# Chapitre 9

# Séries entières

## 9.1 introduction

Les séries entières dans leur version moderne sont apparues lors de l'étude de la mécanique céleste, par exemple avec Cauchy (1823) qui étudiait à ce propos la convergence des séries de Laplace. Le théorème du rayon de convergence est du à Hadamard (1892). Les problèmes de convergence au bord du disque ont été étudiès par Abel (1826).Avant une théorie des séries entières il y a eu l'étude de la série de Taylor faites par Lagrange (1797). Cette série était considérée comme la plus importante pendant plus de 25 ans.
En fait on peut remonter plus loin pour trouver des séries entières comme développement. En effet après la formule du binôme (que l'on trouve déjà en 1080 avec Omar Alkhaijâmâ et formulé par Pascal en 1654), on s'est intéressé à $(a+b)^{-1}$. C'est ainsi que l'on procédait à l'époque : On suppose $|b|<|a|$, en première approximation on a $\dfrac{1}{a+b}=\dfrac{1}{a}+\delta$ ou $1=1+\dfrac{b}{a}+a\delta+b\delta$, on néglige alors $b\delta$, ce qui donne $\delta=-\dfrac{b}{a^2}$ et on recommence pour trouver

$$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\cdots$$

En posant $x=\dfrac{b}{a}$ on obtient

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\cdots$$

pour $|x|<1$. C'est la série géométrique démontrée ainsi par Viete en 1593. C'est bien après que les problèmes de convergence ont été résolus.

## 9.2 Généralités

$K$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ .

**Définition 1** *Soit $(a_n)\in K^{\mathbb{N}}$ une suite de scalaires, on appelle série entière de terme général $a_nz^n$ la série de fonctions $\sum u_n$ définie sur $K$ par $u_n(z)=a_nz^n$. Le domaine de convergence $\mathcal{D}$ de la série est l'ensemble des scalaires $z$ tels que la série numérique $\sum a_nz^n$ converge.*

**Définition 2** *Soient $\sum a_nz^n$ et $\sum b_nz^n$ deux séries entières. On appelle série somme des deux séries la série entière de terme général $(a_n+b_n)z^n$ et série produit la série de terme général $\left(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\right)z^n$. Si $\lambda$ est un scalaire, le produit par $\lambda$ de la série $\sum a_nz^n$ est la série de terme général $\lambda a_nz^n$.*

### 9.2.1 Rayon de convergence

**Proposition 1 Lemme d'Abel.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. S'il existe $z_0 \in K - \{0\}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)$ soit bornée, alors, pour tout $z \in K$, l'inégalité stricte $|z| < |z_0|$ entraîne que la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.*

[Ind] Faire apparaître une série géométrique.

[Dem] Avec les hypothèses on a si $|z| < |z_0|$ alors $|a_n z^n| = |a_n||z_0|^n \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ où $M$ est la borne de la suite $(a_n z_0^n)$ et on a que la série de terme général $\left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ est convergente comme série géométrique de raison strictement plus petit que 1 donc la série entière de terme général $a_n z^n$ converge.

**Théorème 1** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. L'ensemble des réels positifs $r$ tels que la série numérique $\sum |a_n| r^n$ converge est un intervalle de $\mathbb{R}_+$ (contenant 0). Sa borne supérieure $\rho$ est appelée rayon de convergence de la série entière et on a*

$$\begin{aligned}
\rho &= \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{ La suite } (a_n r^n) \text{ est bornée}\} \\
&= \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{ La suite } (a_n r^n) \text{ converge vers } 0\} \\
&= \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{ La série } (\sum a_n r^n) \text{ est convergente}\} \\
&= \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{ La série } (\sum |a_n| r^n) \text{ est convergente}\}
\end{aligned}$$

[Ind] Faire une preuve en commençant par en bas.

[Dem] Si $\mathcal{C} = \{r \in \mathbb{R}^+ ; \sum |a_n| r^n converge\}$ alors $\mathcal{C}$ contient 0 et est un intervalle de $\mathbb{R}^+$ car si $r_0 \in \mathcal{C}$ la suite $(|a_n| r_0^n)$ est bornée et donc d'aprés le lemme d'Abel $\forall r < r_0 \sum |a_n| r^n$ converge. Posons $\rho = Sup\mathcal{C}$
Appelons $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ les bornes des trois premiers ensembles.
Si $r < \rho$ alors la série est absolument convergente, donc convergente,donc son terme général tend vers 0, donc son terme général est borné. Ce qui montre $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \rho_3 \geq \rho$.
Mais si $r < \rho_1$ il existe $r_0$ tel que $r < r_0 < \rho_1$la suite $(a_n r_0^n)$ est bornée, d'aprs le lemme d'Abel la série $\sum a_n r^n$ converge absolument $r < \rho$. D'où $\rho \geq \rho_1$. D'où $\rho \geq \rho_1 \geq \rho_2 \geq \rho_3 \geq \rho$. Ce qui montre que toutes ces bornes sont égales.

**Exercice 1** Trouver les rayons de convergence des séries entières de terme général:
a) $nz^n$ b) $n!z^n$ c) $\frac{z^n}{n!}$.

[Ind] Quelle est la valeur de $r$ avant laquelle la série converge et aprs laquelle la série diverge.

[Dem] a) 1 est valeur de séparation c'est à dire si $|z| < 1$ la série géométrique converge et si $|z| > 1$ alors elle diverge. Le rayon de convergence est 1.
b) Cette série ne converge pour aucun $z \neq 0$ par application de la règle de D'Alembert, le rayon est nul.
c) la règle de D'Alembert donne que cette série converge pour tout $z$ du reste vers $\mathrm{e}^z$, le rayon est $+\infty$.

**Proposition 2** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $\rho$ son rayon de convergence.*
*1) Si $\rho \neq 0$, alors, pour tout $z \in K$ tel que $|z| < \rho$, la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument.*
*2) Si $z \in K$ vérifie $|z| > \rho$, la série numérique $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.*

[Ind] Bien comprendre le théorème.

[Dem] 1) Si $\rho \neq 0$ alors d'aprés le théorème 1 $\forall |z| < \rho$ la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
2) Si $|z| > \rho$ toujours d'aprs le théorème 1 le terme général ne tend pas vers 0.

**Remarque:** Si $\sum a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$. Pour $z \in K$, on a

$$|z| < \rho \implies \sum a_n z^n \text{ convergente}$$

et

$$|z| < \rho \implies (a_n z^n) \text{ est une suite bornée}$$

mais

$$\sum a_n z^n \text{ convergente} \implies |z| \leq \rho$$

et

$$(a_n z^n) \text{ est une suite bornée} \implies |z| \leq \rho$$

**Exercice 2** Soit $(a_n)$ une suite bornée de complexes ne tendant pas vers 0. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est égal à 1.

[Ind] Si la suite ne tend pas vers 0 pour quelle valeur de $z$ pouvez-vous dire que la série diverge ? Montrer qu'elle converge avant.

[Dem] Si $z = 1$ la série ne converge pas car le terme général ne tend pas vers 0. Si $|z| \leq 1$ alors la série converge car $|a_n z^n| \leq M |z|^n$ si $M$ est une borne de la suite $(a_n)_n$. Le rayon est 1.

**Exercice 3** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, les deux séries $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n| z^n$ ont même rayon de convergence.

[Ind] Utiliser le théorème 1.

[Dem] Une série entière est absolument convergente à l'intérieur de son disque de convergence et diverge grossièrement à l'extérieur.

**Proposition 3 Règle de D'Alembert.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière; si, à partir d'un certain rang, $a_n \neq 0$ et si $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l \in \overline{\mathbb{R}}_+$ alors le rayon de convergence de la série entière est $\rho = \frac{1}{l}$ avec la convention $\rho = +\infty$ si $l = 0$ et $\rho = 0$ si $l = +\infty$.*

[Ind] Se rappeler de la règle de D'Alembert pour les séries numériques.

[Dem] la règle de D'Alembert pour les séries numériques donne sous les hypothèses $\lim_{l\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = |z|\ell$ et donc la série numérique convergera si $|z|\,\ell < 1$ et divergera si $|z|\,\ell > 1$ c'est à dire si $|z| < \frac{1}{\ell}$. Le rayon de convergence est $\rho = \frac{1}{\ell}$ avec les conventions d'usage.

**Remarque:** Les hypothèses d'application de la règle de D'Alembert sont contraignantes et cette règle ne peut résoudre qu'un nombre restreint de problèmes et en tout cas, il convient de l'appliquer sans précipitation. D'autre part, il est important de se rappeler que la détermination du rayon est celui du disque de convergence et que trouver ce disque permet de trouver son rayon !

**Exercice 4** Trouver le rayon de convergence des séries entières dont les termes généraux sont:
a) $\frac{n^n}{n!} z^n$
b) $2^n z^{2n}$ ,c'est à dire la série entière $\sum a_n z^n$ avec $a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 2^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$
c) $a_n z^n$ avec $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 2^n & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$.

[Ind] Vous pouvez appliquer la règle de D'Alembert, ou mieux regarder la convergence de la série comme série numérique. En aucun cas penser série extraite.

[Dem] a) Le rapport $\dfrac{(n+1)^{n+1}|z|^{n+1}n!}{(n+1)!n^n|z|^n} = \dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\dfrac{|z|}{n+1} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n |z|$, expression qui tend vers $e|z|$ le rayon de convergence $\dfrac{1}{e}$ car si $e|z| < 1$ la série converge, si $e|z| > 1$ la série diverge.
b) Le rapport $\dfrac{2^{n+1}|z|^{2n+2}}{2^n|z|^{2n}} = 2|z|^2$. Ainsi si $|z| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ la série converge et si $|z| > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ la série diverge. Le rayon de convergence est $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
c) Regardons la série numérique des termes pairs qui converge si et seulement si $|z| < 1$ et la série des termes impairs qui convergent si $|z| < \dfrac{1}{2}$. Le rayon de convergence est $\dfrac{1}{2}$.

**Exercice 5** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$ et qu'il existe un entier $p$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+p}|}{|a_n|} = l \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Quel est le rayon de convergence de la série entière ?

[Ind] Regarder les séries $\sum a_{pn+j} z^{pn+j}$ pour $0 \leq j \leq p-1$.

[Dem] Nous avons $p$ séries extraites en divisant $n$ par $p$. Pour chacune d'elles la règle de D'Alembert donne $\left|\dfrac{a_{p(n+1)+j}z^{pn+p+j}}{a_{pn+j}z^{pn+j}}\right| = \left|\dfrac{a_{pn+j+p}}{a_{pn+j}}z^p\right|$ qui tend vers $\ell|z^p|$. Toutes ces séries ont le même rayon de convergence à savoir $\rho = \ell^{-\frac{1}{p}}$. Si $|z| < \rho$ toutes ces séries convergent et la sèrie $\sum a_n z^n$ converge et si $|z| > \rho$ le terme général ne tend pas vers 0.

**Exercice 6** Quels sont les rayons de convergence des séries entières $\sum(1+(-1)^n)^n n z^n$ et $\sum 2^n(j^n-1)^n z^n$?

[Ind] Penser série numérique et valeur de séparation.

[Dem] Pour la première le rapport $\left|\dfrac{2^{2n+2}2(n+1)z^{2n+2}}{2^{2n}2nz^{2n}}\right| = 4\dfrac{n+1}{n}|z|^2$ qui tend vers $4|z|^2$. Le rayon de convergence est donc $\dfrac{1}{2}$.
On a $j^3 = 1$ les deux séries numériques extraites de coefficients non nuls convergent si $|z| < \dfrac{1}{2|j-1|}$ et diverge si $|z| > \dfrac{1}{2|j-1|}$ le rayon de convergence est $\dfrac{1}{2|j-1|}$.

## 9.3 Propriétés

**Définition 3** *On appelle disque de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $\rho$ le disque* **ouvert** *centré en 0 de rayon $\rho$ (si $\rho = +\infty$, le disque est le corps $K$ tout entier). On appelle intervalle de convergence, l'intervalle inclus dans $\mathbb{R}$, intersection de $\mathbb{R}$ et du disque de convergence.*

### Continuité de la somme

**Théorème 2** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho$. La série entière converge normalement sur tout disque fermé borné inclus dans le disque de convergence.*

[Ind] Prendre un disque contenu dans le disque de converence.

[Dem] C'est le résultat le plus fort des séries entières. Soit $0 < r < \rho$ alors la série $\sum |a_n| r^n$ converge et comme $\forall |z| \leq r$ on a $|a_n z^n| \leq |a_n| r^n$ la série entière $\sum a_n z^n$ est normalement convergente.

**Proposition 4** *La somme d'une série entière est continue sur le disque de convergence.*

[Ind] Une limite uniforme de fonctions continues est continue et la continuité est une propriétée locale.

[Dem] Soit $z_0$ un point du disque de convergence. Puisque $|z|_0 < \rho$ il existe un disque fermé $D$ de rayon $\alpha < \rho$ tel que $z_0 \in D$. Dans ce disque on a la convergence uniforme. La suite des sommes partielles de la série $\sum a_n z^n$ est une suite fonctions continues convergeant uniformément donc leur limite qui est la somme de la série est continue sur $D$ donc en outre en $z_0$.

**Remarque:** Si $\rho = +\infty$ et si la suite $(a_n)$ n'est pas nulle, la série entière ne converge pas normalement sur $K$.

**Exercice 7** Si $\rho < +\infty$ et si la série $\sum |a_n| \rho^n$ converge, montrer que la série entière converge normalement sur le disque fermé de centre 0 de rayon $\rho$ et donc que sa somme est continue sur ce disque fermé.

[Ind] Trouver une série majorante.

[Dem] Nous avons une série majorante convergente car $\forall z \ : \ |z| \leq \rho$ on a $|a_n z^n| \leq |a_n| \rho^n$, il y a donc convergence normale sur le disque fermé $|z| \leq \rho$.

**Développement limité de la somme**

**Proposition 5** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$. La somme $S$ de la série entière possède des développements limités à tout ordre:*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S(z) = a_0 + a_1 z + \cdots a_n z^n + o(z^n).$$

[Ind] Le vérifier, en utilisant les propriétés du reste d'une série.

[Dem] Vu ce qui est écrit il suffit de vérifier que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k z^k$ est un $o(z^n)$. Or $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k z^k = z^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k z^{k-n}$ et $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k z^{k-n}$ tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$ comme reste d'une série convergente.

**Dérivation d'une série entière**

**Définition 4** *Soit $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière. On appelle série entière dérivée (terme à terme) la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$.*

**Proposition 6** *Une série entière et sa série entière dérivée ont même rayon de convergence.*

[Ind] Procéder par double inégalités.

[Dem] Soit $R$ et $R'$ les rayons de convergence de la série et de la série dérivée. Si $|z| < R$ prenons $r : |z| < r < R$. On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n \left(\frac{|z|}{r}\right)^n = 0$ car $\dfrac{|z|}{r} < 1$ donc pour $n$ assez grand on a $|z|^n \preceq \dfrac{r^n}{n}$ ou $n|a_n||z|^{n-1} \preceq |a_n| \dfrac{1}{|z|} r^n$ ainsi la série des dérivées converge d'où $R' \geq R$.
Si $|z| < R'$ alors $|a|_n z^n \preceq n|a_n||z|^{n-1}|z|$ et la série de départ converge, d'où $R \geq R'$ et l'égalité.

**Théorème 3** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$. La restriction de sa somme à l'intervalle $]$-$\rho, \rho[$ est une fonction de classe $C^\infty$.*

[Ind] Par récurrence en appliquant le théorème de dérivation d'une série de fonctions.

[Dem] Les fonctions $x \longmapsto a_n x^n$ sont $\mathcal{C}^\infty$ les séries dérivées convergent uniformément sur tout disque fermé $D$ contenu dans $D(0, \rho)$. La somme est donc $\mathcal{C}^\infty$ sur $D$ donc sur $D(0, \rho)$.

**Proposition 7** *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $\rho > 0$ *et* $f$ *la restriction de sa somme à l'intervalle* $]$-$\rho, \rho[$. *On a:*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f^{(n)}(0) = n! a_n$$

[Ind] Écrire la série dérivé $n^{ème}$ puis faire $x = 0$.

[Dem] On a $f^{(p)}(x) = \displaystyle\sum_{n=p}^{n=+\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1)a_n x^{n-p}$ et sa valeur en 0 est $f^{(p)}(0) = p!a_p$.

**Proposition 8** *Soient* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *des séries entières de rayons de convergence non nuls de sommes respectives* $S_a$ *et* $S_b$*, s'il existe* $r > 0$ *tel que, pour tout* $x \in ]$-$r, r[$, $S_a(x) = S_b(x)$ *alors, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a* $a_n = b_n$.

[Ind] Tout se passe en 0 utiliser la proposistion précédente.

[Dem] On peut récupérer les coefficients en regardant autour de zéro. On a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \dfrac{1}{n!} S_a^{(n)}(0) = \dfrac{1}{n!} S_b^{(n)}(0) = b_n$, car $a, b$ coïncide sur un voisinage de 0. D'où $a = b$.

**Exercice 8** En remarquant que, pour tout entier $p \geq 0$ inférieur où égal à l'entier $n \geq 0$, $(x^n)^{(p)} = p!\binom{n}{p} x^{n-p}$, montrer que

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in ]\text{-}1, 1[ \quad \frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^{n-p}$$

[Ind] Il suffit de dériver, après savoir où on peut le faire.

[Dem] $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ pour $x < 1$. Pour tout $x < 1$ il existe $\alpha$ tel que $x \in \mathcal{C}(0, \alpha)$, disque de centre $O$ et de rayon $\alpha$. Dans ce disque les séries $\sum x^n$ et toutes celles dérivées termes à termes convergent normalement donc on peut dériver termes à termes ce qui donne $\dfrac{p!}{(1-x)^{p+1}} = \displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} (x^n)^{(p)}$ ou avec la remarque $\dfrac{1}{(1-x)^{p+1}} = \displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^{n-p}$.

### Intégration d'une série entière

**Définition 5** *Soit* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *une série entière. On appelle série entière intégrée (terme à terme) la série entière* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$.

**Proposition 9** *Une série entière et sa série entière intégrée terme à terme ont même rayon de convergence.*

[Ind] Se ramener au cas de la dérivation.

[Dem] Dans la proposition 6 on pose $na_n = b_{n-1}$, ainsi $\sum b_n x_n$ et $\sum \dfrac{b_{n-1}}{n} x^n$ ont le même rayon, ce qui donne que $\sum b_n x^n$ et $\sum \dfrac{b_n}{n+1} x^{n+1}$ ont même rayon de convergence, ce qu'il fallait montrer.

**Théorème 4** *La somme d'une série entière intégrée terme à terme est une primitive de la somme de la série sur l'intervalle ouvert de convergence.*

[Ind] Se rappeler le théorème d'intégration des séries.

[Dem] Soit $x < \rho$ où $\rho$ est le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ il existe $r$ tel que $0 < r < \rho$. Si $S$ est la somme de la série, la convergence étant uniforme sur le disque $\mathcal{D}(0, r)$ on a : $\int_0^x S = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x_{n+1}}{n+1}$. Ces deux séries ont le même rayon de convergence.

### Somme de deux séries entières

**Proposition 10** *Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs $\rho_a$ et $\rho_b$. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = a_n + b_n$ et $\rho_c$ le rayon de convergence de la série somme $\sum c_n z^n$. On a :*

$$\rho_a \neq \rho_b \implies \rho_c = \inf(\rho_a, \rho_b)$$
$$\rho_a = \rho_b \implies \rho_c \geq \inf(\rho_a, \rho_b)$$

[Ind] Regarder là où les séries convergent et trouver des contre exemples.

[Dem] Supposons par exemple $\rho_a < \rho_b$. Si $\rho_a \neq \rho_b$ alors pour $|z| < \rho_a$ les deux séries convergent et leur somme aussi. Pour $\rho_a < |z| < \rho_b$ une série converge et l'autre diverge donc la somme diverge. Comme le rayon de convergence est une valeur de séparation on a $\rho_c = \rho_a$. Par contre dans le cas d'égalité des rayons la première partie prouve que $\rho_c \geq \rho_a$ mais on ne peut rien dire de plus. Si nous prenons une série et son opposée la somme, nulle converge sur tout $\mathbb{R}$.

**Exercice 9** Soit $r \geq 1$. Trouver deux séries entières de rayon de convergence 1 dont la somme est de rayon de convergence $r$.

[Ind] La somme se faisant termes à termes, penser á détruire des termes génants.

[Dem] Prenons les deux séries entières : $\sum \left(\frac{1}{r^n} + 1\right) x^n$ et $\sum -x^n$. Elles osnt toutes les deux de rayon 1 (la première converge si et seulement si $|x| < 1$ et $|x| < r$, mais $r \geq 1$). La somme est la série entière $\sum \left(\frac{x}{r}\right)^n$ qui a pour rayon de convergence $r$.

### Produit de deux séries entières

**Proposition 11** *Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs $\rho_a$ et $\rho_b$. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ et $\rho_d$ le rayon de convergence de la série produit $\sum d_n z^n$. On a :*

$$\rho_d \geq \inf(\rho_a, \rho_b)$$

[Ind] Appliquer le théorème sur le produit de séries absolument convergentes.

[Dem] Supposons par exemple $\rho_a < \rho_b$. Pour $|z| < \rho_a$ les deux séries convergent absolument et leur produit aussi.

**Remarque:** On ne peut rien dire de plus en général:

$$(1 - z) \times \sum_{n \geq 0} z^n = 1$$

## 9.4 Développement en série entière

**Définition 6** *Soit $A \subset K$, $f : A \to K$ et $a \in A$. On dit que $f$ est développable en série entière au voisinage de $z_0$ s'il existe $r > 0$ et une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $\rho \geq r$ tel que*
*1) le disque ouvert de centre $z_0$ de rayon $r$ est inclus dans $A$*
*2) Pour tout $h \in K$,*

$$|h| < r \implies f(z_0 + h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n h^n.$$

**Proposition 12** *Si $f$ et $g$ sont développables en série entière au voisinage d'un point $z_0$, alors $f + g$ et $f.g$ sont développables en série entière au voisinage de $z_0$.*

[Ind] Appliquer ce qui précède.

[Dem] En effet on peut faire la somme et le produit de séries entières au voisinage de $z_0$.

Limitons-nous à des fonctions d'une variable réelle et cherchons des conditions pour qu'une fonction soit développable en série entière au voisinage de $x_0$.

**Définition 7** *Soit $f$ une fonction de classe $C^\infty$ sur un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$, la série de fonctions de terme général $\dfrac{f^{(n)(x_0)}}{n!}(x - x_0)^n$ est appelée série de Taylor de $f$ en $x_0$.*

**Proposition 13** *Une fonction $f$ est développable en série entière au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ si et seulement si elle est de classe $C^\infty$ sur un voisinage de $x_0$ et égale à la somme de sa série de Taylor en $x_0$ sur ce voisinage.*

[Ind] Que peut-être le développement en série entière ?

[Dem] Si $f$ est développable en série entière, alors $f$ est $C^\infty$ et d'après la formule donnant les coefficients c'est forcément la série de Taylor de $f$. Réciproquement si $f$ est égale à la somme de sa série de Taylor elle est développable en série entière.

**Proposition 14** *Soit $f$ une fonction $C^\infty$ sur un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. Elle est développable en série entière au voisinage de $x_0$ si et seulement s'il existe un voisinage de $x_0$ sur lequel la suite de fonctions $(R_n)$ définie par*

$$R_n(x) = \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

*converge simplement vers la fonction nulle.*

[Ind] C'est encore la faute à Taylor !

[Dem] Si la fonction est développable en série entière, la série est la série de Taylor. Pour que celle-ci converge il faut et il suffit que la suite des restes de Taylor converge vers zéro.

**Théorème 5** *Soit $f$ une fonction de classe $C^\infty$ définie sur un intervalle ouvert contenant $0$; $f$ est développable en série entière au voisinage de $0$ si et seulement s'il existe des réels $M > 0$, $k > 0$ et $r > 0$ tels que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I \quad |x| < r \implies \left| f^{(n)}(x) \right| \leq M k^n n!$$

[Ind] hors programme.

[Dem] hors programme.

**Proposition 15 Principe des zéros isolés**. *Soit $f$ une fonction développable en série entière au voisinage de 0. Si $f \neq 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout réel $x$, $0 < |x| < \alpha$ entraîne $f(x) \neq 0$.*

[Ind]
*Voir la démonstration.*

[Dem] Puique $f \neq 0$ il existe $n_0$ : $f^{(n_0)}(0) \neq 0$. Soit $n_0$ le plus petit entier $n$ tel que $a_n \neq 0$. On peut écrire $f(x) = x^n \left( a_{n_0} + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} a_n x^{n-n_0} \right)$ et la fonction définie par $g(x) = a_{n_0} + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} a_n x^{n-n_0}$ est une fonction continue non nulle en 0 il existe donc $\mathcal{D}(0,\alpha)$ tel que $\forall x \in \mathcal{D}$ on ait $g(x) \neq 0$. Si $n_0 \geq 1$ alors 0 est un zéro isolé et si $n_0 = 0$ alors $f$ est localement non nulle.

**Exercice 10** Soit $f$ définie sur $I = ]{-r}, r[$ $(r > 0)$. Si $f$ est de classe $\mathrm{C}^\infty$ sur $I$, s'il existe un réel $M$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $||f^{(n)}||_\infty \leq M$ alors $f$ est développable en série entière en 0 et égale à la somme de sa série de Taylor en 0 sur $I$.

[Ind] Majorer le reste intégrale de la série de Taylor.

[Dem] En fait dans ces conditions $f$ vérifie les hypothèses du théorème précédent. Mais en reprenant le reste de Taylor on a $|R_n(x)| \leq M \left| \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} dt \right| \leq M \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$. Cette dernière expression tend vers 0, par exemple comme terme général d'une série convergente.

### 9.4.1 Développement en séries entières des fonction usuelles

**Utilisation du développement de Taylor**

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (\rho = +\infty)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (\rho = +\infty)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (\rho = +\infty)$$

**Exercice 11** Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{ch}\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (\rho = +\infty)$$

et que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{sh}\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (\rho = +\infty)$$

[Ind] Les fonctions *ch* et *sh* s'expriment à l'aide de l'exponentielle.

[Dem] $\mathrm{ch}\, x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, développement valable sur tout $\mathbb{R}$.
De même : $\mathrm{sh}\, x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, développement valable sur tout $\mathbb{R}$.

**Exercice 12** Montrer que les fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ et $g(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ sont prolongeables sur $\mathbb{R}$ en des fonctions de classe $C^\infty$.

[Ind] Si une fonction est développable en série entière, elle est de classe $C^\infty$.

[Dem] On a $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n+1)!}$, elle est donc développable en série entière, donc $\mathcal{C}^\infty$.
De même :$g(x) = \dfrac{1}{x^2}\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^{2(n-1)}}{(2n)!}$. $g$ est développable en série entière, donc $\mathcal{C}^\infty$. Remarquer l'outil puissant que l'on a pour montrer qu'une fonction est $\mathcal{C}^\infty$.

**Fonctions rationnelles**

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| < 1 \implies \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z_n \quad (\rho = 1)$$

En calculant, par récurrence, les puissances de cette série, on trouve

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall z\mathbb{C} \quad |z| < 1 \implies \frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} z^{n-p} \quad (\rho = 1)$$

et si $a \in \mathbb{C}^*$

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad |z| < |a| \implies \frac{1}{(a-z)^{p+1}} = \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} \frac{z^{n-p}}{a^{n+1}} \quad (\rho = |a|)$$

**Proposition 16** *Soient $P$ et $Q$ deux polynômes premiers entre eux et tels que $Q(0) \neq 0$. La fonction rationnelle $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ est développable en série entière sur le disque centré en 0 de rayon $\rho$ où $\rho$ est le minimum des modules des zéros de $Q$. De plus, la série de Taylor de $R$ en 0 est de rayon de convergence $\rho$.*

[Ind] Décomposer en éléments simples.

[Dem] La fonction $R$ se décompose dans $\mathbb{C}$ en $R(x) = \sum \dfrac{1}{(x-a)^\alpha}$, bien entendu cette somme est finie. Chaque élément $\dfrac{1}{(x-a)^\alpha}$ se décompose en séries entières de rayon de convergence $|a|$ et donc $R$ aussi et le rayon de convergence est le plus petit des rayons de convergence des éléments, c'est à dire le minimum des modules des zéros de $Q$.

**Remarque:** Si la fraction rationnelle est paire ou impaire, il est intéressant de poser $Z = z^2$ pour accélérer les calculs.

**Exercice 13** Développer en série entière au voisinage de 0 la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2+x^4}$.

[Ind] Utiliser $(1-X^3) = (1-X)(1+X+X^2)$.

[Dem] On a $\dfrac{x}{1+x^2+x^4} = x\dfrac{1-x^2}{1-x^6} = x(1-x^2)\sum_{n=0}^{+\infty} x^{6n}$.

**Exercice 14** Soit $P$ et $Q$ des polynômes non nuls. Comment se traduit l'égalité $\dfrac{P}{Q}\dfrac{Q}{P} = 1$ en termes de séries entières ? Que peut-on en conclure sur le rayon de convergence d'une série entière produit ?

[Ind] Penser au produit de série entières, quelle est le rayon de convergence de 1 ?

[Dem] Les fractions rationnelles $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ et $S(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$ sont développables en séries entières sur un disque assez petit de rayon $r$. Le produit de ces séries vaut 1, qui, étant son propre développement en série entière a un rayon de convergence $\infty$. Ainsi le produit de deux séries entières peut avoir un rayon de convergence plus grand strictement.

**Fonctions à dérivées rationnelles**

$$\forall x \in ]\text{-}1,1[ \quad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \quad (\rho = 1)$$

$$\forall x \in ]\text{-}1,1[ \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad (\rho = 1)$$

**Exercice 15** Montrer que

$$\forall x \in ]\text{-}1,1[ \quad \operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (\rho = 1)$$

[Ind] Développer en série entière la dérivée puis intégrer.

[Dem] La dérivée de $\operatorname{Arctan} x$ est $\dfrac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$ avec pour rayon de convergence 1. Par intégration on trouve : $\quad \operatorname{Arctan} x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

**Exercice 16** Soit $P$ un polynôme à coefficients réels vérifiant $P(0) \neq 0$. Montrer que la fonction $\ln|P|$ est développable en série entière au voisinage de zéro. Quel est le plus grand rayon de convergence possible ?

[Ind] Dériver, où peut-on développer ?

[Dem] La dérivé de $\ln|P|$ est $\dfrac{P'}{P}$, une fraction rationnelle développable en séries entières de rayon de convergence le plus petit zéro de $P$ en module. Il en est donc de même de $\ln|P|$.

**Solutions d'une équation différentielle linéaire** Considérons l'équation différentielle

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$$

où $a$, $b$, $c$ et $f$ sont des fonctions développables en séries entières au voisinage de $O$ dont les rayons de convergence sont supérieurs à $\rho_0 > 0$.S'il existe une solution $y$ développable en série entière au voisinage de 0, notons

$$y(x) = \sum_{n=0} \alpha_n x^n$$

et $\rho > 0$ son rayon de convergence. La fonction $ay''+by'+c$ est donc développable en série entière avec un rayon de convergence supérieur ou égal à $\inf(\rho, \rho_0)$. D'après l'unicité du développement en séries entières, les coefficients des séries de Taylor de $f$ et de $ay'' + by' + c$ en 0 sont donc égaux, ce qui entraîne une suite d'équations linéaires dont les inconnues sont les coefficients $\alpha_n$. On essaie alors de résoudre ces équations, ce qui permet de déterminer la série entière $\sum \alpha_n x^n$.Si $(\alpha_n)$ est alors une suite de scalaires vérifiant le système d'équations et si le rayon de convergence de la série entière $\sum \alpha_n x^n$ est $\rho \geq \rho_0$, alors la fonction $y$ définie sur $]\text{-}\rho_0, \rho_0[$

par $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$ est bien une fonction développable en série entière qui vérifie pour tout $x \in ]\text{-}\rho_0, \rho_0[\; :\; a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = f(x)$. C'est donc une solution de l'équation différentielle sur l'intervalle $]\text{-}\rho_0, \rho_0[$.

**Exercice 17** Montrer que les solutions de l'équation différentielle $(1 + x^2)y'' - y = 0$ sont développables en série entière sur $]\text{-}1, 1[$.

[Ind] Appliquer exactement ce qui est au-dessus.

[Dem] Posons $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ on a alors $y'' = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$. L'équation donne $\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n\geq 0} a_n x^n = 0$. Par changement d'indice : $\sum_{n\geq 0}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n\geq 0} a_n x^n = 0$ ou $2a_2 - a_0 + 6a_3 - a_1 + \sum_{n\geq 2}\left((n+2)(n+1)a_{n+2} + (n^2 - n - 1)a_n\right) x^n = 0$. Par unicité des coefficients on obtient $\forall n \geq 0\; :\; (n+2)(n+1)a_{n+2} + (n^2 - n - 1)a_n = 0$. Ainsi en se donnant $a_0$, $a_1$, on pourra calculer tous les coefficients. Enfin le rapport $\dfrac{a_{n+2}x^{n+2}}{a_n x^n} = \dfrac{(n^2 - n - 1)x^2}{(n+2)(n+1)}$ tend vers $x^2$ et donc il y a une solution développable en série entière sur $]-1, +1[$.

**Fonctions puissances** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f$ définie sur $]\text{-}1, +\infty[$ par $f(x) = (1 + x)^\alpha$ est la solution de l'équation différentielle $(1 + x)y' - \alpha y = 0$ définie sur $]\text{-}1, +\infty[$ et vérifiant $y(0) = 1$. Elle est développable en série entière sur $]\text{-}1, 1[$ et

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (\rho = 1)$$

où pour tout entier $n$ positif, $\dbinom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$.

**Exercice 18** Montrer que

$$\forall x \in ]\text{-}1, 1[ \quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^n \quad (\rho = 1)$$

[Ind] Penser à la puissance $-\frac{1}{2}$. Arranger les coefficients.

[Dem] Les coefficients sont $\dfrac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} = \dfrac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{2n-1}{2})}{n!} = (-1)^n \dfrac{(2n)!}{2^n n! 2^n n!}$ ce qui donne le résultat.

**Exercice 19** Montrer que

$$\forall x \in ]\text{-}1, 1[ \quad \operatorname{Arcsin} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (\rho = 1)$$

Montrer que ce développement en série entière converge sur $[\text{-}1, 1]$ vers la fonction Arcsin

[Ind] Développer la dérivée, puis intégrer.

[Dem] La dérivée de $\operatorname{Arcsin} x$ est $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ il suffit donc d'intégrer le développement précédent, la constante d'intégration est nulle d'où le résultat.

**Exercice 20** Retrouver le développement en série entière de $(1-x)^p$ ($p \in \mathbb{Z}$) à l'aide de la formule donnant le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

[Ind] $p$ entier est un réel.

[Dem] Si $p$ est un entier positif alors à partir du rang $p-1$ les coefficients sont nuls donc on retrouve la formule du binôme. Si $p$ est un entier négatif on a vu que $\dfrac{1}{(1-x)^p} = \sum_{n=p-1}^{+\infty} \binom{n}{p-1} x^{n-p+1} = \sum_{n\geq 0} \binom{n+p-1}{p-1} x^n$. D'autre part $(1+x)^{-p} = \sum_{n\geq 0} \binom{-p}{n} x^n$ avec $\binom{-p}{n} = \dfrac{-p(-p-1)\cdots(-p-n+1)}{n!} = \dfrac{(-1)^n p(p+1)\cdots(n+p-1)}{n!} = \dfrac{(-1)^n (n+p-1)!}{n!(p-1)!} = (-1)^n \binom{n+p-1}{p-1}$

## 9.5 Exercices

**Exercice 21** Donner le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes:

$$\sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{n(n-1)} \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{(n-1)!} \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{3n}{n+2} x^n$$
$$\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+n-1}{n!} x^n \quad \sum_{n\geq 1} \frac{2n+2}{n(n+2)} x^n \quad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)} x^n$$
$$\sum_{n\geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!} \qquad \sum_{n\geq 0} n(n+1) x^n$$

[Ind] Prendre la méthode la plus adaptée, le rayon de convergence est une valeur de séparation.

[Dem] Pour la première on fait une petite décomposition en éléments simples : $\dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$ ce qui donne $\sum_{n\geq 2} \dfrac{x^n}{n(n-1)} = -\sum_{n\geq 2} \dfrac{x^n}{n} + x \sum_{n\geq 1} \dfrac{x^n}{n} = -\ln(1-x) + x - x\ln(1-x)$. Rayon de convergence 1.

$\sum_{n\geq 1} \dfrac{x^n}{(n-1)!} = x \sum_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{n!} = x\mathrm{e}^x$. Rayon de convergence $+\infty$

$\sum_{n\geq 0} \dfrac{3n}{n+2} x^n = \sum_{n\geq 0} \dfrac{3(n+2)-6}{n+2} x^n = 3\dfrac{1}{1-x} - 6\dfrac{1}{x^2} \sum_{n\geq 2} \dfrac{x^n}{n} = 3\dfrac{1}{1-x} + 6\dfrac{\ln(1-)+x}{x^2}$. Malgrés l'apparence cette fonction est prolongeable en une fonction $\mathcal{C}^\infty$ (faire un développement limité. Rayon de convergence 1.

$\sum_{n\geq 0} \dfrac{n^2+n-1}{n!} x^n = \sum_{n\geq 0} \dfrac{n(n-1)+2n-1}{n!} x^n = \sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{(n-2)!} x^n + 2\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{(n-1)!} x^n - \mathrm{e}^x = x^2\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x$ avec un rayon de convergence $+\infty$.

$\sum_{n\geq 1} \dfrac{2n+2}{n(n+1)} x^n$ en écrivant $\dfrac{2n+2}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+2}$ on obtient $-\ln(1-x) - \dfrac{\ln(1-x)+x+\frac{x^2}{2}}{x^2}$. Rayon de convergence 1.

En écrivant $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right)$ on trouve si $x \in ]-1,0]$ : $\dfrac{\operatorname{argth}\sqrt{-x}}{2\sqrt{-x}} + \dfrac{\operatorname{argth}\sqrt{-x} - \sqrt{-x}}{2x\sqrt{-x}}$ et si $x \in [0,1[$ : $\dfrac{\operatorname{Arctan}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \dfrac{\operatorname{Arctan}\sqrt{x} - \sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}$. Rayon de convergence 1.

$G(x) = \sum_{n\geq 0} \dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$ et $R = +\infty$ car $\dfrac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = |x|^3 \dfrac{1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \to 0$ on peut donc dériver termes à termes et $G'(x) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}$; $G''(x) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}$ et $G'''(x) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{x^{3(n-1)}}{3(n-1)!} = \sum_{n\geq 0} \dfrac{x^{3n}}{(3n)!} = G(x)$. Ainsi $G$ est solution de l'équation différentielle homogène de degré 3 : $y = y'''$

dont l'ensemble des solutions est un espace vectoriel est de dimension 3. Les conditions sont $y(0) = 1, y'(0) = y''(0) = 0$ on cherche $y$ sous la forme $e^{\alpha x}$ et $\alpha^3 = 1$ par suite $y(x) = \lambda e^x + \mu e^{jx} + \nu e^{j^2 x}$ les conditions initiales donnet $\begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 1 \\ \lambda + \mu j + \nu j^2 = 0 \\ \lambda + \mu j^2 + \nu j = 0 \end{cases}$ et $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ convient. $G(x) = \frac{1}{3}\left(e^x + e^{jx} + e^{j^2 x}\right) = \frac{1}{3}\left(e^x + 2e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x\right)$. $\sum_{n \geq 0} (n+1) n x^n = x \left(\sum_{n \geq 0} x^{n+1}\right)'' = x \dfrac{2}{(1-x)^3}$, avec pour rayon de convergence 1.

**Exercice 22** Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières telles que $|a_n| \sim |b_n|$. Montrer qu'elles ont même rayon de convergence.

[Ind] L'équivalence peut se traduire par des inégalités pour $n$ assez grand.

[Dem] Le fait que $|a_n| \sim |b_n|$ donne pour $n$ assez grand $\dfrac{1}{2}|a_n| \leq |b_n| \leq \dfrac{3}{2}|a_n|$ donc par comaraison les séries numériques de termes généraux $a_n x^n$ et $b_n x^n$ convergent simultanément donc les séries entières ont même rayon de convergence.

**Exercice 23** Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux série entières de rayons de convergence $\rho$ et $\rho'$. Quels sont les rayons de convergence des séries entières $\sum \dfrac{a_n}{1+|a_n|} x^n$, $\sum \dfrac{a_n}{n!} x^n$, $\sum a_n b_n x^n$?

[Ind] pour la première poser $c_n = \dfrac{a_n}{1+|a_n|}$, formule qui s'inverse et raisonner : si $\sum a_n x^n$ converge alors...Pour la seconde utiliser la comparaison. Pour la troisième, montrer que le rayon est supérieur ou égal à $\rho\rho'$ en décomposant un $z = uv$ ...trouver un contre exemple pour montrer que l'inégalité peut être stricte.

[Dem] Posons $c_n = \dfrac{a_n}{1+|a_n|}$ si $\sum a_n x^n$ converge alors $|c_n| \leq |a_n|$ donc $\sum c_n x^n$ converge. Si $r$ est le rayon de convergence de $\sum c_n x^n$ on a alors $\rho \leq r$. Si $\sum c_n x^n$ converge alors $c_n$ tend vers 0 et comme $|a_n| = \dfrac{|c_n|}{1-|c_n|}$ on en déduit $a_n$ tend vers 0 ce qui prouve que $\sum a_n x^n$ converge. Finalement $r = \rho$.
On a $\left|\dfrac{a_n}{n!}\right| \leq |a_n|$ ainsi si $\sum a_n x^n$ converge alors $\sum \dfrac{a_n}{n!} x^n$ converge et $\rho \leq r$. On ne peut rieb dire de plus. Par exemple si les $(a_n)_n$ sont bornés alors $r = +\infty$.
Si $|x| \leq \rho\rho'$ il existe $a > 0$ tel que $|x| = \rho\rho' \mathrm{e}^{-a} = \rho \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}} \rho' \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}}$ posons $u = \rho \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}}$ et $v = \rho' \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}}$ on a $|a_n b_n x^n| = |a_n u^n| |b_n v_n|$. Comme $|u| \leq \rho$ et $|v| \leq \rho'$ on a que les séries $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ convergent donc leurs termes généraux tendent vers 0 et donc $a_n b_n x^n$ aussi et la série $\sum a_n b_n x^n$ converge. Ceci prouve que $r \geq \rho\rho'$. L'ingalité peut être strict comme le prouve le contre exemple : $a_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ est pair} \\ 0 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$ et $b_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ 1 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$ qui donne $\rho = \rho' = 1$ et $r = +\infty$.

**Exercice 24** Soit $(\sum a_n)$ une suite divergente à termes strictement positifs. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et on suppose que $a_n = o(S_n)$. Quels sont les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum S_n x^n$ ?

[Ind] Le fait que $\sum a_n$ diverge donne un renseignement sur le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$, la comparaison permet de comparer les deux rayons de convergence, enfin former $\dfrac{S_{n+1}}{S_n}$ et chercher la limite.

[Dem] Soit $\rho$ et $\rho'$ les rayons de convergence de $\sum a_n x^n$ et de $\sum S_n x^n$. On a $\rho \leq 1$ puisque $\sum a_n$ diverge. D'autre part on a $a_n \leq S_n$ donc $\rho' \leq \rho$. On a $\dfrac{S_{n+1}}{S_n} = 1 + \dfrac{a_n}{S_n}$ qui tend vers 1 car $a_n = o(S_n)$ donc $\rho' = 1$. Finalement $\rho = \rho' = 1$.

**Exercice 25** Montrer que les séries entières $\sum_{n\geq 0} \frac{z^{3n}}{(3n)!}$, $\sum_{n\geq 0} \frac{z^{3n+1}}{(3n+1)!}$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{z^{3n+2}}{(3n+2)!}$ sont de rayon de convergence infini et que leurs sommes $u$, $v$ et $w$ vérifient:

$$u^3 + v^3 + w^3 = 3uvw + 1.$$

[Ind] Écrire différement l'expression en utilisant les racines cubiques de l'unité.

[Dem] La règle de D'Alembert donne que les rayons sont infinis. D'autre part on a $u^3+v^3+w^3-3uvw = (u+v+w)(u+jv+j^2w)(u+j^2v+jw) = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^{jz}\mathrm{e}^{j^2z} = \mathrm{e}^{z+jz+j^2z} = 1$.

**Exercice 26** a) Soit $\theta$ un réel vérifiant $\cos\theta \neq 1$ et $\alpha$ et $\beta$ deux réels
Développer en série entière sur un intervalle centré en 0 la fonction $f$ d'une variable réelle définie par:

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x^2 - 2x\cos\theta + 1}$$

Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?
b) Si cette série entière s'écrit sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, montrer que la suite $(a_n)$ vérifie la relation de récurrence linéaire à coefficients constants:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n - 2\cos\theta a_{n+1} + a_{n+2} = 0$$

c) Réciproquement, que peut-on dire de la somme d'une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ si la suite $a_n$ est définie par ses deux premiers termes $a_0$ et $a_1$ et la relation de récurrence linéaire précédente ?
d) Plus généralement, que peut-on dire des coefficients du développement en série entière d'une fonction rationnelle de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$ où $P$ et $Q$ sont des polynômes vérifiant: $Q(0) \neq 0$ et le degré de $P$ est strictement inférieur au degré de $Q$.

[Ind] C'est une fraction rationnelle. Penser à faire le produit en croix.

[Dem] $\frac{\alpha x + \beta}{x^2 - 2x\cos\theta + 1} = \frac{a}{(x - \mathrm{e}^{i\theta})} + \frac{\overline{a}}{(x - \mathrm{e}^{-i\theta})}$ avec $a = \frac{\alpha\mathrm{e}^{i\theta} + \beta}{2i\sin\theta}$. On a $\frac{a}{(x-\mathrm{e}^{i\theta})} = -\frac{\alpha + \beta\mathrm{e}^{-i\theta}}{2i\sin\theta}\frac{1}{1 - \frac{x}{e^{i\theta}}} = -\frac{\alpha + \beta\mathrm{e}^{-i\theta}}{2i\sin\theta}\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-in\theta}x^n$. Finalement $f(x) = 2\mathrm{Re}\left(i\frac{\alpha + \beta\mathrm{e}^{-i\theta}}{\sin\theta}\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-in\theta}x^n\right)$ ou $f(x) = \frac{\alpha + \beta\cos\theta}{\sin\theta}\sum_{n=0}^{+\infty} \sin n\theta x^n + \beta\sum_{n=0}^{+\infty} \cos n\theta x^n$.
On a donc $a_n = A\sin(n\theta) + B\cos(n\theta)$ le rayon de convergence est 1 comme fraction rationnelle.
La relation $\sin n\theta - 2\cos\theta\sin(n+1)\theta + \sin(n+2)\theta = \sin n\theta - 2\cos^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta\cos n\theta + \sin(n+2)\theta = -\cos 2\theta - \sin 2\theta\cos n\theta + \sin(n+2)\theta = 0$. De même avec $\cos n\theta$.
S'il en est ainsi en écrivant la relation pour $f$ on obtient $(x^2 - 2x\cos\theta + 1)f(x) + (2a_0\cos\theta - a_1)x - a_0 = 0$ ce qui donne $f(x) = \frac{a_0 - (2a_0\cos\theta - a_1)x}{x^2 - 2x\cos\theta + 1}$.
Si nous avons une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ telle que $Q(0) \neq 0$ elle est développable en série entière ce qui donne $\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ou en core $P(x) = Q(x)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ en effectuant le produit et en égalant on trouve une relation linéaire vérifiée par les coefficients $(a_n)$

**Exercice 27** Calculer le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n z^n$ où la suite $(a_n)$ est définie par $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ et $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} - a_n$ pout tout entier $n \geq 0$.

[Ind] La somme est : $\dfrac{1+z+z^2}{(1-z)^2(1+z)}$.

[Dem] La relation donne : $\sum_{n\geq 0} a_{n+3}x^{n+3} = \sum_{n\geq 0} a_{n+2}x^{n+3} + \sum_{n\geq 0} a_{n+1}x^{n+3} - \sum_{n\geq 0} a_n x^{n+3}$ ou encore en appelant $f(x)$ la somme de $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ : $f(x)-a_0-a_1x-a_2x^2 = x(f(x)-a_0-a_1x)+x^2(f(x)-a_0)-f(x)$ soit en remplacant $a_0$, $a_1$, $a_2$ par leurs valeurs : $f(x) = \dfrac{1+x+x^2}{1-x-x^2+x^3} = \dfrac{1+x+x^2}{(1-x)^2(1+x)}$. Cette fraction est bien développable en série entière de rayon de convergence 1.

**Exercice 28** On considère l'équation différentielle suivante:

$$x(x^2+1)y'' + (x^2-1)y' = 1.$$

a) Chercher une solution développable en série entière en 0. Quel est le rayon de convergence de cette série.
b) Résoudre l'équation.

[Ind] Appliquer la méthode du cours, quand on en connait une on en connait deux.

[Dem] On cherche à priori $y(x)$ sous la forme $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ on a donc $y'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ et $y''(x) = \sum_{n\geq 2} n(n-1)x^{n-2}$ l'équation E donne $\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n+1} + \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n+1} - \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} = 1$ et par unicité des développements en séries entières, on peut identifier les coefficients de $x^p$ dans les deux membres de l'égalité.
$x^0 : -a_1 = 1$
$x^1 : 2a_2 - 2a_2 = 0$
$x^2 : 6a_3 + a_1 - 3a_3 = 0$
$x^P : p \geq 2, (p-1)(p-2)a_{p-1} + (p+1)pa_{p+1} + (p-1)a_{p-1} - (p+1)a_{p+1} = 0$
ou $(p-1)((p-1)a_{p-1} + (p+1)a_{p+1}) = 0$ ou $(p-1)a_{p-1} + (p+1)a_{p+1} = 0$ car $p \neq 0$ et cette relation est encore vraie pour $p=2$. D'où pour tout $p \geq 2, (p+1)a_{p+1} = -(p-1)a_{p-1}$ ou $a_{2p}$ (resp.$a_{2p+1}$) est multiple de $a_0$ (resp.$a_1$). Comme on cherche une solution on peut imposer $a_0 = 0$ et $a_{2p} = 0$. Par suite $(2p+1)a_{2p+1} = -(2p-1)a_{2p-1} = \cdots = (-1)^p a_1 = (-1)^{p+1}$ et $y(x) = \sum_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^{p+1}}{2p+1} x^{2p+1} = -Arc\tan x$. Il s'agit d'une série entière de rayon 1. Réciproquement $-Arc\tan x$ vérifie bien $(E)$.
Le coefficient de $y''$ s'annule en 0 on résoudra sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. On a $\dfrac{y''}{y} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2x}{1+x^2}$ ou $\ln|y'| = C^{ste} + \ln\left|\dfrac{x}{1+x^2}\right|$ soit $y' = \lambda\dfrac{2x}{1+x^2}$ et $y(x) = \lambda\ln(1+x^2) + \mu$. Les solutions de $(E)$ sont données par $y(x) = -Arc\tan x + \lambda\ln(1+x^2) + \mu$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ en fait elles sont prlongeables sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 29** Développer en série entière les fonctions:

$$f(x) = \text{Arctan}\left(\frac{x\sin a}{1-x\cos a}\right) \quad g(x) = (\text{Arcsin}\, x)^2.$$

[Ind] Dériver, développer, intégrer pour la première, pour la seconde, trouver une équation différentielle.

[Dem]

- En remarquant que $f'(x) = \dfrac{\sin a}{(1-x\sin a)^2 + x^2\sin^2 a}$ on supposera $a \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ et $f'(x) = \dfrac{\sin a}{\left(1-x\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\sin a\right)\left(1-x\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\sin a\right)} = \dfrac{\frac{1+i}{2i}\sin a}{1-x\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\sin a} - \dfrac{\frac{1-i}{2i}\sin a}{1-x\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\sin a}$. Or nous savons

que $\dfrac{1}{1-\lambda x}=\sum_{n\geq 0}\lambda^n x^n$ dès que $|x|<\dfrac{1}{|\lambda|}$ d'où si $|x|<\dfrac{1}{\left|\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\sin a\right|}=\dfrac{1}{\left|\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\sin a\right|}=R_a$.
Ainsi $f'(x)=\dfrac{1+i}{2i}\sum_{n\geq 0}\left(x\sqrt{2}\sin a\right)^n e^{i\frac{\pi}{4}}\sin a-\dfrac{1-i}{2i}\sin a\sum_{n\geq 0}\left(x\sqrt{2}\sin a e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n=$

$f'(x)=\sum_{n\geq 0}x^n\left(\sqrt{2}\sin a\right)^{n+2}\dfrac{e^{i\frac{\pi}{4}(n+1)}-e^{-i\frac{\pi}{4}(n+1)}}{2i}=\sum_{n\geq 0}x^n\left(\sqrt{2}\sin a\right)^{n+1}\sin\dfrac{\pi(n+1)}{4}$. Comme il s'agit d'une série entière on peut intégrer termes à termes tant que $|x|<R_a$. Ainsi $f(x)-f(0)=\sum_{n\geq 0}\dfrac{\left(x\sqrt{2}\sin a\right)^{n+1}}{n+1}\sin\dfrac{\pi(n+1)}{4}$ et $f(x)=f(0)+\sum_{n\geq 1}\dfrac{\left(x\sqrt{2}\sin a\right)^n}{n}\sin\dfrac{\pi n}{4}$ valable pour $|x|<R_a=\dfrac{1}{\sqrt{2}|\sin a|}$ qui est bien le rayon de convergence de la série trouvée.

- Pour $g(x)=(\arcsin x)^2$ on a $g'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x$ et $g''(x)=\dfrac{2}{(1-x^2)}+\dfrac{2x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Nous trouvons une équation différentielle $(E)$ : $\left(1-x^2\right)y''-xy'=2$ avec $y(0)=y'(0)=0$. On pose $y(x)=\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ et en remplaçant $\left(1-x^2\right)\sum_{n\geq 2}n(n-1)a_nx^{n-2}-x\sum_{n\geq 1}na_nx^{n-1}=\sum_{n\geq 2}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n\geq 2}n(n-1)a_nx^n-\sum_{n\geq 2}na_nx^n=2$. D'où $2a_0=2, 6a_3=0$ et pour $p\geq 2$ : $(p+2)(p+1)a_{p+2}-p^2a_p=0$ en fait pour $p\geq 1$ : $(p+2)(p+1)a_{p+2}=p^2a_p$. On a $a_{2p+1}=0$ et $a_{2p}=\dfrac{2^{2p}\left((p-1)!\right)^2}{2(2p)!}a_2$ et $y(x)=\sum_{p\geq 1}\dfrac{2^{2p}\left((p-1)!\right)^2}{2(2p)!}x^{2p}$. Cette solution convient et par unicité $g(x)=\sum_{p\geq 1}\dfrac{2^{2p}\left((p-1)!\right)^2}{2(2p)!}x^{2p}$ le rayon de convergence est $\left|\dfrac{u_{p+1}(x)}{u_p(x)}\right|=\left|x^2\right|\dfrac{a_{2p+2}}{a_{2p}}=\dfrac{4p^2}{(2p+2)(2p+1)}|x|^2\to|x|^2$ et $R=1$.

**Exercice 30** Soit $n$ un entier naturel donné. En utilisant le développement en série entière de $f(x)=\dfrac{1}{(1-x^2)(1-x^3)}$, trouver le nombre de couples d'entiers naturels $(a,b)$ tels que $2a+3b=n$.

[Ind] C'est une fraction rationnelle. Ordonner la série entière.

[Dem] $f(x)=\sum_{n\geq 0}a_nx^n=\left(\sum_{n\geq 0}x^{2n}\right)\left(\sum_{n\geq 0}x^{3n}\right)=\sum_{n\geq 0}\sigma(n)x^n$ où $\sigma(n)$ est le nombre de couples $(a,b)$ d'entiers tels que $2a+3b=n$. Or $1=\left(1-x^2\right)\left(1-x^3\right)\sum_{n\geq 0}a_nx^n$, ou $1=\sum_{n\geq 0}a_nx^n\left(1-x^2-x^3+x^5\right)$ et $1=\sum_{n\geq 0}a_nx^n-\sum_{n\geq 2}a_{n-2}x^n-\sum_{n\geq 3}a_{n-3}x^n+\sum_{n\geq 5}a_{n-5}x^n$. Il nous reste plus qu'à identifier : pour tout $n\geq 5$ : $0=a_n-a_{n-2}-a_{n-3}+a_{n-5}$ avec $a_1=0, a_0=a_2=a_3=a_4=1$.

**Exercice 31** Trouver les rayons de convergence des séries entières de terme général $\exp(-\operatorname{sh} n)z^n$, $n!z^{n^2}$ et $n^{\sqrt{n}}z^{2n}$.

[Ind] Un peu plus difficle, penser au développements limités.

[Dem]
Nous avons $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=e^{shn-sh(n+1)}$ et $shn-sh(n+1)=\dfrac{e^n-e^{-n}}{2}-\dfrac{e^{n+1}-e^{-(n+1)}}{2}=\dfrac{e^n-e^{n+1}}{2}+\dfrac{-e^{-n}+e^{-(n+1)}}{2}=\overbrace{\dfrac{e^n}{2}\underbrace{(1-e)}_{<0}}^{\to-\infty}+\overbrace{\dfrac{e^{-(n+1)}-e^{-n}}{2}}^{\to 0}$ et $R=+\infty$.
soit $u_n(z)=n!z^{n^2}$ on a $\left|\dfrac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right|=\dfrac{(n+1)!\,|z|^{(n+1)^2}}{n!\left|z^{n^2}\right|}=(n+1)|z|^{2n+1}$ si $|z|<1$ la série converge et si $|z|>1$ la série diverge le rayon de convergence est $R=1$.

De même $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{(n+1)^{\sqrt{n+1}}}{n^{\sqrt{n}}}|z|^2$. Développons $\frac{(n+1)^{\sqrt{n+1}}}{n^{\sqrt{n}}} = e^{\sqrt{n+1}\ln(n+1)-\sqrt{n}\ln n}$ et $\sqrt{n+1}\ln(n+1) - \sqrt{n}\ln n = \sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\ln n\left(1+\frac{1}{n}\right) - \sqrt{n}\ln n$

$= \sqrt{n}\left(1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\ln n+\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) - \sqrt{n}\ln n \sim \sqrt{n}$ et $R=0$.

**Exercice 32** Trouver le développement en série entière en 0 des fonctions:

$$f(x) = (2x+1)\ln(1+x) \quad g(x) = \cos^2 x \quad h(x) = \mathrm{sh}^3 x.$$

[Ind] Dŕiver. Linéariser.

[Dem] Partant de $\ln(1+x) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ de rayon de convergence 1 on a $f(x) = (2x+1)\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = 2\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n} + \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = x + \sum_{n\geq 2}\left(\frac{2(-1)^n}{n-1} - \frac{(-1)^n}{n}\right)x^n$.

$f(x) = \cos^2 x = \frac{\cos 2x+1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{2n!}$ de rayon $R = +\infty$

En écrivant $f(x) = sh^3(x) = \left(\frac{e^x - e^x}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3x} + 3e^{-x} - 3e^x - e^{-3x}\right)$ on trouve $\frac{1}{8}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{(3x)^n}{n!} - \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{(3x)^n}{n!} + 3\left(\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^n}{n!} - \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}\right)\right) = \frac{1}{8}\sum_{n\geq 0}\frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$-$\frac{3}{8}\sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ de rayon $+\infty$.

**Exercice 33** Trouver les rayons de convergence et les sommes de

$$\sum_{n\geq 0}\mathrm{ch}(na)z^n, \quad \sum_{n\geq 0}\frac{\sin(na)}{n!}z^n, \quad \sum_{n\geq 1}\frac{n^2+1}{n(n+2)}z^n.$$

[Ind] D'Alembert, majorer, D'Alembert.

[Dem] $\sum_{n\geq 0}ch(na)x^n$ en supposant $a \geq 0$ on a $\frac{ch((n+1)a)}{ch(na)} = \frac{e^{(n+1)a}+e^{-(n+1)a}}{2}\frac{2}{e^{na}+e^{-na}} = \frac{e^{(n+1)a}+e^{-(n+1)a}}{e^{na}+e^{-na}}$ et $\frac{1}{R} = \lim\frac{e^{(n+1)a}}{e^{na}} = e^a$ et le rayon de convergence $r = e^{-a}$.

Pour la somme reconnaissons des séries géométriques : $\sum_{n\geq 0}ch(na)x^n = \frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 0}(\mathrm{e}^a x)^n + \sum_{n\geq 0}(e^{-a}x)^n\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^a x} + \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-a}x}\right)$.

On peut faire le calcul avec D'Alembert ou écrire $\left|\frac{\sin(n\alpha)}{n!}x^n\right| \leq \frac{x^n}{n!}$ cette dernière série a un rayon infini donc $R = +\infty$.

Pour la somme : $\sum_{n\geq 0}\frac{\sin na}{n!}x^n = \frac{1}{2i}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{(\mathrm{e}^{ia}x)^n}{n!} - \sum_{n\geq 0}\frac{(e^{-ia}x)^n}{n!}\right) = \frac{1}{2i}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{ia}x} - \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-ia}x}\right)$.

La règle de D'Alembert donne pour $\sum_{n\geq 1}\frac{n^2+1}{n(n+2)}x^n$ un rayon 1.

Pour la somme on écrit : $\frac{n^2+1}{n^2+2n} = 1+\frac{1}{2}\frac{1}{n}-\frac{5}{2}\frac{1}{n+2}$ ce qui donne $\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2}\ln(1-x)+\frac{1}{x^2}(\ln(1-x)+1+x)$.

**Exercice 34** Déterminer une solution développable en série entière en 0 dans les cas suivants:
a) $y'' + 2xy' + 2y = 0$ avec $y'(0) = 0$.
b) $xy'' + y' + xy = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. Montrer alors que $y = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \cos(x \sin t)dt$.

[Ind] Appliquer la méthode du cours. Reconnaître une série entière.

[Dem] En posant $y = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ l'équation donne : $\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2\sum_{n\geq 0} na_n x^n + 2\sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} \left((n+2)(n+1)a_{n+2} + 2(n+1)a_n\right) x^n$ d'où la relation : $\forall n \geq 0$ : $a_{n+2=-}\dfrac{2}{n+2}a_n$. Il existe bien une solution développable en série entière de rayon de convergence 1. La condition $y'(0) = 0$ donne $a_1 = 0$ puis $a_{2n+1} = 0$. Pour les termes pairs on a $a_{2n} = (-1)^n \dfrac{1}{n!}a_0$ ce qui donne pour $y = a_0 \sum_{n\geq 0} \dfrac{(-x^2)^n}{n!} = \mathrm{e}^{-x^2}$. On vérifie effectivement que $\mathrm{e}^{-x^2}$ est solution
En posant $y = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ l'équation donne $\sum_{n\geq 0}(n+1)^2 a_{n+1}x^n + \sum_{n\geq 1} a_{n-1}x^n = 0$. Soit $a_1 = 0$ et pour $n$ supérieur à 1 : $a_{n+2} = \dfrac{-1}{(n+2)^2}a_n$. Ainsi les termes impairs sont nuls et les termes pair valent : $a_{2n} = \dfrac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}$. Le rayon de convergence est 1. Maintenant partons de $f(x) = \frac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \cos(x\sin t)dt = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \sum_{n\geq 0}(-1)^n \dfrac{x^{2n}\sin^{2n} t}{(2n)!}dt$ la série ayant un rayon de convergence infini est normalement convergente sur un compact et on peut intervertir d'où :$f(x) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \sin^{2n} t dt$. On reconnait les intégrales de Wallis $\displaystyle\int_0^\pi \sin^{2n} t dt = \dfrac{(2n)!\pi}{2^{2n}(n!)^2}$ et en remplacant on trouve $f(x) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \dfrac{1}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n} = y$.

**Exercice 35** Soit $(a_n)$ une suite de réels strictement positifs telle que $\sum a_n x^n$ ait un rayon de convergence infini. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la somme de la série est équivalente au reste $R_p(x) = \sum_{n\geq p+1} a_n x^n$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

[Ind] Difficile manier les epsilons.

[Dem] On écrit $S(x) = \sum_{n=0}^{p} a_n x^n + \sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n x^n \left(1 + \dfrac{\sum_{n=0}^{p} a_n x^n}{\sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n x^n}\right)$ cette dernière expression $\dfrac{\sum_{n=0}^{p} a_n x^n}{\sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n x^n} \sim \dfrac{a_p x^p}{\sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n x^n}$ qui tend vers 0 car $\dfrac{a_p x^p}{\sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n x^n} \leq a_p \dfrac{x^p}{x^{p+1}} = \dfrac{a_p}{x^p}$, au voisinage de $+\infty$.

**Exercice 36** Montrer que :

$$\forall x \in [-1,1] \quad \int_0^1 \frac{1-t}{1-xt^3}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)}.$$

En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$.

[Ind] Développer la fraction rationnelle puis intégrer, calculer l'intgrale pour $x = 1$.

[Dem] Nous allons montrer que le reste tend vers 0. En effet $\left|\int_0^1 (1-t)\sum_{n=N+1}^{+\infty}(xt^3)^n dt\right| = \left|\int_0^1 \frac{(1-t)(xt^3)^{N+1}}{1-xt^3}dt\right| \geq$ $\int_0^1 \frac{(1-t)t^{3N+3}}{1-t^3}dt = \int_0^1 \frac{t^{3N+3}}{1+t+t^2}dt \geq \int_0^1 t^{3N+3}dt = \frac{1}{3N+4}$ qui tend bien vers 0 quand $N$ tend vers $+\infty$. Ainsi $\int_0^1 \frac{1-t}{1-xt^3}dt = \int_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 (1-t)x^n t^{3n}dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)}x^n$.

Par suite $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)} = \int_0^1 \frac{1-t}{1-t^3}dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

**Exercice 37** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangularisable. Quel est le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum \operatorname{tr}(A^n)x^n$ ?

[Ind] On sait exprimer la trace de $A^n$ à l'aide des valeurs propres. On en déduit le rayon de convergence. Penser à la dérivée logarithmique du polynôme caractéristique.

[Dem] Si $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de $A$ on a que $\operatorname{tr}(A^n) = \sum_{k=1}^{p}\lambda_k^n$. On a donc $p$ séries entières $\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda_k^n x^n = \frac{1}{1-\lambda_k x}$ de rayon de convergence $\frac{1}{|\lambda_k|}$. La série $\sum \operatorname{tr}(A^n)x^n$ a pour rayon de convergence $\frac{1}{max(\lambda_1, \cdots, \lambda_p}$ et sa somme est $\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{1-\lambda_k x}$. D'autre part on a $\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{x-\lambda_k}$ où $P$ est le polynôme caractéristique de $A$. Ce qui permet d'écrire que $\sum_{n=0}^{+\infty}\operatorname{tr}(A^n)x^n = \frac{P'(\frac{1}{x})}{xP(\frac{1}{x})}$ si $x \neq 0$.

**Exercice 38** Quel est le domaine de convergence des séries entières suivantes? Calculer leur somme.
a) $A(x) = \sum_{n\geq 2}\frac{x^n}{n(n-1)}$ ; b) $B(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{3n}{n+2}x^n$ ; c) $C(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{n^2+n-1}{n!}x^n$ ; d) $D(x) = \sum_{n\geq 1}\frac{2n+2}{n(n+2)}x^n$ ; e) $E(x) = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}$ ; f) $F(x) = \sum_{n\geq 1}n(n+1)x^n$ ; g) $G(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$.

[Dem] Pour toutes ces séries de fonctions on pose $\Lambda(x) = \sum_{n\geq 0}u_n(x)$.

- $A(x) = \sum_{n\geq 2}\frac{x^n}{n(n-1)}$ donne $\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = |x|\frac{n-1}{n+1} \to |x|$ et donc d'après D'Alembert, on a
  si $|x| < 1$ la série de terme général $|u_n(x)|$ converge et la série est abscv
  si $|x| > 1$ le terme général ne tend pas vers zéro et la série diverge
  le rayon $R = 1$. Dans l'intervalle ouvert de convergence on peut alors dériver termes à termes : $A'(x) = \sum_{n\geq 2}\frac{x^{n-1}}{n-1} = \sum_{i\geq 1}\frac{x^i}{i} = -\ln(1-x)$ et $A(x) = A(0) - \int_0^x \ln(1-t)\,dt = x + (1-x)\ln(1-x)$.

- $B(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{3n}{n+2}x^n$ on a $\lim_{n\to+\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{(n+3)n}|x| = |x|$ et $R = 1$. Pour le calcul $\sum_{n\geq 0}\frac{3n}{n+2}x^n = \sum_{n\geq 0}\frac{3(n+2)-6}{n+2}x^n = \sum_{n\geq 0}3x^n - \frac{6}{x^2}\sum_{n\geq 0}\frac{x^{n+2}}{n+2} = 3\frac{1}{1-x} - \frac{6}{x^2}\left(\sum_{i\geq 1}\frac{x^i}{i} - x\right) = \frac{3}{1-x} - \frac{6}{x^2}(-\ln(1-x) - x)$. On peut scinder en deux la série entière car les deux séries sont convergentes.

- $C(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{n^2+n-1}{n!} x^n$ on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = 0$ et $R = +\infty$. En écrivant $n^2 + n - 1 = n(n-1) + 2n - 1$ on obtient $C(x) = \sum_{n\geq 2} \frac{n(n-1)x^n}{n!} + 2\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n!} x^n - \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ chacune des séries convergent avec un rayon infini et $C(x) = x^2 \sum_{n\geq 2} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + 2x \sum_{n\geq 1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{x^i}{i!} \left(x^2 + 2x - 1\right) = e^x \left(x^2 + 2x - 1\right);$
- $\mathrm{D}(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{2n+2}{n(n+2)} x^n$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+2)^2}{(n+1)^2(n+3)} |x| = |x|$ et $R = 1$. d'autre part $\frac{2n+2}{n(n+2)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+2}$ et $D(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} + \frac{1}{x^2} \sum_{n\geq 1} \frac{x^{n+2}}{n+2}$ séries de rayon de convergene 1 et $D(x) = -\ln(1-x) + \frac{1}{x^2}\left(\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} - x - \frac{x^2}{2}\right) = -\ln(1-x) - \frac{1}{x^2}\left(\ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2}\right).$
- $E(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}$ et $\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \left|x^2\right| \frac{2n-1}{2n+3} \to \left|x^2\right|$ et $R = 1$. Ensuite $\frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$ et $E(x) = \frac{x^2}{2} \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2n-1} - \frac{1}{2} \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = -\frac{x^2}{2} \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{1}{2} \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$. Or si $h(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ de rayon 1 alors $h'(x) = \sum_{n\geq 0} \left(-x^2\right)^n = \frac{1}{1+x^2}$ et $h(x) = h(0) + \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = Arc\tan x$ et $E(x) = -\frac{x^2}{2} Arc\tan x - \frac{1}{2}(Arc\tan x - x)$.
- $F(x) = \sum_{n\geq 1} n(n+1) x^n$ de rayon de convergence 1 et si $G(x) = \sum_{n\geq 1} n x^{n+1}$ de rayon 1 et $G'(x) = F(x)$. Or $G(x) = x^2 \sum_{n\geq 1} n x^{n-1} = x^2 \left(\sum_{n\geq 0} x^n\right)' = x^2 \left(\frac{1}{1-x}\right)'$ et $G(x) = \frac{x^2}{(1-x)^2}$ soit $F(x) = G'(x) = \frac{2x}{(1-x)^3}$.
- $G(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ et $R = +\infty$ car $\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = |x|^3 \frac{1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \to 0$ on peut donc dériver termes à termes et $G'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}$; $G''(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}$ et $G'''(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^{3(n-1)}}{3(n-1)!} = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = G(x)$. Ainsi $G$ est solution de l'équation différentielle homogène de degré 3 : $y = y'''$ dont l'ensemble des solutions est un espace vectoriel est de dimension 3. Les conditions sont $y(0) = 1, y'(0) = y''(0) = 0$ on cherche $y$ sous la forme $e^{\alpha x}$ et $\alpha^3 = 1$ par suite $y(x) = \lambda e^x + \mu e^{jx} + \nu e^{j^2 x}$ les conditions initiales donnet $\begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 1 \\ \lambda + \mu j + \nu j^2 = 0 \\ \lambda + \mu j^2 + \nu j = 0 \end{cases}$ et $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ convient. $G(x) = \frac{1}{3}\left(e^x + e^{jx} + e^{j^2 x}\right) = \frac{1}{3}\left(e^x + 2e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x\right)$.

  Il y a ici deux méthodes intégrer et dériver puis résoudre une équadif.

**Exercice 39** Considèrons l'équation différentielle suivante :

$$(\mathrm{E})\ x(x^2+1)y'' + (x^2-1)y' = 1$$

a) Chercher une solution de (E) développable en série entière. Quel est le rayon de convergence de cette série. (Poser $y = \sum a_n x^n$ et trouver une relation entre les $a_n$).
b) Résoudre l'équation (E).

[Dem] On cherche à priori $y(x)$ sous la forme $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ on a donc $y'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ et $y''(x) = \sum_{n\geq 2} n(n-1)x^{n-2}$ l'équation E donne $\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n+1} + \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n+1} - \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} = 1$ et par unicité des développements en séries entières, on peut identifier les coefficients de $x^p$ dans les deux membres de l'égalité.

$$\begin{array}{l} x^0 : -a_1 = 1 \\ x^1 : 2a_2 - 2a_2 = 0 \\ x^2 : 6a_3 + a_1 - 3a_3 = 0 \\ x^P : p \geq 2, (p-1)(p-2)a_{p-1} + (p+1)pa_{p+1} + (p-1)a_{p-1} - (p+1)a_{p+1} = 0 \end{array}$$

ou $(p-1)((p-1)a_{p-1} + (p+1)a_{p+1}) = 0$ ou $(p-1)a_{p-1} + (p+1)a_{p+1} = 0$ car $p \neq 0$ et cette relation est encore vraie pour $p = 2$. D'où pour tout $p \geq 2, (p+1)a_{p+1} = -(p-1)a_{p-1}$ ou $a_{2p}$ (resp.$a_{2p+1}$) est multiple de $a_0$ (resp.$a_1$). Comme on cherche une solution on peut imposer $a_0 = 0$ et $a_{2p} = 0$. Par suite $(2p+1)a_{2p+1} = -(2p-1)a_{2p-1} = \cdots = (-1)^p a_1 = (-1)^{p+1}$ et $y(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{p+1}}{2p+1} x^{2p+1} = -Arc\tan x$. Il s'agit d'une série entière de rayon 1. Réciproquement $-Arc\tan x$ vérifie bien $(E)$.

Le coefficient de $y''$ s'annule en 0 on résoudra sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. On a $\frac{y''}{y} = \frac{1}{x} - \frac{2x}{1+x^2}$ ou $\ln|y'| = C^{ste} + \ln\left|\frac{x}{1+x^2}\right|$ soit $y' = \lambda\frac{2x}{1+x^2}$ et $y(x) = \lambda\ln\left(1+x^2\right) + \mu$. Les solutions de $(E)$ sont données par $y(x) = -Arc\tan x + \lambda\ln\left(1+x^2\right) + \mu$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ en fait elles sont prlongeables sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 40** Rayon de convergence des séries entières de terme général :

$$\exp(-shn)z^n; n!z^{n^2}; \text{et } n^{\sqrt{n}}z^{2n}$$

[Dem]

Nous avons $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = e^{shn - sh(n+1)}$ et $shn - sh(n+1) = \frac{e^n - e^{-n}}{2} - \frac{e^{n+1} - e^{-(n+1)}}{2} = \frac{e^n - e^{n+1}}{2} + \frac{-e^{-n} + e^{-(n+1)}}{2} = \overset{\to -\infty}{\overbrace{\frac{e^n}{2}\overset{<0}{(1-e)}}} + \overset{\to 0}{\frac{e^{-(n+1)} - e^{-n}}{2}}$ et $R = +\infty$.

soit $u_n(z) = n!z^{n^2}$ on a $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{(n+1)!\,|z|^{(n+1)^2}}{n!\left|z^{n^2}\right|} = (n+1)|z|^{2n+1}$ si $|z| < 1$ la série converge et si $|z| > 1$ la série diverge le rayon de convergence est $R = 1$.

De même $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{(n+1)^{\sqrt{n+1}}}{n^{\sqrt{n}}}|z|^2$. Développons $\frac{(n+1)^{\sqrt{n+1}}}{n^{\sqrt{n}}} = e^{\sqrt{n+1}\ln(n+1) - \sqrt{n}\ln n}$ et $\sqrt{n+1}\ln(n+1) - \sqrt{n}\ln n = \sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\ln n\left(1+\frac{1}{n}\right) - \sqrt{n}\ln n$

$= \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\ln n + \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) - \sqrt{n}\ln n \sim \sqrt{n}$ et $R = 0$.

**Exercice 41** Trouver le développement en série entière de :
a) $f(x) = (2x+1)\ln(1+x)$ ; b) $f(x) = \cos^2 x$ ; c)$f(x) = sh^3 x$

[Dem] Partant de $\ln(1+x) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ de rayon de convergence 1 on a $f(x) = (2x+1)\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = 2\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n} + \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = x + \sum_{n\geq 2}\left(\frac{2(-1)^n}{n-1} - \frac{(-1)^n}{n}\right)x^n$.

$f(x) = \cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{2n!}$ de rayon $R = +\infty$

En écrivant $f(x) = sh^3(x) = \left(\frac{e^x - e^x}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3x} + 3e^{-x} - 3e^x - e^{-3x}\right)$ on trouve $\frac{1}{8}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{(3x)^n}{n!} - \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{(3x)^n}{n!} + 3\left(\sum_{n\geq 0}(-1\right.\right.$

$\frac{1}{8}\sum_{n\geq 0}\frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{3}{8}\sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ de rayon $+\infty$.

**Exercice 42** Rayon de convergence et somme de :
a) $\sum_{n\geq 0} ch(na)x^n$ ; b) $\sum_{n\geq 0} \frac{\sin(n\alpha)}{n!}x^n$ ; c) $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2+1}{n(n+2)}x^n$

[Dem] $\sum_{n\geq 0} ch(na)x^n$ en supposant $a \geq 0$ on a $\frac{ch\left((n+1)\,a\right)}{ch\,(na)} = \frac{e^{(n+1)a}+e^{-(n+1)a}}{2}\frac{2}{e^{na}+e^{-na}} = \frac{e^{(n+1)a}+e^{-(n+1)a}}{e^{na}+e^{-na}}$ et $\frac{1}{R} = \lim \frac{e^{(n+1)a}}{e^{na}} = e^a$ et le rayon de convergence $r = e^{-a}$.
On peut faire le calcul avec D'Alembert ou écrire $\left|\frac{\sin\,(n\alpha)}{n!}x^n\right| \leq \frac{x^n}{n!}$ cette dernière série a un rayon infini donc $R = +\infty$.
La règle de D'Alembert donne pour $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2+1}{n(n+2)}x^n$ un rayon 1.

**Exercice 43** Discuter dans $\mathbb{C}$ , l'équation $\tan z = z$.

[Dem] Posons $z = x+iy$ on a $x+iy = \frac{\tan x + ithy}{1-i\tan xthy}$ ou $(x+iy)\,(1-i\tan xthy) = \tan x + ithy$ ou $\left\{\begin{array}{l} x + y\tan xthy = \tan x \\ y - x\tan xthy = thy \end{array}\right.$ ou $\left\{\begin{array}{l} x = \tan x\,(1-ythy) \\ y = thy\,(1+\tan x) \end{array}\right.$ En supposant $y \neq 0$ ce qui donne $thy \neq 0$ et $\tan x \neq 0$ car par la deuxième si $\tan x = 0$ alors $y = thy = 0$ on a $\frac{x}{\tan x} + ythy = 1 = \frac{y}{thy} - x\tan x$ ce qui donne $x\left(\tan x + \frac{1}{\tan x}\right) = y\left(\frac{1}{thy} - thy\right)$ ou $\frac{2x}{\sin 2x} = \frac{2y}{sh2y}$. Ceci est impossible car $\frac{\sin t}{t} < 1 < \frac{shu}{u}$.
En effet il suffit d'étudier pour $x > 0$ la fonction $x \mapsto \sin x - x$ et $x \mapsto shx - x$ puis utiliser la parité. On a donc $y = 0$ et toutes les solutions sont réelles et vérifient $\tan x = x$ il y a une seule solutions dans $\left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$ avec $n \in \mathbb{Z}$

**Exercice 44** Montrer que la série entière $\sum z^n \sin na$ et $\sum z^n \cos na$ $(a \in \mathbb{R})$ divergent en tout point de leur cercle de convergence. Déterminer leur somme.

[Dem] Si $|z| < 1$ alors la série converge et si $|z| \geq 1$ alors le terme général ne tend pas vers 0. En effet si $|z| = 1$ on pose $z = e^{i\alpha}$ et $|z^n \cos na| = |\cos na|$ qui ne tend pas vers 0. Pour ce résultat on dit que si $(\cos na)$ a ule limite $\ell$ alors $(\sin na)$ en aurait une $m$ par la formule $\cos\,(n+1)\,a = \cos na \cos a - \sin na \sin a$ et $(\sin 2na)$ aurait pour limite $\ell$ la relation $\cos^2 na + \sin^2 na = 1$ et $\sin 2na = 2\sin na \cos na$ donne la contradiction. Pour le calcul de la somme on a $S = iT = \sum_{n\geq 0} \left(ze^{ia}\right)^n = \frac{1}{1-ze^{ia}}$ et puis on sépare les parties réelles et imaginaires.

**Exercice 45** Soit $(a_n)$ une suite de nombres positifs strictement telle que $\sum a_n z^n$ ait un rayon de convergence infini. Montrer que, pour tout $p \in N$, la somme de la série est équivalente au reste $R_p(x) = \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n x^n$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

[Dem] On écrit $S\,(x) = \sum_{n=0}^{p} a_n x^n + \sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n x^n \left(1 + \frac{\sum_{n=0}^{p} a_n x^n}{\sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n x^n}\right)$ cette dernière expression $\frac{\sum_{n=0}^{p} a_n x^n}{\sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n x^n} \sim \frac{a_p x^p}{\sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n x^n}$ qui tend vers 0 car $\frac{a_p x^p}{\sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n x^n} \leq a_p \frac{x^p}{x^{p+1}} = \frac{a_p}{x^p}$, au voisinage de $+\infty$.

**Exercice 46** Déterminer les rayons de convergence des séries entières :
1) $\sum_{n\geq 0} z^n \tan \frac{n\pi}{7}$ ; 2) $\sum_{p\geq 0} u_p z^p$ avec $u_{2n} = a^{2n}$, $u_{2n+1} = b^{2n+1}$ et $0 < a < b$.

[Dem] Pour $n$ entier $\left|\tan \frac{n\pi}{7}\right|$ prend 4 valeurs différentes : $0, \tan \frac{\pi}{7}, \tan \frac{2\pi}{7}, \tan \frac{3\pi}{7}$ et pour tout $n$ on a : $\left|z^n \tan \frac{n\pi}{7}\right| \leq r^n \tan \frac{3\pi}{7}$. Or pour tout $r$ de $[0, 1[$ : la série converge donc le rayon de convergence $\rho \geq 1$. Si $|z| \geq 1$ alors la suite $n \mapsto r^{7n+3} \tan \frac{(7n+3)\pi}{7} = r^{7n+3} \tan \frac{3\pi}{7}$ est constante pour $r = 1$ et tend vers $\infty$ pour $r > 1$ donc ne tend pas vers 0, et comme c'est une suite extraite de $\left(r^n \tan \frac{n\pi}{7}\right)$ cette suite ne tend pas vers 0 et donc $\rho = 1$. En fait il y a divergence sur tout le bord du disque.
On a $u_{2n}r^{2n} = (ar)^{2n}$ et $\lim\limits_{+\infty} u_{2n}r^{2n} = 0 \Leftrightarrow 0 \leq r \leq \frac{1}{a}$ tandis que $u_{2n+1}r^{2n+1} = (br)^{2n+1}$ donne $\lim\limits_{+\infty} u_{2n+1}r^{2n+1} = 0 \Leftrightarrow 0 \leq r \leq \frac{1}{b}$. Par ailleurs $\lim u_n r^n = 0 \Leftrightarrow \left(\lim u_{2n}r^{2n} = 0 \text{ et } \lim u_{2n+1}r^{2n+1} = 0\right)$ on a donc $\rho = \frac{1}{b}$.

**Exercice 47** Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle, comparer les rayons de convergence de $\sum a_n z^n$ et $\sum a_n^2 z^n$.

[Dem] Soit $R_1 = \sup\left\{|z| \,;\, \lim\limits_{n\to+\infty} a_n z^n = 0\right\}$ et $R_2 = \sup\left\{|z| \,;\, \lim\limits_{n\to+\infty} a_n z^n = 0\right\}$ on a si $|z| < R_1$ alors $\lim a_n z^n = 0$ et donc $\lim a_n^2 z^{2n} = 0$ d'où $\left|z^2\right| \leq R_2$ soit $R_1^2 \leq R_2$. D'autre part si $|z| < R_2$ alors $\lim a_n^2 z^n = 0$ et en posant $z = u^2$ on a $\lim a_n^2 u^{2n} = 0$ et $\lim a_n u^n = 0$ ce qui donne $|z| = |u|^2 \leq R_1^2$ ou $R_2 \leq R_1^2$ on a donc $R_2 = R_1^2$.

**Exercice 48** Développement en série entière de :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \longmapsto \int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{1+t^2+t^4}$$

[Dem] L'intégrale est bien convergente et $f(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt + \int_{-\infty}^0 \varphi(t)\,dt$ avec $\varphi(t) = \frac{1}{1+t^2+t^4}$ ainsi $f$ est bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{1}{1+x^2+x^4} = \frac{1-x^2}{1-x^6}$. Pour $|x| < 1$ on a $\frac{1}{1-x^6} = \sum_{n\geq 0} x^{6n}$ et $f'(x) = \sum_{n\geq 0} x^{6n} - x^{6n+2}$. Ainsi $f$ est développable en série entière avec un rayon de 1. Calculons $f(0) = \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+t^2+t^4} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{1+t^2+t^4}dt$ avec le changement $u = \frac{1}{t}$. Puis $f(0) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1-t+t^2} + \frac{1}{1+t+t^2}\right)dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\frac{1}{2}+\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{\frac{1}{2}+\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$ par le cangement $u = -t$ ainsi $f(0) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{\frac{1}{2}+\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2}\left[\arctan\left(t\sqrt{2}-1\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \pi\sqrt{2}$ et $f(x) = \pi\sqrt{2} + \sum_{n\geq 0} \frac{x^{6n+1}}{6n+1} - \frac{x^{6n+3}}{6n+3}$.

**Exercice 49** Développement en série entière de $x \longmapsto f(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{1+x^2}\right)$. Comportement de la série aux bornes de l'intervalle de convergence.

[Dem] $f$ est bien définie si $|x| < 1$ on a $f(x) = \ln \frac{1-x^3}{1-x} - \ln\left(1+x^2\right) = \sum_{n\geq 1} -\frac{x^{3n}}{n} + \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} + \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{x^n}{n}$ ou $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{6n+1}}{6n+1} + \frac{1+2(-1)^{n+1}}{6n+2}x^{6n+2} - \frac{2}{6n+3}x^{6n+3} + \frac{1+2(-1)^n}{6n+4}x^{6n+4} + \frac{x^{6n+5}}{6n+5} - \frac{1+(-1)^n}{3n+3}x^{6n+6}$ de rayon de convergence 1. En posant $f(x) = \sum_{n\geq 1} a_n x^n$ pour $|x| < 1$ et $b_n = \sum_{k=1}^{6} a_{6n+k}$

et $c_n = \sum_{k=1}^{6} (-1)^k a_{6n+k}$ on a $b_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{3n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $c_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{3n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Or $\lim\limits_{+\infty} a_n = 0$ et donc $\sum b_n$ et $\sum c_n$ converge ce qui donne par groupement des termes dans une série absolument convergente $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} (-1)^n a_n$ convergent et $f(1) = \ln \dfrac{3}{2}$ et $f(-1) = -\ln 2$.

**Exercice 50** Développement en série entière de $f(x) = e^{-x} \sin x$.

[Dem] On pose $f(x) = Im\left(e^{(-1+i)x}\right) = Im\left(\sum\limits_{n\geq 0} (-1+i)^n \dfrac{x^n}{n!}\right)$ de rayon de convergence $+\infty$. En écrivant $-1+i = \sqrt{2}e^{3i\frac{\pi}{4}}$ on a $(-1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}} e^{3ni\frac{\pi}{4}}$ et $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} 2^{\frac{n}{2}} \sin\left(\dfrac{3n\pi}{4}\right) \dfrac{x^n}{n!}$.

**Exercice 51** Développemnt en série entière de $f(x) = \left(1+x^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} \cos(\alpha \arctan x)$.

[Dem] Nous cherchons une équation différentielle, posons $t = \arctan x$ ou $x = \tan t, t \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$ et $y = f(x) = \dfrac{\cos(\alpha t)}{(\cos t)^{\alpha}}$. On a $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{\cos^2 t}; \dfrac{dy}{dx} = \alpha \dfrac{\sin(1-\alpha)t}{(\cos t)^{\alpha-1}}$ ce qui donne $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \alpha(1-\alpha)\dfrac{\cos(2-\alpha)t}{\cos^{\alpha-2} t}$ et $\dfrac{1}{\cos^2 t}\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{\sin t}{\cos t}\dfrac{dy}{dx}(1-\alpha) = \alpha(1-\alpha)\dfrac{\cos \alpha t}{(\cos t)^{\alpha}}$. Ainsi $f$ est slution de $\begin{cases} \left(1+x^2\right)y'' + 2(1-\alpha)xy' - \alpha(1-\alpha)y = 0 \\ f(0) = 1; f'(0) = 0 \end{cases}$.
Posons $y = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ en remplaçant on obtient $\left(1+x^2\right)\sum\limits_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2(\alpha-1)\sum\limits_{n\geq 0} n a_n x^n + \alpha(\alpha-1)\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n = 0$ ou $\sum\limits_{n\geq 0}\left((n+2)(n+1)a_{n+2} + (n-\alpha)(n-\alpha+1)a_n\right)x^n = 0$ ce qui donne $a_0 = 1, a_1 = 0, a_{2n+1} = 0$ et $a_{2n} = (-1)^n \dfrac{\alpha(1-\alpha)\cdots(2n-1-\alpha)}{(2n)!}$ ceci permet de calculer le rayon de convergence $\lim\limits_{+\infty}\left|\dfrac{a_{2n+2}}{a_{2n}}\right| = 1$ soit $R = 1$ et pour tout $x$ de $]-1,+1[$ on a $f(x) = 1 + \sum\limits_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \dfrac{\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots(2n-1-\alpha)}{(2n)!} x$

**Exercice 52** Déterminer la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par $u_0 = 1$, et pour tout $n \geq 0, u_{n+1} = \sum\limits_{p=0}^{n} u_p u_{n-p}$.

[Dem] Posons $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} u_n x^n$ avec un certain rayon de convergence $R$. On a $f^2(x) = \sum\limits_{n\geq 0}\left(\sum\limits_{p=0}^{n} u_p u_{n-p}\right)x^n = \sum\limits_{n\geq 0} u_{n+1}x^n$ donc $xf^2(x) - f(x) + 1 = 0$ ce qui donne en dehors de $0$ : $f(x) = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$. La continuité de $f$ en $0$ donne $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ avec $f(0) = 0$. Nous pouvons alors développer $f$ en série entière pour $|x| < \frac{1}{4}$ : $(1-4x)^{\frac{1}{2}} = 1 - 2\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{(2n-2)!}{(n-1)!n!}x^n$ et $f(x) = \sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{(2n-2)!}{(n-1)!n!}x^{n-1} = \sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!}x^n$. On a donc $R = \frac{1}{4}$ et $xf^2(x) - f(x) + 1 = 0$. Nous posons $u_n = \dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ avec $u_0 = f(0) = 1$ et $u_{n+1} = \sum\limits_{p=0}^{n} u_p u_{n-p}$.

**Exercice 53** On pose $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$, $x \in \mathbb{R}$, déterminer l'ensemble de définition de $f$ et exprimer $f$ au moyen des fonctions usuelles.

[Dem] On a $0 \leq \dfrac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)} \leq \dfrac{1}{2n^3}$ si $|x| \leq 1$ le rayon est donc $R = 1$. D'autre part $\dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{4}{2n+1}$ ceci permet de calculer $f(x) = 3x^2 - (1-x)^2 \ln(1-x) -$

$(1+x)^2\ln(1=x)$ et $f(1)=\lim\limits_{x<1} f = 3-4\ln 2$ et par parité $f(-1)=f(1)$.

**Exercice 54** Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4n+1}$.

[Dem] Soit $u_n = \dfrac{(-1)^n}{4n+1}$ on a $|u_n| = \dfrac{1}{4n+1}$ qui décroit vers 0. La série est bien convergente. Soit $\delta_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{4k+1}$ dont la limite est $\delta$, somme de la série. Ecrivons $\delta = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^n\int_0^1 t^{4k}dt = \int_0^1\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^{4k}dt = \int_0^1 \frac{1-(-1)^n t^{4n}}{1+t^4}dt$ ainsi $\delta_n - \displaystyle\int_0^1\frac{dt}{1+t^4} = (-1)^n\int_0^1\frac{t^{4n}}{1+t^4}dt$. En valeur absolue : $\left|\delta_n - \displaystyle\int_0^1\frac{dt}{1+t^4}\right| \le \int_0^1 t^{4n}dt = \frac{1}{4n+1}\to 0$. Un calcul simple donne $\delta = \displaystyle\int_0^1\frac{dt}{1+t^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$.

**Exercice 55** Développer en série entière les fonctions :

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x\sin a}{1-x\sin a}\right)\ ;\ \text{puis}\ g(x) = (\arcsin x)^2$$

[Dem]

- En remarquant que $f'(x) = \dfrac{\sin a}{(1-x\sin a)^2+x^2\sin^2 a}$ on supposera $a\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$ et $f'(x) = \dfrac{\sin a}{\left(1-x\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\sin a\right)\left(1-x\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\sin a\right)} = \dfrac{\frac{1+i}{2i}\sin a}{1-x\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\sin a} - \dfrac{\frac{1-i}{2i}\sin a}{1-x\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\sin a}$. Or nous savons que $\dfrac{1}{1-\lambda x} = \displaystyle\sum_{n\ge 0}\lambda^n x^n$ dès que $|x| < \dfrac{1}{|\lambda|}$ d'où si $|x| < \dfrac{1}{\left|\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\sin a\right|} = \dfrac{1}{\left|\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\sin a\right|} = R_a$.
  Ainsi $f'(x) = \dfrac{1+i}{2i}\displaystyle\sum_{n\ge 0}\left(x\sqrt{2}\sin a\right)^n e^{i\frac{\pi}{4}}\sin a - \frac{1-i}{2i}\sin a\sum_{n\ge 0}\left(x\sqrt{2}\sin a e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n =$
  $f'(x) = \displaystyle\sum_{n\ge 0}x^n\left(\sqrt{2}\sin a\right)^{n+2}\frac{e^{i\frac{\pi}{4}(n+1)}-e^{-i\frac{\pi}{4}(n+1)}}{2i} = \sum_{n\ge 0}x^n\left(\sqrt{2}\sin a\right)^{n+1}\sin\frac{\pi(n+1)}{4}$. Comme il s'agit d'une série entière on peut intégrer termes à termes tant que $|x| < R_a$. Ainsi $f(x) - f(0) = \displaystyle\sum_{n\ge 0}\frac{\left(x\sqrt{2}\sin a\right)^{n+1}}{n+1}\sin\frac{\pi(n+1)}{4}$ et $f(x) = f(0)+\displaystyle\sum_{n\ge 1}\frac{\left(x\sqrt{2}\sin a\right)^n}{n}\sin\frac{\pi n}{4}$ valable pour $|x| < R_a = \dfrac{1}{\sqrt{2}\,|\sin a|}$ qui est bien le rayon de convergence de la série trouvée.
- Pour $g(x) = (\arcsin x)^2$ on a $g'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x$ et $g''(x) = \dfrac{2}{(1-x^2)}+\dfrac{2x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Nous trouvons une équation différentielle $(E)$ : $\left(1-x^2\right)y''-xy' = 2$ avec $y(0) = y'(0) = 0$. On pose $y(x) = \displaystyle\sum_{n\ge 0}a_n x^n$ et en remplaçant $\left(1-x^2\right)\displaystyle\sum_{n\ge 2}n(n-1)a_n x^{n-2} - x\sum_{n\ge 1}na_n x^{n-1} = \sum_{n\ge 2}n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n\ge 2}n(n-1)a_n x^n - \sum_{n\ge 2}na_n x^n = 2$. D'où $2a_0 = 2, 6a_3 = 0$ et pour $p\ge 2$ : $(p+2)(p+1)a_{p+2}-p^2a_p = 0$ en fait pour $p\ge 1$ : $(p+2)(p+1)a_{p+2} = p^2 a_p$. On a $a_{2p+1} = 0$ et $a_{2p} = \dfrac{2^{2p}\left((p-1)!\right)^2}{2(2p)!}a_2$ et $y(x) = \displaystyle\sum_{p\ge 1}\frac{2^{2p}\left((p-1)!\right)^2}{2(2p)!}x^{2p}$. Cette solution convient et par unicité $g(x) = \displaystyle\sum_{p\ge 1}\frac{2^{2p}\left((p-1)!\right)^2}{2(2p)!}x^{2p}$ le rayon de convergence est $\left|\dfrac{u_{p+1}(x)}{u_p(x)}\right| = \left|x^2\right|\dfrac{a_{2p+2}}{a_{2p}} = \dfrac{4p^2}{(2p+2)(2p+1)}|x|^2\to|x|^2$ et $R=1$.

**Exercice 56** Soit $n$ un entier naturel donné, en utilisant le développemnt en série entière de $f(x)=\dfrac{1}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^5)}$, trouver le nombre de triplets $(a,b,c)\in\mathbb{N}^3$ tels que $2a+3b+5c=n$.

[Dem] $f(x)=\sum_{n\geq 0}a_nx^n=\left(\sum_{n\geq 0}x^{2n}\right)\left(\sum_{n\geq 0}x^{3n}\right)\left(\sum_{n\geq 0}x^{5n}\right)=\sum_{n\geq 0}\sigma(n)x^n$ où $\sigma(n)$ est le nombre de triplets $(a,b,c)$ d'entiers tels que $2a+3b+5c=n$. Or $1=\left(1-x^2\right)\left(1-x^3\right)\left(1-x^5\right)\sum_{n\geq 0}a_nx^n$, ou $1=\sum_{n\geq 0}a_nx^n\left(1-x^2-x^3+x^7+x^8-x^{10}\right)$ et $1=\sum_{n\geq 0}a_nx^n-\sum_{n\geq 2}a_{n-2}x^n-\sum_{n\geq 3}a_{n-3}x^n+\sum_{n\geq 7}a_{n-7}x^n+\sum_{n\geq 8}a_{n-8}x^n-\sum_{n\geq 10}a_{n-10}x^n$. Il nous reste plus qu'à identifier : pour tout $n\geq 10$ : $0=a_n-a_{n-2}-a_{n-3}+a_{n-7}+a_{n-8}-a_{n-10}$ on trouve $a_1=0, a_0=a_2=a_3=a_4=1, a_5=a_6=a_7=2, a_8=a_9=3$.

**Exercice 57** Résoudre dans $\mathbb{C}$ : $8\cos z+4i\sin z=7+5i$.

[Dem] On a $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ et $\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ et l'équation donne $4\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)+2\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)=7+5i$, en multipliant par $e^{iz}\neq 0$ on obtient $6e^{2iz}-(7+5i)e^{iz}+2=0$, posons $u=e^{iz}$ cela donne $6u^2-(7+5i)u+2=0$, le discriminant est $\Delta=-24+70i$ et $\delta^2=\Delta$ donne avec $\delta=a+ib$ : $\begin{cases} a^2+\left(-b^2\right)=24\\ 2ab=70\end{cases}$ ou $a^2,b^2$ sont solutions de $t^2+24t-(35)^2=0=(t-25)(t+49)$ soit $\begin{cases} a^2=25\\ -b^2=-49\end{cases}$ d'où $\delta_1=5+7i$ et $\delta_2=-5-7i$ puis $u_1=1+i$ et $u_2=\dfrac{1-i}{6}$. On résoud $e^{iz}=1+i$ avec $z=x+iy$ soit $e^{-y}e^{ix}=1+i$ ou $e^{-y}=|1+i|=\sqrt{2}$ et $y=-\ln\left(\sqrt{2}\right)$ et d'autre part $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ce qui donne $z=\frac{\pi}{4}+2k\pi-i\ln\left(\sqrt{2}\right)$ avec $k\in\mathbb{Z}$ L'autre $e^{iz}=\dfrac{1-i}{6}$ donne $z=-\frac{\pi}{4}+2k'\pi-i\ln\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ avec $k'\in\mathbb{Z}$