Chapitre 12

FONCTIONS de PLUSIEURS VARIABLES

12.1 introduction

Les fonctions de plusieurs variables tirent leur origine de la géométrie (courbes dépendant d'un paramètre Leibniz 1694) et de la physique (mouvement d'une corde vibrante dont la position est $u(x,t)$.

C'est au milieu du $19^{ème}$ siècle que l'étude fait un grand bon en notant d'une seule lettre x le n-uplet $(x_1, \cdots, x_n)$. Grasmann (1844), Peano (1888) et Hamilton (1853).

La formulation moderne, naissance de la topologie, est due à des mathématiciens comme Hausdorff, Weierstrass (1914) pour la notion d'ouverts, Fréchet (1906) pour la notion de compact. Néanmoins beaucoup de travaux aboutissent au $18^{ème}$ siècle en se ramenant au cas d'une variable.

Cauchy (1821) pensait que la continuité en chaque variable donnait la continuité de la fonction, Peano (1884) trouve un contre-exemple.

Les dérivées partielles sont déjà utilisées par Euler (1734) puis plus tard par Jacobi et Weierstrass pour aboutir à la notion de fonctions différentiables en 1920 par Stolz et Klein. Euler en 1734 affirmait que $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2}{\partial y \partial x}$, mais Schwarz (1873) trouve le premier contre-exemple suivi par Peano (1884).

La série de Taylor à 2 variables est montrée en 1829 par Cauchy en se ramenant au cas d'une variable mais Lagrange (1759) avait déjà énoncé le théorème sur les extréma.

Les intégrales multiples préoccupent Dirichlet (1839). Stolz (1886) donne le principe de clacul d'une intégrale double en intégrant une fonction définie par une intégrale dépendant d'un paramètre.

12.2 fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

12.2.1 Dérivée suivant un vecteur

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$.Considèrons un vecteur $\vec{u}$ normé et un point M_0 de U. Il existe $\eta > 0$ tel que pour tout réel $t : |t| < \eta$ les points $M_0 + t\vec{u}$ sont dans U. En effet il suffit de faire un dessin et prendre une boule centrée en M_0 contenue dans U de rayon η.
Nous avons ainsi la possibilité de considérer la fonction réelle à valeurs dans E : $f_u :]-\eta, +\eta[\to \mathbb{R}^p$ définie par $t \longmapsto f(M_0 + t\vec{u})$

Définition 1 *La fonction $f : U \to \mathbb{R}^p$ est dérivable dans la direction $\vec{u}$ en M_0 signifie que la fonction $f_u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ est dérivable en $t = 0$.*

Cela signifie que $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(M_0 + t\vec{u}) - f(M_0)}{t}$ existe et on notera ce nombre $f'_u(M_0)$ ou $\partial_u f(M_0)$. On regarde la fonction de plusieurs variables sur la droite de direction $\vec{u}$ et donc d'une seule variable.

Remarque: Dans $\mathbb{R}^3$ si $\vec{n}$ est un vecteur unitaire normal à une surface S en un point M la dérivée suivant $\vec{n}$ est appelée dérivée normale à la surface en M_0 (attention à orienter la normale) notée $\partial_{\vec{n}}(M_0)$.

Exercice 1 Prenons $f : (x, y) \to xy$ et pour point $(0, 0)$, pour direction $v = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ la fonction f_v s'écrit $f_v(t) = t^2$ et la dérivée $\partial f_v(0, 0) = 0$. De la même façon on calcule $\partial f_{(0,1)}(2, 1) = 2$ et $\partial f_{(1,0)}(1, 1) = 1$. Que reconnait-on ?

12.2.2 Dérivées partielles d'ordre un

Définition 2 *On considère la base canonique de $\mathbb{R}^n$: $(e_1, \cdots, e_n)$ où*

$e_i = (0, 0, \cdots, 0, \overset{\overset{i}{\downarrow}}{1}, 0, \cdots, 0)$ et $f : U \to \mathbb{R}^p$. La $i^{\text{ème}}$ dérivée partielle de f en M_0 est $\partial_{e_i} f(M_0)$ notée aussi $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(M_0)$ si cette dérivée existe.

Pour le calcul : on peut considérer avec les notations qui s'imposent $x_i \longmapsto f(m_1, \cdots, x_i, \cdots, m_n)$ que l'on dérive puis on fait $x_i = m_i$. Ou bien les théorèmes généraux permettent de dire que cette fonction est dérivable ou bien on regarde la limite du taux de variation :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(m_1, \cdots, m_i + h, \cdots, m_n) - f(m_1, \cdots, m_n)}{h} \left(= \frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0) \right).$$

Si les dérivées partielles existent en tout point on définira les dérivées partielles sur U fonctions elles-mêmes de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

Exercice 2 : $f(x, y) = \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$

Définition 3 *On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est de classe $\mathrm{C}^1(U)$ si et seulement si les n dérivées partielles existent et sont continues sur U.*

Définition 4 *Soit une fonction f définie sur U ouvert de $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, la différentielle de f est $df(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i$*

Remarque: Ainsi $df(x)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ qui à l'élément $h = (h_1, \cdots, h_n)$ associe $df(x) \cdot h = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i$ on par exemple $df(x) \cdot e_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ et pour la dérivée selon un vecteur : si $\vec{v} = (v_1, \cdots, v_n)$ on a $\partial_v f(M_0) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(M_0) v_i$. Les dx_i peuvent s'interpréter comme étant les formes linéaires projections de $\mathbb{R}^n$: $dx_i : (h_1, \cdots, h_n) \longmapsto h_i$. Les dx_i forment la base duale des e_i base de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 3 $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$ en $(x_0, y_0) = (6, 2)$ on obtient $\dfrac{x}{y} = 3 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y + o(x, y)$ ceci donne le plan tangent à la surface $z = \dfrac{x}{y}$ au point $(6, 2, 3)$. (explication)

Théorème 1 *L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1(U, F)$ est un espace vectoriel pour les lois usuelles. Pour tout a de U : $f \longmapsto df\,(a)$ est une application linéaire entre $\mathcal{C}^1(U, F)$ et $\mathcal{L}(E, F)$.*

[Dem] Il suffit de l'écrire.

Dans le cas de $\mathcal{C}^1(U, \mathrm{I\!R})$ on a une algèbre où la multiplication revient à multiplier des scalaires : $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$. Pour la somme, la multiplication externe, la multiplication la preuve peut se faire sans difficulté à l'aide des dérivées partielles.

12.2.3 Développement d'ordre 1

Théorème 2 *: Si f est une fonction de classe C^1 sur U en supposant que le segment $[a, a+h] \subset U$ on a : $f(a+h) = f(a) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + o(h)$ où $o(h) = \|h\| \epsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$, $h = (h_1, h_2, \cdots, h_n)$. Il faut remarquer que ϵ est une fonction de $\mathrm{I\!R}^n$ dans $\mathrm{I\!R}^p$. En d'autre terme on a $df(a) : h \longmapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. Et par conséquent si f admet des dérivées partielles continues sur U alors f est différentiable sur U.*

[Dem] Il suffit de faire la preuve pour $n = 2$ et en se ramenant au cas où $a = 0$, $f(a) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$ quitte à remplacer la fonction f par la fonction g : $g(x, y) = f(a_1 + x, a_2 + y) - f(a_1, a_2) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot x - \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot y$. Soit $\epsilon > 0$ la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en 0 donne $\left\| \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right\| < \epsilon$ si $\|(x, y)\| < \eta$. On a alors pour $\|(x, y)\| < \eta$: $\|g(x, y) - g(0, y)\| < \epsilon\, |x|$ ceci par application du théorème des accroissements finis pour $g(\cdot, y)$ fonction d'une variable. Maintenant comme $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = 0$ et $g(0, 0) = 0$, on peut trouver $\beta > 0$ tel que $|y| < \beta$ entraîne $\|g(0, y)\| < \epsilon\, |y|$. On en déduit que pour $\|(x, y)\| < \inf(\eta, \beta)$ on a $\|g(x, y)\| < \epsilon\, \|(x, y)\|$. Il faut remarquer le rôle de la continuité en (x, y) de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ au point $(0, 0)$.

Composition :

Théorème 3 *Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ouvert de E vers F et g une fonction $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert V de F vers G, en supposant que $f(U)$ soit contenu dans V on peut alors composer et considérer $g \circ f$. On a que $g \circ f$ est $\mathcal{C}^1$ sur U et pour tout a de U : $d(g \circ f)(a) = (dg(f(a))) \circ (df(a))$.*

[Dem]
Posons $\varphi = (dg(f(a))) \circ (df(a))$ on a bien φ est linéaire de E dans G. Si (a, h) sont dans E on a
$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + \|h\| \epsilon(h)$
$(g \circ f)(a+h) = g(f(a) + df(a)(h) + \|h\| \epsilon(h))$
$= g(f(a)) + dg(f(a)) . (df(a)(h) + \|h\| \epsilon(h)) + \|k\| \zeta(k)$ avec $k = df(a)(h) + \|h\| \epsilon(h)$et $\lim\limits_{k \to 0} \zeta(k) = 0$.
$= g(f(a)) + dg(f(a)) . (df(a) h) + \epsilon'(h)$ avec
$\epsilon'(h) = \|h\| dg(f(a)) . \epsilon(h) + \|k\| \zeta(k)$. or $\|k\| \zeta(k) = \|df(a)(h) + \|h\| \epsilon(h)\| \zeta(h)$ et $\|k\| \zeta(k) = \|h\| \zeta(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \zeta(h) = 0$. Car $\|df(a)(h)\| \leq |||df(a)||| \, \|h\|$.

Nous pouvons composer de deux façons : pour deux variables

$$\begin{cases} x \xrightarrow{g} f(u(x), v(x)) \\ (x, y) \to f(u(x, y), v(x, , y)) \end{cases}$$

Exercice 4 Dans le premier cas on obtient une fonction de $\mathrm{I\!R}$ dans $\mathrm{I\!R}$ en posant $\phi : x \to (u(x), v(x))$ on a $f \circ \phi$ et nous allons montrer que $(f \circ \phi)'(x) = df(\phi(x))(\phi'(x))$, nous supposons f définie sur un ouvert contenant $\phi(I)$.
$f(\phi(x+h)) = f(\phi(x) + \phi'(x).h + \|h\| \epsilon(h)) = f(\phi(x)) + df(\phi(x)) . (\phi'(x).h + \|h\| \epsilon(h)) + \|h\| \epsilon'(h)$
$= f(\phi(x)) + h df(\phi(x)) . \phi'(x) + \|h\| (df(\phi(x)) . \epsilon(h) + \epsilon'(h))$ cette dernière parenthèse est un $\epsilon''(h)$ car si h tend vers 0 elle tend vers 0 par contuité de $df(\phi(x))$.
On peut retenir cette formule en écrivant : $dg(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(u(x), v(x)) u'(x) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(u(x), v(x)) v'(x)$.

Exercice 5 Dans le second cas : il s'agit de la composée de $\Phi : (x,y) \to (u(x;y),v(x,y))$ avec f.Calculons les dérivées partielles, pour la première il s'agit de dériver $x \to f(u(x,y),v(x,y))$ qui est une fonction du cadre précédent donc $\frac{\partial f\circ\Phi}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(u(x,y),v(x,y))\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(u(x,y),v(x,y))\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$ et pour l'autre : $\frac{\partial f\circ\Phi}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(u(x,y),v(x,y))\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(u(x,y),v(x,y))\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$ toutes ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ dès que f et Φ le sont.

- Composition :

  Considèrons une $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ et une fonction $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on peut alors considérer le produit défini sur l'intersection des ensembles de définition de f et de λ : $\lambda(x)f(x)$. Le produit λf va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ On a $(\lambda f)^{(p)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i\lambda^{(i)}f^{(n-i)}$ cela se montre coordonnées par coordonnées puisque $\lambda f(x) = (\lambda f_1, \lambda f_2, \cdot\cdot\cdot, \lambda f_n)$.

- Cas du produit scalaire : si nous considèrons des applications de $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ nous pouvons effectuer le produit scalaire$(f \cdot g)(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\cdot g_i(x)$ on a alors $(f\cdot g)' = (f'\cdot g + f\cdot g')$. La formule de Leibniz s'applique. Cette fonction est très pratique et permet de dériver les normes $\|f\| = \sqrt{f\cdot f}$. (Comme application on peut montrer la propriétés des tangentes des coniques avec les deux foyers.

- cas du produit vectoriel de deux fonctions f, g de classe $\mathcal{C}^k\left(I, \mathbb{R}^3\right)$ nous définissons une nouvelle fonction de I dans $\mathbb{R}^3$ par $x \to f(x)\wedge g(x)$ ainsi la dérivée première est $(f\wedge g)' = f'\wedge g + f\wedge g'$

Exercice 6 Soit $f \in C^1\left(\mathbb{R}^2, K\right)$ et $F : x \longmapsto \int_0^x f(t,x)\,dt$. Considèrons $\Phi : (x,y) \longmapsto \int_0^x f(t,y)\,dt$ sur $\mathbb{R}^2$. on $\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,y) = f(x,y)$ et $\frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,y) = \int_0^x \frac{\partial}{\partial y} f(t,y)\,dt$ comme ces dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$ on a que Φ est C^1. Soit maintenant $\Psi : x \longmapsto (x,x)$ fonction C^1sur $\mathbb{R}$. Comme $F = \Phi\circ\Psi$ la fonction F est de classe C^1sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = (d\Phi(\Psi(x)))(\Psi'(x)) = \int_0^x \frac{\partial}{\partial y} f(t,x)\,dt + f(x,x)$.

12.2.4 Cas de l'algèbre $\mathcal{C}^1(U,K)$

Pour le cas $p = 1$ on a que $C^1(U,K)$ est une $K-$algèbre sur laquelle $f \longmapsto df$ est une application linéaire vérifiant de plus $d(fg) = fdg + gdf$. Si $f \in C^1(U,K^*)$ alors $\frac{1}{f}$ est de classe C^1 et $d\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{1}{f^2}df$. Enfin si $f \in C^1(U,K)$ et $g \in C^1(U,K^*)$ alors $\frac{f}{g}$ est de classe C^1 et $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}$.

En effet nous pouvons considérer les fonctions C^1 : $F : a \longmapsto (f(a), g(a))$ et $G : (\lambda,\mu) \longmapsto \lambda\mu$ qui est bilinéaire par composition alors fg est C^1 et $d(fg)(a) = (dG(F(a)))\circ dF(a) = f(a)\,dg(a) + g(a)\,df(a)$, car $dg(\lambda,\mu)(h,k) = \lambda h + \mu k$.

12.2.5 Gradient

Définition 5 *Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ouvert de $\mathbb{R}^n$ alors pour tout a de U il existe un unique vecteur de E, noté $grad_a f$ tel que por tout h on ait $df(a).h = (grad_a f, h)$. L'application $gradf$ est une application continue de U dans $\mathbb{R}^n$ appelé gradient de f. Si on considère une base orthonormée $gradf$ a pour composantes $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$.*

En effet $df(a)$ est une forme linéaire et d'après le théorème de Riesz on a l'existence et l'unicité d'un vecteur ici appelé $grad_a f$ tel que $df(a) = (grad_a f, \cdot)$. Ainsi si h est un vecteur de E on a $D_h f(a) = df(a).h = (grad_a f, h)$.

Exercice 7 Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U ne contenant pas $(0,0)$ et en notant $g : (\rho,\theta) \longmapsto f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ alors pour tout réel θ les coordonnées de $grad_{(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)}f$ sont dans une base orthonormée : $\left(\dfrac{\partial g}{\partial \rho}(\rho,\theta), \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(\rho,\theta)\right)$.

[Dem]
En effet $G : (\rho,\theta) \longmapsto (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ est C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et sa matrice jacobienne est : $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\cos\theta \\ \sin\theta & \rho\sin\theta \end{pmatrix}$ ainsi $dG(\rho,\theta)e_1 = u(\theta)$ et $dG(\rho,\theta)(e_2) = \rho v(\theta)$. Si $a = G(b)$ on a $df(a)(u(\theta)) = (df(G(b)) \circ dG)(e_1) = dg(b)(e_1)$. D'où $df(a)(u(\theta)) = D_1 g(b)$. De même $df(a)(v(\theta)) = \frac{1}{\rho}(df(G(b)) \circ dG)(e_2) = \frac{1}{\rho}dg(b)(e_2) = \frac{1}{\rho}D_2 g(b)$ et comme $\left(D_{u(\theta)}f(a), D_{v(\theta)}f(a)\right)$ sont les coordonées de $grad_a f$ dans la base canonique on obtient le résultat.

Accroissements finis

Théorème 4 *Si U est un ouvert, convexe de E et $f \in \mathrm{C}^1(U,K)$ alors si pour tout a de U l'application $df(a)$ est lipchitzienne de rapport k on a pour tout points a,b de U : $|f(b) - f(a)| \leq kN(b-a)$.*

[Dem] On a $[a,b] \subset U$ et en posant $x = tb + (1-t)a$ on a $F : t \longmapsto f(x)$ de classe C^1 sur $[0,1]$ avec $F'(t) = df(x)(b-a)$. Ainsi $|F'| \leq kN(b-a)$ par hypothèse et $|f(b) - f(a)| = \left|\int_0^1 F'\right| \leq kN(b-a)$.

corollaire:

Si U est un ouvert convexe de E pour qu'une application de classe C^1 sur U à valeurs numériques soit constante il faut et il suffit que sa différentielle soit nulle sur U.
La réciporoque découle des accroissements finis.

12.3 Dérivées d'ordre supérieur :

12.3.1 Définition

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ elle peut donc être à son tour dérivable et on obtient $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, on les appelle les dérivées partielles d'ordre 2.

Remarque: Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ sinon. Pour $(x,y) \neq (0,0)$ on calcule les dérivées partielles, en $(0,0)$ on les calcule aussi mais par la définition des limites puis encore par les limites $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$

Théorème 5 (de Schwarz) *: Soit f une fonction de U ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Si les deux dérivées partielles d'ordre 2, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existent sur un voisinage de a point de U et sont continues en a elles sont alors égales en a.*

[Dem] Admise

En outre si elles sont continues sur U elles sont égales.

- Maintenant nous pouvons récidiver : et définir $\dfrac{\partial^p f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_p}}(a) = \dfrac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\dfrac{\partial^{p-1} f}{\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_p}}\right)(x)$ nous avons que si des dérivées d'ordre p faisant intervenir le même nombre de dérivations par rapport à chaque variable x_i existent dans un voisinage de a et sont continues sur ce voisinage alors elles sont égales.

Définition 6 *Une fonction numérique f de U ouvert de $\mathbb{R}^n$ est dites de classe $\mathcal{C}^p$ sur U si toutes les dérivées d'ordre p existent et sont continues sur U.*

Proposition 1 *L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^p(U)$ forment une algèbre pour les lois usuelles.*

[Dem] Il suffit de l'écrire

12.3.2 Retour au cas des fonctions numériques

Théorème 6 *Soit une fonction numérique de classe C^2 sur U ouvert de $\mathbb{R}^2$ on a la formule de Taylor-young à l'ordre 2 :* $f(a+h) = f(a)+h_1\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)+h_2\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)+\frac{1}{2}\left(h_1^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + 2h_1h_2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a) + h_2^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y}(a)\right)+ o(h_1^2+h_2^2)$ *avec* $h = (h_1, h_2)$

[Dem] (admis)

Extrêma de fonctions

Définition 7 *On dit qu'une fonction f de l'ouvert U de $\mathbb{R}^n$ présente un maximum en a si il existe une boule ouverte $\mathcal{B}$ de centre a contenue dans U tel que : pour tout x de $\mathcal{B}$: $f(x) \leq f(a)$. On définit de même les minima, les extrema stricts ou non.*

Proposition 2 *Soit f une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1(U)$ et a un point de l'ouvert U. Si f présente un extremum en a alors $df(a) = 0$. (c'est à dire pour tout i $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$)*

[Dem] On considère la fonction $\theta : t \to a + tu$ qui est définie sur une petite boule autour de a on a alors que la fonction numérique d'une variable $f \circ \theta$ présente un extremum en $t = 0$ donc sa dérivée est nulle ou $df(a) \cdot u$ ceci étant vrai pour tout vecteur u on a que $df(a) = 0$.

Définition 8 *On appelle points critiques d'une fonction les points où la différentielle s'annule.*

Remarque: Les extrema d'une fonction sont à chercher parmi les points de la frontière de son ensemble de définition si celui-ci n'est pas ouvert, parmi les points où f n'est pas C^1, enfin parmi les points critiques. Il faut regarder le signe de la différence $f(a + u) - f(a)$.

Cas des fonctions de deux variables.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$et $a = (\alpha, \beta)$ un point critique on a alors:

$f(x, y)-f(\alpha, \beta) = \dfrac{1}{2}\left(h^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + 2hk\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a) + k^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y}(a)\right)+o(h^2+k^2)$ où $h = x-\alpha, k = y-\beta$.

Nous posons $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a)$, $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$ et pour connaître le signe de cette différence il suffit d'étudier la forme quadratique $rh^2 + 2shk + tk^2$ dont la matrice est $\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ de déterminant $rt - s^2$ qui donne le produit des valeurs propres ainsi :

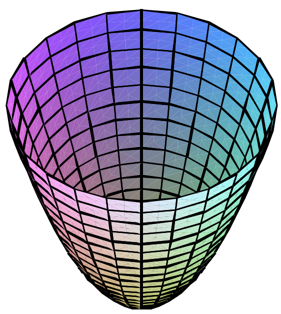
- si $rt - s^2 > 0$ alors on a deux valeurs propres de même signe si
  - $r > 0$ il y a un minimum local strict.
  - $r < 0$ il y a un maximum local strict.
- si $rt - s^2 < 0$ on a alors deux valeurs propres de signe contraire et on a ni maximum ni minimum.
- si $rt - s^2 = 0$ on ne peut pas conclure au regard de l'ordre 2 il faut poursuivre le développement ou regarder autrement.

Applications aux surfaces :

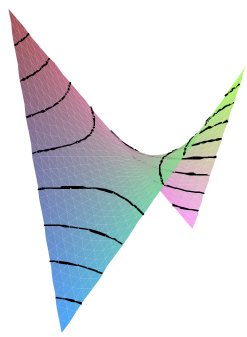
- Surface définie par une équation cartésienne : Soit une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geq 1$, si on considère l'ensemble des points $M(x, y, z)$ vérifiant la relation $z = f(x, y)$ on dit que l'on a une surface d'équation cartésienne $z = f(x, y)$.

Une surface admet une paramétrisation cartésienne si l'une des coordonnées dans $\mathbb{R}^3$ s'exprime à l'aide d'une fonction des deux autres.
Le plan tangent d'une surface définie par $z = f(x, y)$ en un point M_0 est le plan passant par M_0 et d'équation $(X - X_0)\dfrac{\partial f}{\partial x}(M_0) + (Y - Y_0)\dfrac{\partial f}{\partial y}(M_0) - (Z - Z_0)$. Dans le cadre du théorème ci-dessus on en déduit pour $rt - s^2 \neq 0$ la position de la surface par rapport au plan tangent. Situation en col ou en selle de cheval (voir dessin)

parabolo de elliptique



parabolo de hyperbolique



- Surface définie par une équation $F(x, y, z) = 0$

On suppose que la fonction F est une application de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$, sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. En supposant que le gradient de F est non nul en M_0 on a le plan tangent qui est le plan passant par M_0 et normal au gradient : $(X - X_0)\dfrac{\partial F}{\partial x}(M_0) + (Y - Y_0)\dfrac{\partial F}{\partial y}(M_0) + (Z - Z_0)\dfrac{\partial F}{\partial z}(M_0) = 0$
Remarque: Soit maintenant une fonction numérique F définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ On appelle ligne de niveau de F l'ensemble des points $M(x, y, z)$ vérifiant $F(x, y, z) = \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. La normale à cette surface en M_0 est la droite affine passant par M_0 et dirigée par $Grad_{M_0}F$.

Proposition 3 *Soit des surfaces d'équation $F(x, y, z) = 0$ et $G(x, y, z) = 0$, on considère, si elle existe, la courbe intersection des deux surfaces. En un point M_0 où les plans tangents sont distincts la tangente à la courbe intersection est l'intersection des plans tangents aux surfaces au point M_0.*

[Dem]

L'exemple ci-dessus correspond à la fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2/\{(0, 0)\}$ $z = f(x, y) = (x^2 + 2y^2)^{-(x^2+y^2)}$ les points critiques sont $x = 0, y = -.4288819425, y = 0, x = -.6065306597$ pour lesquelles la quantité $rt - s^2$ est respectivement négative et positive.
L'exemple suivant est la fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ $z = f(x, y) = x^2y^3(1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y)$, les points critiques sont $y = y, x = 0, x = x, y = 0, x = 1, y = 1$, pour lesquels $rt - s^2$ est respectivement nuls puis pour le dernier négatif. L'étude à la main des deux premières donnent un maximum en $(0, y_0)$ pour $y_0 \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et en $(1, 1)$ et un minimum en $(0, y_0)$ pour $y_0 \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$.

Proposition 4 *courbe intersection de deux surfaces.*
Soit Σ_1 et Σ_2 des surfaces si M_0 est un point régulier de l'intersection des surfaces on a que $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ est localement une courbe. De plus si les plans tangents en ce point aux deux surfaces sont distincts alors la tangente à la courbe est l'intersection des plans tangents.

[Dem] C'est admis.

Quitte à changer la base on pourra localement écrire avec les notations qui s'imposent : $M \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = \varphi_1 (x, y) \\ z = \varphi_2 (x, y) \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = \varphi_1 (x, y) \\ (\varphi_1 - \varphi_2) (x, y) = 0 \end{array} \right.$. Comme les plans tangents sont supposés distincts on a $grad\, (\varphi_1 - \varphi_2) (M_0) \neq 0$. Ainsi la seconde équation peut s'écrire $y = \psi (x)$ où ψ est C^1. Alors localement on a $M \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \psi (x) \\ z = \theta (x) \end{array} \right.$ Ainsi l'intersection est localement une courbe et $grad_{M_0} (F_1) \wedge grad_{M_0} (F_2)$ est tangent en M_0.

Application aux courbes

Pour une courbe définie implicitement : un point est régulier si en cepoint le vecteur normel est non nul. La tangente en un tel point a pour équation $(X - x_0) \dfrac{\partial f}{\partial x} (x_0, y_0) + (Y - y_0) \dfrac{\partial f}{\partial y} (x_0, y_0) = 0$ un vecteur normal est $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} (x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} (x_0, y_0) \end{pmatrix}$.

12.4 Travaux dirigés :Fonctions de plusieurs variables

Exercice 8 1°) Soit F l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $F(x, y) = (x+y, xy)$. F est-elle injective, surjective ?
2°) On considère la partie Δ de $\mathbb{R}^2$ définie par : $\Delta = \{(x, y); x \in I, y \in I, x \leq y\}$ où $I = [-1, +1]$. Soit G la restriction de F à Δ, on appelle Ω l'image de Δ par G.

a) Montrer que G est une bijection de Δ sur Ω et déterminer G^{-1}.

b) Représenter géométriquement Ω.
3°) On considère l'application H définie sur Ω par :

$$\forall (s, p) \in \Omega, H(s, p) = Sup \left\{ 1 - s + p, 1 + s + p, \frac{1}{4}(s^2 - 4p) \right\}$$

On se propose de déterminer le minimum de cette fonction sur Ω.

a) Pour tout α de l'intervalle $[-2, 2]$, on considère le segment $S_\alpha = \{(s, p) \in \Omega; s = \alpha\}$, déterminer le minimum de H sur S_α.

b) Déterminer le minimum de H sur Ω et préciser le point M de Ω où il est atteint. Calculer $G^{-1}(M)$.
4°) a) Soit (a, b) un élément de Δ et soit $K(a, b) = \sup\limits_{t \in I} \{|(t - a)(t - b)|\}$. Exprimer $K(a, b)$ à l'aide de la fonction H.

b) Comment doit-on choisir (a, b) pour que $K(a, b)$ soit minimum ?

[Dem] L'injectivité et la surjectivité revient à se poser la question : étant donné (s, p) existe-t-il et combien de (x, y) tel que la somme est s et le produit p ? On sait que x, y sont donnés par l'équation $X^2 - sX + p = 0$. Il n'y a pas toujours de solution puisqu'il faut que $s^2 - 4p \geq 0$, F n'est pas surjective, ni injective puisque (x, y) et (y, x) sont deux éléments ayant la même image.

- Puisqu'on considère G de Δ vers $\Omega = F(\Delta)$ il en résulte que G est surjective, l'injectivité est du à Δ qui impose $x \leq y$ ce qui ne donne plus qu'un seul couple possible (x, y) d'image (s, p). L'application inverse est : $(s,p) \mapsto (x,y)$ où $\begin{cases} x = \dfrac{s - \sqrt{s^2 - 4p}}{2} \\ y = \dfrac{s + \sqrt{s^2 - 4p}}{2} \end{cases}$ $(*)$.
- Pour la représentation graphique voir dessin : Ω est l'ensemble des couples (s,p) tel que $s^2 - 4p \geq 0$ et x, y éléments de I, vérifiant les relations $(*)$. Donc $-2 \leq s \leq 2$ et $-1 \leq p \leq 1$.
- Pour le minimum de H sur S_α on a $H(\alpha, p) = \sup\left(1 - \alpha + p, 1 + \alpha + p, \frac{1}{4}\left(\alpha^2 - 4p\right)\right)$. Vu la symétrie en s (parité) on peut supposer $\alpha \in [0,2]$ et dans ce cas, $1 - \alpha + p \leq 1 + \alpha + p$ ce qui donne $H(\alpha, p) = \sup\left(1 + \alpha + p, \frac{1}{4}\left(\alpha^2 - 4p\right)\right)$. La condition $1 + \alpha + p \leq \frac{1}{4}\left(\alpha^2 - 4p\right)$ est équivalente à $\alpha^2 - 4\alpha - 8p - 4 \geq 0$ ou $p \leq \dfrac{\alpha^2 - 4\alpha - 4}{8}$. Or il faut vérifier que cette valeur $\dfrac{\alpha^2 - 4\alpha - 4}{8} \in [-2, +2]$, ce qui donne $-2 \leq \dfrac{\alpha^2 - 4\alpha - 4}{8} \leq 2$ ou $0 \leq \alpha^2 - 4\alpha + 12$ de discriminant $\Delta' = 4 - 12 < 0$, ceci est toujours vraie et $\left(\alpha - \left(2 - 2\sqrt{6}\right)\right)\left(\alpha - \left(2 + 2\sqrt{6}\right)\right) \leq 0$, ce qui est toujours vraie car $2 + 2\sqrt{6} > 2$ et $2 - 2\sqrt{6} < -2$. Finalement $H(\alpha, p) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(\alpha^2 - 4p\right) \text{ si } -2 \leq p \leq \dfrac{\alpha^2 - 4\alpha - 4}{8} \\ 1 + \alpha + p \text{ sinon} \end{cases}$.

  Or la valeur de séparation $\dfrac{\alpha^2 - 4\alpha - 4}{8}$ est négative pour $\alpha \in [0,2]$ et donc le minimum est $\min\left\{\frac{1}{4}\left(\alpha^2 - \dfrac{\alpha^2 - 4\alpha - 4}{2}\right), 1 + \alpha + \dfrac{\alpha^2 - 4\alpha - 4}{8}\right\} = \min\left\{\frac{1}{4}\left(\dfrac{\alpha^2 + 4\alpha + 4}{2}\right), \dfrac{\alpha^2 + 4\alpha + 4}{8}\right\} = \dfrac{\alpha^2 + 4\alpha + 4}{8} = \dfrac{(\alpha + 2)^2}{8}$.
- Pour trouver le minimum de H sur Ω il suffit de prendre le minimum des minima de H sur S_α pour $\alpha \in [0,2]$. Ainsi $\min H = \frac{1}{2}$ et il est atteint en $M = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$. Une vérification consiste à calculer $H\left(0, -\frac{1}{2}\right) = \sup\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$. Puis $G^{-1}(M) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ car $x + y = 0, xy = -\frac{1}{2}$ soit $-x^2 = -\frac{1}{2}, x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ pour avoir $x \leq y$.
- Le polynôme $P(t) = (t - a)(t - b) = t^2 - (a + b)t + ab$ admet un extrêmum en $\frac{a+b}{2}$ qui vaut en valeur absolue $\frac{1}{4}\left((a + b)^2 - 4ab\right)$. Le maximum de cette expression en valeur absolue sur $I = [-1, +1]$ est donc $\sup\left(P(1), P(-1), P\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$. $\sup\limits_{(a,b) \in \Delta} \left\{1 - (a + b) + ab, 1 + (a + b) + ab, \frac{1}{4}\left((a + b)^2 - 4ab\right)\right\}$.
  Et donc $K(a, b) = H(G(a, b))$. D'après ce qui précède $K(a, b)$ sera minimum pour $a = 0$ et $b = -\frac{1}{2}$.

Exercice 9 On pose $\begin{cases} z = f(x, y) = \dfrac{x^3 y}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \\ 0 = f(0,0) \end{cases}$

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
b) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
c) Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$;

[Dem]

- On a $\left|\dfrac{x^3 y}{x^2 + y^2}\right| \leq |xy| \leq \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) = \frac{1}{2}\|(x, y)\|^2$, ces inégalités prouvent que $f(x, y)$ tend vers $0 = f(0,0)$ quand (x, y) tend vers $(0,0)$. Ainsi f qui est continue sue $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, par les théorèmes généraux, l'est aussi en $(0,0)$ et donc sur $\mathbb{R}^2$.
- Sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{3x^2 y\left(x^2 + y^2\right) - 2x^4 y}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \dfrac{x^4 y + 3x^2 y^3}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \dfrac{x^3\left(x^2 + y^2\right) - 2x^3 y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \dfrac{x^5 - x^3 y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$. En $(0,0)$ nous revenons au taux de variation : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x, 0) - f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 0}{x^2 + 0} = 0$. Et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{f(0, y) - f(0,0)}{y} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{0^3}{0^2 + y^2} = 0$. Pour le caractère $\mathcal{C}^1$ il faut vérifier que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ ce qui est vrai par exemple par $\left|\dfrac{x^4 y + 3x^2 y^3}{\left(x^2 + y^2\right)^2}\right| \leq$

$\left|\dfrac{x^4y}{(x^2+y^2)^2}\right| + \left|\dfrac{3x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}\right| \leq |y| + \frac{3}{2}|y|$ et pour l'autre $\left|\dfrac{x^5-x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}\right| \leq \left|\dfrac{x^5}{(x^2+y^2)^2}\right| + \left|\dfrac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}\right| \leq |x| + \frac{1}{2}|x|$. Ces deux inégalités prouvent que les limites sont celles espérées.

- Il est clair par les théorèmes généraux que f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

Exercice 10 Soit $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ telle que : $(x,y) \longmapsto f(x,y) = \left(x^2+2y^2\right)^{-\left(x^2+y^2\right)}$.
1°) Montrer que la fonction f peut être prolongée par continuité au point $(0,0)$. Soit g le prolongement obtenu.
2°) Vérifier que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Donner la différentielle de g au point $(0,0)$.
3°) La fonction g est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?
4°) Rechercher les extrémums locaux de g, restreinte au domaine de $\mathbb{R}^2$ sur lequel elle est de classe $\mathcal{C}^2$.

[Dem]

- En écrivant $x^2+y^2 \leq \left(x^2+2y^2\right) \leq 2\left(x^2+y^2\right)$ puis $\ln\left(x^2+y^2\right) \leq \ln\left(x^2+2y^2\right) \leq \ln 2\left(x^2+y^2\right)$ puis $-\left(x^2+y^2\right)\ln 2\left(x^2+y^2\right) \leq -\left(x^2+y^2\right)\ln\left(x^2+2y^2\right) \leq -\left(x^2+y^2\right)\ln\left(x^2+y^2\right)$ et enfin $e^{-\left(x^2+y^2\right)\ln 2\left(x^2+y^2\right)} \leq f(x,y) \leq e^{-\left(x^2+y^2\right)\ln\left(x^2+y^2\right)}$ ces inégalités donnent que nous pouvons prolonger f par continuité en $(0,0)$ en posant $f(0,0)=1$, en remarquant que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+y^2\right)\ln\left(x^2+y^2\right) = 0$.
- g est clairement $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. En $(0,0)$ on a d'une part : $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x,0)-g(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^2\ln x^2}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} -x\ln x^2 = 0$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{g(y,0)-g(0,0)}{y} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{e^{-y^2\ln 2y^2}-1}{y} = \lim\limits_{y\to 0} -y\ln 2y^2 = 0$. Pour voir si les dérivées sont continues il nous faut les dérivées partielles en dehors de 0 soit $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = g(x,y)\left(-2x\ln\left(x^2+2y^2\right) - \left(x^2+y^2\right)\dfrac{2x}{x^2+2y^2}\right)$, expression qui tend vers 0 quand $(x,y)\to(0,0)$. Et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = g(x,y)\left(-2y\ln\left(x^2+2y^2\right) - \left(x^2+y^2\right)\dfrac{4y}{x^2+2y^2}\right)$, expression qui tend bien vers 0 quand $(x,y)\to(0,0)$. La différentielle en $(0,0)$ est $dg(0,0)=0$.
- Pour le caractère $\mathcal{C}^2$ que l'on a en dehors de $(0,0)$ il faut dériver

  - $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = g(x,y)\left(-2xln(x^2+2y^2) - \dfrac{2x\left(x^2+y^2\right)}{x^2+2y^2}\right)^2 + g(x,y)\Bigg(-2ln(x^2+2y^2) - 8\dfrac{x^2}{x^2+2y^2} - 2\dfrac{x^2+y^2}{x^2+2y^2} + 4(x^2 +$
  - $.\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = g(x,y)\left(-2y\ln(x^2+2y^2) - \dfrac{4y\left(x^2+y^2\right)}{x^2+2y^2}\right)^2 + g(x,y)\Bigg(-2ln(x^2+2y^2) - 16\dfrac{y^2}{x^2+2y^2} - 4\dfrac{x^2+y^2}{x^2+2y^2} + 16(x^2$
  - $.\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y) = g(x,y)\left(-2y\ln(x^2+2y^2) - \dfrac{4y\left(x^2+y^2\right)}{x^2+2y^2}\right)\left(-2x\ln\left(x^2+2y^2\right) - 2\left(x^2+y^2\right)\dfrac{x}{x^2+2y^2}\right) +$
    $g(x,y)\left(-12\dfrac{xy}{x^2+2y^2} + 8\dfrac{x\left(x^2+y^2\right)}{y\left(x^2+2y^2\right)^2}\right)$

  Le Théorème de Schwarz donne que $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}$ au moins en dehors de $(0,0)$.

  - $\dfrac{\partial^2 g}{\partial^2 x}(0,0)$ or $\dfrac{\frac{\partial g}{\partial x}(x,0)}{x} = g(x,0)\left(-2\ln\left(x^2\right)-2\right)$ n'admet pas de limite finie en 0 donc g n'est pas $\mathcal{C}^2$sur $\mathbb{R}^2$.

- Cherchons les points critiques en résolvant : $\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} -2x\ln\left(x^2+2y^2\right) - \left(x^2+y^2\right)\dfrac{2x}{x^2+2y^2} = 0 \\ -2y\ln\left(x^2+2y^2\right) - \left(x^2+y^2\right)\dfrac{4y}{x^2+2y^2} = 0 \end{cases}$
  ce qui donne 4 solutions : $\left(0,\frac{1}{\sqrt{2e}}\right), \left(0,-\frac{1}{\sqrt{2e}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{e}},0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{e}},0\right)$. La théorie, avec des calculs sous-traitées donne $rt-s^2$ négatif en $\left(0,\frac{1}{\sqrt{2e}}\right), \left(0,-\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ donc une situattion de "col" et $rt-s^2$ positifs dans les deux autres avec r négatif il s'agit donc de minima.

Exercice 11 On pose $\begin{cases} z = f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \\ 0 = f(0,0) \end{cases}$

a) f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$ par rapport à x? à y?
b) f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
c) On impose à (x,y) d'appartenir à une courbe donnée (C), étudier la continuité à l'origine de f "le long de (C)" dans les cas sivants :
C est la parabole $y = \sqrt{x}$, C est le cercle $\rho = 2\cos\theta$, C est la droite $y = mx, m \in \mathbb{R}$.
d) décrire quelques courbes tracées sur la surface $z = f(x,y)$.

[Dem]

- f est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ comme composée de fonctions continues. En $(0,0)$ on a $f(x,0) = 0$ pour tout $x \neq 0$ et $f(x,0) \overset{x \to 0}{\to} 0 = f(0,0)$, et $f(0,y) = 0$ pour tout $y \neq 0$ ainsi $f(0,y) \overset{y \to 0}{\to} 0 = f(0,0)$. Il y a donc continuité en $(0,0)$, donc sur $\mathbb{R}^2$ tout entier, par rapport à chacune des variables x et y.
- Cependant f n'est pas continue en $(0,0)$ en effet pour $y = x$ on a $f(x,x) = 1$ pour tout $x \neq 0$ et donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x,x) = 1 \neq f(0,0)$.
- Lorsque $(x,y) \in \mathcal{C}$, par composition, f devient une fonction d'une variable. Pour $y = \sqrt{x}, x > 0$: $f(x,\sqrt{x}) = \dfrac{2x\sqrt{x}}{x^2+x}$ et donc $f(x,\sqrt{x}) \sim 2\sqrt{x}$ et $f(x,\sqrt{x}) \overset{x \to 0}{\to} f(0,0)$ et la fonction $x \longmapsto f(x,\sqrt{x})$ est continue en 0 et donc sur $]0,+\infty[$ par composition de fonctions.
- Sur $\rho = 2\cos\theta$ c'est à dire sur le cercle de diamètre 2, tangent en O on a $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$ d'où $f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = 2\rho^2 \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{\rho^2} = 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$ pour tout $\rho \neq 0$. On remarque donc, en coordonnées polaires que $f(x,y)$ est indépendant de ρ. Le long du cercle quand ρ tend vers 0 avec $\theta \to \pm\frac{\pi}{2}$ on a $f(x,y) \to 0 = f(0,0)$. La fonction $\theta \mapsto f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \sin 2\theta$ est continue à l'origine, c'est à dire quand $\theta \to \pm\frac{\pi}{2}$ d'où $\rho \to 0$. Cette fonction est donc continue sur tout $\mathcal{C}$.
- Sur $y = mx$ on a $f(x,mx) = \dfrac{2m}{1+m^2}$ et donc $f(x,mx) \neq 0$ pour tout $m \neq 0$. La fonction $x \mapsto f(x,mx)$ pour $x \in \mathbb{R}$, n'est pas continue en 0, sauf sur l'axe Ox i.e.$m = 0$. et d'après une question précédente sur Oy i.e. $y = +\infty$.
- Dans les plans horizontaux $z = z_0$, la surface d'équation $z = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ admet pour courbes planes les coniques décomposées d'équation $z_0\left(x^2+y^2\right) = 2xy$, ou encore $y^2 - \dfrac{2}{z_0}xy + x^2 = 0$ si $z_0 \neq 0$ et $xy = 0$ si $z_0 = 0$. que l'on peut résumer par $(y-ax)(y-bx) = 0$ avec $ab = 1, a+b = \dfrac{2}{z_0}$ et donc a et b sont solutions de $t^2 - \dfrac{2}{z_0}t + 1 = 0$. Ces coniques décomposées en deux droites sont réelles ou imaginaires, selon le signe de $1 - z_0^2$. Dans les plans verticaux passant par Oz $(y = mx)$ la section de la surface est une droites horizontale (parallèle à Oy) d'équations $y = mx$ et $z = \dfrac{2m}{1+m^2}$, recontrant Oz. On verra qu'il s'agit d'une surface appelée conoïde.

Exercice 12 Soit u une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, supposée dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose $f(x,y) = u(x^2 - y^2 - 2xy)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Démontrer que : $(x+y)\frac{\partial f}{\partial x} + (x-y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, pour tout x et tout y.

[Dem] Par composition on a $f : (x,y) \mapsto z = x^2 - y^2 - 2xy \mapsto u(z)$ d'où $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = u'(z) \times 2(x-y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = u'(z) \times (-2(x+y))$, d'où le résultat.

Exercice 13 Soit l'équation aux dérivées partielles (E), de fonction inconnue f :

$$xy^3\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - yx^3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - y^3\frac{\partial f}{\partial x} + x^3\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

en utilisant le changement de variables $u = x^2 + y^2$ et $v = x^2 - y^2$, déterminer $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ solution générale de (E) sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$.

[Dem] On a $du = 2xdx + 2ydy, dv = 2xdx - 2ydy$ et pour les dérivées en posant $f\left(x^2+y^2, x^2-y^2\right) = g\left(u,v\right)$: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2x\dfrac{\partial g}{\partial u} + 2x\dfrac{\partial g}{\partial v}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} = 2y\dfrac{\partial g}{\partial u} - 2y\dfrac{\partial g}{\partial v}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(2x\dfrac{\partial g}{\partial u} + 2x\dfrac{\partial g}{\partial v}\right) = 2\dfrac{\partial g}{\partial u} + 2x\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial u} + 2\dfrac{\partial g}{\partial v} + 2x\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial v} = 2\dfrac{\partial g}{\partial u} + 2x\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}2x + 4x^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + 2\dfrac{\partial g}{\partial v} + 2x\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}2x + 4x^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$.

Soit $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\dfrac{\partial g}{\partial u} + 2\dfrac{\partial g}{\partial v} + 4x^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 8x^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + 4x^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$. De même :

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(2y\dfrac{\partial g}{\partial u} - 2y\dfrac{\partial g}{\partial v}\right) = 2\dfrac{\partial g}{\partial u} + 2y\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial u} - 2\dfrac{\partial g}{\partial v} - 2y\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial v} = 2\dfrac{\partial g}{\partial u} + 2y\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}2y - 4y^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} - 2\dfrac{\partial g}{\partial v} - 4y^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + 4y^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$.

Soit $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\dfrac{\partial g}{\partial u} - 2\dfrac{\partial g}{\partial v} + 4y^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 8y^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + 4y^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$ et en remplaçant dans l'équation :

$\left(2xy^3 - 2yx^3 - 2xy^3 + 2x^3y\right)\dfrac{\partial g}{\partial u} + \left(2xy^3 + 2yx^3 - 2xy^3 - 2x^3y\right)\dfrac{\partial g}{\partial v} + \left(4x^3y^3 - 4x^3y^3\right)\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \left(8x^3y^3 + 8x^3y^3\right)\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \left(4x^3y^3 - 4x^3y^3\right)\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$.

Soit $16x^3y^3\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$ ce qui donne en dehors des axes $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$ qui s'intègre par $\dfrac{\partial g}{\partial v} = \phi\left(v\right)$ puis $g\left(u,v\right) = F\left(v\right) + G\left(u\right)$. Les fonctions répondant à l'équation sont de la forme $f\left(x,y\right) = F\left(x^2+y^2\right) + G\left(x^2-y^2\right)$ avec F, G des fonctions $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ quelconques.

Exercice 14 Appliquer la formule des accroissements finis en $(0,0)$ aux fonctions $f(x,y) = x\sqrt{y}$ et $g(x,y) = xe^y$ en vérifiant que θ est bien compris entre 0 et 1.

[Dem]

- On a $x\sqrt{y} - 0 = x\sqrt{\theta y} + y\dfrac{\theta x}{2\sqrt{\theta y}}$ ceci pour tout $x, y > 0$. La fonction étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \setminus \{Ox\}$ on en déduit que $x\sqrt{y} = x\sqrt{y}\left(\sqrt{\theta} + \dfrac{\sqrt{\theta}}{2}\right)$ ce qui donne $\sqrt{\theta} = \frac{2}{3}$ et $\theta = \frac{4}{9}$.
- Pour $(x,y) \mapsto g\left(x,y\right)$ où g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On a l'existence de θ tel que $xe^y = xe^{\theta y} + y\theta xe^{\theta y} = xe^{\theta y} = xe^{\theta y}\left(1 + \theta y\right)$. Ou encore $e^{y(1-\theta)} - \theta y - 1 = 0$ en posant $\varphi\left(\theta\right) = e^{y(1-\theta)} - \theta y - 1$ on a $\varphi'\left(\theta\right) = -y\left(e^{y(1-\theta)} - 1\right)$ qui est du signe de $-y$ sur l'intervalle $[0,1]$. D'où dans les eux cas, il existe θ solution de $\varphi\left(\theta\right) = 0$ dans l'intervalle $]0,1[$.

θ	0		1
$y > 0$	$e^y - 1 > 0$	$\overset{0}{\searrow}$	$-y < 0$
$y < 0$	$e^y - 1 < 0$	$\overset{0}{\nearrow}$	$-y > 0$

Exercice 15 Construire une caisse en bois parallèlépipèdique rectangle de volume V donné, sans couvercle, avec le moins de bois possible.

[Dem] Posons la quantité de bois $S\left(x,y,z\right) = xy + 2xz + 2yz$ et le volume $V = xyz$. D'où $S\left(x,y,z\left(x,y\right)\right) = xy + \dfrac{2V}{y} + \dfrac{2V}{x}$. Il s'agit de trouver le minimum de la fonction $(x,y) \mapsto S$.

Une condition nécessaire est $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(M_0\right) = \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(M_0\right) = 0$. Sachons bien que ce n'est pas une condition suffisante comme le montre le contre-exemple $f\left(x,y\right) = x^2 - y^2$ qui n'a pas un signe constant au voisinage du point critique $(0,0)$.

Ceci donne $\dfrac{\partial S}{\partial x}\left(x,y\right) = x - \dfrac{2V}{y^2} = 0$ et $\dfrac{\partial S}{\partial y}\left(x,y\right) = y - \dfrac{2V}{x} = 0$ soit $2V = xy^2 = yx^2$ et $x = y$ puis $x - \dfrac{2V}{y^2} = 0$ et $x^3 = 2V$ d'où $x_0 = y_0 = \sqrt[3]{2V}$. Ce qui entraîne $z_0 = \dfrac{V}{\sqrt[3]{4V^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{2V}}{2} = \dfrac{x_0}{2}$. Ce qui est bien le cas ! en effet $\dfrac{\partial^2 S}{\partial x^2}\left(x_0,y_0\right) = \dfrac{4V}{x_0^3} = 2$, $\dfrac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}\left(x_0,y_0\right) = 1$, $\dfrac{\partial^2 S}{\partial y^2}\left(x_0,y_0\right) = 2$ et $S\left(x,y\right) - S\left(x_0,y_0\right) = \frac{1}{2}\left(2h^2 + 2hk + 2k^2\right) + \left(|h| + |k|\right)\theta\left(1\right)$. Or la forme quadratique $\varphi\left(h,k\right) = (h,k)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} =$

h^2+hk+k^2 est positive (il suffit d'écrire $\varphi(h,k)=(h+k)^2+h^2+k^2$) ou bien dire que la matrice est semblable à $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$ ce qui donne pour signature de la forme quadratque $(+,+)$.

Exercice 16 Retrouver la matrice jacobienne, que vous avez perdue, des changements de variables suivants :
a) dans $\mathbb{R}^2$ $(x,y)\longmapsto(\rho,\theta)$.
b) dans $\mathbb{R}^3$ $(x,y,z)\longmapsto(\rho,\theta,z)$ (cylindriques).
c) Montrer que le passage en coordonnées sphériques transforme la sphère de $\mathbb{R}^3$ en un parallèlépipède rectangle et calculer le jacobien.

[Dem]

- $\varphi:\begin{array}{c}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\ (\rho,\theta)\mapsto(x,y)\end{array}$ avec $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$ on a φ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{D}=\varphi(\Delta)$ avec $\mathcal{D}$, le cercle de centre O et de rayon 1, Δ le pavé $[0,1]\times[0,2\pi]$. Les dérivées partielles odnnent $\begin{array}{l}dx=\cos\theta d\rho-\rho\sin\theta d\theta\\ dy=\sin\theta d\rho+\rho\cos\theta d\theta\end{array}$ d'où $J\left(\dfrac{x,y}{\rho,\theta}\right)=\begin{vmatrix}\cos\theta & -\rho\sin\theta\\ \sin\theta & \rho\cos\theta\end{vmatrix}=\rho.$
- Soit ψ l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta, z=z$. On a $J\left(\dfrac{x,y,z}{\rho,\theta,z}\right)=J\left(\dfrac{x,y}{\rho,\theta}\right)\times 1=\rho.$

Exercice 17 Pour une fonction $z=f(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, on note $z=g(u,v)$ sa transformée par le changement de variables $u=\dfrac{y}{x}$, $v=x^2+y^2$.
a) On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2\backslash\{Oy\}$, exprimer les dérivées partielles premières de f en fonction de celles de g, et expliciter la matrice jacobienne.
b) On suppose f de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2\backslash\{Oy\}$, exprimer les relations entre les dérivées secondes.

[Dem] Le changement $(x,y)\mapsto(u,v)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, sur tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ ne contenant pas $\{(x,y),x=0\}$ et on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial g}{\partial u}\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)+\dfrac{\partial g}{\partial v}2x$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{1}{x}+\dfrac{\partial g}{\partial v}2y$. D'où $J\left(\dfrac{u,v}{x,y}\right)=\begin{vmatrix}-\dfrac{y}{x^2} & 2x\\ \dfrac{1}{x} & 2y\end{vmatrix}=-2\dfrac{x^2+y^2}{x^2}.$

On utilise la dérivation des fonctions composées : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\dfrac{\partial v}{\partial x}$ soit $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x}=\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{2y}{x^3}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}\dfrac{y^2}{x^4}-4\dfrac{y}{x}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+4x^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}+2\dfrac{\partial g}{\partial v}$ de même $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial g}{\partial u}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)+\left(\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}+2y\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\right)\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)+0+2x\left(\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+2y\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)$, on peut calculer l'autre.

Exercice 18 Soit $P=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;x\geq 0,y\geq 0,z\geq 0;x+y+z\leq 1\right\}$, et soit l'application φ qui à (x,y,z) associe (u,v,w) tel que : $u=x+y+z$, $uv=y+z$, $uvw=z$. Montrer que φ est un changement de coordonnées. Trouver $\varphi^{-1}(P)$ et $J\left(\frac{x,y,z}{u,v,w}\right)$.

[Dem] P est un tétraèdre à représenter. $\begin{cases}u=x+y+z\\ uv=y+z\\ uvw=z\end{cases}\iff\begin{cases}u(1-v)=x\\ uv(1-w)=y\\ uvw=z\end{cases}$ or $x\geq 0,y\geq 0,z\geq 0$ donne $u\geq 0,v\geq 0,w\geq 0$ et $x\geq 0,u\geq 0$ donne $v\leq 1$, puis $y\geq 0,uv\geq 0$ donne $w\leq 1$. Puisque $u\leq 1$ on a fnalement $0\leq u\leq 1,0\leq v\leq 1,0\leq w\leq 1$. De plus $x+y+z\neq 0$ et $y+z\neq 0$ donne $u=x+y+z,v=\dfrac{y+z}{x+y+z},w=\dfrac{z}{y+z}$. Notons $\Pi=[0,1]^3$ dans le repère $(0,u,v,w)$ on a $P=\varphi(\Pi)$ et $J\left(\dfrac{x,y,z}{u,v,w}\right)=\begin{vmatrix}1-v & -u & 0\\ v(1-w) & u(1-w) & -uv\\ vw & uw & uv\end{vmatrix}=u^2v\begin{vmatrix}1-v & -1 & 0\\ v(1-w) & 1-w & -1\\ vw & w & 1\end{vmatrix}=u^2v.$

Exercice 19 Déterminer les domaines où les trois normes usuelles de $\mathbb{R}^2$ sont de classe $\mathcal{C}^1$. Même question dans $\mathbb{R}^3$.

[Dem]

- Etude de N_2 : $N_2(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. On a que $u \mapsto \sqrt{u}$ est dérivable sauf en 0. et $x \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ est dérivable en x_0 si et seulement si $(x_0, y) \neq (0,0)$ c'est à dire $(x,y) \neq (0,0)$, il en est de même de $y \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$. De plus $(x,y) \mapsto \dfrac{\partial N_2}{\partial x} = \dfrac{x}{N_2(x,y)}$ est le quotient de deux fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas et donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On a $(dN_2)(a,b)(h,k) = h\dfrac{a}{N_2(a,b)} + k\dfrac{b}{N_2(a,b)}$. En 0, f n'est pas différentiable car les dérivées partieles n'existent pas.
- Etude de N_1 : $N_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$. L'application $\Phi_1 : u \mapsto |u| + \lambda$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\Phi_1'(u) = sgn(u) = \dfrac{u}{|u|}$. D'autre part $x_i \mapsto |x_i| + \lambda$ avec $\lambda = \sum_{j \neq i} |a_j|$ est dérivable en $a_i \neq 0$ et ce pour tout i. Ainsi N_1 admet des dérivées partielles en tout a tel que $a_i \neq 0$ pour tout i. C'est à dire dans le complémentaire Ω de la réunion des hyperplans de coordonnées. Ω est un ouvert et $a \mapsto \dfrac{a_i}{|a_i|}$ est continue. N_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et $(dN_1)(a).h = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{a_i h_i}{|a_i|}$.
- Etude de N_∞ : $N_\infty(u) = \sup |u_i|$. Soit $\Phi_i(u) = |u_i| - \sup_{i \neq j} |u_j|$ et $\theta_i = \Phi_i^{-1}(\mathbb{R}^*)$, la norme N_∞ est $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega = \bigcap_{1 \leq i \leq n} \theta_i$. Si $a \in \Omega$ il existe un unique indice i tel que $N_\infty(a) = |a_i|$ et $(dN_\infty)(a)(h) = \dfrac{a_i h_i}{|a_i|}$. Pour le cas $n = 2$, la norme N_∞ est dérivable sauf en $x = \pm y$ soit les deux bissectrices.

Exercice 20 Soit n un entier relatif. Une fonction de trois variables est dîte homogène de degré n si :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}^{+*} : f(tx,ty,tz) = t^n f(x,y,z)$$

Montrer qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est homogène de degré n si et seulement si : $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} + z\dfrac{\partial f}{\partial z} = nf$. (On pourra considérer la fonction $g(t) = f(tx,ty,tz)$)

[Dem] Si f est $\mathcal{C}^1$ homogène de degré n alors $g(t) = t^n g(1)$ et $g'(t) = nt^{n-1}g(1)$ ce qui donne $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(tx,ty,tz) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(tx,ty,tz) + z\dfrac{\partial f}{\partial z}(tx,ty,tz) = nf(tx,ty,tz)$ puis on fait $t = 1$. Réciproquement on suppose $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} + z\dfrac{\partial f}{\partial z} = nf$ ou $tg'(t) = nf(tx)$ ou $g'(t) = \dfrac{n}{t}g(t)$ ou $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{g(t)}{t^n}\right) = 0$ pour $t \neq 0$. Ainsi $\dfrac{g(t)}{t^n} = g(1) = f(x)$ d'où le résultat pour $t > 0$.

Exercice 21 Trouver toutes les fonctions homogènes de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant : $\frac{1}{x}f'_x = \frac{1}{y}f'_y$ où f'_x désigne la dérivée première de f par rapport à x.

[Dem] Posons $f(x,y) = x^n \Phi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ où Φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ on a $f(x,y) = x^n f\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$ et on cherche Φ. En posant $u = \dfrac{y}{x}$ et en dérivant $\dfrac{\partial f}{\partial x} = nx^{n-1}\Phi(u) + x^n\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)\Phi'(u) = nx^{n-1}\Phi(u) - x^{n-2}y\Phi'(u)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^{n-1}\Phi'(u)$ d'où $nx^{n-1}\Phi(u)$ _$yx^{n-2}\Phi'(u) = \dfrac{x^n}{y}\Phi'(u)$. Ce qui donne $\dfrac{n}{u^{n-1}}\Phi(u) - \dfrac{\Phi'(u)}{u^{n-2}} = \dfrac{\Phi'(u)}{u^n}$ ou $\dfrac{\Phi'(u)}{\Phi(u)} = \dfrac{nu}{1+u^2}$ ou $\Phi(u) = k\left(1+u^2\right)^{\frac{n}{2}}$ en revenant à nos variables : $f(x,y) = k\left(x^2+y^2\right)^{\frac{n}{2}}$.

Exercice 22 Trouver toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ telles que $f''_{x^2} = f''_{y^2}$ où f''_{x^2} désigne la dérivée seconde de f par rapport à x. (On pourra utiliser le changement de variables $u = x + y$, $v = x - y$)

[Dem] On a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$. Ainsi l'équation donne $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$ soit $g(u,v) = R(u) + S(v)$ ou $f(x,y) = R(x+y) + S(x-y)$.

Exercice 23 Trouver les extrémums des fonctions suivantes :
a) $z = x^2 y^3 (1 + 3x + 2y)$.
b) $z = \frac{x^2}{\alpha^2 - 1} + \frac{2xy}{\alpha\beta - 1} + \frac{y^2}{\beta^2 - 1}$ $\alpha, \beta > 1$.
c) $z = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

[Dem]

- Commençons à chercher les points critiques soit à résoudre $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3 + 9x^2y^3 + 4xy^4 = xy^3(2 + 9x + 4y) \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x^2y^2 + 9x^3y^2 + 8x^2y^3 = x^2y^2(3 + 9x + 8y) \end{cases}$
ce qui donne comme points $(0,y), (x,0)$ et si $x \neq 0, y \neq 0$: $\begin{cases} 2 + 9x + 4y = 0 \\ 3 + 9x + 8y = 0 \end{cases}$ ou $x = -\frac{1}{9}, y = -\frac{1}{4}$. Des calculs donnent $r = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^3 + 18xy^3 + 4y^4$, $s = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6xy^2 + 27x^2y^2 + 16xy^3 = xy^2(6 + 27x + 16y)$,
$t = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x^2y + 18x^3y + 24x^2y^2 = 6x^2y(1 + 3x + 4y)$.
Appliquons ces quantités en nos points : en $(0,y)$: $r = 2y^3(1 + 2y)$ et $s = t = 0$. En $(x,0)$, $r = s = t = 0$ et en $\left(-\frac{1}{9}, -\frac{1}{4}\right)$ on a $r = \frac{1}{64}, s = \frac{1}{144}, t = \frac{1}{162}$ par suite $s^2 - rt < 0$ avec $r > 0$ et il s'agit d'un minimum. Revenons aux points où cette méthode n'a pas permis de conclure : en $(0, y_0)$ nous pouvons écrire $z \sim \frac{1}{2}x^2\left(2y_0^3(1 + 2y_0)\right)$ ainsi si $y_0 \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup]0, +\infty[$ on a $f(x,y) \geq f(0, y_0) = 0$ pour $y \neq 0$ de même que pour $y = 0$ on a un minimum, sinon $y_0 \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right[$ et $f(x,y) \leq f(0, y_0)$ il s'agit d'un maximum.
Si $y_0 = 0$ alors $z \sim x^5$ et le changement de signe nous dit que nous n'avons pas d'extrêmum. Si $y_0 = -\frac{1}{2}$ alors $z \sim -\frac{3}{8}x^3$ il en est de même.
En $(x_0, 0)$ on a $z \sim y^3\left(x_0^2 + 3x_0^3\right)$ si $x_0 \neq -\frac{1}{3}$ il y a un changement de signe donc rien du tout et si $x_0 = -\frac{1}{3}$ alors $z \sim \frac{2}{9}y^4$ il s'agit d'un minimum. Il est interresant de représenter la surface.

- b) $z = \dfrac{x^2}{\alpha^2 - 1} + \dfrac{2xy}{\alpha\beta - 1} + \dfrac{y^2}{\beta^2 - 1}$ $\alpha, \beta > 1$. On a $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2}{\alpha^2 - 1}x + \dfrac{2}{\alpha\beta - 1}y$ et $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2}{\beta^2 - 1}y + \dfrac{2}{\alpha\beta - 1}x$ et les points critiques sont donnés par $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2}{\alpha^2 - 1}x + \dfrac{2}{\alpha\beta - 1}y = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2}{\beta^2 - 1}y + \dfrac{2}{\alpha\beta - 1}x = 0 \end{cases}$
ce qui donne $\left(\dfrac{\alpha\beta - 1}{\alpha^2 - 1} - \dfrac{\beta^2 - 1}{\alpha\beta - 1}\right)x = 0$ ou $\dfrac{(\alpha - \beta)^2}{(\alpha^2 - 1)(\alpha\beta - 1)}x = 0$. Ainsi si $\alpha \neq \beta$ il n'y a que le point $(0,0)$ et si $\alpha = \beta$ alors il y a les points tels que $x + y = 0$ c'est à dire $(x, -x)$. Calculons $r = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{2}{\alpha^2 - 1}, s = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{2}{\alpha\beta - 1}, t = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{2}{\beta^2 - 1}$ et la quantité $s^2 - rt = 4\left(\dfrac{1}{(\alpha\beta - 1)^2} - \dfrac{1}{(\alpha^2 - 1)(\beta^2 - 1)}\right)$ du signe $-(\alpha - \beta)^2$ et donc en $(0,0)$ on a un minimum. En $(x, -x)$ on a $s^2 - rt = 0$ et cette méthode ne permet pas de conclure, mais $z = \dfrac{1}{\alpha^2 - 1}(x + y)^2$ et il s'agit encore de minimum.

- $z = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$. Pour les points critiques $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 4(x - y) = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 + 4(x - y) = 0 \end{cases}$ ou $x^3 + y^3 = 0 = (x + y)\left(x^2 - xy + y^2\right)$ si $x + y = 0$ alors on a $x\left(x^2 - 2\right) = y\left(y^2 - 2\right) = 0$ ce qui donne $(0,0), \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right), \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$. Sinon $x^2 + y^2 = xy \geq 0$ et $x^2 + y^2 - xy = (x - y)^2 + xy$ ne peut s'annuler que si $x = y = 0$.
En $(0,0)$ on a $z \sim -2(x - y)^2$ si $x \neq y$ et $z \sim x^4 + y^4$ si $x = y$ on a aucun extrêmum. En les autres points la quantité $\delta = s^2 - rt$ donne avec $r = 12x^2 - 4, s = 4, t = 12y^2 - 4$: en $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ ou $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ $\delta < 0$ avec $r > 0$ il s'agit de minimum.

Exercice 24 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue.

1) Montrer que $x \longmapsto \int_a^b f(x-t)(1+t^2+\sin t)dt = \varphi(x)$ est continue pour $x \in \mathbb{R}$.
2) On ne peut ici appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme, montrer pourquoi. A l'aide d'un changement de variable convenable, montrer cependant que φ est dérivable et calculer $\varphi'(x)$.
3) On suppose maintenent que f est de classe C^1. Etablir que φ est dérivable par une méthode plus rapide, calculer φ' et retrouver le résultat de 2).

[Dem]

- La fonction $(x,t) \mapsto f(x-t)\left(1+t^2+\sin t\right)$ est continue sur $\mathbb{R}\times[a,b]$ il en résulte que φ est continue sur $\mathbb{R}$.
- On ne peut pas appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme car la fonction f n'est pas dérivable mais en posant $x-t=t'$ on a $\varphi(x) = -\int_{x-a}^{x-b} f(t)\left(1+(x-t)^2+\sin(x-t)\right)dt$. Pour dériver on considère la fonction de trois variables $\Phi(x,y,z) = -\int_y^z f(t)\left(1+(x-t)^2+\sin(x-t)\right)dt$ on a $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = -\int_y^z f(t)\left(2(x-t)-\cos(x-t)\right)dt$ et $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = f(y)\left(1+(x-y)^2+\sin(x-y)\right)$ et $\dfrac{\partial\Phi}{\partial z} = -f(z)\left(1+(x-z)^2+\sin(x-z)\right)$ d'où $\varphi'(x) = \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}(x,x-a,x-b) + \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}(x,x-a,x-b)\times 1 + \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}(x,x-a,x-b)\times 1$. Ce qui donne $\varphi'(x) = \int_{x-a}^{x-b} f(t)\left(-2(x-t)-\cos(x-t)\right)dt + f(x-a)\left(1+a^2+\sin a\right) - f(x-b)\left(1+b^2+\sin b\right)$.
- Dans ce cas on peut dériver sous le signe somme : $\varphi'(x) = \int_a^b f'(x-t)\left(1+t^2+\sin t\right)dt = -\int_{x-a}^{x-b} f'(t)\left(1+(x-t)^2+\sin(x-t)\right)dt$ puis en intégrant par parties $\varphi'(x) = -\left[f(t)\left(1+(x-t)^2+\sin(x-t)\right)\right]_{x-a}^{x-b} + \int_{x-a}^{x-b} f(t)\left(-2(x-t)-\cos(x-t)\right)dt$. Ce qui donne bien $\varphi'(x) = -f(x-b)\left(1+b^2+\sin b\right) + f(x-a)\left(1+a^2+\sin a\right) + \int_{x-a}^{x-b} f(t)\left(-2(x-t)-\cos(x-t)\right)dt$.

Exercice 25 Soit J une fonction de $\Omega \to \mathbb{R}$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
1°) On suppose J dérivable, montrer qu'en un point u de Ω où J admet un extremum relatif, sa dérivée en ce point est nulle.
2°) On rappelle qu'un ensemble U de $\mathbb{R}^n$ est convexe si quels que soient les points u, v de U le segment $[u,v] = \{w = (1-t)u + tv, t \in [0,1]\}$ est contenu dans U.

a) Montrer qu'un sous-espace vectoriel, une boule sont des ensembles convexesde $\mathbb{R}^n$.

b) On suppose J de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω ; soit $U \subset \Omega$ une partie convexe de $\mathbb{R}^n$ montrer que : si J admet un extremum relatif en un point u de U alors : $\forall v \in U : J'(u)\cdot(v-u) \geq 0$.
3°) On rappelle que $J : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si U est convexe et $\forall (u,v) \in U^2, \forall \theta \in [0,1] : f(\theta u + (1-\theta)v) \leq \theta f(u) + (1-\theta)f(v)$, on dit qu'elle est strictement convexe si on a l'inégalité stricte pour $u \neq v$.

a) Montrer qu'une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ est convexe mais pas strictement convexe.

b) Soit $J : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un ensemble U convexe, montrer que J est convexe si et seulement si $\forall (u,v) \in U^2 : J(v) \geq J(u) + J'(u)\cdot(v-u)$, de même pour strictement convexe avec les modifications nécessaires.

c) interpréter géométriquement cette inégalité dans le cas $n = 1$.
4°) Soit $J : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivables sur U ensemble convexe.

a) J est convexe si et seulement si la dérivée seconde est semi définie positive en tout point de U (i.e. $\forall (v,w) \in U^2 : J''(v)\cdot(w,w) \geq 0$).

b) Si la dérivée seconde est définie positive en tout point de U $(\forall(v,w)\in U^2; w\neq 0 : J''(v)\cdot(w,w)>0)$ alors J est strictement convexe. (réciproque fausse)
5°) Exemples : Sur $\mathbb{R}^n$ prenons J définie par $J(v)=\frac{1}{2}a(v,v)-f(v)$ où a est une forme bilinéaire symétrique et f une forme linéaire, ainsi J est une fonctionnelle convexe deux fois dérivables, du reste on peut écrire : $J(v)=\frac{1}{2}{}^t vAv-{}^t bv$, où A est une matrice $n\times n$, b un vecteur de $\mathbb{R}^n$, il faut alors que A soit semi définie positive symétrique et c'est une condition suffisante.
6°) Démontrer que pour $J : U\subset\mathbb{R}^n\to\ R$ convexe :

a) Tout minimum relatif est un minimum absolu.

b) Si J est strictement convexe, elle admet au plus un minimum et c'est un minimum strict.
7°) Soit $J : U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ une fonction convexe, dérivable en tout poiny u de U, montrer que : si $\forall v\in U, J'(u)\cdot(v-u)\geq 0$, alors la fonction J admet un minimum sur U.

[Dem]

- Soit $\mathcal{B}(u,r)=\{v\in\mathbb{R}^n : \|v-u\|<r\}$ une boule ouverte contenue dans Ω et soit w un vecteur non nul. La fonction $\phi : t\in\left]-\frac{r}{\|w\|},\frac{r}{\|w\|}\right[\mapsto\phi(t)=J(u+tw)$ admet un extremum relatif au point $t=0$ et par suite $\phi'(0)=0$ or $\phi'(t)=J'(u+tw)\cdot w$ et donc pour tout vecteur w on a $J'(u)\cdot w=0$ soit $J'(u)=0$.

  Remarquons que dans $\mathbb{R}^n$ cela corresond à n relations : $\frac{\partial J}{\partial x_i}=0$. Pour démentrer sur $\mathbb{R}$ que $\phi'(0)=0$ on écrit : $0\leq\lim\limits_{t\to 0^-}\frac{\phi(t)-\phi(0)}{t}=\phi'(0)=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\phi(t)-\phi(0)}{t}\leq 0$

  - Un sous-espace vectoriel est convexe puisqu'il est stable par toute combinaison linéaire. Pour une boule si nous avons $\|u-x_0\|<r, \|v-x_0\|<r$ alors on a $\|(1-t)u+tv-x_0\|=\|(1-t)(u-x_0)+t(v-x_0)\|\leq(1-t)\|u-x_0\|+t\|v-x_0\|\leq(1-t)r+r=r$ et ce pour tout $t\in[0,1]$.
  - L'hypothèse donne il existe un voisinage V de u tel que pour tout $v\in V\cap U : J'(u)\cdot(v-u)\geq 0$. Soit $v=u+w$ un point quelconque de l'ensemble U, l'ensemble U étant convexe les points $(u+\theta w)$ appartiennent à U pour $\theta\in[0,1]$. Ainsi $J(u+\theta w)-J(u)=\theta J'(u)\cdot w+\theta\|w\|\varepsilon(\theta)$ avec $\lim\limits_{\theta\to 0}\varepsilon(\theta)=0$. Donc, nécessairement $J'(u)\cdot w\geq 0$ sinon la différence $J(u+\theta w)-J(u)$ serait négative pour θ assez petit.
  - Pour une forme linéaire on a l'égalité, la norme est convexe.
  - Montrons que : J convexe $\Longleftrightarrow\forall(u,v)\in U^2 : J(v)\geq J(u)+J'(u)\cdot(v-u)$. On suppose J convexe donc $\forall(u,v)\in U^2, u\neq v$ pour $0<\mu<\lambda\leq 1$ en écrivant $u+\mu(v-u)=\frac{\lambda-\mu}{\lambda}u+\frac{\mu}{\lambda}(u+\lambda(v-u))$ on a $J(u+\mu(v-u))\leq\frac{\lambda-\mu}{\lambda}J(u)+\frac{\mu}{\lambda}J(u+\lambda(v-u))$ ce qui donne $\frac{J(u+\mu(v-u))-J(u)}{\mu}\leq\frac{J(u+\lambda(v-u))-J(u)}{\lambda}$. Si la fonction J est convexe on fait $\lambda=1$ et on remarque que $J'(u)\cdot(v-u)=\lim\limits_{\mu\to 0}\frac{J(u+\mu(v-u))-J(u)}{\mu}\leq J(v)-J(u)$. Par contre si J est strictement convexe, les inégalités précédentes sont strictes et on choisit une valeur $\mu_0\in]0,1[$ et on écrit $J'(u)\cdot(v-u)=\lim\limits_{\mu\to 0}\frac{J(u+\mu(v-u))-J(u)}{\mu}\leq\frac{J(u+\mu_0(v-u))-J(u)}{\mu_0}\leq J(v)-J(u)$.

    Réciproquement supposons que $\forall(u,v)\in U^2, J(v)\geq J(u)+J'(u)\cdot(v-u)$. Soient u et v deux points distincts de U et $\lambda\in]0,1[$ on a par hypothèse $J(u)\geq J(u+\lambda(v-u))-\lambda J'(u+\lambda(v-u))\cdot(v-u)$ et $J(v)\geq J(u+\lambda(v-u))+(1-\lambda)J'(u+\lambda(v-u))\cdot(v-u)$ en additionnant et en multipliant par $(1-\lambda)$ et λ on obtient le résultat.
  - Nous faisons une interprétation pour $n=1$ il s'agit de la tangente au point u regarder en v ou $J(u)\leq J(u)+J'(u)\cdot(v-u)\leq J(v)$

- On suppose : $\forall v\in U,\forall w\in V, w\neq 0, J''(v)\cdot(w,w)\geq 0$ (resp.>0) on en déduit que si u et $u+w$ sont deux points distincts de U alors $J(u+w)-J(u)-J'(u)\cdot w=\frac{1}{2}J''(v)\cdot(w,w)\geq 0$ (resp.>0) ainsi le résultat précédent donne que J est convexe, resp. strictement convexe. Réciproquement soit J convexe et $u \in U$ considèrons la fonction convexe $G : v \in U \mapsto G(v) = J(v) - J'(u) \cdot v$ on a donc $G'(u) = 0$ et $G''(u) = J''(u)$. Pour montrer que G admet en u un minimm (ce qui prouvera que $J''(u) = G''(u)$ est semi définie positive en appliquant la première partie) on montre que $\forall v \in U : G(v) - G(u) \geq 0$ or $G(v) - G(u) = J(v) - J(u) - J'(u) \cdot (v - u)$, soit $v = u + w \in U$ pour tout $\lambda \in [0,1]$ on a $u + \lambda w = (1-\lambda) u + \lambda v$ d'où $G(u + \lambda w) \leq (1-\lambda) G(u) + \lambda G(v)$ car G est convexe, comme somme de deux fonctions convexes par suite $\dfrac{G(u+\lambda w) - G(u)}{\lambda} \leq G(v) - G(u)$ et $0 = G'(u) \cdot w = \lim\limits_{\lambda \to 0} \dfrac{G(u+\lambda w) - G(u)}{\lambda} \leq G(v) - G(u)$.

La réciproque du deuxième point est fausse comme le montre $v \mapsto v^4$ de $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$.

- Exemples
- Montrons que tout minimum relatif est un minimum absolu : Soit $u \in U$ un minimum relatif de J soit $v = u + w$ un point quelconque de U et $\theta \in]0,1[$ donné, la convexité de J donne $J(u + \theta w) \leq (1-\theta) J(u) + \theta J(v)$ d'où $J(u+\theta w) - J(u) \leq \theta (J(v) - J(u))$ et il suffit d'observer qu'il existe $\theta_0 \in]0,1[$ tel que $0 \leq J(u + \theta_0 w) - J(u)$.

  Montrons que si J est strictement convexe elle admet au plus un minimum et c'est un minimum strict : Si J est convexe tout minimum est xtrict et en reprenent la démonstration avec $v = u + w, w \neq 0$ suffisament près de u on raisonne comme précédement avec $v = u + w$ point de U avec $w \neq 0$ et l'unicité en découle.
- En effet on a vu que : $\forall v \in U, J(v) \geq J(u) + J'(u) \cdot (v - u)$.

Exercice 26 Résoudre, en utilisant les coordonnées polaires, les équations aux dérivées partielles :
a) $-y f'_x + x f'_y = xy$
b) $x f'_x + y f'_y = 2f$
c) $x^2 f''_{x^2} + y^2 f''_{y^2} + 2xy f''_{xy} = 1$

[Dem] En posant $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ on a $\dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = \cos\theta \dfrac{\partial}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}$ et $\dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial y} + \dfrac{\partial}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial y} = \sin\theta \dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}$.

- Ainsi pour la première ce changement donne $-r\sin\theta \left(\cos\theta \dfrac{\partial f}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial f}{\partial\theta}\right) + r\cos\theta\left(\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial f}{\partial\theta}\right) = r^2 \sin\theta\cos\theta$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial\theta} = r^2 \frac{1}{2}\sin 2\theta$ soit $f(r,\theta) = -\frac{1}{2} r^2 \cos 2\theta + g(r)$.
- Pour la seconde la transformation donne $r\cos\theta\left(\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial f}{\partial\theta}\right) + r\sin\theta\left(\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial f}{\partial\theta}\right) = 2f$ ou encore $r\dfrac{\partial f}{\partial\theta} = 2f$ ce qui donne $f(r,\theta) = g(\theta) r^2$.

Pour les autres il faut les dérivées secondes : $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\cos\theta\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{\sin\theta}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial\theta} - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\right)\cos\theta + \left(-\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\dfrac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} - \dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta} - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(-\dfrac{\sin\theta}{r}\right)$
$= \cos^2\theta\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{\sin 2\theta}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial\theta}$

Pour les suivantes il faur les dérivées secondes : $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\cos\theta\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{\sin\theta}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial\theta} - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\right)\cos\theta + \left(-\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\dfrac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} - \dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta} - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(-\dfrac{\sin\theta}{r}\right)$ soit $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} = \cos^2\theta\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{\sin 2\theta}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial\theta} - \dfrac{\sin 2\theta}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} + \dfrac{\sin^2\theta}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \dfrac{\sin^2\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}$ et pour $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\sin\theta\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} - \dfrac{\cos\theta}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial\theta} + \dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\right)\sin\theta + \left(\cos\theta\dfrac{\partial}{\partial r} + \sin\theta\dfrac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta} + \dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\dfrac{\cos\theta}{r}$ soit $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} = \sin^2\theta\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} - \dfrac{\sin 2\theta}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial\theta} + \dfrac{\sin 2\theta}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} + \dfrac{\cos^2\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\cos^2\theta}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}$ et pour la dernière : $\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y} = \left(\cos\theta\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{\sin\theta}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial\theta} - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\right)\sin\theta + \left(-\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\dfrac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} - \dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta} - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\dfrac{\cos\theta}{r}$ soit $\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y} = \frac{1}{2}\sin 2\theta\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} - \dfrac{\cos\theta}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial\theta} + \dfrac{\cos 2\theta}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} - \frac{1}{2}\dfrac{\sin 2\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{2}\dfrac{\sin 2\theta}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}$.

- $x^2 f''_{x^2} + y^2 f''_{y^2} + 2xy f''_{xy} = 1$ donne $\left(r^2\cos^4\theta + r^2\sin^4\theta\right)\dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \left(\sin 2\theta\cos^2\theta - \sin 2\theta\sin^2\theta - \cos 2\theta\sin 2\theta\right)\dfrac{\partial f}{\partial\theta} +$ $\left(-r\sin 2\theta\cos^2\theta + r\sin 2\theta\sin^2\theta + r\cos 2\theta\sin 2\theta\right)\dfrac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}$ $+\left(2\sin^2\theta\cos^2\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\dfrac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \left(r\sin^2\theta\cos^2\theta + r\sin^2\theta\cos^2\theta - r\sin 2\theta\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\dfrac{\partial f}{\partial r} = 1$ ou après simplification : $r^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2} = 1$ ou $\dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \dfrac{1}{r^2}$ par intégration $\dfrac{\partial f}{\partial r} = -\dfrac{1}{r} + \varphi(\theta)$ et $f(r,\theta) = -\ln r + \varphi(\theta)\, r + \psi(\theta)$.

Exercice 27 Déterminer les extremums locaux des applications f suivantes, pour lesquelles on donne l'ensemble de départ et l'image de f :

a) $\mathbb{R}^{+*2}$ $\dfrac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$

b) $\mathbb{R}^2$ $(x-y)^2 + (x+y)^3$

Exercice 28 Etudier les formes différentielles ω suivantes, à deux variables : ω est-elle fermée ? exacte ? Si oui calculer les primitives de ω; si ω n'est pas fermée, chercher une fonction $\varphi : (x,y) \longmapsto \varphi(x,y) \neq 0$ telle que la forme différentielle $\omega_1 : (x,y) \longmapsto \varphi(x,y)\omega(x,y)$ soit fermée ; $\omega_1$est-elle exacte ? si oui calculer les primitives de ω_1.

a) $\dfrac{xdy - ydx}{(x-y)^2}$

b) $\dfrac{1}{\left(1-x^2\right)^2 + y^4}(2xy^2dx + 2(1-x^2)ydy)$

c) $y^2dx + x^2dy$, $\varphi(x,y)$ ne dépendant que de $x+y$