forme linéaire, appelée forme évaluation en x_0.

Exemple 12 Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, $I : E \to \mathbb{R}$; $f \mapsto \int_0^1 f(t)dt$ est un élément de E^*.

Exemple 13 Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites convergentes. L'application, qui associe à la suite (u_n) sa limite, est une forme linéaire.

Exemple 14 Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels, l'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i$ est un élément de $(\mathbb{R}^n)^*$.

Exemple 15 Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base d'un espace vectoriel de dimension finie n. Pour tout $i \in [1, n]$, l'application qui à un vecteur x associe sa $i^{\grave{e}me}$ coordonnée dans la base $\mathcal{B}$ est une forme linéaire appelée $i^{\grave{e}me}$ forme coordonnée de la base $\mathcal{B}$.

Exercice 42 Montrer qu'une forme linéaire non nulle est surjective.

[Ind] Quelle est la dimension de l'image?

[Dem] Si la forme linéaire f est non nulle, son rang est alors supérieur ou égal à 1, mais puisque la dimension de K est égale à 1, on en déduit que $1 \leq \text{rang}(f) \leq 1$ et donc que $\operatorname{Im} f = K$, f est bien surjective

Proposition 42 *Si E est un espace de dimension finie, E et E^* ont la même dimension.*

[Ind] Prendre une base $\mathcal{B}$ de E de dimension n. Les n formes linéaires coordonnées de la base $\mathcal{B}$ forment une base de E^*.

[Dem] Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_n)$ les n formes coordonnées de la base $\mathcal{B}$. Pour toute forme linéaire f, la forme linéaire $f - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(e_i) f_i$ s'annule sur les éléments de $\mathcal{B}$, d'après le théorème de caractérisation des applications linéaires, on en déduit alors qu'elle est nulle, ainsi $(f_1, \dots, f_n)$ est une partie génératrice de E^*. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des scalaires tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0$, alors, pour tout $k \in [1, n]$, $0 = (\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i)(e_k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(e_k) = \lambda_k$, la famille des n formes coordonnées forme donc une base de E^* qui est donc un espace vectoriel de dimension n

Définition 25 *On appelle hyperplan d'un espace vectoriel E un sous-espace vectoriel H qui est le noyau d'une forme linéaire non nulle φ définie sur E.*
L'équation $\varphi(x) = 0$ $(x \in E)$ est alors appelée une équation de l'hyperplan H.

Proposition 43 *Soit H un sous-espace vectoriel de E. H est un hyperplan de E si et seulement si, pour tout $x \in E - H$, $H \oplus [x] = E$.*

[Ind] Travailler par analyse-synthèse: si $H = \operatorname{Ker} \varphi$ et $x \notin H$ l'application qui à z associe $z - \frac{\varphi(z)}{\varphi(x)} x$ est un projecteur. Réciproquement, si $H \oplus [x] = E$, construire une forme linéaire de noyau H.

[Dem] Soit H un hyperplan défini par une forme linéaire non nulle φ et $x \notin H$. L'application linéaire p qui à $z \in E$ associe $p(z) = z - \frac{\varphi(z)}{\varphi(x)} x$ est linéaire, vérifie

$$\begin{aligned} p(p(z)) &= p(z) - \frac{\varphi(p(z))}{\varphi(x)} x \\ &= p(z) - \frac{\varphi(z - \frac{\varphi((z))}{\varphi(x)} x))}{\varphi(x)} x \\ &= p(z) \end{aligned}$$

p est donc un projecteur et $p(z) = z$ équivaut à $\varphi(z) = 0$ ainsi $\operatorname{Im} p = H$. D'autre part $p(z) = 0$ entraîne $z \in [x]$ donc $\operatorname{Ker} p \subset [x]$ et puisque $p(x) = 0$, on en déduit que $\operatorname{Ker} p = [x]$ et donc $H \oplus [x] = E$.
Réciproquement soit H un sous-espace de E et $x \in E$ tel que $H \oplus [x] = E$. Soit q le projecteur sur $[x]$ parallèlement à H. Pour tout z in E, il existe un unique scalaire λ tel que $z - \lambda_z x \in H$. Soit φ l'application de E dans K définie par $\varphi(z) = \lambda_z$. On vérifie sans peine que φ est linéaire et que $\operatorname{Ker} \varphi = H$ ce qui implique que H est un hyperplan.

Proposition 44 *Soit H un hyperplan de E et φ une forme linéaire non nulle dont H est le noyau. Soit $\psi \in E^*$,*

$$H = \operatorname{Ker} \psi \Longleftrightarrow \exists \alpha \in K^* \quad \psi = \alpha \varphi.$$

[Ind] Prendre $x \notin H$ et calculer α en fonction de x.

[Dem] Si $\alpha \in K^*$, alors $\operatorname{Ker}(\alpha\varphi) = H$. Réciproquement si ψ est une forme linéaire de noyau H, soit $x \in E \setminus H$, la forme linéaire $\psi - \dfrac{\psi(x)}{\varphi(x)} \varphi$ est nulle sur H, nulle sur $[x]$ donc est nulle sur $E = H \oplus [x]$. Ainsi $\psi = \dfrac{\psi(x)}{\varphi(x)} \varphi$.

Proposition 45 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. L'intersection de m hyperplans est un sous espace vectoriel de dimension au moins $n - m$. Réciproquement un sous espace vectoriel de dimension $n - m$ est l'intersection de m hyperplans.*

[Ind]

[Dem]

Proposition 46 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Un sous-espace vectoriel H est un hyperplan si et seulement si la dimension de H est $n - 1$.*

[Ind] Appliquer le théorème du rang.

[Dem] Si H est un hyperplan, et φ une forme linéaire de noyau H. Puisque $\varphi \neq 0$, le rang de φ est supérieur ou égal à 1, inférieure ou égal à la dimension de K. Ainsi, le rang de φ est égal à 1 et $\dim \ker \varphi = n - 1$.
Réciproquement, si H est un sous-espace de dimension $n - 1$, pour tout $x \notin H$, $H \cap [x] = \{0\}$ et $\dim H \oplus [x] = n - 1 + 1 = n$, ainsi H est bien un hyperplan.

Exercice 43 Soient $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ des scalaires distincts. Considérons les applications φ_i ($i \in [0,n]$) qui à $P \in K_n[X]$ associe $\varphi_i(P) = P(a_i)$. Montrer que la famille $(\varphi_i)_{i\in[0,n]}$ est une base de $K_n[X]^*$.

[Ind] Utiliser les polynômes d'interpolation élémentaires de Lagrange pour montrer que la famille est libre.

[Dem] Puisqu'il y a $n+1$ éléments dans cette famille, il suffit de montrer qu'elle est libre pour conclure. Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ des scalaires tels que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \varphi_k = 0$. Soit $i \in [0,n]$, en évaluant cette somme sur le polynôme $P_i = \prod_{k\in[0,n]-\{i\}} (X - a_k)$, on trouve $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \varphi_k(P_i) = \lambda_i \prod_{k\in[0,n]-\{i\}} (a_i - a_k) = 0$ ce qui implique que $\lambda_i = 0$.

Exercice 44 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère les formes linéaires suivantes:

$$\forall i \in \{0, \ldots, n\} \quad \forall P \in E \quad \varphi_i(P) = P^{(i)}(0).$$

Montrer qu'elles forment une base de E^*.

[Ind] Montrer que la famille est libre.

[Dem] Puisqu'il y a $n+1$ éléments dans cette famille, il suffit de montrer qu'elle est libre pour conclure. Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ des scalaires tels que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \varphi_k = 0$. Soit $i \in [0,n]$, en évaluant cette somme sur le polynôme X^i, on trouve $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \varphi_k(X^i) = \lambda_i i! = 0$ ce qui implique que $\lambda_i = 0$.

Exercice 45 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère les formes linéaires suivantes:

$$\forall i \in [0,n] \quad \forall P \in E \quad \varphi_i(P) = \int_0^1 x^i P(x)dx.$$

Montrer qu'elles forment une base de E^*.

[Ind] Montrer que la famille est libre.

[Dem] Puisqu'il y a $n+1$ éléments dans cette famille, il suffit de montrer qu'elle est libre pour conclure. Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ des scalaires tels que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \varphi_k = 0$. On en déduit que, pour tout polynôme P, on a $\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k \right) P(x)dx = 0$. Prenons $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k$, on a $\int_0^1 P^2(x)dx = 0$, la fonction polynomiale P^2 est continue, positive, son intégrale entre 0 et 1 ne peut être nulle que si la fonction P^2 est nulle sur $[0,1]$, ceci entraîne que P possède une infinité de zéros et donc que P est le polynôme nul. Ainsi, pour tout $k \in [0,n]$, $\lambda_k = 0$.

Exercice 46 Soient f et g deux formes linéaires sur E. On suppose que, pour tout $x \in E$, on a $f(x)g(x) = 0$; montrer que $f = 0$ ou $g = 0$.

[Ind] Démontrer par l'absurde.

[Dem] Supposons que $f \times g = 0$, $f \neq 0$ et $g \neq 0$. Il existe donc des éléments x et y de E tels que $f(x) \neq 0$ et $g(y) \neq 0$ qui vérifient de plus $f(y) = g(x) = 0$. On a alors $(f \times g)(x+y) = (f(x)+f(y))(g(x)+g(y)) = f(x)g(y) \neq 0$ en contradiction avec les hypothèses.

Exercice 47 Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On considère, pour tout entier i, la forme linéaire e_i^*, qui associe à un polynôme sa $i^{ème}$ coordonnée dans la base canonique de E. Montrer que la famille (e_i^*) est libre, mais qu'elle ne constitue pas une base de E^*.

[Ind] La forme linéaire qui à P associe $\sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(0)$ n'est pas combinaison linéaire de la famille.

[Dem] Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ des scalaires tels que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k e_k^* = 0$, en évaluant cette somme sur le polynôme X^i pour $i \in [0, n]$, on trouve $\lambda_i = 0$. La famille est donc libre/

L'application φ qui, à $P \in \mathbb{R}[X]$, associe $\sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(0)$ est bien définie puisque, pour tout polynôme P, il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $P^{(d)} = 0$. On vérifie ensuite que φ est linéaire: soient P et Q deux polynômes réels et λ un réel, prenons m supérieur ou égal au plus grand des degrés de P et Q, on a

$$\begin{aligned}
\varphi(P + \lambda Q) &= \sum_{k=0}^{m} (P + \lambda Q)^{(k)}(0) \\
&= \sum_{k=0}^{m} P^{(k)}(0) + \lambda \sum_{k=0}^{m} Q^{(k)}(0) \\
&= \varphi(P) + \lambda \varphi(Q)
\end{aligned}$$

Si φ est une combinaison linéaire de la famille $(e_i^*)_{i \in \mathbb{N}}$, il existe un entier positif n et des scalaires $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que $\varphi = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k e_k^*$, mais ceci implique que $\varphi(X^{n+1}) = 0$ en contradiction avec la définition de φ.

Exercice 48 Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles convergentes. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note φ_k la forme linéaire qui associe à une suite (u_n) la valeur u_k et φ la forme linéaire qui lui associe sa limite. La famille $(\varphi, (\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}})$ est-elle libre?

[Ind] Oui.

[Dem] Soient $\lambda, \lambda_0, \dots, \lambda_n$ des scalaires tels que $\lambda\varphi + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \varphi_k = 0$. Pour $p \in [0, n]$, définissons la suite dont l'élément d'indice p vaut 1 et dont tous les autres éléments sont nuls, cette suite a une limite nulle et en évaluant la somme précédente sur cette suite, on trouve alors $\lambda_p = 0$. Puisque $\varphi \neq 0$, on en déduit finalement que $\lambda = 0$.

Exercice 49 Soit H un hyperplan de E d'équation $f(x) = 0$. Soit u un endomorphisme de E qui laisse fixes tous les éléments de H et tel que $\forall x \in E \quad u(x) - x \in H$.
Montrer qu'il existe un unique vecteur c de H tel que: $\forall x \in E \quad u(x) = x + f(x)c$.
Déterminer tous les s.e.v. de E stables par u.

[Ind] Utiliser un vecteur x_0 n'appartenant pas à l'hyperplan pour trouver c.
Pour trouver un sous-espace stable F, distinguer le cas où $c \in F$

[Dem] Soit $x_0 \in E - H$, puisque $f(x_0) \neq 0$, si c existe, il est déterminé de façon unique par l'équation $u(x_0) = x_0 + f(x_0)c$.
Posons alors $c = \frac{1}{f(x_0)}(u(x_0) - x_0)$. Le vecteur c appartient bien à H et pour tout$x \in E$, il existe $y \in H$ et $\lambda \in K$ tels que $x = \lambda x_0 + y$. On alors $u(x) = u(y) + \lambda u(x_0) = y + \lambda(x_0 + f(x_0)c) = x + \lambda f(x_0)c$, mais, puisque $f(x) = f(y) + \lambda f(x_0) = \lambda f(x_0)$, on a bien $u(x) = x + f(x)c$.
Tous les sous-espaces inclus dans H sont stables par u, prenons F un sous-espace stable par u non inclus dans H, il existe alors un élément x_0 appartenant à $F - H$. Puisque $u(x_0)$ appartient à F, on a donc nécessairement $c \in F$. On vérifie alors que tout sous-espace vectoriel F qui contient c est stable par u.
Les sous-espaces vectoriels stables par u sont donc les sous-espaces contenus dans H et les sous-espaces obtenus comme somme d'un sous-espace contenu dans H et contenant c et d'une droite non contenue dans H car si un sous-espace F n'est pas contenu dans H, en prenant $x_0 \in F - H$, on a $F = (F \cap H) \oplus [x_0]$.

1.6 Travaux Dirigés : Espaces vectoriels

Exercice 50 Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, f et g deux endomorphismes de E. On suppose que $E = \operatorname{Im m} f + \operatorname{Im m} g = \ker f + \operatorname{Ker} g$. Montrer que ces deux sommes sont directes.

[Dem] C'est la formule du rang : $\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im m} f = \dim \ker g + \dim \operatorname{Im m} g$, l'hypothèse donne :
$\dim E = \dim \operatorname{Im m} f + \dim \operatorname{Im m} g - \dim (\operatorname{Im m} f \cap \operatorname{Im m} g) = \dim \ker f + \dim \ker g - \dim (\ker f \cap \ker g)$.
Ainsi $\dim (\operatorname{Im m} f \cap \operatorname{Im m} g) = \dim \operatorname{Im m} f + \dim \operatorname{Im m} g - \dim E = \dim \operatorname{Im m} g - \dim \ker f$
$= \dim E - \dim \ker g - \dim \ker f = -\dim (\ker f \cap \ker g) = 0$,car toute dimension est positive. Ceci prouve que les sommes sont directes.

Exercice 51 Etudier l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n + k$ où k est un réel donné.

[Dem] Nous allons commencer à étudier le cas où $k = 0$. L'ensemble des suites à récurrence linéaire d'ordre 2 aune structure d'espace vectoriel de dimension 2. En effet nous pouvons considérer l'application $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{S}$ qui à un couple de réel (u_0, u_1) associe la suite vérifiant $(*)$ de premier terme (u_0, u_1). On montre que cette application est linéaire et bijective, essentiellement parce que une suite de $\mathcal{S}$ est entièrement déterminé par ces deux premiers termes. On en déduit le résultat. Si $k \neq 0$ on a une structure de variété affine de dimension 2.
Il suffit donc de trouver une base formée de deux éléments pour obtenir toutes les solutions par combinaisons linéaires. On montrera par la réduction que l'on peut chercher des suites géométriques, leur recherche après simplification donne l'équation $r^2 - r - 1 = 0$ ce qui donne pour solutions $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ et $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ et $u_n = -k + \lambda \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ où λ, μ sont des constantes réelles éventuellement déterminées par les conditions initiales

Exercice 52 Soit (P_n) une suite de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que si $\forall n \in \mathbb{N}$: $d^o P_{n+1} > d^o P_n$ alors la famille (P_n) est libre. De plus (P_n) est une base si et seulement si pour tout n $d^o P_n = n$.

[Dem] Pour la première partie si on prend une combinaison linéaire de longueur minimale c'est à dire $\sum_{i=0}^{N} \lambda_i P_{n_i} = 0$ avec $\lambda_N \neq 0$ en regardant les termes de plus haut degré nous obtenons une contradiction.
Ensuite il faut montrer que (P_n) est génératrice ssi $d^0 P_n = n$. Montrons la partie directe par contraposée soit n_0 le plus petit entier tel que $d^0 P_{n_0} \neq n_0$ ainsi $d^0 P_0 = 0, \cdots, d^0 P_{n_0 - 1} = n_0 - 1$ mais $d^0 P_{n_0} > n_0$ et d'après la première partie la famille $(P_n) \cup (X^{n_0})$ est libre et donc X^{n_0} ne peut pas s'exprimer à l'aide des (P_n) et les (P_n) ne sont pas générateurs. Pour la réciproque si $d^0 P_n = n$ pour tout n alors dans $\mathbb{R}_n[X]$ nous avons $n+1$ polynômes $(P_i)_{0\leq i\leq n}$ libres et donc qui forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$, ceci prouve en utilisant la structure emboitée de $(\mathbb{R}_n[X])_n$ que les (P_n) est une base de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 53 Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On pose: $K_p = \ker u^p$et $I_p = \operatorname{Im m} u^p$. Montrer que les suites (K_p) et (I_p) sont stationnaires ; de plus si s est le plus petit des entiers p tels que $I_p = I_{p+1}$ alors $K_s = K_{s+1}$ et si $s \geq r$: $K_{r-1} \neq K_r$. Enfin montrer que $\mathbb{R}^n$ est somme directe de K_s et I_s .

[Dem] On a pour tout p : $\ker u^{p+1} \supset \ker u^p$ car si $u^p(x) = 0$ alors $u^{p+1}(x) = 0$. Ainsi $(\ker u^p)_p$ est une suite croissante de sev de $\mathbb{R}^n$. La suite des dimensions est une suite croissante d'entiers bornée donc convergente c'est à dire stationnaire et par suite il existe p_0 tel que $K_{p_0} = K_{p_0+1} = \cdots = K_{p_0+n}$. De même on a $\operatorname{Im m} u^{p+1} \subset \operatorname{Im m} u^p$ car si $x = u^{p+1}(y)$ on a $x = u^p(u(y))$ ce coup-ci on a une suite des dimensions décroissante bornée donc convergente et comme il s'agit d'entiers on a que cette suite est stationnaire et donc il existe s le plus petit des entiers p tels que $I_p = I_{p+1}$. La formule du rang donne pour tout p : $n = \dim K_p + \dim I_p$ ainsi si $\dim I_p = \dim I_{p+1}$ on a $\dim K_p = \dim K_{p+1}$ et donc $K_s = K_{s+1}$ et si $r \leq s$ alors $K_{r-1} \neq K_r$ puisque $I_{r-1} \neq I_r$. Si x est un élément de $K_s \cap I_s$ alors $u^s(x) = 0$ et il existe y tel que $x = u^s(y)$ ce qui donne $u^{2s}(y) = 0$ c'est à dire $u^s(y) = 0$ car $K_{2s} = K_s$ donc $x = 0$. Ainsi $K_s \cap I_s = \{0\}$ et comme $\dim K_s + \dim I_s = n$ on a $\mathbb{R}^n = K_s \bigoplus I_s$.

Exercice 54 Dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on pose $s(x)=\sin x$. Etudier l'indépendance de la famille $(s; s\circ s; s\circ s\circ s)$.

[Dem] C'est un exercice reliant analyse et algèbre. En effet si on a $\lambda\sin x+\mu\sin\sin x+\nu\sin\sin\sin x=0$ alors en posant $y=\sin x$ on a pour tout $y\in[-1,1]$ la relation $\lambda y+\mu\sin y+\nu\sin\sin y=0$. Faisons un développement limité de cette fonction au voisinage de zéro : $\sin y=y-\frac{y^3}{6}+\frac{y^5}{120}+o\left(y^6\right)$ et $\sin\sin y=y-\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{10}y^5+o\left(y^5\right)$ ce qui donne $(\lambda+\mu+\nu)\,y+\frac{1}{6}\,(-\mu-2\nu)\,y^3+\left(\frac{1}{120}\mu+\frac{1}{10}\nu\right)y^5+o\left(y^5\right)$ l'unicité des coefficients d'un D.L. donne en résolvant le système $\nu=\mu=\lambda=0$.

Exercice 55 [Polynmes d'Hilbert]
1) On considère l'application $\Delta : K[X]\to K[X]$ définie par $\Delta P(X)=P(X+1)-P(X)$
2) Démontrer que Δ est un endomorphisme surjectif et que son noyau est K. (On pensera à se ramener a la dimension finie).
3) Démontrer qu'il existe une suite $(H_0,H_1,\dots,H_n,\dots)$ et une seule d'éléments de $K[X]$ telle que $H_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\Delta H_n=H_{n-1}$ et $H_n(0)=0$. On montrera que $H_n=\frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}$. Ce sont les polynômes de Hilbert, formant une base de $K[X]$.
4) Pour tout Q de $K[X]$, montrer que la décomposition de Q dans la base d'Hilbert est $Q=\sum_n \Delta^n Q)(0)H_n$.
5) Soit Q un élément de $K[X]$, écrit sous la forme $Q=\sum_n \alpha_n H_n$; Montrer que l'unique polynôme P tel que $P(X+1)-P(X)=Q(X)$ et que $P(0)=0$ est donné par la formule suivante: $P=\sum_n \alpha_n H_{n+1}$.
6) Application: P et Q étant associés comme en 5) montrer que: $S_n=\sum_{m=0}^{n} Q(m)=P(n+1)$.
En déduire la somme des puissances $p^{ème}$ des entiers infrieurs un entier donné, pour $p=1,2,3....$