Chapitre 10

Suites et séries de fonctions

10.1 introduction

À l'époque de Cauchy et Bolzano, entre 1800 et 1850, le concept de convergence uniforme n'était pas connu. Cauchy en 1821 affirmait que si les $u_n(x)$ étaient continues alors la somme $\sum u_n$ aussi. Abel en 1826 pense que ce résultat admet des exeptions et il propose $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(nx)}{n}$ comme contre exemple. La définition de la convergence uniforme revient à Weierstrass, en 1841, ainsi que la démonstration de ce résultat en 1861. De 1850 à 1880 les mathématiciens ne savaient pas si la réciproque était vraie. C'est Cantor 1880 qui mit fin au débat en proposant le contre-exemple :$\sum \frac{2nx}{1+n^2x^2}$. La notion de convergence normale est découvert par Weierstrass et son école. On ne parle pas de la convergence simple car elle est étroitement liée à l'étude des séries.

10.2 Généralités sur les suites de fonctions

10.2.1 Convergence simple

K est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une suite de fonctions (f_n) appartenant à $\mathcal{F}(I,K)$ est simplement convergente s'il existe une fonction $f \in \mathcal{F}(I,K)$ telle que*

$$\forall x \in I \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

L'unique fonction f vérifiant cette propriété est appelée limite simple de la suite (f_n)

Proposition 1 *La somme, le produit par un scalaire de suites de fonctions convergeant simplement converge simplement.*

[Ind] Vérifier ...

[Dem] Ces propriétés proviennent des propriétés des suites numériques convergentes. En effet f_n converge simplement vers f sur I signifie que $\forall x \in I$ la suite numérique $(f_n(x))_n$ converge vers le scalaire $f(x)$.

Exercice 1 Étudier la convergence simple des suites (f_n) de fonctions numériques suivantes définies par leur expression en fonction de l'entier n:

a) $f_n(x) = \begin{cases} (n-1)x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 1-x & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$

b) $f_n(x) = x^n$ $(x \in [0,1])$

c) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx^2}$ $(x \in \mathbb{R})$

d) $f_n(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{n+1}}$ $(x \in \mathbb{R})$

e) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+(n-x)^2}$ $(x \in \mathbb{R})$

f) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+|nx|}$ $(x \in \mathbb{R})$

g) $f_n(x) = \mathrm{e}^{-n(x^2+1)}$ $(x \in \mathbb{R})$

h) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$ $(x \in \mathbb{R}_+)$

i) $f_n(x) = x\mathrm{e}^{-nx}$ $(x \in \mathbb{R}_+)$

j) $f_n(x) = \begin{cases} n^2x(1-nx) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$

k) $f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx}\sin x$ $(x \in \mathbb{R}_+)$

l) $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{1+n^2x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$

[Ind] Pour chaque cas faire le graphe de quelques fonction f_n et pour trover la limite raisonner à x fixé.

[Dem] a) Si $x = 0$ alors $f_n(0) = 0$ et si $x \neq 0$ alors $\exists n_0 \,:\, \forall n \geq n_0 \, \frac{1}{n} < x < 1$ donc $f_n(x) = 1 - x$. Ainsi f_n tend vers la fonction f définie par $\left\{ \begin{array}{l} \text{si } x = 0 \text{ alors } f(x) = 0 \\ \text{si } x \neq 0 \text{ alors } f(x) = 1 - x \end{array} \right.$

b) si $x = 1$ alors $\forall n f_n(1) = 1$ sinon $f_n(x) = x^n \to 0$. La suite tend vers f définie par $\left\{ \begin{array}{l} \text{si } x = 1 \text{ alors } f(x) = 1 \\ \text{si } x \neq 1 \text{ alors } f(x) = 0 \end{array} \right.$

c) si $x = 0$ alors $f_n(0) = 1$ si $x \neq 0$ alors $f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2} \to 0$ la suite tend vers f définie par $\left\{ \begin{array}{l} \text{si } x = 0 \text{ alors } f(x) = 1 \\ \text{si } x \neq 0 \text{ alors } f(x) = 1 - x \end{array} \right.$

d) On a pour tout n $f_n(0) = 1$ et si $x \neq 0$ alors $f_n(x) \to 1$ la limite simple est donc la fonction constante égale à 1.

e) á x fixé $f_n(x) \to 0$ la limite est identiquement nulle.

f) Trois cas $\left\{ \begin{array}{l} \text{si } x > 0 \; f_n(x) \to 1 \\ \text{si } x = 0 \; f_n(x) = 0 \to 0 \\ \text{si } x < 0 \; f_n(x) \to -1 \end{array} \right.$

g) $f_n \to 0$.

h) $\forall n$ $f_n(0) = 1 \to 1$ et si $x > 0$ $f_n(x) \to 0$ la limite est f définie par $\left\{ \begin{array}{l} \text{si } x = 0 \text{ alors } f(x) = 1 \\ \text{si } x \neq 0 \text{ alors } f(x) = 0 \end{array} \right.$

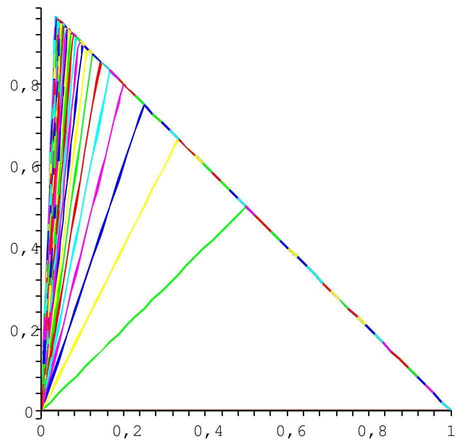
i) si $x = 0$ alors $f_n(x) = 0$ et si $x > 0$ $f_n(x) \to 0$. La limite est identiquement nulle.

j) On a $f_n(0) = 0$ et si $x > 0$ il existe n_0 tel que à partir de ce rang $x \in [\frac{1}{n}, 1]$ et $f_n(x) = 0$ la limite est nulle.

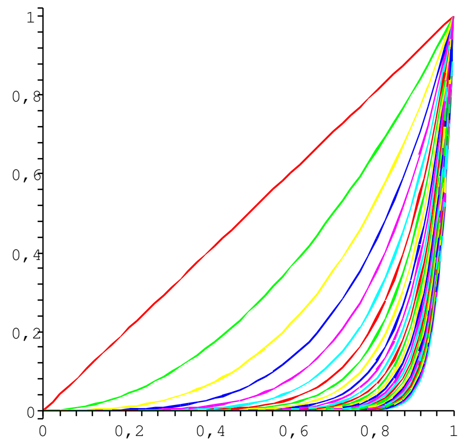
k) en 0 f_n est nulle et si $x > 0$ alors $f_n(x) \leq e^{-nx} \to 0$, la limite est nulle.

l) $f_n(0) = 0$ et sinon $\frac{|\sin nx|}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{1+n^2x^2} \to 0$. La limite est nulle.

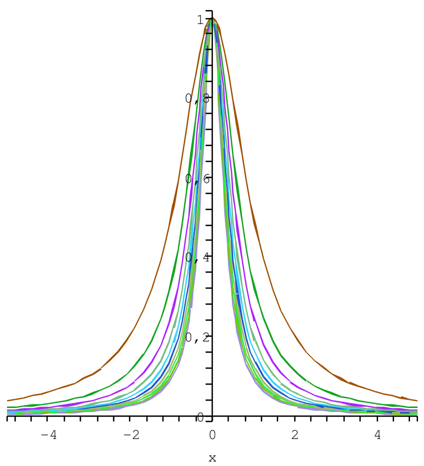
Exemplea



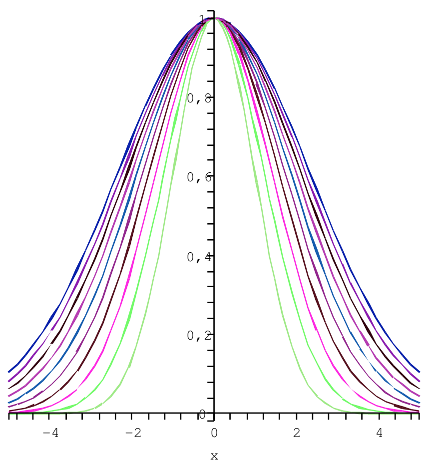
Exempleb



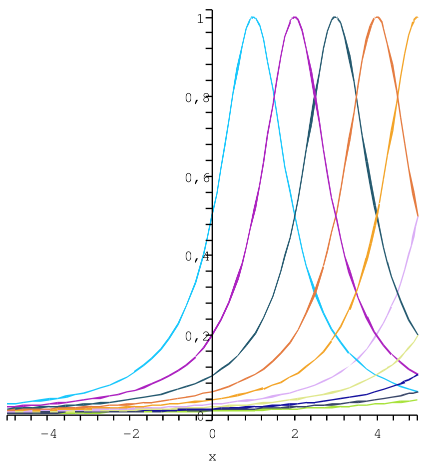
Exepmlec



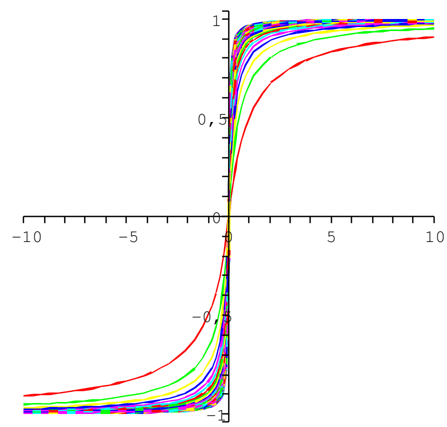
Exepmled



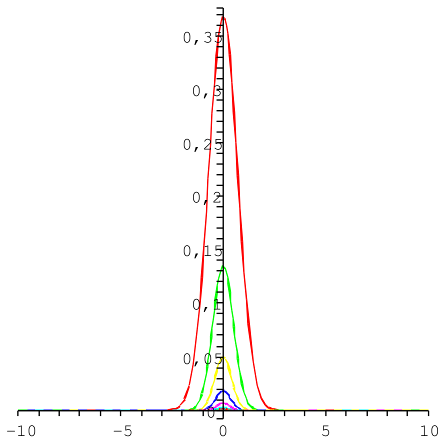
Exepmlee



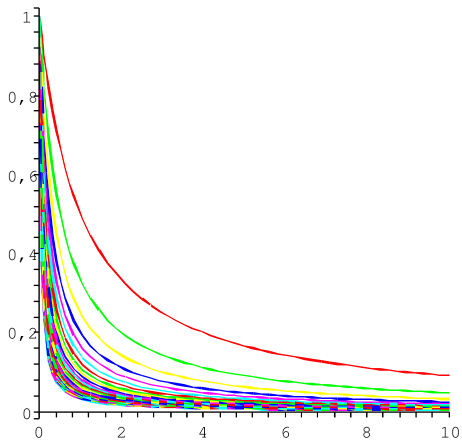
Exemplef



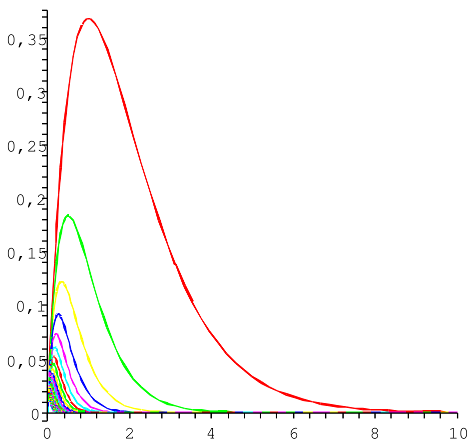
Exempleg



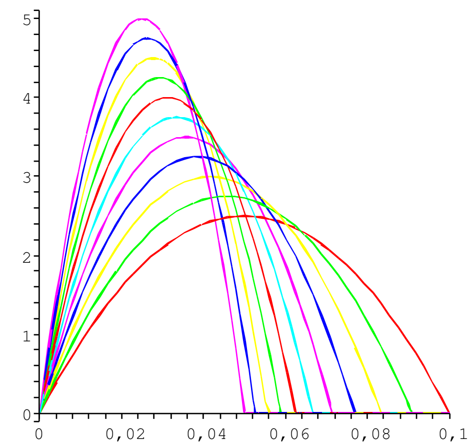
Exempleh



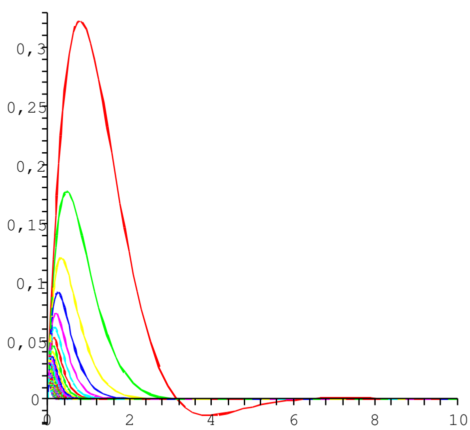
Exemplei



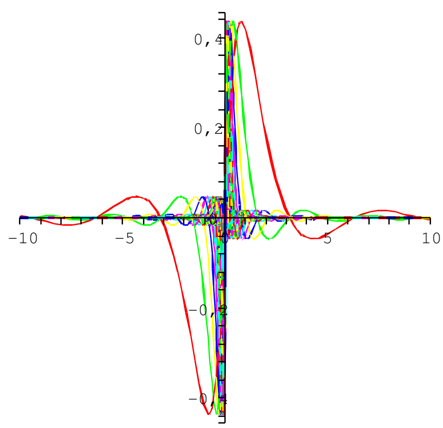
Exemplej



Exemplek



Exemplel



Exercice 2 Montrer que la limite simple d'une suite de fonctions positives (resp croissantes) (resp convexes) est positive (resp croissante) (resp convexe)

[Ind] Il s'agit de passer à la limite dans des inégalités.

[Dem] Soit une suite de fonctions $(f_n)_n$ convergeant simplement vers f. Par exemple si on suppose les f_n positives alors $\forall x, \forall n : f_n(x) \geq 0$. En passant à la limite quand n tend vers l'infini on a $\forall x : f(x) \geq 0$. On fait de même pour les autres cas en écrivant l'inégalité supposée.

10.2.2 Convergence uniforme

Définition 2 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une suite de fonctions (f_n) appartenant à $\mathcal{F}(I, K)$ est uniformément convergente s'il existe une fonction $f \in \mathcal{F}(I, K)$ telle que :*
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in I$ on ait : $n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Ce qui peut se traduire par :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies f_n - f \quad \textit{est une fonction bornée}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Dans l'espace $\mathcal{B}(\mathcal{I})$ des fonctions bornées sur I cela se traduit par une convergence pour la norme infinie : f_n converge uniformément vers f sur I si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n - f||_\infty = 0$.
L'unique fonction f vérifiant cette propriété est appelée limite uniforme de la suite (f_n)

Proposition 2 *La suite (f_n) converge uniformément vers f si et seulement si la suite $(f_n - f)$ converge uniformément vers la fonction nulle.*

[Ind] Faire la différence.

[Dem] La suite $(f_n - f)$ converge uniformément vers 0 signifie que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies f_n - f \quad \text{est une fonction bornée}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Proposition 3 *Une suite de fonctions uniformément convergente est simplement convergente vers la même limite.*

[Ind] Ce qui est vrai pour tous est vrai pour chacun.

[Dem] Pour tout $x \in I$, on a, à partir d'un certain rang, $|f_n(x) - f(x)| \leq \sup\limits_{t\in I} |f_n(t) - f(t)|$. On en déduit que la suite $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$, par encadrement.

Proposition 4 *La somme, le produit par un scalaire de suites de fonctions convergeant uniformément convergent uniformément.*

[Ind] Utiliser les propriétés de la norme de la convergence uniforme définie sur les fonctions bornées.

[Dem] Soient (f_n) et (g_n) des suites de fonctions définies sur I et convergeant uniformément vers f et g et λ un scalaire. À partir d'un certain rang n_0, $f_n - f$ est une fonction bornée, à partir d'un autre rang n_1, $g_n - g$ est une fonction bornée, donc à partir du rang $\sup(n_0, n_1)$, $f_n + \lambda g_n - (f + \lambda g)$ est bornée et $\sup\limits_{x\in I} |f_n + \lambda g_n - (f + \lambda g)| \leq \sup\limits_{x\in I} |f_n - f| + |\lambda| \sup\limits_{x\in I} |g_n - g|$.
On en déduit la convergence uniforme de la suite $(f_n + \lambda g_n)$ vers la fonction $f + \lambda g$.

Proposition 5 *La suite de fonctions (g_n) appartenant à $\mathcal{F}(I, K)$ est uniformément convergente vers 0 si et seulement s'il existe une suite de réels positifs (α_n) tendant vers 0 telle qu'à partir d'un certain rang, $\sup\limits_{x\in I} |g_n(x)| \leq \alpha_n$.*

[Ind] Vérifier ...

[Dem] Si, à partir d'un certain rang, $\sup_{x\in I}|g_n(x)| \leq \alpha_n$, alors la fonction g_n est bornée et la convergence de la suite (α_n) vers 0 entraîne la convergence uniforme de la suite (g_n) vers 0.
Réciproquement, si la suite (g_n) converge uniformément vers 0, la suite de terme général $\alpha_n = ||g_n||_\infty$ définie à partir d'un certain rang convient.

Proposition 6 *La suite de fonctions (g_n) appartenant à $\mathcal{F}(I, K)$ ne converge pas uniformément vers 0 si et seulement s'il existe une suite d'éléments (x_n) appartenant à I telle que la suite $(g_n(x_n))$ ne converge pas vers 0.*

[Ind] Prendre la négation de la convergence uniforme.

[Dem] Montrons que si il y a convergence uniforme vers 0 alors pour toutes suites (x_n) de I la suite $(g_n(x_n))_n$ tend vers 0. Cela résulte de la majoration : $\forall n\ :\ |g_n(x_n)| \leq ||g_n||_\infty$. Si la suite (g_n) ne converge pas vers 0, on peut avoir :

1) la négation de " à partir d'un certain rang la fonction g_n est bornée " , soit, pour tout entier n, il existe un entier $p \geq n$ tel que la fonction g_p n'est pas bornée. On peut alors construire une suite strictement croissante d'entiers (p_n) tel que, pour tout entier n, g_{p_n} est non bornée et pour cette fonction , un élément x_{p_n} de I tel que $|g_{p_n}(x_{p_n})| \geq p_n$, on construit alors une suite (x_n) d'élément de I en prenant, pour $n \notin \{p_0, p_1, \dots\}$, $x_n = x$ (x étant un élément quelconque fixé de I). La suite $g_n(x_n)$ est alors non bornée et ne converge pas 0.

2) le fait que la suite (g_n) est constituée de fonctions bornées à partir d'un certain rang et que la suite $(||g_n||_\infty)$ ne converge pas vers 0. Il existe alors un réel $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout entier n, il existe un entier $p > n$ tel que $||g_p||_\infty > \varepsilon$. Pour un tel entier p, on peut donc trouver un élément x_p de I tel que $|g_p(x_p)| > \varepsilon$ et comme précédemment construire une suite (x_n) d'élément de I tel que la suite $(g_n(x_n))$ ne converge pas vers 0 car, pour une infinité de valeurs $|g_n(x_n)| > \varepsilon$.

Proposition 7 (Critère de Cauchy) *Les propriétés (1) et (2) sont équivalentes:*
(1) La suite (f_n) d'éléments de $\mathcal{F}(I, K)$ est uniformément convergente.
(2) Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(f_n - f_{n_0})_{n\geq n_0}$ est une suite de Cauchy de l'espace $\mathcal{B}(I, K)$ des fonctions bornées de I à valeurs dans K muni de la norme infinie.

[Ind] L'espace vectoriel K est complet , cf chapitre 7.

[Dem] Propriété déjà démontrée.

Exercice 3 Reprendre l'exercice précédent en étudiant la convergence uniforme de ces suites. Si la convergence n'est pas uniforme, essayer de trouver les intervalles inclus dans l'ensemble de définition sur lesquels la convergence est uniforme.

[Ind] Pour chaque cas chercher si le $sup(|f_n - f|)$ tend vers zéro.

[Dem] a) $\sup_{x\in[0,1]}(|f_n - f|) \geq \left|f_n(\frac{1}{2n}) - f(\frac{1}{2n})\right| = 1 - \frac{1}{2n}$ qui ne tend pas vers 0 mais vers 1 il n'y a donc pas convergence uniforme. Par contre il y a convergence uniforme sur tout $[\varepsilon, 1]$ pour $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon < 1$ car $\sup_{[\varepsilon,1]}(|f_n - f|) = 0$
b) $\sup_{[0,1]}(|f_n - f|) \geq \left|f_n(1 - \frac{1}{n}) - 0\right| = (1 - \frac{1}{n})^n \to e^{-1}$, il n'y a pas convergence uniforme. Par contre pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$ il y a convergence uniforme car $\sup_{[0,\varepsilon]}(|f_n - f|) = \varepsilon^n \to 0$.
c) Il n'y a pas convergence uniforme car $\sup_{\mathbb{R}}(|f_n - f|) \geq f_n(\frac{1}{n}) \to 1$. Mais sur $I_\varepsilon =]-\infty, -\varepsilon[\cup]\varepsilon, +\infty[$ on a $\sup_{I_\varepsilon}(|f_n - f|) = f_n(\varepsilon) \to 0$.
d) $\sup_{\mathbb{R}}(|f_n - f|) \geq \left|f_n(\sqrt{n}) - 1\right| \to e^{-1} - 1 \neq 0$. Par contre sur tout $[-a, +a]$ on a $\sup_{[-a,+a]}(|f_n - f|) = \left|1 - e^{-\frac{a^2}{n+1}}\right| \to 0$.

e) Il n'y a pas de convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ car $\sup_{\mathbb{R}}(|f_n - f|) \geq f_n(n) = 1$ mais sur $I_a =]-\infty, a]$ on a $\sup_{I_a}(|f_n - f|) = f_n(a)$ pour $n > a$ qui tend vers 0.
f) Il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ car $\sup_{\mathbb{R}}(|f_n - f|) \geq f_n(\dfrac{1}{n}) = \dfrac{1}{2}$ qui ne tend pas vers 0. Mais sur $I_\varepsilon =]-\infty, \varepsilon[\cup]\varepsilon, +\infty[$ on a $\sup_{I_\varepsilon}(|f_n - f|) = 1 - f_n(\varepsilon) \to 0$.
g) Ah ! On a $\sup_{\mathbb{R}}(|f_n - f|) = \sup_{\mathbb{R}}(|f_n) = e^{-n}$ qui tend vers 0 il y a convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.
h) Il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$ cae $\sup_{\mathbb{R}^+}(|f_n - f|) \geq f_n(\dfrac{1}{n}) = \dfrac{1}{2}$ qui ne tend pas vers 0. Mais sur $I_\varepsilon = [\varepsilon, +\infty[$ avec $\varepsilon > 0$ on a $\sup_{I_\varepsilon}(|f_n - f|) = \dfrac{1}{1 + n\varepsilon}$ qui tend bien vers 0.
i) La limite étant nulle on a $f_n'(x) = (1 - nx)e^{-nx}$ la fonction croit de 0 à $\frac{e^{-1}}{n}$ entre 0 et $\frac{1}{n}$ puis décroit jusqu'à 0 en $+\infty$ ainsi $\sup_{\mathbb{R}^+}(|f_n - f|) = \dfrac{e^{-1}}{n}$ qui tend bien vers 0, il y a convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.
j) Un tableau de variations donne que $\sup_{[0,1]}(|f_n - f|) = f_n(\dfrac{1}{2n}) = \dfrac{n}{4}$. Il n'y a pas convergence uniforme sur $[0, 1]$. Par contre sur $[\varepsilon, 1]$ avec $0 < \varepsilon \leq 1$ on a $\sup(|f_n - f|) = 0$ pour n assez grand.
k) En utilisant $\left|e^{-nx} \sin x\right| \leq e^{-nx}x$ sur $\mathbb{R}^+$ et en utilisant i) on a convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.
l) En prenant $x_n = \frac{1}{n}$ on a $f_n(x_n) = \frac{\sin 1}{2}$, il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$, Sur $I_\varepsilon = \{|x| \geq \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ on a $\sup_{I_\varepsilon}(|f_n - f|) \leq \dfrac{1}{1 + n^2\varepsilon^2}$ tend bien vers 0, il y a convergence uniforme sur I_ε pour tout $\varepsilon > 0$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

10.2.3 Propriétés d'une limite uniforme

Proposition 8 *Une limite uniforme f d'une suite de fonctions (f_n) bornées est bornée.*

[Ind] L 'égalité $f = f_n + (f - f_n)$ est intéressante à partir d'un certain rang :

[Dem] A partir d'un certain rang n_0 , la fonction $f - f_n$ est bornée, et puisque f_{n_0} est bornée, la fonction f, somme des fonctions f_{n_0} et $f - f_{n_0}$, est bornée.

Exercice 4 Montrer que le produit de deux suites de fonctions bornées réelles ou complexes convergeant uniformément converge uniformément. Le résultat reste-t-il valable si on oublie l'hypothèse " bornées " ?

[Ind] Utiliser la norme infinie et l'égalité qui permet de démontrer le produit des limites. Trouver un contre-exemple.

[Dem] Soit $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ des suites de fonctions bornées convergeant uniformément vers f, g sur I. On a $f_ng_n - fg = (f_n - f)g_n + (g_n - g)f$ ce qui donne en passant à la norme infinie sur I : $||f_ng_n - fg|| \leq ||f_n - f||||g_n|| + ||g_n - g||||f||$. Comme $(||g_n||)_n$ est convergente, cette suite est borné, f est bornée donc par encadrement $||f_ng_n - fg||$ tend vers 0, c'est à dire $(f_ng_n)_n$ converge uniformément vers fg sur I. Le problème est si on ne suppose plus les suites bornées est que f peut ne pas être bornée, la preuve ci-dessus est en défaut.

Théorème 1 *Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans K. Si*

- *la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction f*
- *il existe a adhérent à I tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\ell_n \in K$ telle que $\lim_{x\to a} f_n(x) = \ell_n$*

alors la suite (ℓ_n) est convergente vers un élément $\ell \in K$ et $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.

[Ind] Pour montrer qu'un suite de scalaires converge sans connaître la limite, on peut montrer qu'elle est une suite de Cauchy.

[Dem] Soit ε un réel strictement positif.

- il existe un entier $n_0(\varepsilon)$ tel que, pour tout entier p, l'inégalité $p \geq n_0(\varepsilon)$ entraîne $||f_p - f||_\infty \leq \varepsilon$
- Pour tout entier p, il existe un réel $\eta(\varepsilon, p) > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, l'inégalité $||x-a|| \leq \eta(\varepsilon, p)$ entraîne $|f_p(x) - \ell_p| \leq \varepsilon$.

Soient p et q des entiers supérieurs à n_0, puisque a est adhérent à I, il existe un élément x de I qui vérifie $||x-a|| \leq \inf\{\eta(\varepsilon,p), \eta(\varepsilon,q)\}$. On a alors

$$\begin{aligned}|\ell_p - \ell_q| &\leq |\ell_p - f_p(x) + f_p(x) - f(x) + f(x) - f_q(x) + f_q(x) - \ell_q| \\ &\leq |\ell_p - f_p(x)| + |f_p(x) - f(x)| + |f(x) - f_q(x)| + |f_q(x) - \ell_q| \\ &\leq 4\varepsilon\end{aligned}$$

On en déduit que la suite (ℓ_n) est une suite de Cauchy et donc qu'elle est convergente vers un scalaire ℓ:

- il existe un entier $n_1(\varepsilon)$ tel que, pour tout entier p, l'inégalité $p \geq n_1(\varepsilon)$ entraîne $|\ell_p - \ell| \leq \varepsilon$.

Posons alors $n_2 = \sup\{n_0(\varepsilon), n_1(\varepsilon)\}$. On constate alors, que, pour tout élément x de I qui vérifie $||x-a|| \leq \eta(\varepsilon, n_2)$, on a

$$\begin{aligned}|f(x) - \ell| &\leq |f(x) - f_{n_2}(x) + f_{n_2}(x) - \ell_{n_2} + l_{n_2} - \ell| \\ &\leq |f(x) - f_{n_2}(x)| + |f_{n_2}(x) - \ell_{n_2}| + |l_{n_2} - \ell| \\ &\leq 3\varepsilon\end{aligned}$$

ce qui implique bien $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

Le théorème est valable si $a \in \{-\infty, +\infty\}$
Remarque: Sous les hypothèses du théorème précédent, on peut donc écrire :

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x).$$

Proposition 9 *La limite uniforme d'une suite de fonctions continues en un point (resp continues) est continue en ce point (resp continue).*

[Ind] La continuité est affaire de limite..

[Dem] Il suffit d'appliquer le théorème précédent à $\ell_n = f_n(a)$

Proposition 10 *Soit (f_n) une suite de fonctions continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans K. Si la suite (f_n) converge simplement vers f sur I et que, pour tout intervalle fermé borné J inclus dans I, la suite $f_{n|J}$ converge uniformément vers $f_{|J}$, alors la fonction f est continue sur I.*

[Ind] La continuité est une propriété locale.

[Dem] Soit a un point adhérent à I. Il existe un segment J inclus dans I tel que $a \in J$. En appliquant la proposition précédente on a que f est continue sur J danc en a. Ceci étant vraie pour tout a on en déduit que f est continue sur I.

Exercice 5 Soit $(u_{n,p})_{n,p\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à double indice. On suppose qu'il existe deux suites réelles $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(l_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telles que, pour $n, p \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{p\to\infty} u_{n,p} = v_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} u_{n,p} = l_p$. Peut-on affirmer que si la suite (l_p) converge vers l alors la suite (v_n) converge vers ce même réel ? Trouver une condition suffisante pour cela.

[Ind] Trouver un contre-exemple le plus simple possible. Inspirez-vous de l'interversion de limite ci-dessus.

[Dem] En prenant $u_{n,p} = \left\{\begin{array}{l}\frac{1}{n^2-p^2} \text{ si } p \neq n \\ 0 \text{ si } p = n\end{array}\right.$ on montre que $\sum\limits_p \sum\limits_n u_{np} = -\sum\limits_n \sum\limits_p u_{np} \neq 0$. Il suffit de faire une hypothèse d'uniforme convergence par exemple de $(u_{np})_n$ uniformément par rapport à p.

10.3 Généralités sur les séries de fonctions

10.3.1 Convergence simple

Définition 3 *Soient E un espaces vectoriel normé et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une série de fonctions $\sum u_n$ définies sur I à valeurs dans K est simplement convergente s'il existe une fonction s définie sur I à valeurs dans K telle que*

$$\forall x \in I \quad \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = s(x)$$

L'unique fonction s vérifiant cette propriété est appelée somme simple de la série $\sum u_n$

Remarque: On appelle suite des sommes partielles de la série de fonctions $\sum u_n$, la suite de fonctions de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Dire que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement vers s équivaut à dire que la suite de fonction (S_n) converge simplement vers s.

Proposition 11 *Si une série de fonctions converge simplement, la suite des termes généraux converge vers 0.*

[Ind] Fixer x appartenant à A.

[Dem] Pour x fixé dans I, c'est une condition nécessaire de convergence des séries.

Définition 4 *Soit $\sum u_n$ une série de fonctions définie sur I. On dit que la série est absolument convergente si, pour tout $x \in I$, la série $\sum |u_n(x)|$ est convergente.*

Proposition 12 *La convergence absolue d'une série de fonctions entraîne sa convergence simple.*

[Ind] L'espace vectoriel K est complet.

[Dem] On fixe x appartenant à I et on applique la proposition sur la convergence absolue des séries numériques.

Exercice 6 Étudier la convergence simple des séries $\sum u_n$ de fonctions numériques suivantes définies par leur expression en fonction de l'entier n:
a) $u_n(x) = \mathrm{e}^{-nx}$ $(x \in \mathbb{R}_+)$
b) $f_n(x) = x^n$ $(x \in [0, 1[)$
c) $f_n(x) = \dfrac{1}{2^n} \sin 3^n x$ $(x \in \mathbb{R})$
d) $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + (n - x)^2}$ $(x \in \mathbb{R})$
e) $f_n(x) = n^x$ $(x \in R)$
f) $f_n(x) = (-1)^n n^x$ $(x \in \mathbb{R})$
g) $f_n(x) = \mathrm{e}^{-n(x^2+1)}$ $(x \in \mathbb{R})$
h) $f_n(x) = \dfrac{1}{n} \mathrm{Arctan}\, \dfrac{x}{n}$ $(x \in \mathbb{R})$
i) $f_n(x) = n\mathrm{e}^{-nx}$ $(x \in R_+^*)$
j) $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x(1 - nx) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$
k) $f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx} \sin x$ $(x \in \mathbb{R}_+)$
l) $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{1 + n^2 x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$

[Ind] Si la série se calcule, faîtes-le. Sinon cela revient à une série numérique car x est fixé.

[Dem] Raisonnons à x fixé.

a) Pour $x=0$ la série ne converge pas, pour $x>0$ c'est une série géométrique de raison plus petite que 1. On a convergence simple sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}}$.

b) Il y a convergence simple sur $[0,1[$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

c) Pour tout x on a $|f_n(x)| \le \dfrac{1}{2^n}$ il y a donc convergence simple sur tout $\mathbb{R}$.

d) A x fixé on a $f_n(x) \sim \frac{1}{1+n^2}$ il y a donc convergence simple sur tout $\mathbb{R}$.
e) D'après Riemann il ya convergence simple que sur $]-\infty,-1[$.
f) Autorisant la semi-convergence cette série converge sur $]-\infty,0[$ pour $x \ge 0$ le terme général ne tend pas vers 0.
g) A x fixé on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2\mathrm{e}^{-n(x^2+1)} = 0$ il y a convergence sur tout $\mathbb{R}$.
h) Pour $x=0$ il y a convergence c'est la série nulle, sinon on a $|f_n(x)| \sim \dfrac{|x|}{n^2}$ il y a convergence simple sur $\mathbb{R}$.
i) Pour $x>0$ on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 n\mathrm{e}^{-nx} = 0$ il y a donc convergence simple sur $\mathbb{R}_+^*$.
j) Si $x=0$ la série converge et si $x>0$ le terme général est nul pour n assez grand. La série converge simplement sur $[0,1]$.
k) Si $x=0$ la série est nulle, sinon on a $\left|\mathrm{e}^{-nx}\sin x\right| \le \mathrm{e}^{-nx}$ et d'après a) la série converge sur $\mathbb{R}^+$.
l) Si $x=0$ la série est nulle. Si $x \ne 0$ on a $|f_n(x)| \le \dfrac{1}{n^2x^2}$ il y a convergence simple sur $\mathbb{R}$.

10.3.2 Convergence uniforme

Définition 5 *Soient E un espace vectoriel normé et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une série de fonctions $\sum u_n$ définies sur I à valeurs dans K est uniformément convergente s'il existe une fonction s définie sur I à valeurs dans K telle que*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \ge n_0 \implies s - \sum_{k=0}^{n} u_n \quad \textit{est une fonction bornée}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} \left| \sum_{k=0}^{n} u_k(x) - s(x) \right| = 0$$

L'unique fonction s vérifiant cette propriété est appelée somme uniforme de la série $\sum u_n$

Remarque: Dire que la série de fonctions $\sum u_n$ est uniformément convergente vers s équivaut à dire que la suite de fonction $(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k)$ converge uniformément vers s.

Proposition 13 *Une série de fonctions uniformément convergente est simplement convergente vers la même somme.*

[Ind] Étudier la suite des sommes partielles des fonctions

[Dem] Déjà vu.

Proposition 14 *Si une série de fonctions converge uniformément, la suite des termes généraux converge uniformément vers 0.*

[Ind] En notant (S_n) la suite des somme partielles , la suite $S_n - S_{n-1}$ converge uniformément vers 0.

[Dem] On vérifie aisément que si la suite (S_n) des sommes partielles converge uniformément vers s , la suite $(S_{n-1})_{n\ge1}$ converge uniformément vers s, ainsi la différence $(S_n - S_{n-1})_{n\ge1}$ converge uniformément vers 0.

Proposition 15 *Soit $\sum u_n$ une série d'éléments de $\mathcal{F}(I,K)$ qui converge simplement. La série $\sum u_n$ converge uniformément si et seulement si la suite de fonctions $(\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k)$ converge uniformément vers* 0.

[Ind] La suite en question est la suite des restes qui est définie grâce à la convergence simple.

[Dem] La série converge uniformément sur I signifie que $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} \left|\sum_{k=0}^{n} u_k(x) - s(x)\right| = 0$, mais $\sum_{k=0}^{n} u_k(x) - s(x)$ est exactement la suite des restes.

Proposition 16 (Critère de Cauchy) *Les propriétés (1) et (2) sont équivalentes: (1) La série $\sum u_n$ d'éléments de $\mathcal{F}(I,K)$ est uniformément convergente.*
(2) Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que la suite $\left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right)_{n\geq n_0}$ est une suite de Cauchy de l'espace $\mathcal{B}(I,K)$ des fonctions bornées de I dans K muni de la norme infinie.

[Ind] Étudier la suite des sommes partielles.

[Dem] Clair

10.3.3 Convergence normale d'une série de fonctions

Définition 6 *Soit $\sum u_n$ une série de fonctions. On dit qu'elle est normalement convergente si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in I$, $|u_n(x)| \leq a_n$ et si la série majorante $\sum a_n$ est convergente, ce qui équivaut à dire la série numérique $\sum ||u_n||_\infty$ est convergente.*

Théorème 2 *Soit $\sum u_n$ une série de fonctions définie sur I intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans K. La convergence normale de la série $\sum u_n$ entraîne sa convergence uniforme et donc sa convergence simple.*

[Ind] Utiliser le critère de Cauchy

[Dem] La suite $\sum_{k=0}^{n} ||u_n||_\infty)$ est une suite de Cauchy, donc , pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que, pout tous entiers p et q, l'inégalité $q \geq p \geq n_0$ entraîne $\sum_{k=p}^{q} ||u_k||_\infty \leq \varepsilon$. Mais alors, pour tout x appartenant à I , on a

$$\left|\sum_{k=p}^{q} u_k(x)\right| \leq \sum_{k=p}^{q} ||u_k||_\infty \leq \varepsilon$$

on reconnaît donc le critère de Cauchy sur la convergence uniforme des séries de fonctions.

Proposition 17 *La convergence normale d'une série de fonctions $\sum u_n$ définie sur I entraîne sa convergence absolue: pour tout $x \in I$, $\sum |u_n(x)|$ converge.*

[Ind] Fixer x appartenant à I

[Dem] Pour x fixé dans I , la série numérique $\sum ||u_n||_\infty$ est une série majorante et convergente de la série $\sum u_n(x)$.

Exercice 7 Reprendre l'exercice précédent en étudiant la convergence normale et uniforme des séries.

[Ind] A chaque fois essayer de trouver une série majorante convergente. Vous pouvez aussi penser dans certains cas à maîtriser le reste si c'est possible.

[Dem] a) Il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$ car la série de terme général $u_n(\frac{1}{n})$ diverge. Sur $I_\varepsilon = [\varepsilon, +\infty[$ avec $\varepsilon > 0$ on a $\forall x \in I_\varepsilon\ :\ u_n(x) \leq \mathrm{e}^{-n\varepsilon}$ qui est le terme général d'une série convergente la série converge normalement donc uniformément sur I_ε.
b) Le terme général ne tend pas uniformément vers 0 car $(1-\frac{1}{n})^n \to \mathrm{e}^{-1}$. Il n'y a psa convergence uniforme sur $[0,1[$. Sur $I_\varepsilon = [0, \varepsilon]$ avec $0 \leq \varepsilon < 1$ on a $\forall x \in I_{eps}\ :\ |x^n| \leq \varepsilon^n$ terme général d'une série convergente, il y a convergence normale sur I_ε.
c) La majoration est claire : $\forall x \in \mathbb{R}\ :\ |f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$. Il y a convergence normale sur $\mathbb{R}$.
d) Le terme général ne tend pas uniformément vers 0 car $f_n(n) = 1$. Pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$. Sur $I_A = [0, A]$ avec $A \geq 0$ on a la majoration $\forall x \in I_A\ :\ \dfrac{1}{1+(n-x)^2} \leq \dfrac{1}{1+(n-A)^2}$ pour n assez grand, il y a convergence normale sur I_A.
e) Sur $]-\infty, -1[$ il n'y a pas convergence uniforme car la série de terme général $n^{-1+\frac{1}{n}} \sim \frac{1}{n}$ est divergente. En revanche sur tout $I_a =]-\infty, a]$ avec $a < -1$ on a convergence normale grâce à la majoration $\forall x \in I_a\ :\ n^x \leq n^a$.
f) Il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}^*$ car le terme général ne tend pas uniformément vers 0 comme le prouve la suite $\frac{1}{n}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$. Par contre il y a convergence uniforme sur $I_\varepsilon =]-\infty, \varepsilon]$ avec $\varepsilon < -1$ car le reste d'ordre n : $R_n \leq n^\varepsilon$ en regardant la série comme alternée.
g)On a la majoration $\forall x \in \mathbb{R}\ :\ \mathrm{e}^{-n}(x^2+1) \leq \mathrm{e}^{-n}$ qui est le terme général d'une série convergente.
h) La série ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$ car $\sum u_n(n) = \dfrac{1}{2n}$ donne une série divergente. Sur $I_a = \{|x| \leq a\}$ avec $a > 0$ on a $\forall x \in I_a\ :\ \left|\frac{1}{n}\mathrm{Arctan}\ \frac{x}{n}\right| \leq \dfrac{|x|}{n^2} \leq \dfrac{a}{n^2}$ et il y a donc convergence normale sur I_a.
i) Pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$ (prendre la suite $x_n = \frac{1}{n}$ mais convergence uniforme sur tout $I_\varepsilon = [\varepsilon, +\infty[$ avec $\varepsilon > 0$ par majoration $n\mathrm{e}^{-nx} \leq n\mathrm{e}^{-n\varepsilon}$.
j) Pas convergence uniforme sur $[0, 1]$, prendre la suite $x_n = \frac{1}{n}$ mais sur tout $I_\varepsilon = [\varepsilon, 1]$ avec $\varepsilon > 0$ car les termes de la suite sont tous nuls à partir d'un certain rang.
k) Pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ en prenant la suite $x_n = \frac{1}{n}$ car $u_n(\frac{1}{n})$ est le terme général d'une série divergente. Mais sur $I_a = [a, +\infty[$ avec $a > 0$ la majoration $|u_n(x)| \leq \mathrm{e}^{-na}$ donne la convergence normale sur I_a.
l) Pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$, il suffit de prendre la suite $(\frac{1}{n})$ pour voir que le terme général ne tebd pas vers 0 uniformément. Sur $I_a = \{|x| \leq a\}$ avec $a > 0$ on a la convergence normale grâce à la majoration : $|u_n(x)| \leq \dfrac{1}{1+n^2a^2}$.

10.3.4 Propriétés d'une somme uniforme

Proposition 18 *Si la suite des sommes partielles d'une série de fonctions est une suite bornée et si la série converge uniformément alors la somme est bornée.*

[Ind] Étudier la suite des sommes partielles.

[Dem] Déjà vu.

Théorème 3 *Si la série $\sum u_n$ converge uniformément vers la fonction s et s'il existe a adhérent à I tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\varepsilon_n \in K$ telle que $\lim\limits_{x\to a} u_n(x) = \varepsilon_n$, alors la série $\sum \varepsilon_n$ est convergente et $\lim\limits_{x\to a} s(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n$.*

[Ind] Étudier la suite des sommes partielles.

[Dem] Déjà vu

Le théorème est encore valable si $a \in \{-\infty, +\infty\}$

Remarque: Sous les hypothèses du théorème précédent, on peut donc écrire :

$$\lim_{x\to a}\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to a}u_n(x).$$

Proposition 19 *La somme uniforme d'une série de fonctions continues en un point fixé (resp continues) est continue en ce point (resp continue).*

[Ind] Étudier la suite des sommes partielles.

[Dem] Déjà vu.

Exercice 8 Montrer que la série de fonctions dont le terme général est la fonction u_n définie sur $\mathbb{R}^*$ par $u_n(x)=\frac{(-1)^n}{(n+1)^x}$ converge uniformément sur l'intervalle $I_a=[a,+\infty[$ $(a>0)$. En déduire que la somme de cette série est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

[Ind] Se placer sur un tel intervalle permet de trouver une majoration. La continuité est une propriété locale.

[Dem] Cette série converge sur $\mathbb{R}_+^*$. En utilisant le théorème des séries alternées on a que le reste d'ordre n vérifie $|R_n|\leq\frac{1}{(n+2)^x}\leq\frac{1}{(n+1)^a}$ sur l'intervalle I_a. On a donc la convergence uniforme sur tout I_a. On en déduit comme limite uniforme de fonctions continues que la limite est continue sur I_a. Soit maintent un point x_0 de $\mathbb{R}_+^*$, il existe a tel que $x_0\in I_a$, donc la limite est continue en x_0. On a donc que la limite est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

10.4 Rappel sur les fonctions continues par morceaux

Définition 7 *Soit $[a,b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. On appelle subdivision de $[a,b]$ une partie finie de $[a,b]$.*

Si une subdivision S de $[a,b]$ n'est pas vide, il existe un entier n et une suite strictement croissante $(\alpha_0,\dots,\alpha_n)$ d'éléments de $[a,b]$ telle que $S=\{\alpha_0,\dots,\alpha_n\}$, on identifie alors S à cette suite.

Définition 8 *Soit f une fonction définie sur l'intervalle réel $[a,b]$ $(a<b)$ à valeurs dans K. On dit que f est une fonction en escalier s'il existe une subdivision $S=(\alpha_0=a,\dots,\alpha_n=b)$ de $[a,b]$ telle que la restriction de f aux intervalles $]\alpha_i,\alpha_{i+1}[$, $(0\leq i\leq n-1)$ est constante.*
Une telle subdivision est alors appelée une subdivision de $[a,b]$ subordonnée ou adaptée à f.

On définit une relation d'ordre (non total) dans l'ensemble des subdivisions de l'intervalle $[a,b]$ de la façon suivante, si S et S' sont deux subdivisions de $[a,b]$, on dit que S est plus grossière que S' (ou que S' est plus fine que S) si et seulement si $S\subset S'$.

Proposition 20 *Soit f une fonction en escalier définie sur l'intervalle $[a,b]$. Toute subdivision de $[a,b]$ plus fine qu'une subdivision adaptée à f est une subdivision adaptée à f.*

[Ind] Regarder où la fonction est constante.

[Dem] La subdivision étant plus fine la fonction est constante sur chaque intervalle de celle-ci, elle est donc bien adaptée.

Proposition 21 *L'ensemble $\mathcal{E}([a,b],K)$ des fonctions en escalier définies sur $[a,b]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a,b],K)$.*

[Ind] Prendre une subdivision adaptée aux fonctions que vous considérez.

[Dem] Soit f,g des fonctions en escaliers et λ un scalaire. Prenons une subdivision adaptée à f et à g. La fonction $f+\lambda g$ est constante sur chaque intervalle de la subdivision elle est donc en escalier. on peut écrire $f=\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\chi_{|]a_i,a_{i+1}[}$ où χ est la fonction caractéristique de l'ensemble considéré (valant 1 si x est dans l'ensemble et 0 sinon). De même pour g et ainsi calculer $f+\lambda g$.

Définition 9 *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans K. On dit que f est en escalier s'il existe un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ tel que la restriction de f à $[a,b]$ est en escalier et que la restriction de f à $\mathbb{R}/[a,b]$ est nulle.*

Proposition 22 *L'ensemble $\mathcal{E}_0(\mathbb{R},K)$ des fonctions en escalier définies sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},K)$.*

[Ind] Comprendre la définition.

[Dem] Si nous avons une combinaison linéaire $f+\lambda g$ de fonctions en esclier il existe donc des segments $[a,b]$ et $[c,d]$ en dehors desquels f et g sont nuls, ainsi en dehors de $[inf a,c,sup b,d]$ la fonction $f+\lambda g$ est nulle. Nous travaillons alors avec les restrictions pour lesquelles nous connaissons le résultat.

Définition 10 *Soit f une fonction définie sur l'intervalle réel $[a,b]$ $(a<b)$ à valeurs dans K. On dit que f est une fonction continue par morceaux s'il existe une subdivision $S=(\alpha_0=a,\dots,\alpha_n=b)$ de $[a,b]$ telle que la restriction f_i de f aux intervalles $]\alpha_i,\alpha_{i+1}[$, $(0\le i\le n-1)$ est continue et prolongeable en une fonction $\tilde{f_i}$ continue sur $[\alpha_i,\alpha_{i+1}]$.*
La subdivision S est dite subdivision subordonnée ou adaptée à f.

Exercice 9 Toute fonction en escalier définie sur $[a,b]$ est continue par morceaux sur $[a,b]$.

[Ind] Le vérifier, une fonction constante est prolongeable en une fonction continue sur l'intervalle fermé.

[Dem] Une fonction en escalier est telle que si $(a_i)_{1\le i\le n}$ est une subdivision adaptée la restriction de f à $]a_i,a_{i+1}[$ est constante cette restriction se prolonge bien en une fonction constante donc continue sur $[a_i,a_{i+1}]$.

Proposition 23 *Soit f une fonction continue par morceaux définie sur l'intervalle $[a,b]$. Toute subdivision de $[a,b]$ plus fine qu'une subdivision adaptée à f est une subdivision adaptée à f.*

[Ind] Ce qui est vrai sur un intervalle est vrai sur un intervalle plus petit.

[Dem] Soit S' une subdivision plus fine que S adaptée à f. Si $]c_i,d_i[\subset]a_i,b_i[$ la restriction de f à $[c_i,d_i]$ est continue et si nous tombons sur des points de la subdivision les propriétés de S sont bonnes pour S'.

Définition 11 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans K et $a\in I$. On dit que f présente en a une discontinuité de première espèce si f possède en a une limite à droite (si a n'est pas le bord droit de I) et une limite à gauche (si a n'est pas le bord gauche de I).*

Proposition 24 *Une fonction définie sur l'intervalle réel $[a,b]$ $(a<b)$ à valeurs dans K est continue par morceaux si et seulement si elle ne présente qu'un ensemble fini D de points de discontinuité de première espèce et qu'elle est continue en tout point de $[a,b]/D$.*

[Ind] Où la fonction en escalier peut-elle avoir une discontinuité ?

[Dem] Tout d'abord une fonction en escalier possède bien que des discontinutés de première espèce. Ensuite elles sont éventuellement en les points de la subdivision donc elles sont en nombre fini. Réciproquement si une fonction ne présente qu'un ensemble fini D de points de discontinuité de première espèce et qu'elle est continue en tout point de $[a,b]/D$ alors elle est bien continue par morceaux. Posons $D=(\alpha_i)$ la restriction f_i de f aux intervalles $]\alpha_i,\alpha_{i+1}[$, est continue et prolongeable en une fonction $\tilde{f_i}$ continue sur $[\alpha_i,\alpha_{i+1}]$.

Exercice 10 Montrer que la composée de deux fonctions continues par morceaux n'est pas forcément continue par morceaux.

[Ind] Penser à augmenter le nombre de discontinuités.

[Dem] Soit f définie sur $[0, 2\pi]$ par $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, f est continue. Prenons g définie par $g(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ sur $[-1, 1]$ g est continue par morceaux puisqu'elle n'a qu'une discontinuité de première espèce. La composée $g \circ f$ n'est pas continue par morceaux sur $[0, 2\pi]$ car tous les points $(\frac{1}{2k\pi})_{k \in \mathbb{N}}$ sont des points de discontinuités.

Définition 12 *Une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans K est dite continue par morceaux si sa restriction à tout segment inclus dans I est continue par morceaux.*

Proposition 25 *Une fonction définie sur l'intervalle I valeurs dans K est continue par morceaux si et seulement si elle ne présente qu'un ensemble au plus dénombrable D de points de discontinuité de première espèce, que D ne possède pas de point d'accumulation dans I et qu'elle est continue en tout point $[a, b]/D$.*

[Ind] Approcher I par des segments.

[Dem] Posons $I =]a, b[$ on a alors $I = \cup_{n \in \mathbb{N}} [a + \dfrac{1}{n}, b - \dfrac{1}{n}]$, ceci prouve que f ne peut avoir qu'un nombre dénombrable de discontinuités de première espèce et D n'a pas de point d'accumulation. Enfin elle est continue sur $[a, b]/D$. Réciproquement posons $D = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Pour $J = [c, d]$ on a que $J \cap D$ est fini car D ne possède pas de point d'accumulation (par l'absurde).

Proposition 26 *I étant un intervalle de $\mathbb{R}$, l'ensemble $C^0_{pm}(I, K)$ des fonctions continues par morceaux définies sur I à valeurs dans K est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, K)$.*

[Ind] Utiliser la proposition précédente.

[Dem] La somme fini d'ensembles dénombrables ne possèdant pas de point d'accumulation est dénombrabble et ne possède pas de point d'accumulation.

10.5 Approximation des fonctions continues

10.5.1 Approximation uniforme par des fonctions en escalier

Établissons un résultat qui nous servira pour définir la notion d'intégrale d'une fonction continue par morceaux

Théorème 4 *Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f \in C^0_{pm}([a, b], K)$.*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*_+ \quad \exists \varphi \in \mathcal{E}([a, b], K) \quad \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon.$$

[Ind] hors programme. Établir le théorème pour une fonction f continue sur un intervalle $[\alpha, \beta]$ en utilisant la continuité uniforme de f sur le compact $[\alpha, \beta]$, puis étendre le résultat à une fonction continue par morceaux en étudiant ce qui se passe sur chacun des morceaux et en recollant les résultats.

[Dem] Supposons que la fonction f soit continue sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ où elle y est uniformément continue. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel η strictement positif tel que, pour tous éléments x et y de $[\alpha, \beta]$, l'inégalité $|x - y| \leq \eta$ implique $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.
Il existe un entier n tel que $\dfrac{\beta - \alpha}{n} \leq \eta$. Posons alors, pour $k \in [0, n-1]$, $\alpha_k = \alpha + k\dfrac{\beta - \alpha}{n}$ et φ la fonction définie sur $[\alpha, \beta]$ de la façon suivante : on pose $\varphi(\beta) = f(\beta)$ et pour tout $x \in [\alpha, \beta[$, il existe un unique entier $k_x \in [0, n-1[$ tel que $\alpha_{k_x} \leq x < \alpha_{k_x+1}$, on pose alors $\varphi(x) = f(\alpha_{k_x})$. La fonction φ est bien en escalier car φ est constante sur les intervalles $[\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ pour k variant de 0 à $n-1$. D'autre part, en posant $k_\beta = n$, on a, pour tout $x \in [\alpha, \beta]$, $|x - \alpha_{k_x}| \leq \eta$ donc $|f(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$. Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$, il existe une subdivision $S = (a_0 = a, \ldots, a_p = b)$ de $[a, b]$ telle que la restriction f_i de f aux intervalles $]a_i, a_{i+1}[$, $(0 \leq i \leq p-1)$ est continue et prolongeable en une fonction $\tilde{f}_i$ continue sur $[a_i, a_{i+1}]$. En notant φ_i une fonction en escalier définie sur $[a_i, a_{i+1}]$ telle que

pour tout $x \in [a_i, a_{i+1}]$, $\left|\tilde{f}_i(x) - \varphi_{i_x)}\right| \leq \varepsilon$, on peut alors construire une fonction φ sur $[a,b]$ de la façon suivante : on pose $\varphi(b) = f(b)$ et pour tout $x \in [a,b[$, il existe un unique entier $i_x \in [0, p-1[$ tel que $a_{i_x} \leq x < a_{i_x+1}$, on pose alors $\varphi(x) = f(a_{i_x})$ si $x = a_{i_x}$ et $\varphi(x) = \varphi_{i_x}(x)$ sinon. On vérifie que φ est bien en escalier sur $[a,b]$ et que, pour tout $x \in [a,b]$, $|f(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$.

10.5.2 Approximation polynomiales des fonctions continues

Deux théorèmes admis dit théorèmes de Weierstrass

Théorème 5 (Théorème de Stone-Weierstrass) *Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$ à valeurs dans K.*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists P \in K[X] \quad \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - P(x)| \leq \varepsilon$$

[Ind] Admis

[Dem] Admis

Théorème 6 (Théorème de Weierstrass: version trigonométrique) *Soit f une fonction continue périodique de période $T > 0$ définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists P, Q \in \mathbb{C}[X] \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f(x) - \left(P(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{T}x}) + Q(\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{T}x}) \right) \right| \leq \varepsilon$$

[Ind] Admis

[Dem] Admis

Remarque: La fonction $x \mapsto P(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{T}x}) + Q(\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{T}x})$ où P et Q sont des polynômes à coefficients complexes peut s'écrire sous la forme $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{ik\frac{2\pi}{T}x}$ où $c_{-n} \dots, c_0, \dots, c_n$ sont des complexes. Une telle fonction s'appelle polynôme trigonométrique.On en déduit le

Théorème 7 *Soit f une fonction continue périodique de période $T > 0$ définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans K. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n > 0$, des scalaires $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots b_n$ tels que*

$$\left| f(x) - \left(a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos \frac{2\pi}{T} kx + b_k \sin \frac{2\pi}{T} kx) \right) \right| \leq \varepsilon$$

[Ind] Vérifier ...

[Dem] Si $K = \mathbb{C}$, c'est le théorème précédent, si $K = \mathbb{R}$, on applique le théorème pour trouver le polynôme trigonométrique complexe et on en déduit le résultat en remarquant que la valeur absolue de la partie réelle d'un nombre complexe est plus petit que son module et que si $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ sont de degrés inférieurs ou égaux à n, il existe des complexes $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ et $\beta_0, \dots, \beta_n$ tels que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ il existe donc des réels $a_0, \dots, a_n$ et $\beta_1, \dots, \beta_n$ tels que

$$\Re\left(P(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{T}x}) + Q(\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{T}x}) \right) = a_0 + \sum_{k=0}^{n} \left(a_k \cos k\frac{2\pi}{T}x + b_k \sin k\frac{2\pi}{T}x \right)$$

10.6 Exercices

Exercice 11 Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes de terme général:

$$f_n(x) = \frac{1-x^n}{1+x^n} \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

$$f_n(x) = \frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{1+nx} \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+nx} \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1+n2^n x^2} \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$f_n(x) = x(1-x)^n \quad x \in [0,1].$$

$$f_n(x) = nx(1-x)^n \quad x \in [0,1].$$

Si la convergence n'est pas uniforme sur l'ensemble de définition, on déterminera des intervalles sur lesquels la convergence est uniforme.

[Ind] Chercher la limite puis essayer de montrer que le $sup|f_n - f|$ converge vers 0 sur I. Si vous pensez qu'il n'y a pas convergence uniforme exhiber une suite x_n...

[Dem] On a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ 0 \text{ si } x = 1 \\ -1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$ il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$ car les f_n sont continues mais pas f. Faisons une étude sur $[0,\alpha]$ avec $0 < \alpha < 1$. Pour tout x de $[0,\alpha]$ on a : $|f_n(x) - f(x)| = \dfrac{2x^n}{1+x^n} \leq 2\alpha^n$. ainsi $\sup\limits_{x\in[0,\alpha]} |f_n(x) - f(x)| \leq 2\alpha^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\alpha^n = 0$. Il y a donc convergence uniforme de (f_n) vers f sur $[0,\alpha]$. Faisons une étude sur $[a,+\infty[$ avec $a > 1$.Pour tout x de $[\alpha,+\infty[$ on a : $|f_n(x) - f(x)| = \dfrac{2x^n}{1+x^n} \leq \dfrac{2}{1+a^n}$. ainsi $\sup\limits_{x\in[0,\alpha]} |f_n(x) - f(x)| \leq \dfrac{2}{1+a^n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{1+a^n} = 0$. Il y a convergence uniforme sur $[a,+\infty[$.

o Pour tout n on a $f_n(0) = 0$ et pur tout $x > 0$: $f_n(x) \sim \dfrac{e^{-nx}}{n}$ et donc $\lim\limits_n f_n(x) = 0$ sur $\mathbb{R}^+$. Il y a convergence simple sur $\mathbb{R}^+$. Pour la convergence uniforme on a $u_n = \sup\limits_{\mathbb{R}^+} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{\mathbb{R}^+} \left| \dfrac{xe^{-nx}}{1+nx} \right| \leq \dfrac{x}{nx} = \dfrac{1}{n}$ ceci étant bien vraie aussi en 0 et par suite il y a convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

o On a $g_n(0) = 1$ et pour $x > 0$: $g_n(x) \sim \dfrac{e^{-nx}}{nx}$ ce qui donne $\lim\limits_n g_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x = 0 \\ 0 \text{ si } x > 0 \end{cases}$ il y a convergence simple mais pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$. Regardons sur $[a,+\infty[$ avec $a > 0$. $u_n = \sup\limits_{x\geq a} |g_n(x) - g(x)| = \sup\limits_{x\geq a} \left| \dfrac{e^{-nx}}{1+nx} \right| = g_n(a) = \dfrac{e^{-na}}{1+na} \to 0$. Il y a donc convergence uniforme sur ces intervalles.

o On a $f_n(0) = 0$ et si $x \neq 0$ alors $f_n(x) \sim \dfrac{1}{nx}$ et par suite f_n converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}$.

- Soit $x_n = \dfrac{1}{n}$ on a $f_n(x_n) = \dfrac{\frac{2^n}{n}}{1+\frac{2^n}{n}} \to 1 \neq 0$ et $x_n \to 0$. Le lemme de Polya donne qu'il ne peut pas y avoir convergence uniforme. On peut aussi prendre $x_n = \dfrac{1}{2^n}$.

  ou bien

- On évalue $\|f_n - f\|_\infty$ l'imparité de f_n nous permet d'étudier les variations sur $[0,+\infty[$. On a $f_n'(x) = \dfrac{2^n\left(1-n2^{n+1}x^2\right)}{\left(1+n2^nx^2\right)^2}$. f_n s'annule en 0 et en $+\infty$ ce qui donne $\|f_n - f\|_\infty = f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}2^{\frac{n+1}{2}}}\right) = \dfrac{2^n\dfrac{1}{\sqrt{n}2^{\frac{n+1}{2}}}}{1+n2^n\dfrac{1}{n2^{n+1}}} = \dfrac{\dfrac{2^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{2}} = \dfrac{2^{\frac{n+1}{2}}}{3\sqrt{n}} \to +\infty$. Il n'y a donc pas convergence uniforme.

  $\sup\limits_{x\in I_a}|f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\geq a} f_n(x)$ or pour tout $x \geq a > 0 : f_n(x) \leq \dfrac{2^nx}{n2^nx^2} = \dfrac{1}{nx} \leq \dfrac{1}{na}$ il y a donc convergence uniforme sur I_a.

o On a $f_n(0) = 0 = f_n(1)$ et pour tout x de $]0,1[$: $f_n(x) \to 0$ donc $f_n \overset{CVS}{\to} f = 0$ sur $[0,1]$. Il y a convergence uniforme car $f_n'(x) = (1-x)^{n-1}(1-(n+1)x)$ et f_n atteint son maximum en $\frac{1}{n+1}$ et vaut $\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \to 0$.

o

On a $g_n(0) = g_n(1) = 0$ et pour tout x de $]0,1[$ $g_n(x) = nxe^{n\ln(1-x)} \to 0$ donc $g_n \overset{cvs}{\to} 0$ sur $[0,1]$. Il n'y a pas convergence uniforme. En effet $g_n\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} \to \frac{1}{e} \neq g(0)$. On peut ici aussi calculer $\sup\limits_{[0,1]}|g_n(x) - g(x)| = g_n\left(\frac{1}{n+1}\right) \to \frac{1}{e}$. Mais sur $[\alpha,1]$ avec $0<\alpha<1$ comme $\lim\limits_{n}\frac{1}{n+1} = 0$ il existe N_α tel que $\forall n \geq N_\alpha : \frac{1}{n+1} < \alpha$ et donc $\sup\limits_{[\alpha,1]}|g_n(x) - g(x)| = g_n(\alpha) \to 0$. Et il y a convergence uniforme sur $[\alpha,1]$.

Exercice 12 Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$. Soit (x_n) une suite de points de $[a,b]$ convergeant vers c. Montrer que:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(c).$$

[Ind] Pour $|f_n(x_n) - f(c)|$ introduiser des points, puis majorer.

[Dem] Pour tout n : $|f_n(x_n) - f(c)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(c)| \leq ||f_n - f||_\infty + |f(x_n) - f(c)|$. La limite étant uniforme d'une part $||f_n - f||$ tend vers 0 et d'autre part f est continue (comme limite uniforme de fonctions continues) et donc $f(x_n)$ tend vers $f(c)$. Par encadrement on en déduit le résultat.

Exercice 13 On considère la suite de fonctions définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= x \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad f_{n+1}(x) &= \sin f_n(x) \end{aligned}$$

1. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est positive et croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite (f_n).

2.a. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est dérivable. Montrer que la fonction f_n' est positive et décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

b. Établir que:

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall x > 0 \quad f_n'(x) \leq \frac{1}{x} f_n(\frac{\pi}{2}).$$

c. Étudier la convergence simple de la suite (f_n').

d. Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n') sur $[\varepsilon, \frac{\pi}{2}]$ où $\varepsilon > 0$.

e. La suite (f_n') converge-t-elle uniformément sur $[0, \frac{\pi}{2}]$?

[Ind] Par récurrence. Penser à $sinx \leq x$.Majorer.

[Dem] 1. $f_n : [0, \frac{\pi}{2}] \to [0,1] \subset [0, \frac{\pi}{2}]$ Par récurrence on a que pour tout n, $f_n \geq 0$ et f_n croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Ainsi en remarquant que $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ pour tout x fixé, la suite $(f_n(x))_n$ est décroissante et minorée donc convergente et ce ne peut être que vers 0. $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle. Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on a par croissance de f_n que $|f_n(x)| \leq f_n(\frac{\pi}{2}) \to 0$ il y a donc convergence uniforme vers 0 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
2.a. $f_0'(x) = 1$, $f_1(x) = \sin x$ $f_1'(x) = \cos x$. Par réurrence on a que f_n est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. f_n est croissante donc $f_n' \geq 0$. Pour montrer que f_n' est décroissante on le fait par récurrence en remarquant que $f_{n+1}'(x) = \cos f_n(x) \times f_n'(x)$ et le produit de deux fonctions décroissantes positives est décroissante.
2.b. Écrivons $f_n(x) = \displaystyle\int_0^x f_n'(t)dt \geq f_n'(x) \times x$ car f_n' est décroissante donc $\forall t \in [0,x]$ $f_n'(t) \geq f_n'(x)$. Nous avons donc $f_n'(x) \leq \frac{1}{x} f_n(x) \leq \frac{1}{x} f_n(\frac{\pi}{2})$ puisque f_n est croissante.
2.c En 0 on a $\forall n$ $f_n'(0) = 1$ car $\forall n$ $f_n(0) = 0$. Pour $x \neq 0$ la majoration précédente donne que $f_n(x)$ tend vers 0 puisque $f_n(\frac{\pi}{2}$ tend vers 0. Il y a convergence simple sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ vers g définie par $\begin{cases} g(0) = 1 \\ g(x) = 0 \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$
2.d Sur $[\varepsilon, \frac{\pi}{2}]$ la majoration $f_n'(x) \leq \frac{1}{x} f_n(\frac{\pi}{2}) \leq \frac{1}{\varepsilon} f_n(\frac{\pi}{2})$ donne la convergence uniforme sur cet intervalle.
2.e La convergence n'est pas uniforme sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ car la limite simple de $(f_n')_n$ n'est pas continue.

Exercice 14 (Règle d'Abel) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et (a_n) et (b_n) deux suites de fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ respectivement. On suppose:
a) Pour tout $x \in I$, la suite $(a_n(x))$ est décroissante.
b) La suite de fonctions (a_n) converge uniformément vers la fonction nulle.
c) La suite des sommes partielles de la série de fonction de terme général b_n est uniformément majorée sur I, i.e. il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sup_{x\in I} \left| \sum_{k=0}^{n} b_k(x) \right| \leq M.$$

Montrer alors que la série de fonctions de terme général $a_n b_n$ converge uniformément sur I.
En déduire que si c_n est une suite décroissante de réels, de limite nulle, la série de terme général $c_n \mathrm{e}^{inx}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$ privé des multiples entiers de 2π.

[Ind] Remplacer b_n par la différence de sommes partielles au rang n et au rang $n-1$ de la série correspondant aux b_n.

[Dem] Faisons une transformation d'Abel sur le reste : pour tout $x \in I$ on a $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{N} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{N} a_k(S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=n+1}^{N} a_k S_k - \sum_{k=n+1}^{N} a_k S_{k-1} = \sum_{k=n+1}^{N} a_k S_k - \sum_{k=n}^{N-1} a_{k+1} S_k = a_N S_N + \sum_{k=n+1}^{N-1} (a_{k+1} - a_k) S_k =$ d'où avec les hypothèses pour tout $x \in I$ $\displaystyle\left| \sum_{k=n+1}^{N} a_k(x) b_k(x) \right| \leq |a_n(x)| M + M |(a_n(x) - a_N(x)|$ il en résulte que la série converge et que : $\forall x \in I$: $\displaystyle\sup_{x\in I} |R_n(x)| \leq M \sup_{x\in I} |a_n(x)|$. Il y a donc bien convergence uniforme sur I.
Pour $\sum c_n \mathrm{e}^{inx}$ on est dans les conditions car c_n d''ecroit vers 0 et ne dépend pas de x, et $\displaystyle\left| \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ikx} \right| = \left| \frac{1 - \mathrm{e}^{i(n+1)x}}{1 - \mathrm{e}^{ix}} \right| \leq \left| \frac{2}{2(1 - \cos x} \right|$. Sur un compact de $\mathbb{R}$ privé des multiples de 2π la fonction $x \mapsto 1 - \cos x$ est minorée par un rél $\alpha > 0$ donc les sommes partielles sont uniformément bornées.

Exercice 15 Soit $\mathcal{B}([a,b], K)$ l'ensemble des fonctions bornées définies sur l'intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme. Quel est l'ensemble des points adhérents au sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales à valeurs dans K définies sur $[a,b]$? Quel est l'ensemble des points adhérents au sous-espace vectoriel des fonctions de classe C^k $(k \geq 0)$ à valeurs dans K définies sur $[a,b]$?

[Ind] Un point adhérent à A est une limite d'une suite d'éléments de A.

[Dem] Si nous prenons une suite de polynômes sur $[a,b]$ convergeant uniformément sa limite est une fonction continue sur $[a,b]$. Réciproquement le théorème de Weierstrass donne que toute fonction continue sur $[a,b]$ est limite uniforme de polynômes. Ainsi l'adhérence des polynômes pour la norme uniforme est l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$.
Une limite uniforme de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ est asssurée d'être continue et c'est tout. Son adhérence est aussi les fonctions continues sur $[a,b]$.

Exercice 16 Étude des polynômes trigonométriques
a) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(e^{ix}) = 0$, montrer que $P = 0$.
b) Montrer que la famille indexée par $\mathbb{Z}$ de fonctions d'une variable réelle $e_k : x \mapsto e^{ikx}$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
c) En déduire que toute combinaison linéaire de la famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $P(e_1)+Q(e_{-1})$ avec P et Q qui sont des polynômes, Q étant de valuation supérieure ou égale à 1.
d) Montrer que l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques 2π-périodiques est la sous-algèbre de $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ engendrée par e_1 et e_{-1}. En donner une base.
e) Traduire, à l'aide de la norme de la convergence uniforme, le théorème de Weierstrass (version trigonométrique) en termes de points adhérents.

[Ind] Il y en a trop ! Trouver un produit scalaire pour lequel la famille est orthogonale. En déduire. Écrire ce que l'on vous demande. Un point adhérent est une limite de suite.

[Dem] a) Si un polynôme de $C[X]$ s'annule en tous les e^{ix}, il a une infinité de zéros il est donc identiquement nul.
b) Sur le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ formé des fonctions 2π-périodiques la forme sesqui-linéaire $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{f}g$ est un produit scalaire. Dans cet espace préhilbertien la famille (e_k) est orhogonale (on vérifie que le produit scalaire de e_k avec e_ℓ pour $k \neq \ell$ est nul) elles est donc libre.
c) Une telle combinaison linéaire s'écrit $\displaystyle\sum_{k=-n}^{k=+n} \lambda_k e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (e^{ix})^k + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (e^{-ix})^k$ qui est donc bien de la forme $P(e_1) + Q(e_{-1})$ avec P et Q qui sont des polynômes, Q étant de valuation supérieure ou égale à 1. L'écriture est unique car la famille (e_k) est libre, donc une expression $P(e_1) + Q(e_{-1})$ donne $\displaystyle\sum_{k=-n}^{k=+n} \lambda_k e^{ikx}$ où les λ_k sont uniques et sont les coefficients des polynômes P, Q.
d) Un polynôme trigonométrique est de la forme $P(e_1) + Q(e_{-1})$ avec P et Q des polynômes, c'est donc bien un élément de la sous-algèbre engendrée par e_1 et e_{-1}. Réciproquement tout élément de la sous-algébre est un polynôme trigonométrique.
e) On a que l'adhérence de l'ensemble des polynômes trigonométriques est l'ensemble des fonctions continues 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$.

Une démonstration du théorème de Stone-Weierstrass

Exercice 17 Soit (P_n) la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par $P_0 = 0$ et la relation: pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1]$, $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n^2(x))$.
a) Montrer que (P_n) est une suite croissante de polynômes telle que:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [0,1] \quad 0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}.$$

b) Montrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [0,1] \quad \sqrt{x} - P_{n+1} \leq (\sqrt{x} - P_n(x))(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}).$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [0,1] \quad \sqrt{x} - P_n(x) \leq \frac{2\sqrt{x}}{2 + n\sqrt{x}}.$$

En déduire que la suite de polynômes converge uniformément vers la fonction radical sur $[0,1]$.
c) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $Q_n(X) = P_n(X^2)$, montrer que la suite de fonctions polynomiales (Q_n) converge uniformément vers la fonction valeur absolue sur l'intervalle $[-1,1]$.

[Ind] Récurrence sur n. Trouver le *sup*.

[Dem] Montrons par récurrence la propriété H_n : $\left\{ \begin{array}{c} P_n \text{ et } P_{n-1} \text{ sont des polynômes} \\ \forall x \in [0,1] : 0 \leq P_{n-1}(x) \leq P_n(x) \leq \sqrt{x} \end{array} \right.$ on a que H_1 est vérifiée car $P(0) = 0 \leq P_1(x) = \frac{x}{2} \leq \sqrt{x}$ en effet si $x \in [0,1]$ alors $\sqrt{x} \leq 2 \Rightarrow x \leq 2\sqrt{x}$.
Supposons H_n ainsi P_n est un polynôme et $P_{n+1} = P_n + \frac{1}{2}\left(x - P_n^2\right)$ aussi de plus $P_{n+1}(x) - P_n(x) = \frac{1}{2}\left(x - P_n^2(x)\right) \geq \frac{1}{2}\left(x - \sqrt{x}\right)^2 = 0$ d'où $0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x)$ la positivité vient de H_n. Enfin $\sqrt{x} - P_{n+1}(x) = (\sqrt{x} - P_n(x))\left(1 - \dfrac{\sqrt{x} + P_n(x)}{2}\right)$ or $1 - \dfrac{\sqrt{x} + P_n(x)}{2} \geq 1 - \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{x}}{2} = 1 - \sqrt{x} \geq 0$ grâce à $P_n(x) \leq \sqrt{x}$. Ainsi $\sqrt{x} - P_n(x) \geq 0$ et $\sqrt{x} - P_{n+1}(x) \geq 0$ soit $P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$ d'où H_{n+1}.
Montrons la première inégalité : $\sqrt{x} - P_{n+1}(x) = (\sqrt{x} - P_n(x))\left(1 - \dfrac{\sqrt{x} + P_n(x)}{2}\right)$ or $1 - \dfrac{\sqrt{x} + P_n(x)}{2} \leq 1 - \dfrac{\sqrt{x}}{2}$ car $P_n(x) \geq 0$ et $\sqrt{x} - P_n(x) \geq 0$ d'où $\sqrt{x} - P_{n+1}(x) \leq (\sqrt{x} - P_n(x))\left(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)$. Montrons par récurrence : on obtient $\forall x \in [0,1] : \sqrt{x} - P_n(x) \leq \dfrac{2\sqrt{x}}{2 + n\sqrt{x}}.(P_n)$. On a $\left(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2 + n\sqrt{x}}\right) - \dfrac{1}{2 + (n+1)\sqrt{x}}$ est du signe de $\left(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)(2 + (n+1)\sqrt{x}) - (2 + n\sqrt{x}) = -\dfrac{n+1}{2}x \leq 0$ d'où $\dfrac{2\sqrt{x}\left(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)}{2 + n\sqrt{x}} \leq \dfrac{2\sqrt{x}}{2 + (n+1)\sqrt{x}}$. D'autre part P_0 est vérifiée car $\sqrt{x} - P_0(x) = \sqrt{x} = \dfrac{2\sqrt{x}}{2+0}$. Suppososns P_n d'après la première inégalité on a : $\sqrt{x} - P_{n+1}(x) \leq (\sqrt{x} - P_n(x))\left(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{2}\right) \leq \dfrac{2\sqrt{x}}{2 + n\sqrt{x}}\left(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)$ d'après P_n et $1 - \dfrac{\sqrt{x}}{2} \geq 0$. D'où $\sqrt{x} - P_{n+1}(x) \leq \dfrac{2\sqrt{x}}{2 + (n+1)\sqrt{x}}$ soit P_{n+1}.
$\forall x \neq 0$ on a $\dfrac{2\sqrt{x}}{2 + n\sqrt{x}} \leq \dfrac{2}{n}$ ce qui est encore vraie pour $x = 0$. D'où $\forall x \in [0,1] : 0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \dfrac{2}{n}$, et donc $P_n \to \sqrt{x}$ avec convergence uniforme sur $[0,1]$. Nous venons de vérifier le théorème de Weierstrass pour $x \to \sqrt{x}$: Toute fonction continue sur un compact est limite uniforme d'une suite de polynômes sur ce compact.
La suite $(Q_n)_n$ converge uniformément sur $[-1,+1]$ vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2} = |x|$.

Exercice 18 On dit qu'une fonction réelle définie sur $[a,b]$ est affine par morceaux s'il existe une subdivision $\alpha_0 = a < \cdots < \alpha_n = b$ telle que, pour tout $i \in [0, n-1]$, il existe des réels A_i et B_i vérifiant, pour tout $x \in]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$, $f(x) = A_i x + B_i$.
Soit f une fonction réelle continue sur $[a,b]$, montrer que, quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe une fonction φ affine par morceaux et continue telle que, pour tout $x \in [a,b]$, $|f(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$.

[Ind] Hors programme.

[Dem] On utilise le fait que f est uniformément continue sur $[a,b]$.

Exercice 19 Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour $c \in [a,b]$, on note φ_c la fonction définie sur $[a,b]$ par $\varphi_c(x) = |x - c|$. Montrer que l'ensemble $\{\varphi_c \mid c \in [a,b]\}$ est une base de l'espace vectoriel des fonctions réelles continues et affines par morceaux définies sur $[a,b]$.

[Ind] Si $S = (\alpha_0 = a, \ldots, \alpha_n = b)$ est une subdivision de $[a,b]$, on montrera que l'espace vectoriel des fonctions définies, continues sur $[a,b]$, affines sur chaque morceau $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$, $i \in [0, n-1]$, est de dimension $n+1$.

[Dem] Nous avons déjà montré que cette famille est libre (regarder la régularité d'une combinaison linéaire finie des φ_c). Une fonction définie, continue sur $[a,b]$, affines sur chaque morceau $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$, dépend de $n+1$ constantes car sur chaque intervalle elle est de la forme $\lambda_i x + \mu_i$ mais le recollement continue en chaque α_i impose disons μ_i sauf pour le premier intervalle. Les fonctions $(\varphi_{\alpha_i})_{0 \leq i \leq n}$ sont $n+1$ fonctions indépendantes de l'espace vectoriel des fonctions définies, continues sur $[a,b]$, affines sur chaque morceau $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ de dimension $n+1$, c'est donc une base de cet espace vectoriel. Il en résulte que toute fonction continue affines par morceaux sur $[a,b]$ est pour une subdivision adaptée à elle (α_i) dans l'espace vectoriel des fonctions définies, continues sur $[a,b]$, affines sur chaque morceau $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$, $i \in [0, n-1]$ donc combinaison linéaire de (φ_c). Ainsi l'ensemble $\{\varphi_c \mid c \in [a,b]\}$ en est une base.

Exercice 20 On sait qu'il existe une suite (Q_n) de fonctions polynomiales qui converge uniformément sur $[-1,1]$ vers la fonction valeur absolue. Soit $c \in [a,b]$. Déterminer, en fonction de la suite (Q_n), une suite (R_n) de fonctions polynomiales qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers la fonction qui, à $x \in [a,b]$, associe $|x-c|$.
Montrer alors, au vu des exercices précédents, qu'il est possible de déduire de ce résultat un des théorèmes de Stone-Weierstrass.

[Ind] Adapter la suite (Q_n)

[Dem] Si nous considèrons la suite de polynômes $x \mapsto Q_n(x-c)$ sur $[-1,+1]$ nous convergeons uniformément vers $|x-c|$. Maintenant envoyons $[a,b]$ dans $[-1,+1]$ par $x \mapsto \dfrac{b-x}{a-b} + \dfrac{a-x}{a-b} = \dfrac{a+b-2x}{a-b}$.
Ce qui donne les polynômes $R_n(x) = Q_n(\dfrac{a+b-2(x-c)}{a-b})$. Ce sont bien des polynômes car le changement de variable est affine. Partant d'une fonction continue sur $[a,b]$ on peut l'approcher uniformément par des fonctions continues affines par morceaux, ces fonctions sont combinaison linéaire finie de fonctions du type φ_c et chacune de ces fonctions est limite uniforme de polynômes d'après les exercices précédents. C'est gagné !

10.7 Travaux Dirigés : Suites et séries de fonctions

Exercice 21 Etude de la suite de fonctions (f_n) définie par : $f_n : [0,\pi] \to \mathbb{R}, x \longmapsto nxe^{-nx} \sin x$

[Dem] $|f_n(x)| \leq nxe^{-nx}$. On a comme $x > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ et la limite simple de f_n est 0. Posons $g_n(x) = nxe^{-nx}$ on a $g_n'(x) = (n - n^2x^2)e^{-nx}$ qui s'annule en $x = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ la fonction g_n admet son maximum en ce point et celui-ci vaut $\dfrac{1}{\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}}$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ donc $\sup\limits_{x\in[0,\pi]} |f_n(x) - 0|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 22 Soit la suite de fonctions (f_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$:

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2}$$

1°) Etudier la convergence simple de la suite (f_n).
2°) Montrer que la suite converge uniformément sur tout ensemble du type $I_a =]-\infty, -a] \smile [a, +\infty[$ où $a > 0$.

[Dem] On a $f_n(0) = 0$ et si $x \neq 0$ alors $f_n(x) \sim \dfrac{1}{nx}$ et par suite f_n converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}$.
Pour la suite nous pouvons prendre plusieurs méthodes :

- Soit $x_n = \dfrac{1}{n}$ on a $f_n(x_n) = \dfrac{\frac{2^n}{n}}{1 + \frac{2^n}{n}} \to 1 \neq 0$ et $x_n \to 0$. Le lemme de Polya donne qu'il ne peut pas y avoir convergence uniforme. On peut aussi prendre $x_n = \dfrac{1}{2^n}$.
- Sil y avait convergence uniforme sur $[0,1]$ les fonctions f_n étant intégrables sur $[0,1]$ on aurait : $\lim \displaystyle\int_0^1 f_n = \int_0^1 f = 0$ or $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n = \left[\frac{1}{2n} \ln\left(1 + n2^n x^2\right)\right]_0^1 = \frac{\ln(1+n2^n)}{2n} = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n2^n}\right)}{2n} + \frac{\ln n}{2n} + \frac{\ln 2}{2} \to \frac{\ln 2}{2} \neq 0.$

- On évalue $\|f_n - f\|_\infty$ l'imparité de f_n nous permet d'étudier les variations sur $[0,+\infty[$. On a $f_n'(x) = \dfrac{2^n\left(1-n2^{n+1}x^2\right)}{\left(1+n2^nx^2\right)^2}$. f_n s'annule en 0 et en $+\infty$ ce qui donne $\|f_n - f\|_\infty = f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}2^{\frac{n+1}{2}}}\right) = \dfrac{2^n\dfrac{1}{\sqrt{n}2^{\frac{n+1}{2}}}}{1+n2^n\dfrac{1}{n2^{n+1}}} = \dfrac{\dfrac{2^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{2}} = \dfrac{2^{\frac{n+1}{2}}}{3\sqrt{n}} \to +\infty$. Il n'y a donc pas convergence uniforme.
  $\sup\limits_{x\in I_a}|f_n(x)-f(x)| = \sup\limits_{x\geq a} f_n(x)$ or pour tout $x \geq a > 0$: $f_n(x) \leq \dfrac{2^n x}{n2^nx^2} = \dfrac{1}{nx} \leq \dfrac{1}{na}$ il y a donc convergence uniforme sur I_a.

Exercice 23 Etudier la suite de fonctions $f_n : x \longmapsto \dfrac{nx^2e^{-nx}}{(1-e^{-x})^2}$.

[Dem] $f_n \to 0$ avec convergence simple ; il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}^{+*}$ mais convergence uniforme sur $[a,b]$, $a > 0, b > a$ et convergence uniforme sur $[a,+\infty[$, $a > 0$.

Exercice 24 Soit $f_n(x) = \dfrac{1-x^n}{1+x^n}$ avec $x \in \mathbb{R}^+$. Etudier la convergence simple puis uniforme de la suite (f_n) vers sa limite f. (On étudiera la CVU sur $[0,\alpha]$ avec $\alpha < 1$, puis sur $[a,+\infty[$ avec $a > 1$).

[Dem] On a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ 0 \text{ si } x = 1 \\ -1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$ il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$ car les f_n sont continues mais pas f. Faisons une étude sur $[0,\alpha]$ avec $0 < \alpha < 1$. Pour tout x de $[0,\alpha]$ on a : $|f_n(x) - f(x)| = \dfrac{2x^n}{1+x^n} \leq 2\alpha^n$. ainsi $\sup\limits_{x\in[0,\alpha]}|f_n(x)-f(x)| \leq 2\alpha^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\alpha^n = 0$. Il y a donc convergence uniforme de (f_n) vers f sur $[0,\alpha]$. Faisons une étude sur $[a,+\infty[$ avec $a > 1$.Pour tout x de $[\alpha,+\infty[$ on a : $|f_n(x) - f(x)| = \dfrac{2x^n}{1+x^n} \leq \dfrac{2}{1+a^n}$. ainsi $\sup\limits_{x\in[0,\alpha]}|f_n(x)-f(x)| \leq \dfrac{2}{1+a^n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{1+a^n} = 0$. Il y a convergence uniforme sur $[a,+\infty[$.

Exercice 25 1°) Soit $f_n(x) = x(1-x)^n$ pour $x \in [0,1], n \geq 1$. Etudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $[0,1]$, puis la convergence uniforme.
2°) Soit $g_n(x) = nx(1-x)^n$ pour $x \in [0,1], n \geq 1$. Etudier la convergence simple de la suite (g_n) sur $[0,1]$, montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $[0,1]$ mais étudier ce qui se passe sur $[\alpha,1]$ où $0 < \alpha < 1$.

[Dem] On a $f_n(0) = 0 = f_n(1)$ et pour tout x de $]0,1[$: $f_n(x) \to 0$ donc $f_n \overset{CVS}{\to} f = 0$ sur $[0,1]$. Il y a convergence uniforme car $f_n'(x) = (1-x)^{n-1}(1-(n+1)x)$ et f_n atteint son maximum en $\frac{1}{n+1}$ et vaut $\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \to 0$.
On a $g_n(0) = g_n(1) = 0$ et pour tout x de $]0,1[$ $g_n(x) = nxe^{n\ln(1-x)} \to 0$ donc $g_n \overset{cvs}{\to} 0$ sur $[0,1]$. Il n'y a pas convergence uniforme. En effet $g_n\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} \to \frac{1}{e} \neq g(0)$. On peut ici aussi calculer $\sup\limits_{[0,1]}|g_n(x) - g(x)| = g_n\left(\frac{1}{n+1}\right) \to \frac{1}{e}$. Mais sur $[\alpha,1]$ avec $0 < \alpha < 1$ comme $\lim\limits_{n} \frac{1}{n+1} = 0$ il existe N_α tel que $\forall n \geq N_\alpha$: $\frac{1}{n+1} < \alpha$ et donc $\sup\limits_{[\alpha,1]}|g_n(x) - g(x)| = g_n(\alpha) \to 0$. Et il y a convergence uniforme sur $[\alpha,1]$.

Exercice 26 Soit (f_n) la suite de fonctions définies par $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$ sur $[0,1]$.
1°) Etudier la convergence simple. Ya-t-il convergence uniforme sur $[0,1]$?
2°) Etudier ce qui se passe sur $[\alpha,1]$ où $0 < \alpha < 1$.

[Dem] On a $\lim f_n(x) = \begin{array}{l} 1 \text{ si } 0 < x \leq 1 \\ = 0 \text{ si } x = 0 \end{array}$ et il n'y a pas convergence uniforme sur $[0,1]$ car la limite de fonctions continues n'est pas continue en 0. Sur $[\alpha,1]$ avec $0 < \alpha < 1$ on a pour tout x de $[\alpha,1]$ on a :

$|f_n(x) - f(x)| = \dfrac{1}{1+nx} \leq \dfrac{1}{1+n\alpha}$. ainsi $\sup\limits_{x\in[0,\alpha]} |f_n(x) - f(x)| \leq \dfrac{1}{1+n\alpha}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+n\alpha} = 0$, il y a convergence uniforme de (f_n) vers f sur $[\alpha, 1]$.

Exercice 27 1^o) Etudier la convergence simple, puis la convergence uniforme de la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = xe^{-nx}\dfrac{1}{1+nx}$.
2^o) Même question avec $g_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{1+nx}$.

[Dem] Pour tout n on a $f_n(0) = 0$ et pur tout $x > 0$: $f_n(x) \sim \dfrac{e^{-nx}}{n}$ et donc $\lim\limits_n f_n(x) = 0$ sur $\mathbb{R}^+$. Il y a convergence simple sur $\mathbb{R}^+$. Pour la convergence uniforme on a $u_n = \sup\limits_{\mathbb{R}^+} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{\mathbb{R}^+} \left|\dfrac{xe^{-nx}}{1+nx}\right| \leq \dfrac{x}{nx} = \dfrac{1}{n}$ ceci étant bien vraie aussi en 0 et par suite il y a convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.
On a $g_n(0) = 1$ et pour $x > 0$: $g_n(x) \sim \dfrac{e^{-nx}}{nx}$ ce qui donne $\lim\limits_n g_n(x) = \begin{array}{l} 1 \text{ si } x = 0 \\ 0 \text{ si } x > 0 \end{array}$ il y a convergence simple mais pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$. Regardons sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$. $u_n = \sup\limits_{x\geq a} |g_n(x) - g(x)| = \sup\limits_{x\geq a} \left|\dfrac{e^{-nx}}{1+nx}\right| = g_n(a) = \dfrac{e^{-na}}{1+na} \to 0$. Il y a donc convergence uniforme sur ces intervalles.

Exercice 28 [lemme de Polya]
Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ convergeant uniformément vers f sur $[a, b]$. Soit (x_n) une suite de points de $[a, b]$ convergeant vers l. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) = f(l)$. Peut-on supprimer l'hypothèse de convergence uniforme?

[Dem] La convergence uniforme donne : il existe $n_1, \forall n \geq n_1 : \|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$ la continuité de f en ℓ donne il existe $\alpha > 0, \forall y \in [a, b] : |y - \ell| \leq \alpha \Rightarrow |f(y) - f(\ell)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ enfin $\lim x_n = \ell$ donne il existe n_2, $\forall n \geq n_2 : |x_n - \ell| \leq \alpha$ (avec le même α) ainsi pour $n_0 = \sup(n_1, n_2) : \forall n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} |f_n(x_n) - f(\ell)| &= |f_n(x_n) - f(x_n) + f(x_n) - f(\ell)| \\ &\leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(\ell)| \\ &\leq \|f_n - f\|_\infty + |f(x_n - f(\ell))| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Comme contre-exemple on peut prendre sur $[0, 1]$ la fonction affine valant 0 en 0 et 1 en $\frac{1}{n}$ puis constante valant 1 pour la suite $x_n = \frac{1}{n} \to 0 = \ell$ on a $f_n(x_n) = 1$ et $f(\ell) = 0$.

Exercice 29 Soit (P_n) la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par $P_0(x) = 0$ et

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n^2(x))$$

1^o) Montrer que les (P_n) forment une suite croissante de polynômes tels que : $\forall x \in [0, 1], 0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$.
2^o) Montrer que : $\forall x \in [0, 1], \forall n \in N, \sqrt{x} - P_{n+1}(x) \leq (\sqrt{x} - P_n(x))\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)$ et $\forall x \in [0, 1], \forall n \in N, 0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \dfrac{2\sqrt{x}}{2 + n\sqrt{x}}$.
En déduire que la suite de polynômes (P_n) converge uniformément vers f telle que $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0, 1]$.

[Dem] Montrons par récurrence la propriété H_n : $\left\{\begin{array}{c} P_n \text{ et } P_{n-1} \text{ sont des polynômes} \\ \forall x \in [0,1] : 0 \leq P_{n-1}(x) \leq P_n(x) \leq \sqrt{x} \end{array}\right.$ on a que H_1 est vérifiée car $P(0) = 0 \leq P_1(x) = \frac{x}{2} \leq \sqrt{x}$ en effet si $x \in [0, 1]$ alors $\sqrt{x} \leq 2 \Rightarrow x \leq 2\sqrt{x}$. Supposons H_n ainsi P_n est un polynôme et $P_{n+1} = P_n + \frac{1}{2}\left(x - P_n^2\right)$ aussi de plus $P_{n+1}(x) - P_n(x) = \frac{1}{2}\left(x - P_n^2(x)\right) \geq \frac{1}{2}(x - \sqrt{x})^2 = 0$ d'où $0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x)$ la posivoté vient de H_n. Enfin $\sqrt{x} - P_{n+1}(x) = (\sqrt{x} - P_n(x))\left(1 - \dfrac{\sqrt{x} + P_n(x)}{2}\right)$ or $1 - \dfrac{\sqrt{x} + P_n(x)}{2} \geq 1 - \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{x}}{2} = 1 - \sqrt{x} \geq 0$ grâce à $P_n(x) \leq \sqrt{x}$. Ainsi $\sqrt{x} - P_n(x) \geq 0$ et $\sqrt{x} - P_{n+1}(x) \geq 0$ soit $P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$ d'où H_{n+1}.

Montrons la première inégalité : $\sqrt{x}-P_{n+1}(x)=(\sqrt{x}-P_n(x))\left(1-\dfrac{\sqrt{x}+P_n(x)}{2}\right)$ or $1-\dfrac{\sqrt{x}+P_n(x)}{2}\leq 1-\dfrac{\sqrt{x}}{2}$ car $P_n(x)\geq 0$ et $\sqrt{x}-P_n(x)\geq 0$ d'où $\sqrt{x}-P_{n+1}(x)\leq(\sqrt{x}-P_n(x))\left(1-\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)$. Montrons par récurrence on obtient $\forall x\in[0,1]$: $\sqrt{x}-P_n(x)\leq\dfrac{2\sqrt{x}}{2+n\sqrt{x}}.(P_n)$. On a $\left(1-\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2+n\sqrt{x}}\right)-\dfrac{1}{2+(n+1)\sqrt{x}}$ est du signe de $\left(1-\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)(2+(n+1)\sqrt{x})-(2+n\sqrt{x})=-\dfrac{n+1}{2}x\leq 0$ d'où $\dfrac{2\sqrt{x}\left(1-\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)}{2+n\sqrt{x}}\leq\dfrac{2\sqrt{x}}{2+(n+1)\sqrt{x}}$. D'autre part P_0 est vérifiée car $\sqrt{x}-P_0(x)=\sqrt{x}=\dfrac{2\sqrt{x}}{2+0}$. Supposons P_n d'après la première inégalité on a : $\sqrt{x}-P_{n+1}(x)\leq(\sqrt{x}-P_n(x))\left(1-\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)\leq\dfrac{2\sqrt{x}}{2+n\sqrt{x}}\left(1-\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)$ d'après P_n et $1-\dfrac{\sqrt{x}}{2}\geq 0$. D'où $\sqrt{x}-P_{n+1}(x)\leq\dfrac{2\sqrt{x}}{2+(n+1)\sqrt{x}}$ soit P_{n+1}.

$\forall x\neq 0$ on a $\dfrac{2\sqrt{x}}{2+n\sqrt{x}}\leq\dfrac{2}{n}$ ce qui est encore vraie pour $x=0$. D'où $\forall x\in[0,1]:0\leq\sqrt{x}-P_n(x)\leq\dfrac{2}{n}$, et donc $P_n\to\sqrt{x}$ avec convergence uniforme sur $[0,1]$. Nous venons de vérifier le tjéorème de Weierstrass pour $x\to\sqrt{x}$: Toute fonction continue sur un compact est limite uniforme d'une suite de polynômes sur ce compact.

Exercice 30 Montrer que les séries de fonctions suivantes convergent uniformément sur I.
1°) $u_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n^2}$ où $n\geq 1$ et $I=\mathbb{R}$.
2°) $f_n(x)=(-1)^n\sin\dfrac{x}{n}$ avec $n\geq 1$ et $I=[-\alpha,\alpha]$ où $0<\alpha\leq\frac{\pi}{2}$.

[Dem] Pour la première la majoration : $\left|\dfrac{\sin nx}{n^2}\right|\leq\dfrac{1}{n^2}$ donne la convergence normale sur $\mathbb{R}$. Pour la seconde dans les conditions on a $\sin\dfrac{x}{n}\geq 0$ et la série est alternée. La majoration du reste d'ordre $n-1:|R_n|\leq\sin\dfrac{\alpha}{n}\leq\dfrac{\alpha}{n}$ donne la convergence uniforme du reste vers 0 et donc la convergence uniforme de la série sur I.