Équations différentielles

0.1 Généralités

Une équation différentielle est la donnée d'un problème de recherche de fonctions y vectorielles dérivables à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ dépendant d'une variable réelle x satisfaisant à une relation

$$f(x,y(x),y'(x)) = 0$$

où f est une fonction définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^2$.

On omet souvent la variable x dans l'écriture des fonctions y et on note en abrégé

$$f(x,y,y') = 0$$

L'équation est dite ordinaire si elle peut se mettre sous la forme

$$y'(x) = g(x,y(x))$$

où g est une application d'une partie Δ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ à valeur dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 1 *On appelle solution de l'équation différentielle $f(x,y,y') = 0$ une fonction φ dérivable définie sur un intervalle I non vide et non réduit à un point qui satisfait aux relations*

$$\forall x \in I \quad \begin{cases} (x,\varphi(x),\varphi'(x)) \in \mathcal{D} \\ f(x,\varphi(x),\varphi'(x)) = 0. \end{cases}$$

Pour des raisons pratiques, on la note souvent comme un couple (φ,I) ou encore $(\varphi(x),I)$ en confondant φ, $x \mapsto \varphi(x)$ et $\varphi(x)$

Autrement dit on cherche une courbe connaissant en chaque point la tangente. Ou un mouvement connaissant en chaque position la vitesse. L'espace des phases est la représentation dans le plan des couples (y,y').

Exemple 1 $(e^x,\mathbb{R})$, $(e^x,\mathbb{R}_+)$, $(e^x,[-1,1])$ sont des solutions différentes de l'équation différentielle $y' - y = 0$.

Si φ est une solution de l'équation différentielle définie sur l'intervalle I, la restriction de φ à un intervalle J inclus dans I est une autre solution de cette équation. Un des problèmes importants de la théorie des équations différentielles est la recherche des solutions définies sur les plus grands intervalles possibles:

Définition 2 *On appelle solution maximale de l'équation une solution φ, définie sur un intervalle I, qui n'est pas la restriction d'une solution définie sur un intervalle I' contenant strictement I, c'est à dire une solution qui n'est pas prolongeable en une autre solution.*

Exemple 2 Le couple $(\ln(x),\mathbb{R}_+^*)$ est une solution maximale de l'équation différentielle réelle $xy' - 1 = 0$.

Le couple $(e^x,\mathbb{R})$ est la solution maximale de l'équation différentielle réelle $y' - y = 0$.

La recherche de solutions d'une équation différentielle est souvent liée à la résolution d'un problème issu d'une modélisation de certains phénomènes physiques où il est important de connaître l'évolution d'un système à partir de données initiales:

On appelle **problème de Cauchy** la recherche de solution d'une équation différentielle $f(x,y,y') = 0$ vérifiant la condition supplémentaire $y(x_0) = y_0$ (appelée condition initiale).

Si la modélisation est bien faite, l'existence d'une solution au problème de Cauchy doit alors être confrontée à l'expérience (existence d'une « solution physique ») et la recherche des solutions maximales du problème de Cauchy permet alors de prévoir l'évolution future du système ou de connaître les conditions initiales dans le passé qui aboutissent au système présent.

0.2 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1

Ce sont des équations différentielles du type:

$$y' = a(x)y + b(x)$$

où les fonctions scalaires a et b sont continues sur un intervalle I.

Mise sous la forme $y' - a(x)y = b(x)$ on appelle la fonction $b(x)$ second membre de l'équation.

0.2.1 Équations homogènes

Lorsque le second membre de l'équation est nul, on appelle l'équation « équation homogène »

Proposition 1 *Soit a une fonction scalaire continue sur un intervalle I. L'ensemble des fonctions φ dérivables sur I vérifiant, pour tout x de I, $\varphi'(x) - a(x)\varphi(x) = 0$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1 inclus dans $C^1(I,K)$ et dirigé par la fonction $x \mapsto \exp(A(x))$ où A désigne une primitive quelconque de la fonction a.*

[Ind] Montrer que si y est une solution de l'équation, la fonction $y\exp(-A)$ est constante

[Dem] Notons A une des primitives de la fonction a et φ la fonction $\exp(A)$. Si y est une fonction dérivable sur I, on peut alors définir, sur I, la fonction $\lambda = y\exp(-A)$. On a donc $y = \lambda \exp(A)$ et

$$\begin{aligned} y' - ay &= \lambda'\exp(A) + A'\lambda\exp(A) - a\lambda\exp(A) \\ &= \lambda'\exp(A) \end{aligned}$$

On en déduit alors que y est une solution de l'équation si et seulement si λ est une fonction constante et on a alors $y = \lambda\exp(A)$

Proposition 2 *Soit a une fonction scalaire continue sur un intervalle I. Si φ est une solution de l'équation $y' = ay$ définie sur I et qui s'annule en un point $x_0 \in I$, alors φ est nulle sur I*

[Ind] Une fonction constante nulle en un point est la fonction nulle.

[Dem] Soit A une primitive de la fonction a, il existe alors une constante λ telle que, pour tout $x \in I$, $y(x) = \lambda\exp(A)$. on en déduit que $\lambda = y(x_0)\exp(-A(x_0)) = 0$.

C'est cette proposition qui explique pourquoi la démarche heuristique:

À partir de l'équation $y' = a(x)y$, je divise par y (*A-t-on le droit?*), je reconnais dans le rapport y'/y la dérivée de $\ln y$ (*En fait* $\ln|y|$), j'intègre alors l'égalité par trouver $\ln(y) = \int a(x)dx$ et enfin $y = \text{cste} \times \mathrm{e}^A$ (*La constante n'est-elle pas positive?*)

permet, en fin de compte, de trouver toutes les solutions de l'équation: la raison essentielle étant: **une solution non nulle de cette équation différentielle ne s'annule pas et garde un signe constant** .

Exercice 1 Justifier rigoureusement la démarche heuristique.

[Ind] Une solution de l'équation différentielle est dérivable donc continue. Soit elle est nulle, soit elle est non nulle en un point et donc non nulle sur un intervalle contenant ce point.

[Dem] Soit y une solution non nulle en t_0 de l'équation et J le plus grand intervalle contenant t_0 où elle ne s'annule pas. Si $J = I$, la fonction ne s'annule jamais, sinon il existe une borne supérieure ou inférieure réelle à cet intervalle. Supposons que I possède une borne supérieure réelle b située à l'intérieur de I. Pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction y s'annule donc sur l'intervalle $[b,b+\varepsilon]$ et donc par continuité s'annule en b. On établit un raisonnement analogue pour une éventuelle borne inférieure réelle située à l'intérieur de I. Pour tout $t \in I$ on a donc, en intégrant l'expression y'/y :

$$\ln|y(t)| = A(t) + cste$$

Ainsi $|y(t)| = \lambda \times \mathrm{e}^{A(t)}$ où λ est une constante non nulle. D'après le théorème des valeurs intermédiaires une fonction continue qui ne s'annule pas garde un signe constant, donc, il existe une constante μ (égale à λ ou à $-\lambda$) telle que $y(t) = \mu\mathrm{e}^{A(t)}$, pour tout t appartenant à I.

La fonction $t \mapsto \mu e^{A(t)}$ ne s'annule pas sur I, on se trouve donc dans la situation où les bornes de J sont celles de I.

Exercice 2 Soit a une fonction scalaire définie sur $\mathbb{R}$ continue périodique de période T non nulle. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que les solutions de l'équation $y' = ay$ soient T- périodiques.

[Ind] Utiliser la valeur moyenne de a : $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T a(t)dt$.

[Dem] Les solutions de l'équation proposée sont de la forme $\lambda e^{A(t)}$ où A est la primitive de a s'annulant en O. Elles sont toutes T-périodiques si et seulement si la fonction e^A l'est. Soit x un réel

$$\begin{aligned} e^{A(x+T)} = e^{A(x)} &\iff e^{A(x+T)-A(x)} = 1 \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad A(x+T) - A(x) = \int_x^{x+T} a(t)dt = 2ik\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad \int_0^T a(t)dt = 2ik\pi \end{aligned}$$

Ainsi, les solutions sont T-périodiques si et seulement si $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T a(t)dt \in \dfrac{2i\pi}{T}\mathbb{Z}$

Exemple 3 La datation d'un objet par la mesure du pourcentage du carbone radioactif ${}^{14}_{6}C$.

L'expérience montre qu'une substance radioactive se décompose à une vitesse proportionnelle à la quantité de matière présente, c'est donc une réaction du premier ordre. Si y représente cette quantité, on a donc $y' = ky$ où k est une constante physique (analogue à une constante de vitesse) dépendant du corps considéré. Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions de la forme λe^{kx} où λ représente une constante arbitraire.

En mesurant la quantité de matière radioactive en deux instants x_0 et x_1, on peut donc connaître la constante k:

$$k = \frac{\ln y(x_1) - \ln y(x_0)}{x_1 - x_0}$$

ou la période de demi-vie τ, c'est à dire la période de temps pendant laquelle la moitié de la substance radioactive disparaît dans un échantillon (analogue au temps de demi-réaction). Cette période est donc liée a la constante k par la relation:

$$\frac{1}{2} = e^{k\tau}$$

Ainsi pour l'élément ${}^{14}_{6}C$, on trouve $\tau \approx 5568$ années

On suppose que la proportion des éléments ${}^{14}_{6}C$ et ${}^{12}_{6}C$ reste constant dans l'atmosphère au cours du temps et qu'un organisme vivant présente cette proportion dans ses tissus par échange avec l'atmosphère. Lorsque cet organisme meurt, les échanges s'interrompent et la mesure de la proportion résiduelle permet alors de dater sa mort.

Exercice 3 On a mesuré en 1950 dans du charbon de bois trouvé dans la grotte de Lascaux une moyenne de 0,97 désintégrations par gramme et par minute. On mesure dans du bois vivant une moyenne de 6,68 désintégrations par gramme et par minute. Déterminer l'age probable de l'occupation du site. Quelle est la marge d'erreur (les valeurs étant arrondies au dernier chiffre) ?

[Ind] Calculer en fonction du temps le nombre de désintégrations dans un gramme de bois et par minute .

[Dem] Si, à l'instant t on a λe^{kt} atomes ${}_6C^{14}$ dans un gramme de bois, à l'instant $t + \delta t$, il en reste $\lambda e^{kt} e^{k\delta t}$. Le nombre de désintégrations est donc $N(t) = \lambda e^{kt}(e^{k\delta t} - 1)$.

Ainsi $\dfrac{N(t_1)}{N(t_0)} = e^{k(t_1 - t_0)}$. Il faut environ 15500 ans pour passer de 6,68 désintégrations par gramme et par minute à 0,97. L'age où le charbon de bois a été brûlé est d'environ -13550 ans.

L'erreur sur la constante τ est $\pm 0{,}5$, la constante k est donc comprise entre $-(\ln 2)/5568{,}5$ et $-(\ln 2)/5567{,}5$. L'erreur de mesure sur les désintégrations est de $\pm 0{,}005$, le rapport $\dfrac{N(t_1)}{N(t_0)}$ est donc compris entre 6,675/0,975 et 6,685/0,965, la différence $t_1 - t_0$ est donc comprise entre $-\ln(6{,}675/0{,}975) \times 5567{,}5/\ln(2)$ et $-\ln(6{,}685/0{,}965) \times 5568{,}5/\ln(2)$, en définitive ces valeurs entourent la valeur trouvée a 50 ans près.

0.2.2 Équations avec second membre

Théorème 1 *Soient a, b des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Quelque soit $(x_0,y_0) \in I \times \mathbb{R}$, il existe une unique fonction φ définie et dérivable sur I, vérifiant le problème de Cauchy en (x_0,y_0) :*

$$\varphi(x_0) = y_0$$
$$\forall x \in I \quad \varphi'(x) = a(x)\varphi(x) + b(x)$$

Elle vérifie:

$$\forall x \in I \quad \varphi(x) = \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{-A(t)}dt \right) \mathrm{e}^{A(x)}$$

où A est la primitive de a qui s'annule en x_0: pour tout $x \in I$, $A(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} a(t)dt$.

[Ind] Chercher une solution particulière de l'équation sous la forme $\lambda(x)\exp(A(x))$ où A est la primitive de a s'annulant en x_0.

[Dem] Soit λ une fonction dérivable, la fonction $y = \lambda\exp(A)$ vérifie

$$y' - ay = \lambda'\exp(A)$$

Prenons alors pour λ la primitive de la fonction $b\exp(-A)$ qui s'annule en x_0 : pour tout $x \in I$, $\lambda(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} b(t)\exp(-A(t))dt$, la fonction φ définie pour $x \in I$ par $\varphi(x) = (\lambda(x) + y_0)\exp(A(x))$ est alors une solution de l'équation $y' = ay + b$ vérifiant $\varphi(x_0) = y_0$.
Si ψ est une autre solution du problème de Cauchy, on vérifie alors que la fonction $y = \varphi - \psi$ vérifie le problème de Cauchy $y' = ay$ et $y(x_0) = 0$, elle est donc nulle.

Remarque: Une telle solution est de classe C^1 et plus généralement de classe C^{k+1} si a et b sont de classe C^k.

Proposition 3 *Soient a, b des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = a(x) + b(x)$ est un sous-espace affine de dimension 1 de l'espace $C^1(I,K)$ dirigé par l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène $y' = a(x)y$.*

[Ind] Comment s'écrivent les points appartenant à un sous-espace affine d'un espace vectoriel?

[Dem] Il existe des solutions d'après la proposition précédente. La différence z de deux solutions y_1 et y_2 vérifie

$$z' = y_1' - y_2' = a(x)(y_1 - y_2) = a(x)z$$

Deux solutions ne diffèrent donc que d'une solution de l'équation homogène.

Pour trouver la solution générale de l'équation $y' = a(x)y + b(x)$, il suffit donc de trouver une solution particulière de cette équation et lui ajouter la solution générale de l'équation homogène.

La démarche est généralement la suivante: on résout l'équation homogène puis on recherche une solution particulière. Puisqu'il faut une solution, on examine rapidement l'équation: existe-t-il une solution évidente? Peut-on en trouver une d'une forme particulière? Si la réponse est oui, on l'exhibe et la recherche se termine là.
Sinon, on utilise la méthode de variation de la constante: si y_0 est une solution non nulle de l'équation homogène (c'est à dire où on a annulé le second membre), les autres solutions de l'équation homogène, sont de la forme $\lambda y_0(x)$ avec λ constant. Pour trouver une solution lorsque le second membre n'est pas nul, on recherche une solution particulière sous la forme $\lambda(x)y_0(x)$ où λ est une fonction à découvrir.

Exercice 4 Résoudre les équations

a) $y' = y + 1$

b) $y' = y + x$

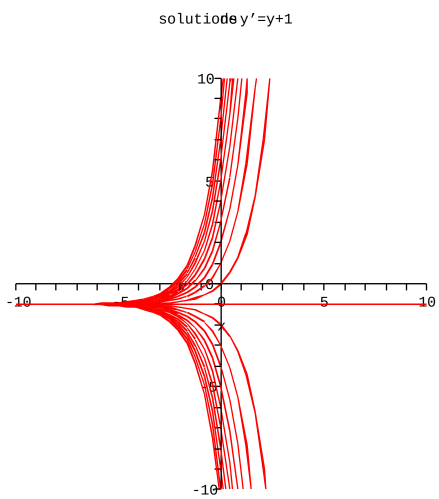
c) $y' = xy - x$

d) $y' = xy + 1$

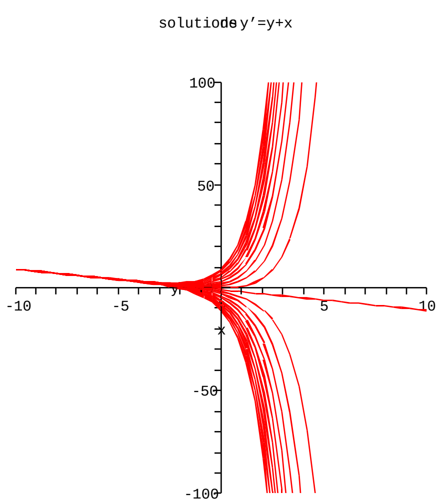
e) $y' = y\tan x + \sin(x)$

[Ind] Seules les dernières équations nécessitent une recherche approfondie.

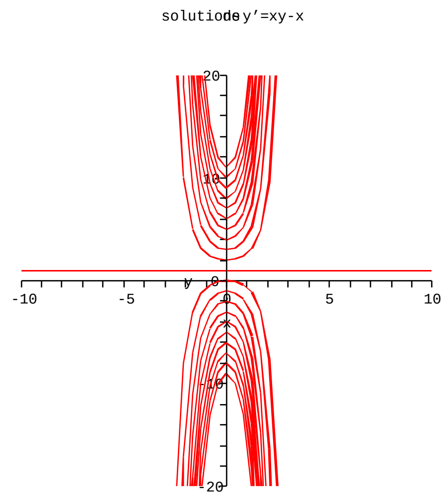
[Dem] on trouve sans difficulté la forme générale des solutions:
a) $y = \lambda e^x - 1$ (solution particulière -1)



b) $y = \lambda e^x - x - 1$ (solution particulière polynomiale)

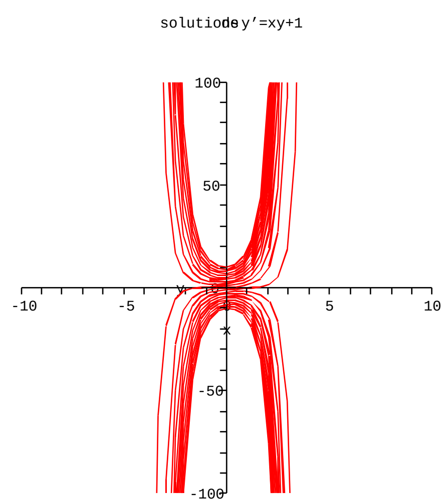


c) $y = \lambda e^{x^2/2} + 1$ (solution particulière 1)

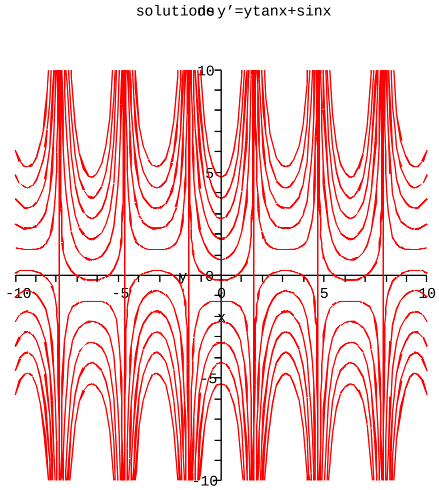


Pour les deux suivantes, on utilise la méthode de variations des constantes et on trouve

d) $y = \lambda e^{x^2/2} + e^{x^2/2} F(x)$ où F est une primitive de la fonction $x \mapsto e^{-x^2/2}$



e) $y = \dfrac{\lambda}{\cos x} - \dfrac{\cos 2x}{4\cos x}$



Exercice 5 Soient a et b des fonctions définies sur un intervalle I non réduit à un point et soit $x_0 \in I$. Montrer que les tangentes aux différentes solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ passant par un point d'abscisse x_0 sont, soit toutes parallèles, soit se coupent toutes en un point.

[Ind] Écrire des équations des tangentes en fonction des conditions initiales uniquement.

[Dem] Soit y_0 et y_1 deux réels distincts, les tangente en x_0 aux solutions du problème de Cauchy en (x_0,y_0) et (x_0,y_1) ont pour équations

$$y - y_0 = \left((a(x_0)y_0 + b(x_0)\right)(x - x_0)$$
$$y - y_1 = \left((a(x_0)y_1 + b(x_0)\right)(x - x_0)$$

si $a(x_0) = 0$ les deux droites sont parallèles de pente $b(x_0)$ sinon elles se coupent en un point d'abscisse $x = x_0 - \dfrac{1}{a(x_0)}$ et d'ordonnée $y = -\dfrac{b(x_0)}{a(x_0}$. Comme ce point ne dépend pas des valeurs y_0 et y_1, il est commun à toutes les tangentes considérées.

Principe de superposition

Lorsque le second membre peut se décomposer en une somme de fonctions : $b = b_1 + \cdots + b_n$, il suffit de trouver n solutions $y_1, \ \ldots, \ y_n$ aux équations $y' = ay + b_1, \ \ldots, \ y' = ay + b_n$ pour trouver une solution particulière $y = y_1 + \cdots + y_n$ de l'équation complète.

Cas particulier où a est constant

Lorsque la fonction a est constante, la recherche d'une solution particulière peut être simplifiée lorsque le second membre est de la forme $\mathrm{e}^{mx}P(x)$ (fonction exponentielle-polynôme) où m est une constante et P une fonction polynomiale.

Proposition 4 *Soient a et m des scalaires et $P \in K_p[X]$.*

Si $a \neq m$, il existe un unique polynôme $Q \in K[X]$ tel que la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{mx}Q(x)$ soit solution de l'équation $y' = ay + \mathrm{e}^{mx}P(x)$, ce polynôme étant de degré p.

Si $a = m$, il existe un unique polynôme Q de valuation supérieure ou égale à 1 tel que la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{mx}Q(x)$ soit solution de l'équation $y' = ay + \mathrm{e}^{mx}P(x)$, ce polynôme étant de degré $p+1$.

[Ind] Faites une analyse-synthèse.

[Dem] Soit Q un polynôme, la fonction $x \mapsto e^{mx}Q(x)$ est une solution définie sur $\mathbb{R}$ de l'équation si et seulement si:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{mx}Q'(x) + me^{mx}Q(x) = ae^{mx}Q(x) + e^{mx}P(x)$$

soit

$$(m-a)Q + Q' = P$$

Si $m \neq a$, l'application U qui à un polynôme Q associe le polynôme $(m-a)Q+Q'$ est un endomorphisme injectif de $K[X]$ car U respecte les degrés, pour cette même raison, la restriction de U à $K_n[X]$ ($n \in \mathbb{N}$) est un endomorphisme injectif de $K_n[X]$ donc un automorphisme de cet espace vectoriel. On en déduit alors que U est un automorphisme de $K[X]$ et la résolution de l'équation $U(Q) = P$ se fait alors par identification des coefficients en prenant pour inconnue Q un polynôme de degré p.

Si $m = a$, $Q' = P$ signifie que Q est une primitive de P, l'unicité de cette primitive est assurée en imposant qu'elle s'annule en 0.

Exemples de second membres se rapportant à ce cas en utilisant éventuellement le principe de superposition: fonction constante, fonction polynomiale, $\cos\omega x$, $\sin\omega x$, $x^n\cos\omega x$, $x^n\sin\omega x$, $\operatorname{ch}\omega x$, $\operatorname{sh}\omega x$ ....

Exercice 6 Résoudre l'équation différentielle $\frac{dM}{dt} + \omega_1 M = k_1 \mathrm{e}^{-\omega_2 t} + k_2$, ($\omega_1$, ω_2, k_1 et k_2 étant des constantes).

[Ind] Quelle est la nature du second membre?

[Dem] La solution générale de l'équation homogène est $M = k\mathrm{e}^{-\omega_1 t}$ où k est une constante arbitraire. On cherche ensuite des solutions particulières M_1 et M_2 aux équations dont les seconds membres sont $k_1\mathrm{e}^{-\omega_2 t}$ et k_2 (seconds membres exponentiels).
Si $\omega_1 \neq \omega 2$, on trouve $M_1 = \frac{k_1}{\omega_1-\omega_2}\mathrm{e}^{-\omega_2 t}$ et sinon $M_1 = k_1 t\mathrm{e}^{-\omega_1 t}$.
Si $\omega_1 \neq 0$, on trouve $M_2 = \frac{k_1}{\omega_1}$ et sinon $M_2 = k_1 t$.
La solution générale de l'équation complète est alors $M = k\mathrm{e}^{-\omega_1 t} + M_1 + M_2$

Exercice 7 Résoudre l'équation différentielle $\tau U' + U = a\cos(\omega t)$ (τ, a et ω étant des constantes).

[Ind] La fonction cosinus est une somme des fonctions exponentielle-polynômes ou encore la partie réelle d'une fonction exponentielle.

[Dem] Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{i\omega t}+\mathrm{e}^{-i\omega t})$ et la constante $\frac{a}{2\tau}$ est bien une fonction polynomiale de degré 0. On applique alors le principe de superposition pour trouver que $t \mapsto \frac{a}{2(1+\omega^2\tau^2)}\left((1-i\tau\omega)\mathrm{e}^{it} + (1+i\tau\omega)\mathrm{e}^{-it}\right)$ est une solution particulière de l'équation.

La partie réelle d'une solution de l'équation $\tau U' + U = a\mathrm{e}^{i\omega t}$ est une solution particulière de l'équation donnée car l'application partie réelle commute avec la dérivée, on trouve ainsi une solution particulière sous la forme $\Re(\frac{a(1-i\tau\omega)}{2(1+\omega^2\tau^2)}\mathrm{e}^{i\omega t} = \frac{a}{2(1+\omega^2\tau^2)}(\cos\omega t + \tau\omega\sin\omega t)$.

Les solutions de cette équation sont donc de la forme

$$U(t) = \frac{a}{2(1+\omega^2\tau^2)}(\cos\omega t + \tau\omega\sin\omega t) + \lambda\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

où λ est une constante arbitraire. Ainsi si on cherche les solutions réelles on peut chercher une solution particulière de la forme $\alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$. Ne pas oublier cos et sin même si le second menbre ne contient qu'une fonction trigonométrique.

0.2.3 Équations générales linéaires scalaires du premier ordre

Une équation différentielle linéaire du premier ordre est de la forme

$$\alpha(x)y' - a(x)y - b(x) = 0$$

où α, a, et b sont des fonctions définies sur un intervalle I.

Si la fonction α ne s'annule pas sur I, en divisant l'équation par α, on est ramené à l'équation différentielle linéaire ordinaire:

$$y' = \frac{a(x)}{\alpha(x)}y + \frac{b(x)}{\alpha(x)}$$

étudiée précédemment.

En revanche, si α s'annule sur I en un point x_0, en ce point, non seulement la donnée de $y(x_0)$ ne détermine pas la valeur $y'(x_0)$ mais encore, la valeur de $y(x_0)$ est imposée par l'équation $a(x_0)y(x_0)+b(x_0)=0$:

si $a(x_0)=0$ et $b(x_0)\neq 0$, il ne peut exister de solutions définie en x_0,

si $a(x_0)\neq 0$, on doit avoir $y(x_0)=y_0=-\frac{b(x_0)}{a(x_0)}$.

si $a(x_0)=0$ et $b(x_0)=0$, aucune condition n'est imposée à priori sur la valeur $y_0=y(x_0)$.

On est donc en face d'une réelle difficulté, d'autant plus que même si $a(x_0)\neq 0$, ou si $a(x_0)=b(x_0)=0$, le problème de Cauchy en (x_0,y_0) peut ne pas avoir de solution. Pour trouver les solutions maximales de l'équation, on résout d'abord cette équation sur des intervalles où α ne s'annule pas, car il est possible alors de trouver la forme des solutions, celles-ci dépendent de constantes arbitraires et on essaie de recoller ces solutions en ajustant les constantes trouvées pour que la fonction ainsi définie vérifie l'équation différentielle générale (en particulier, elle doit être dérivable).

Exemple 4 Étudions l'existence de solution définie en 0 de l'équation $xy'+y=\sqrt{|x|}$.
On peut résoudre cette équation sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ et sur ces deux intervalles, les solutions sont de la forme

$$y=\frac{\lambda}{x}+\frac{2}{3}\sqrt{|x|}$$

où λ est une constante arbitraire dépendant de l'intervalle d'étude.
Si y est une solution définie en 0 et à droite de 0, par exemple sur un intervalle du type $[0,x_1[$ $(x_1>0)$, il existe alors une constante λ telle que

$$\forall x\in[0,x_1[\quad y(x)=\begin{cases}0 & \text{si } \ x=0\\ \frac{\lambda}{x}+\frac{2}{3}\sqrt{x} & \text{si } \ x\in]0,x_1[\end{cases}$$

Mais, il n'existe aucune valeur de λ pour que cette dernière fonction soit dérivable en 0, on peut faire le même raisonnement à gauche de 0, ainsi, il n'existe aucune solution de l'équation qui soit définie en 0.

Exercice 8 Montrer que si b est continue et dérivable en 0, il existe une unique solution de l'équation $xy'+y=b(x)$ définie sur $\mathbb{R}$

[Ind] Si la fonction b est dérivable en 0, elle possède en 0 un développement limité d'ordre 1.

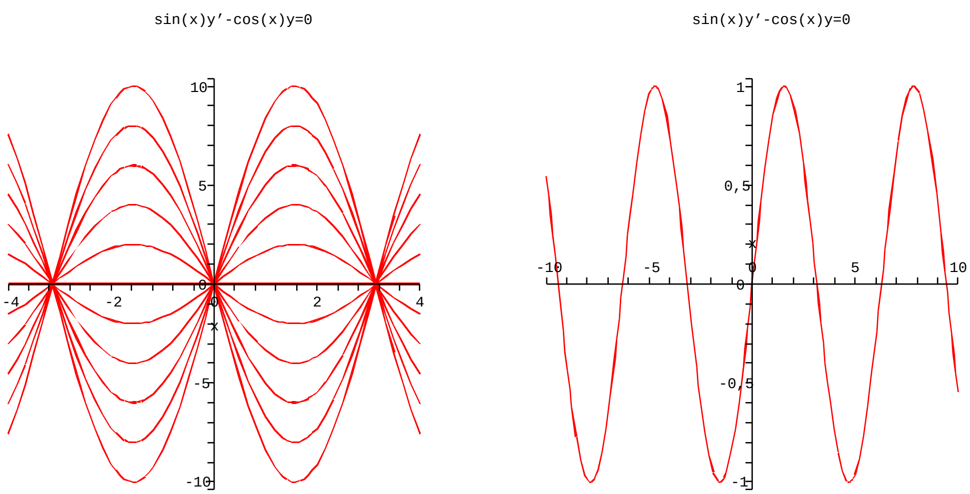
[Dem] Les solutions de cette équation sont de la forme $y=\dfrac{\lambda}{x}+\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x b(t)dt$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. Or la fonction φ définie pour $x\in\mathbb{R}^*$ par $\varphi(x)=\frac{1}{x}\int_0^x b(t)dt$ est prolongeable par continuité en 0 par la valeur $b(0)$ et la fonction φ obtenue est alors dérivable en 0 car b étant dérivable en 0, on a, au voisinage de 0, $b(x)=b(0)+b'(0)x+o(x)$ et b étant continue, on a le développement limité $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_O^x b(t)dt=b(0)+\dfrac{b'(0)}{2}x+o(x)$ obtenu en intégrant le développement limité de b. On vérifie alors que la fonction φ vérifie l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ et que c'est la seule fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui coïncide sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ avec des solutions de l'équation différentielle.

Exemple 5 Résolvons l'équation $\sin(x)y'-\cos(x)y=0$.
On peut résoudre cette équation sur tout intervalle $]k\pi,(k+1)\pi[$ $(k\in\mathbb{Z})$ où on trouve que les solutions sont nécessairement de la forme $\lambda_k\sin(x)$.
Pour qu'une fonction y définie au voisinage de $k\pi$ par les formules

$$y(x)=\begin{cases}\lambda_{k-1}\sin(x) & \text{si } \ x<k\pi\\ \lambda_k\sin(x) & \text{si } \ x>k\pi\end{cases}$$

se prolonge en une fonction dérivable en $k\pi$, il faut et il suffit que $\lambda_k=\lambda_{k-1}$, ainsi les solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$ et sont de la forme $\lambda\sin(x)$. L'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ est donc un espace vectoriel de dimension 1.

Le problème de Cauchy en $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ possède donc une solution et celle-ci est unique si et seulement si $\sin(x_0) \neq 0$; en un point où $\sin(x_0) = 0$, il n'y a pas de solutions si $y_0 \neq 0$ et il en existe une infinité si $y_0 = 0$.



Exercice 9 Résoudre l'équation $\sin(x)y' - 2\cos(x)y = 0$. Déterminer la structure de l'ensemble des solutions maximales. Montrer qu'il existe une infinité de solutions distinctes au problème de Cauchy en un couple (x_0,y_0) qui vérifie $\sin(x_0) \neq 0$ ou $\sin(x_0) = y_0 = 0$.

[Ind] Vérifier que le recollement de deux solutions quelconques définies de part et d'autre d'un réel $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) se recollent en une solution définie au voisinage de ce point.

[Dem] On peut résoudre cette équation sur tout intervalle $]k\pi,(k+1)\pi[$ ($k \in \mathbb{Z}$) où on trouve que les solutions sont nécessairement de la forme $\lambda_k \sin^2(x)$.

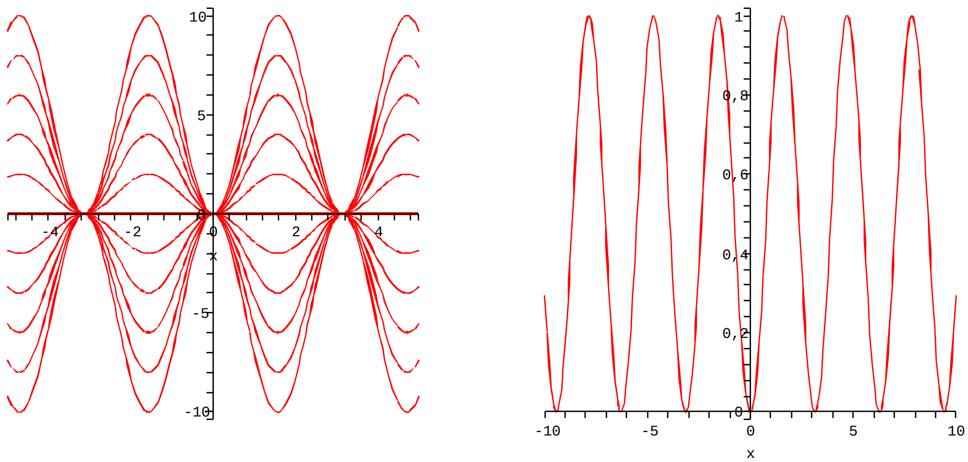
Toute fonction y définie au voisinage de $k\pi$ par les formules

$$y(x) = \begin{cases} \lambda_{k-1}\sin^2(x) & \text{si} \quad x < k\pi \\ \lambda_k \sin^2(x) & \text{si} \quad x > k\pi \end{cases}$$

se prolonge en une fonction dérivable en $k\pi$ et qui satisfait l'équation différentielle. Ainsi, pour toute suite de scalaires $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \lambda_k \sin^2(x)$ si $x \in [k\pi,(k+1)\pi[$ est un solution maximale de l'équation différentielle.

On vérifie alors, sans difficulté, que l'ensemble des solutions définie sur $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel isomorphe à l'espace vectoriel des suites de scalaires indexées par $\mathbb{Z}$

La donnée d'une condition initiale (x_0,y_0) vérifiant $\sin(x_0) \neq 0$ ou $\sin(x_0) = y_0 = 0$ ne permet de fixer au plus que la valeur d'une seule des constantes arbitraires: si $sin(x_0) = y_0 = 0$, toute solution de l'équation est solution du problème de Cauchy, si $\sin(x_0) \neq 0$, il existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in]k\pi,(k+1)\pi[$, on a alors $\lambda_{k_0} = \frac{y_0}{\sin(x_0)}$; les autres constantes λ_k pour $k \neq k_0$ pouvant être choisies arbitrairement.



Exercice 10 Trouver les solutions maximales de l'équation différentielle $(x^2-1)y' + xy = 1$.

[Ind] Intégrer l'équation homogène en étant attentif au signe de l'expression $x^2 - 1$ puis utiliser la méthode de variation de la constante.
Essayer ensuite de raccorder les différentes expressions au voisinage de -1 et de 1.

[Dem] On intègre d'abord l'équation homogène sur un intervalle I où la fonction $x \mapsto x^2 - 1$ ne s'annule pas. Sur un tel intervalle, on trouve que les solutions de l'équation homogène sont:

$$y = \frac{\lambda}{\sqrt{|x^2-1|}}$$

où λ est une constante arbitraire. Pour intégrer l'équation générale, on utilise la méthode de variation de la constante et on pose

$$y = \frac{\lambda(x)}{\sqrt{|x^2-1|}}$$

où λ est une fonction dérivable.
Pour intégrer l'équation

$$\frac{\lambda'(x)}{\sqrt{|x^2-1|}} = \frac{1}{x^2-1}$$

distinguons les trois cas:
a) $I =]-\infty, -1[$, on trouve

$$\lambda'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

d'où $\lambda(x) = -\ln(-x + \sqrt{x^2-1}) + \lambda_0$ et

$$y(x) = \frac{-\ln(-x+\sqrt{x^2-1}) + \lambda_0}{\sqrt{x^2-1}}$$

b) $I =]-1, 1[$, on trouve

$$\lambda'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

d'où $\lambda(x) = -\operatorname{Arcsin}(x) + \lambda_1$ et

$$y(x) = \frac{-\operatorname{Arcsin}(x) + \lambda_1}{\sqrt{1-x^2}}$$

c) $I =]1, +\infty[$, on trouve

$$\lambda'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

d'où $\lambda(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + \lambda_2$ et

$$y(x) = \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + \lambda_2}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

λ_0,λ_1 et λ_2 désignant des constantes arbitraires.

Étudions le comportement des solution en -1 et en 1.

a) si $\lambda_0 \neq 0$, la limite de $|y(x)|$ est égale à $+\infty$ en -1. On prend donc $\lambda_0 = 0$ et on effectue alors un développement limité de $y(-1-h)$ pour h négatif et voisin de 0, on trouve

$$\sqrt{-2h + h^2} = \sqrt{2}\sqrt{-h} - \frac{\sqrt{2}}{4}h\sqrt{-h} + o(h\sqrt{-h}$$

et

$$-\ln(1 - h + \sqrt{-2h + h^2}) = \sqrt{2}\sqrt{-h} + \frac{\sqrt{2}}{12}h\sqrt{-h} + o(h\sqrt{-h}$$

d'où

$$y(-1+h) = -1 - \frac{h}{3} + o(h)$$

b) si $\lambda_1 \neq -\frac{\pi}{2}$, la limite de $|y(x)|$ est égale à $+\infty$ en 1 tandis que si $\lambda_1 \neq \frac{\pi}{2}$, la limite de $|y(x)|$ est égale à $+\infty$ en 1, on en déduit qu'il n'existe pas de solution définie sur $\mathbb{R}$ de l'équation.

Prenons la valeur $\lambda_1 = -\frac{\pi}{2}$ et effectuons un développement limite de $y(-1+h)$ pour h positif et voisin de 0, , on a

$$\sqrt{2h - h^2} = \sqrt{2}\sqrt{h} - \frac{\sqrt{2}}{4}h\sqrt{h} + o(h\sqrt{h}$$

et

$$\text{Arcsin}(x) = -\frac{\pi}{2} + \sqrt{2}\sqrt{h} + \frac{\sqrt{2}}{12}h\sqrt{h} + o(h\sqrt{h}$$

d'où

$$y(-1+h) = -1 - \frac{h}{3} + o(h)$$

Prenons la valeur $\lambda_1 = \frac{\pi}{2}$ et effectuons un développement limite de $y(1+h)$ pour h négatif et voisin de 0, , on a

$$\sqrt{-2h - h^2} = \sqrt{2}\sqrt{-h} + \frac{\sqrt{2}}{4}h\sqrt{-h} + o(h\sqrt{-h}$$

et

$$\text{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\sqrt{-h} + \frac{\sqrt{2}}{12}h\sqrt{-h} + o(h\sqrt{h}$$

d'où

$$y(-1+h) = -1 + \frac{h}{3} + o(h)$$

c) si $\lambda_2 \neq 0$, la limite de $|y(x)|$ est égale à $+\infty$ en 1. On effectue alors un développement limité de $y(1+h)$ pour h positif et voisin de 0, on trouve

$$\sqrt{2h + h^2} = \sqrt{2}\sqrt{h} + \frac{\sqrt{2}}{4}h\sqrt{h} + o(h\sqrt{-h}$$

et

$$\ln(1 + h + \sqrt{2h + h^2}) = \sqrt{2}\sqrt{h} - \frac{\sqrt{2}}{12}h\sqrt{h} + o(h\sqrt{h}$$

d'où

$$y(1+h) = 1 + \frac{h}{3} + o(h)$$

.

Nous pouvons alors conclure: outre les solutions définies sur les intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ et $]1,+\infty[$ qui explosent en -1 et en 1, il existe une solution de l'équation sur l'intervalle $]-\infty,1[$ définie par

$$y(x)=\begin{cases}\frac{-\ln(-x+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2-1}} & \text{si } \ x\in]-\infty,-1[\\ -1 & \text{si } \ x=-1\\ \frac{-\operatorname{Arcsin}(x)-\frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } \ x\in]-1,1[\end{cases}$$

qui est dérivable en -1 avec $y'(-1)=-\frac{1}{3}$
il existe une solution de l'équation sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ définie par

$$y(x)=\begin{cases}\frac{-\operatorname{Arcsin}(x)+\frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } \ x\in]-1,1[\\ 1 & \text{si } \ x=-1\\ \frac{\ln(x+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2-1}} & \text{si } \ x\in]1,+\infty,[\end{cases}$$

qui est dérivable en 1 avec $y'(1)=\frac{1}{3}$

0.3 Équations linéaires scalaires d'ordre 2

Théorème 2 *Soient a, b et f des fonctions continues sur un intervalle I à valeurs dans K. Pour tout $x_0\in I$ et pour tout $(y_0,y_0')\in K^2$, il existe une unique solution y définie sur I, à valeurs dans K, de l'équation différentielle $y''+a(x)y'+b(x)y=f(x)$ qui vérifie $y(x_0)=x_0$ et $y'(x_0)=y_0'$.*

[Ind] Admis

On en déduit

Proposition 5 *Soient a, b et f des fonctions continues sur un intervalle I à valeurs dans K. L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions définies sur I, à valeurs dans K, de l'équation différentielle $y''+ay'+by=0$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $C^2(I,K)$. L'ensemble $\mathcal{S}_f$ des solutions définies sur I, à valeurs dans K, de l'équation différentielle $y''+ay'+by=f(x)$ est un sous-espace affine de dimension 2 de $C^2(I,K)$ dirigé par $\mathcal{S}_0$.*

[Ind] Construire un isomorphisme entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{S}_0$.

[Dem] L'ensemble $\mathcal{S}_0$ est bien un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions dérivables définies sur I. Soit x_0 appartenant à I, l'application φ définie de $\mathcal{S}_0$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ par $\varphi(y)=(y(x_0),y'(x_0))$ est linéaire et la propriété précédente indique que φ est bijective, cette application est donc un isomorphisme entre espaces vectoriels et donc la dimension de $\mathcal{S}_0$ est 2.
Pour une fonction f continue donnée, la proposition précédente nous affirme que $\mathcal{S}_f$ est non vide, on en déduit sans difficulté, l'équation étant linéaire, que $\mathcal{S}_f$ est bien un sous-espace affine de dimension 2 de $C^2(I,K)$ dirigé par $\mathcal{S}_0$.

0.3.1 Équations homogènes d'ordre 2 à coefficients constants

C'est le seul cas où il existe une méthode simple et systématique pour déterminer des solutions.

On recherche les fonctions exponentielles qui sont solutions de l'équation $y''+ay'+by=0$ avec a et b qui sont des constantes
Soit $r\in\mathbb{C}$, la fonction $x\mapsto e^{rx}$ est solution si et seulement si

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad e^{rx}(r^2+ar+b)=0$$

On en déduit que, si $a^2-4b\neq 0$, il existe deux solutions distinctes r_1 et r_2 à l'équation caractéristique $r^2+ar+b=0$ et on obtient ainsi deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle proposée: $y_1: x\mapsto e^{r_1x}$ et $y_2: x\mapsto e^{r_2x}$. L'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle est alors

$$\{\, x\mapsto \lambda e^{r_1x}+\mu e^{r_1x}\ ,\ \lambda,\mu\in K\,\}$$

En revanche, si $a^2 - 4b = 0$, l'équation algébrique ne possède qu'une solution r_1 et on ne trouve qu'une solution $y_1 : x \mapsto e^{r_1 x}$ à l'équation différentielle de cette manière. On vérifie alors que la fonction $y_2 : x \mapsto x e^{r_1 x}$ est aussi une solution, linéairement indépendante de y_1 et cette fois, l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle est alors

$$\{ x \mapsto (\lambda + \mu x) e^{r_1 x} , \lambda,\mu \in K \}$$

Cas particulier de coefficients réels Si les coefficients a et b sont réels, on peut chercher alors les solutions réelles de l'équation différentielle.
Plusieurs cas sont possibles:
Si $a^2 - 4b \geq 0$, les solutions y_1 et y_2 sont réelles et l'ensemble des solutions réelles est

$$\{ x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_1 x} , \lambda,\mu \in \mathbb{R} \}$$

Si $a^2 - 4b < 0$, les racines r_1 et r_2 sont complexes et conjuguées, on notant $r_1 = \alpha + i\beta$ avec α et β réels, la partie réelle et la partie imaginaire de y_1 sont alors des solutions linéairement indépendantes, ainsi l'ensemble des solutions est

$$\{ x \mapsto (\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)) e^{\alpha x} , \lambda,\mu \in \mathbb{R} \}$$

ou encore

$$\{ x \mapsto (A e^{\alpha x} \cos(\beta x + \varphi) , A \in \mathbb{R}_+^* , \varphi \in] - \pi,\pi] \}$$

0.3.2 Recherche de solutions particulières

Nous verrons plus tard l'extension de la méthode aux équations linéaires scalaires à coefficients variables, pour l'instant, établissons la méthode pour les équations à coefficients constants qui sont les cas les plus fréquents que vous rencontrerez en physique.

On connaît une solution de l'équation homogène de la forme $x \mapsto e^{rx}$ Toute solution y de l'équation $y'' + ay' + by = f(x)$ définie sur I peut alors s'écrire $y(x) = \lambda(x) e^{rx}$ où $\lambda(x) = y(x) e^{-rx}$ est une fonction de classe C^2 définie sur I. On a alors

$$y'' + ay + by - f(x) = (\lambda'' + (2r + a)\lambda') e^{rx} - f(x)$$

Ainsi, y est solution sur J de l'équation étudiée si et seulement si la fonction λ est solution sur J de l'équation différentielle ordinaire

$$\lambda'' + (2r + a)\lambda' = f(x) e^{-rx}$$

En posant $z = \lambda'$, on se trouve devant une équation différentielle du premier ordre que l'on sait résoudre au moins de façon théorique, ce qui permet de trouver l'ensemble des solutions cherchées, au prix de la recherche de deux primitives: une pour trouver une solution particulière de l'équation en z, puis une pour trouver une primitive de cette solution particulière.

Exercice 11 Que se passe-t-il si la fonction f est une somme de fonctions continues $f = f_1 + \cdots + f_n$?

[Ind] C'est le principe de superpositions des solutions

[Dem] On cherche des solutions particulières y_1, y_2, ... aux équations avec les seconds membres f_1, f_2, ... On vérifie ensuite que la somme $y_1 + y_2 + \cdots$ est bien une solution particulière de léquation dont le second membe est f.

Cas particulier d'un second membre exponentiel-polynôme La recherche de solutions particulières par la méthode de variations des constantes peut se révéler redoutable lors de ses applications pratiques, en particulier on peut être amené à faire quantités de calculs pour trouver en définitive une forme très simple de solutions, c'est en particulier vrai pour les plus simples des équations différentielles utilisées en sciences physiques: les équations linéaires à coefficients constants des seconds membres de la forme somme de produit de fonctions exponentielles et de polynômes.

Proposition 6 *Soit m un scalaire et P une fonction polynomiale de degré $d \geq 0$. Une solution particulière de l'équation $y'' + ay' + by = \mathrm{e}^{mx}P(x)$ s'écrit sous la forme $Q(x)\mathrm{e}^{mx}$ où Q est une fonction polynomiale :*

- de degré d si $m^2 + am + b \neq 0$, c'est à dire si m n'est pas solution de l'équation caractéristique,

- de degré $d+1$ et de valuation supérieure ou égale à 1 si $m^2 + am + b = 0$ et $2m + a \neq 0$, c'est à dire si m est une racine simple de l'équation caractéristique,

- de degré $d+2$ et de valuation supérieure ou égale à 2 si $m^2 + am + b = 0$ et $2m + b = 0$, c'est à dire si m est la racine double de l'équation caractéristique.

[Ind] Faire une analyse-synthèse

[Dem] Soit Q un polynôme, la fonction $x \mapsto e^{mx}Q(x)$ est une solution définie sur $\mathbb{R}$ de l'équation si et seulement si:

$$(m^2 + am + b)Q + (2m + a)Q' + Q'' = P$$

Si $m^2 + am + b \neq 0$, l'application U qui à un polynôme Q associe le polynôme $(m^2 + am + b)Q + (2m + a)Q' + Q''$ est un endomorphisme injectif de $K_d[X]$ car U respecte les degrés, pour cette raison, U est un automorphisme de cet espace vectoriel.
La résolution de l'équation $U(Q) = P$ se fait alors par identification des coefficients en prenant pour inconnue Q un polynôme de degré d.

Si $m^2+am+b = 0$ et $2m+a \neq 0$, l'application V qui à un polynôme Q associe le polynôme $(2m+a)Q'+Q''$ est une application linéaire de $K_{d+1}[X]$ dans $K_d[X]$. Son noyau est constitué des polynômes constants car pour tout $Q \in K_{d+1}[X]$, le degré de $V(Q)$ est celui de Q'. D'après le théorème du rang, V est donc surjective et l'équation $V(Q) = P$ est résoluble à un polynôme constant près.

Si $m^2 + am + b = 2m + a = 0$, l'équation se réduit à $Q'' = P$, on trouve donc facilement Q à un polynôme de degré inférieur ou égal à 1 près.

Exercice 12 Résoudre l'équation $y'' + \omega^2 y = a\cos(\alpha x)$ $(\omega \neq 0)$.

[Ind] Quel est la nature du second membre? A quoi peut-on s'attendre?

[Dem] La solution générale de l'équation homogène est $y_0 = \lambda\cos\omega t + \mu\sin\omega t$ où λ et μ sont des constantes arbitraires.
Si $\alpha^2 \neq \omega^2$, on trouve une solution particulière de la forme $y_1 = \frac{a}{\omega^2 - \alpha^2}\cos\alpha t$.
Si $\alpha^2 \neq \omega^2$, on trouve une solution particulière de la forme $y_1 = \frac{a}{2\omega}t\sin\omega t$.
La solution générale de l'équarion est alors $y_0 + y_1$.

Exercice 13 Soit a un réel et pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on considère la fonction Y_α définie sur $\mathbb{R}$ par

$$Y_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ a\frac{x}{\alpha} & \text{si } 0 < x \leq \alpha \\ a & \text{si } x > \alpha \end{cases}$$

Soit ω un réel strictement positif, trouver la solution de l'équation $y'' + \omega^2 y = Y_\alpha(x)$ vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$.
Que se passe-t-il lorsque l'on fait tendre α vers 0?

[Ind] Quel est la nature du second membre? Découper $\mathbb{R}$ en intervalles où l'on puisse trouver simplement des solutions, puis les raccorder.

[Dem] Il existe une unique fonction y de classe C^2 vérifaint ces conditions.
Elle est nulle sur $\mathbb{R}_-$.
Pour tout $x \in [0,\alpha]$ on a $y'' + \omega^2 y = a\frac{x}{\alpha}$ et on doit avoir $y(0) = y'(0) = 0$. On trouve donc $y = a\frac{x}{\alpha\omega^2} - \frac{a}{\alpha\omega^3}\sin\omega t$.

Pour tout $x \geq \alpha$, on a $y''+\omega^2 y = a$ et par continuité, $y(\alpha) = \frac{a}{\omega^2} - \frac{a}{\alpha\omega^3}\sin\omega\alpha$ et $y'(\alpha) = \frac{a}{\alpha\omega^2} - \frac{a}{\alpha\omega^2}\cos\omega\alpha$. On cherche donc les constantes λ et μ pour que la fonction $y = \frac{a}{\omega^2} + \lambda\cos\omega t + \mu\sin\omega t$ vérifie les conditions désirées en α et on trouve

$$\lambda = \left(y(\alpha) - \frac{a}{\omega^2}\right)\cos\omega\alpha - y'(\alpha)\frac{\sin\omega\alpha}{\omega}$$

et

$$\mu = \left(y(\alpha) - \frac{a}{\omega^2}\right)\sin\omega\alpha + y'(\alpha)\frac{\cos\omega\alpha}{\omega}$$

.

Faisons un développement limité des coefficients λ et μ pour α voisin de 0: on a $y(\alpha) = a\frac{\alpha^2}{6} + o(\alpha^2)$, $y'(\alpha) = \frac{a}{2\alpha} + o(\alpha^2)$ et donc

$$\lambda = -\frac{a}{\omega^2} + o(\alpha)$$

et

$$\mu = -\frac{a\alpha}{2\omega} + o(\alpha)$$

Ainsi, pour $x \geq \alpha$,

$$y = \frac{a}{\omega^2}(1-\cos\omega x) - \alpha\frac{a}{2\omega}\sin\omega x + o(\alpha)$$

Ce qui est remarquable car la partie $\frac{a}{\omega^2}(1-\cos\omega x)$ est la solution de l'équation $y''+\omega^2 y = a$ satisfaisant aux conditions $y(0) = y'(0) = 0$.

Exercice 14 Soit a un réel et pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on considère la fonction Z_α définie sur $\mathbb{R}$ par

$$Z_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ a\frac{1}{\alpha} & \text{si } 0 < x \leq \alpha \\ 0 & \text{si } x > \alpha \end{cases}$$

Soit ω un réel strictement positif, montrer qu'il existe une unique fonction y de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et de classe C^2 sur $\mathbb{R} - 0,\alpha$ vérifiant les conditions

$$\forall x \in \mathbb{R} - 0,\alpha \quad y''(x) + \omega^2 y(x) = Z_\alpha(x)$$

$$y(-1) = y'(-1) = 0$$

Que se passe-t-il lorsque l'on fait tendre α vers 0 ?

[Ind] Quel est la nature du second membre ? Découper $\mathbb{R}$ en intervalles où l'on puisse trouver simplement des solutions, puis les raccorder (Travailler par analyse-synthèse)

[Dem] On cherche à raccorder au mieux les solutions des équations sur les différents intervalles.
La fonction y est nulle sur $\mathbb{R}_-$.

Pour x compris entre 0 et α, on trouve les constantes arbitraires pour obtenir un raccordement de classe C^1 en 0, c'est à dire $y(0) = y'(0) = 0$, on obtient : $y = \frac{a}{\alpha\omega^2}(1-\cos\omega x)$

On cherche ensuite la solution pour $x \geq \alpha$ avec les conditions initiales $y(\alpha) = \frac{a}{\alpha\omega^2}(1-\cos\omega\alpha)$ et $y'(\alpha) = \frac{a}{\alpha\omega}\sin\omega\alpha$. On trouve alors, pour $x \geq \alpha$, $y = \lambda\cos\omega x + \mu\sin\omega x$ avec

$$\lambda = y(\alpha)\cos\omega\alpha - y'(\alpha)\frac{\sin\omega\alpha}{\omega}$$

et

$$\mu = y(\alpha)\sin\omega\alpha + y'(\alpha)\frac{\cos\omega\alpha}{\omega}$$

On fait un développement limité des coefficients λ et μ pour α voisin de 0: on trouve, en définitive, pour $x \geq \alpha$:

$$y = \frac{a}{\omega}\sin\omega x - \alpha a\cos\omega x + o(\alpha)$$

Ce qui est remarquable car la fonction $y_0 = \frac{a}{\omega}\sin\omega x$ est la solution de l'équation $y''+\omega^2 y = 0$ satisfaisant aux conditions $y(0) = 0$ et $y'(0) = a$.