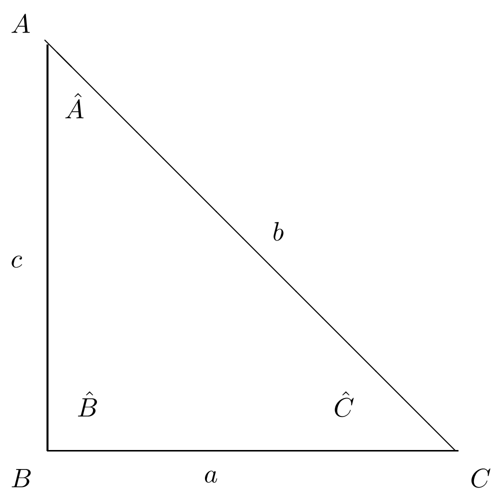
Trigonométrie

0.1 Historique

La trigonométrie a toujours préoccupé les mathématiciens. Nous voyons apparaître les degrés et ce fameux 360° chez les babyloniens ce qui correspondait pour eux à peu près à une année. π pour "periphery" est introduit en 1706 par W. Jones. Pour mesurer un angle on peut mesurer la corde, le sinus rectus est né en -150 ans. On a retrouvé des tables de conversion entre cordes et angles. La fonction sin tire ses origines en Inde (630) et en Europe médiévale (1464). En 630 on retrouve $\sin\alpha = \frac{1}{2}Cord(2\alpha)$. Ptolémée donne géométriquement en 150 les formules $\sin(x+y)$ et $\cos(x-y)$. Moivre (1730) donne sa formule $\sin(n+1)x = \sin x\cos nx + \cos x \sin nx$. Enfin entre 1750 et 1850 Newton, Leibniz, Bernouilli donnent la définition des fonctions trigonométriques à l'aide des séries. Leur approche est géométrique sans trop se soucier de la convergence mais cela suffit pour donner des valeurs approchées.

0.2 Définition géométrique

Dans le triangle ABC, rectangle en B:



$$\frac{a}{b} = \cos\hat{C} = \sin\hat{A}$$
$$\frac{c}{b} = \sin\hat{C} = \cos\hat{A}$$
$$\frac{c}{a} = \tan\hat{C} = \mathrm{cotan}\,\hat{A}$$
$$\frac{a}{c} = \mathrm{cotan}\,\hat{C} = \tan\hat{A}$$

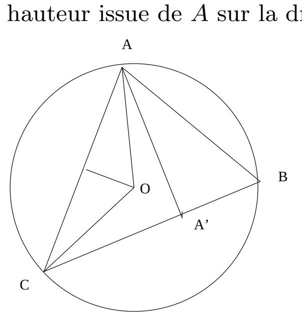
Exercice 1 Dans un triangle ABC quelconque (mais non plat), montrer que

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = 2R$$

où R est le rayon du cercle circonscrit.

[Ind] Utiliser le pied A' de la hauteur issue de A pour montrer que $\sin\hat{B} = \frac{AA'}{c}$.
En notant Ω le centre du cercle circonscrit, montrer que $\sin(\frac{1}{2}\widehat{A\Omega C}) = \frac{b}{2R}$

[Dem]
On vérifie, en notant A' le pied de la hauteur issue de A sur la droite (BC),

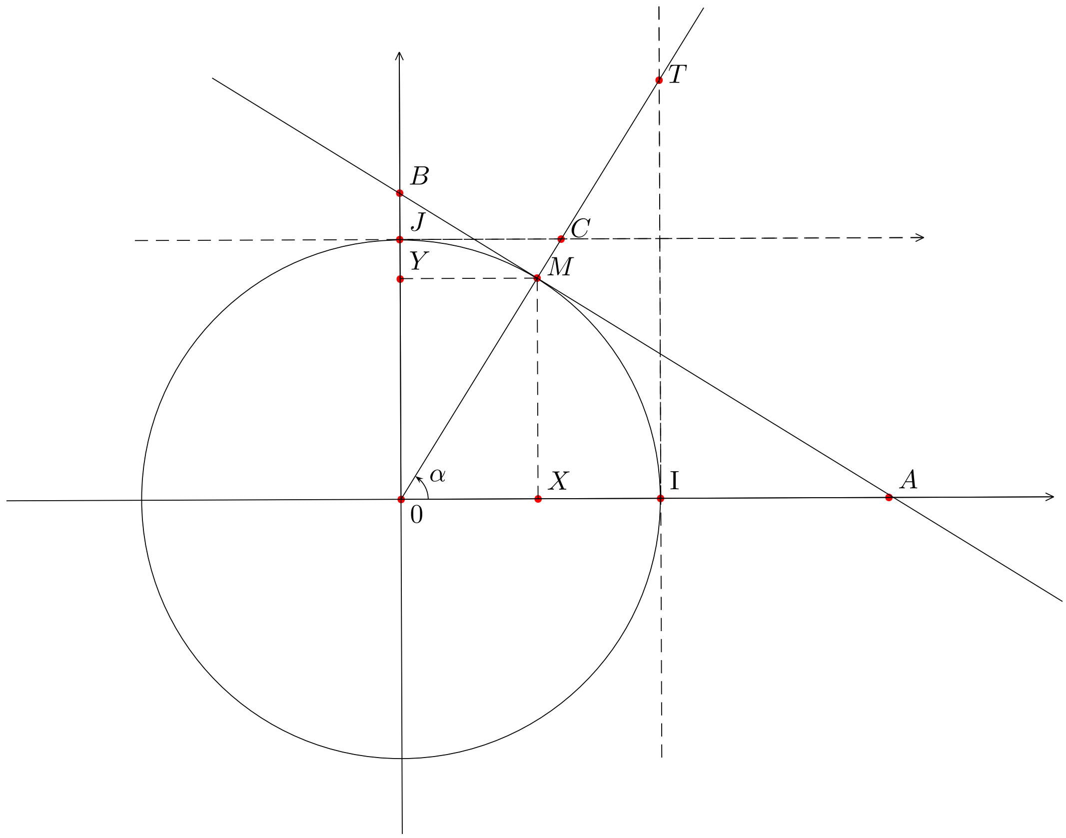


que le sinus de l'angle en B est égal à $\frac{AA'}{c}$ (en distinguant deux cas suivant que l'angle en B est aigu ou obtus). On en déduit de la même façon que $\sin\hat{C} = \frac{AA'}{b}$ et donc

$$\frac{c}{\sin\hat{C}} = \frac{b}{\sin\hat{B}}$$

Par permutation des points, on démontre alors les deux premières égalités.
Notons Ω le centre du cercle circonscrit; l'angle géométrique $A\Omega C$ est le double de l'angle ABC, le triangle $A\Omega C$ étant isocèle, on en déduit que le sinus de la moitié de l'angle $A\Omega C$ est égal à $\frac{b}{2R}$ d'où la dernière égalité. On peut alors revoir la propriété de l'angle au centre et la somme des angles d'un triangle.

Pour les angles orientés, on oriente le plan par tradition de I vers J et en notant R le rayon du cercle, X et Y sont les projections orthogonales du point M sur les axes (OI) et (OJ) orientés par $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$; T et C les intersections de la droite (OM) et des axes tangents au cercle en I et J orientés par $\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{OI}$, la tangente au cercle au point M coupe les droites (OI) et (OJ) aux points A et B.



On a alors les relations:

$$\overline{OX} = R\cos\alpha \qquad \overline{OY} = R\sin\alpha$$

et dès que les points T, C, A et B sont définis:

$$\overline{IT} = R\tan\alpha \qquad \overline{JC} = R\,\mathrm{cotan}\,\alpha$$

$$AM = R\,|\tan\alpha| \qquad MB = R\,|\mathrm{cotan}\,\alpha|$$

$$OA = OT = \frac{R}{|\cos\alpha|} \qquad OB = OC = \frac{R}{|\sin\alpha|}$$

Exercice 2 Trouver, à l'aide du cercle trigonométrique, le moyen de construire géométriquement l'inverse d'un réel.

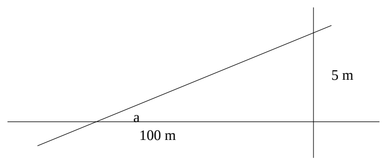
[Ind] La tangente est l'inverse de la cotangente

[Dem] Les axes permettant de définir les tangentes et les cotangentes sont en pointillés. En portant sur l'axe permettant de définir les tangentes un point d'abscisse x, l'intersection de la droite passant par ce point et l'origine, coupe l'axe définissant les cotangentes en point d'abscisse $1/x$.

Exercice 3 Que représente sur un panneau routier une «pente» à 5%? Existe-t-il un lien avec la «pente d'une droite»?

[Ind] Ce sont les mêmes notions

[Dem] La route fait un angle avec l'horizontale dont la tangente est 0,05. C'est la même notion pour une droite, l'horizontale étant ici l'axe des abscisses. Remarquons que l'angle correspondant à $\tan\alpha = 0{,}05$ est inférieur à 3°.



0.3 Propriétés remarquables

Pour tout réel α:

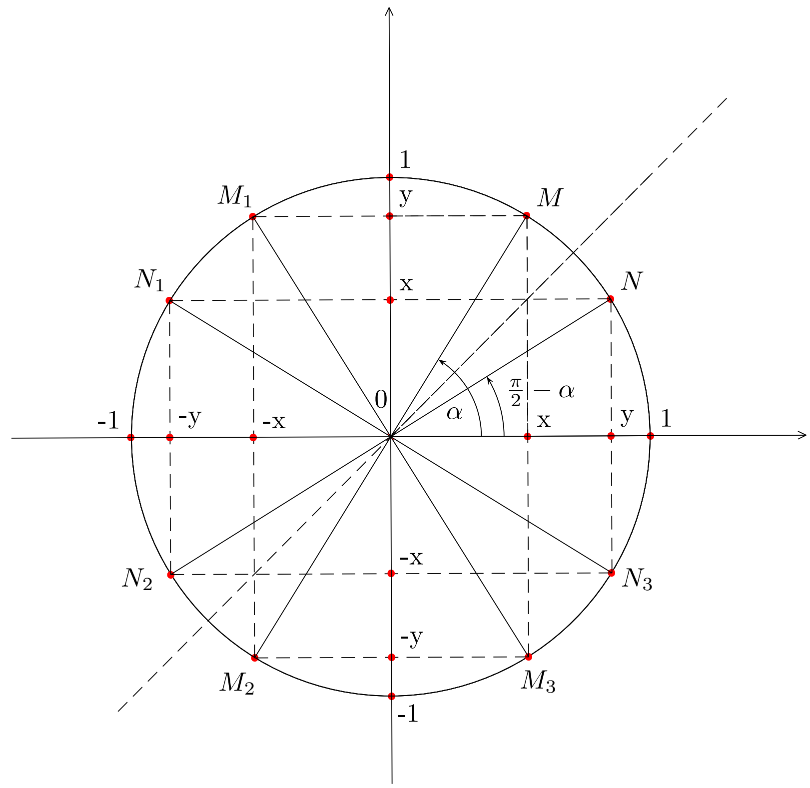
$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

Par symétrie orthogonale, on trouve les formules remarquables de transformation des angles:

par exemple, le symétrique d'un point de coordonées polaires (ρ,α) par rapport à une symétrie orthogonale d'axe la première bissectrice est le point de coordonées polaires $(\rho,\frac{\pi}{2}-\alpha)$, on en déduit alors la cinquième colonne du tableau.

D'autre part en utilisant $e^{-i\alpha} = \dfrac{1}{e^{i\alpha}} = \dfrac{1}{\cos\alpha + i\sin\alpha} = \dfrac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{1}$ et puis par exemple $e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-i\alpha} = i(\cos\alpha - i\sin\alpha) = \sin\alpha + i\cos\alpha$ on trouve les résultats suivants.

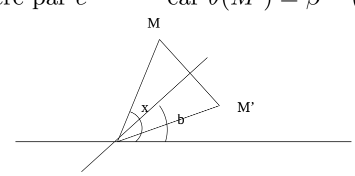
α	$-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$
$\exp(i\alpha)$	$1/\exp(i\alpha)$	$-\exp(i\alpha)$	$-1/\exp(i\alpha)$	$i/\exp(i\alpha)$	$i\exp(i\alpha)$
$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$1/\tan\alpha$	$-1/\tan\alpha$



Exercice 4 Dans les dessins précédents, reconnaître en fonction de α les coordonnées polaires des différents points marqués sur le cercle trigonométrique

[Ind] Reconnaitre les transformations géométriques qui permettent de construire les différents points.

[Dem] Pour une symétrie orthogonale par rapport à une droite d'angle polaire β l'image d'un point M repéré par e^{ix} est le point M' repéré par $e^{i(2\beta-x)}$ car $\theta(M') = \beta - (x - \beta) = 2\beta - x$.



Le point N est obtenu à partir de M par une symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice, l'angle entre cette droite et l'axe des abscisses est $\dfrac{\pi}{4}$, le point N a donc pour coordonnées polaires $(R{,}2\dfrac{\pi}{4} - \alpha)$.
Les points M_1 et N_1 sont obtenus à partir de M et N par symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées, l'angle de cette droite et celle des abscisses est $\dfrac{\pi}{2}$, les coordonnées polaires de M_1 et N_1 sont donc $(R{,}2\dfrac{\pi}{2} - \alpha)$ et $(R{,}2\dfrac{\pi}{2} - (\dfrac{\pi}{2} - \alpha))$ c'est à dire $(R{,}\dfrac{\pi}{2} + \alpha)$.
Les points M_2 et N_2 sont obtenus par symétrie centrale de centre 0, leurs coordonnées polaires sont donc $(R{,}\pi + \alpha)$ et $(R{,}3\dfrac{\pi}{2} - \alpha)$.
Enfin les points M_3 et N_3 sont obtenus à partir de M et N par symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses, leurs coordonnées polaires sont donc $(R{,}-\alpha)$ et $(R{,}\alpha - \dfrac{\pi}{2})$.

Valeurs à connaître ($j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$) :

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\exp(i\alpha)$	1	$-ij$	$\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$	$-\bar{\jmath}$	i
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$

Exercice 5 Soit a un réel, trouver en fonction de a les solutions des équations:
1) $\cos x = \cos a$ 2) $\sin x = \sin a$ 3) $\cos x = \sin a$ 4) $\sin x = \cos a$

[Ind] S'aider du graphe des fonctions ou du cercle trigonométrique

[Dem] 1) Les solutions sont de la forme $a + 2k\pi$ et $-a + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
2) Les solutions sont de la forme $a + 2k\pi$ et $\pi - a + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
3) On a $\sin a = \cos(\frac{\pi}{2} - a)$. Les solutions sont de la forme $-a + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et $a - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
4) On a $\cos a = \sin(\frac{\pi}{2} - a)$. Les solutions sont de la forme $-a + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et $a + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 6 La formule dite des petits angles est $\sin x \approx x$. Qelle est son domaine de validité si on veut une approximation à 1% près?
Que devient cette formule si x est exprimé en degré decimal? Qelle est en degrés le domaine de validité de cette formule à 1% près

[Ind] On veut que $|x - \sin x| \leq 0.01\,|\sin x|$

[Dem] On veut trouver un intervalle $[-a,a]$ centré en 0 tel que pour tout x apprtenant à $[-a,a] - \{0\}$, $\dfrac{|\sin x - x|}{|\sin x|} \leq 0{,}01$. La fonction sinus étant impaire, il suffit de résoudre l'inéquation pour $x > 0$ et puisque l'on cherche une approximation pour des petits angles, on peut supposer que $x < \frac{\pi}{2}$. On résoud alors l'inéquation

$$\frac{x}{1 + 0{,}01} \leq \sin x$$

la fonction sinus étant concave sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.
Il suffit ensuite de trouver a tel que $a = 1{,}01 \sin a$; soit $a \approx 0{,}2441$ car alors, pour tout $x \in [0,a]$, $x/1{,}01 \leq \sin x$
La formule devient $\sin x^\circ \approx \frac{\pi}{180} x^\circ$ valide à 1% près pour $|x^\circ| \leq 13{,}98^\circ$. La valeur de $\tan 14^\circ \approx 0{,}25$.

Exercice 7 Quelle est (en seconde d'arc) l'angle sous lequel est vu un diamètre du soleil pour un observateur situé à une année lumière de celui-ci? (diamètre estimé du soleil 960 000 km)

[Ind] Faire un dessin

[Dem] La distance au soleil est alors $300000 \times 365.25 \times 24 \times 60 \times 60 \approx 9{,}467 \times 10^{12} km$. La tangente de l'angle moitié $\alpha/2$ est $\dfrac{480000}{9{,}467 \times 10^{12}} = 5{,}07 \times 10^{-8}$. On peut appliquer la formule des petits angles et donc $\alpha \approx 1{,}14 \times 10^{-7}$. Puisque une mesure d'un radian est de $\frac{180}{\pi} 3600 \approx 206265$ secondes d'arc, on trouve $\alpha \approx 0{,}02''$.

0.4 Définition analytique

Pour tout complexe z :

$$\exp z = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$$

et on vérifie que

$$\forall z, z' \in \mathbb{C} \quad \exp(z + z') = \exp z \, \exp z'$$

Pour tout réel α:

$$\cos\alpha = \Re(\exp(i\alpha)) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{\alpha^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin\alpha = \mathrm{Im}(\exp(i\alpha)) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\mathrm{e}^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

Les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques, respectivement paire et impaire, dérivables:

$$\forall\alpha\in\mathbb{R}\quad \cos'(\alpha) = -\sin(\alpha) = \cos(\alpha+\frac{\pi}{2})$$

$$\forall\alpha\in\mathbb{R}\quad \sin'(\alpha) = \cos(\alpha) = \sin(\alpha+\frac{\pi}{2})$$

D'autre part

$$\forall\alpha\in\mathbb{R}\quad \cos\alpha = 0 \Longleftrightarrow \alpha\in\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$$

$$\forall\alpha\in\mathbb{R}\quad \sin\alpha = 0 \Longleftrightarrow \alpha\in\pi\mathbb{Z}$$

On définit les fonctions tangente et cotangente par

$$\forall\alpha\in\mathbb{R}\quad \alpha\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\quad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\forall\alpha\in\mathbb{R}\quad \alpha\notin\pi\mathbb{Z}\quad \mathrm{cotan}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

La fonction tangente est impaire, π-périodique et dérivable :

$$\forall\alpha\in\mathbb{R}-\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)\quad \tan'(\alpha) = 1+\tan^2(\alpha) = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

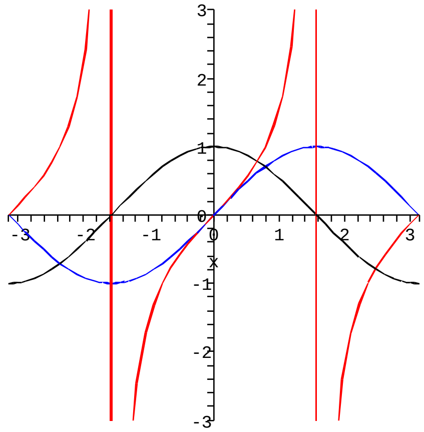
Exercice 8 Trouver les axes et centres de symétries des graphes des fonctions cosinus, sinus, tangente et cotangente. Tracer précisément ces fonctions dans un même repère orthonormé ainsi que leurs tangentes aux points d'intersection avec les axes(unité 3cm).

[Ind] Appliquer les formules permettant de trouver les centres et les axes de symétries du graphe d'une fonction

[Dem] On applique les formules permettant de trouver les centres et les axes de symétries du graphe d'une fonction f :

Si, a et b étant des réels donnés, pour tout x du domaine de définition de f, $2a-x$ appartient à ce domaine et que $f(2a-x)=f(x)$ alors la droite d'équation $x=a$ est un axe de symétrie du graphe alors que si $f(2a-x)=2b-f(x)$, le point de coordonnées (a,b) est un centre de symétrie de ce graphe.

L'entier k désignant un entier relatif quelconque, les points de coordonnées $(k\pi,0)$ sont des centres de symétries des graphes de sinus et tangente, les points de coordonnées $(\frac{\pi}{2}+k\pi,0)$ sont des centres de symétries des graphes de cosinus et cotangente, les droites d'équations $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ sont des axes de symétries des graphes de sinus et tangente tandis que les droites d'équations $x = k\pi$ sont des axes de symétries des graphes de cosinus et cotangente.



0.5 Formules trigonométriques

0.5.1 Somme de deux angles

Pour tous réels α et β

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

et si les tangentes des angles α, β et $\alpha+\beta$ sont définies, on a alors :

$$\tan\alpha\tan\beta \neq 1 \quad \text{et} \quad \tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

Exercice 9 a) Montrer que, pour tous réels α et β:

$$\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$$

b) Quelles sont les fonctions f 2 fois dérivables qui vérifient :

$$\forall a,b \in \mathbb{R} \quad f^2(a) - f^2(b) = f(a+b)f(a-b)$$

[Ind] a) Calculer...
b) Remarquer que f est alors impaire puis dériver Une fois par rapport a x puis par rapport à y.

[Dem] a) On a

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) &= (\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)((\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)\\ &= \sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta\\ &= \sin^2\alpha(1-\sin^2\beta) - (1-\sin^2\alpha)\sin^2\beta\\ &= \sin^2\alpha - \sin^2\beta\end{aligned}$$

b) On a donc, avec $b = a$, pour tout a, $f^2(2a)f^2(0) = f^2(a) - f^2(a) = 0$, on en déduit que $f(0) = 0$, puis, avec $a = 0$, pour tout b, $-f^2(b) = f(b)f(-b)$, si $f(b) \neq 0$, alors $f(-b) = -f(b)$, si $f(b) = 0$, alors, en changeant b en $-b$, on trouve $-f^2(-b) = f(-b)f(b) = 0$ et donc $f(-b) = 0$, ainsi dans tous les cas $f(-b) = -f(b)$, la fonction est donc impaire.

En dérivant cette égalité par rapport à a puis par rapport à b, on trouve, après simplifications

$$f''(a+b)f(a-b) = f''(a-b)f(a+b)$$

On en déduit, puisque, l'on peut écrire deux réels arbitraires x et y sous la forme $x = a+b$ et $y = a-b$ que, pour tous réels x et y : $f''(x)f(y) = f''(y)f(x)$.
Si la fonction f n'est pas nulle, on peut trouver y tel que $f(y) \neq 0$, on en déduit qu'il existe une constante k telle que f est solution de l'équation différentielle $f'' = kf$. Suivant le signe de k, les seules fonctions impaires solutions de cette équation sont de la forme $x- > Ax$, $x- > A\sin\omega x$ et $x- > A\,\mathrm{sh}\,\omega x$ où A et ω sont des constantes. On vérifie alors que toutes ces fonctions vérifient l'identité, ce qui résoud le problème.

0.5.2 Angle double et angle moitié

Pour tout réel α:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$
$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$$

Si la tangente de $\frac{\alpha}{2}$ est définie ($\cos\frac{\alpha}{2} \neq 0$), en posant $t = \tan\frac{\alpha}{2}$, on a :

$$\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$$

si de plus $\cos\alpha \neq 0$

$$|t| \neq 1 \quad \text{et} \quad \tan\alpha = \frac{2t}{1-t^2}$$

Exercice 10 Montrer qu'il existe une infinité de solutions à l'équation $a^2 + b^2 = c^2$ $(a,b,c \in \mathbb{Z})$

[Ind] Le problème peut se tranformer en la recherche de points sur un cercle

[Dem] La question revient à démontrer qu'il existe une infinité de points de coordonnées rationnelles sur le cercle unité, c'est le cas, puisqu'il suffit de prendre les points de coordonnées $(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2})$ avec $t \in \mathbb{Q}$. Par exemple $a = 1-t^2$, $b = 2t$, $c = 1+t^2$ ce qui donne pour $t = 2$: (3,4,5) et pour $t = 3$: (8,6,10)...

0.5.3 Formules de factorisation

Pour tous réel α et β: Le calcul $e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)$ ou encore

$$\mathrm{e}^{i\alpha} + \mathrm{e}^{i\beta} = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\mathrm{e}^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$\mathrm{e}^{i\alpha} - \mathrm{e}^{i\beta} = 2i\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\mathrm{e}^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

et si $\cos\alpha\cos\beta\neq 0$:

$$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

Exercice 11 Soit $\alpha\in[0,2\pi[$. Quels sont les modules et les arguments des nombres complexes $1+\mathrm{e}^{i\alpha}$ et $1-\mathrm{e}^{i\alpha}$.

[Ind] le nombre complexe 1 est de module 1 et d'argument nul. Appliquer les formules de transformations.

[Dem] On remarque que $1=\mathrm{e}^{i0}$, ainsi $1+\mathrm{e}^{i\alpha}=2\cos(\alpha/2)\mathrm{e}^{i\alpha/2}$ donc si α est compris entre 0 et π, le module est $\cos(\alpha/2)\geq 0$ et un argument est $\alpha/2$, si α est compris entre π et 2π, le module est $-2\cos(\alpha/2)$ et un argument est $\pi+\alpha/2$.
On a aussi $1-\mathrm{e}^{i\alpha}=-2i\sin(\alpha/2)\mathrm{e}^{i\alpha/2}=2\sin(\alpha/2)\mathrm{e}^{i(\alpha-\pi)/2}$, le module est donc $\sin(\alpha/2)$ et un argument $(\alpha-\pi)/2$.

Exercice 12 Montrer que $\dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}=\tan^2 x$, $\dfrac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}=\left(\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)^2$

[Ind] Essayer de transformer la partie la plus compliquée de l'identité

[Dem] Pour la première égalité, il suffit de remarquer que $1-\cos 2x=2\sin^2 x$ et que $1+\cos 2x=2\cos^2 x$.
Pour la deuxième égalité, on peut commencer en utilisant les formules de factorisation:

$$\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}=\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$$

puis en utilisant les formules donnant la tangente de la somme de deux angles

$$\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)^2$$

Exercice 13 Exprimer sous une forme simple $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\cos kx\cos(k+1)x}$

[Ind] Examiner parmi les formules de factorisation données celle qui donne un résultat intéressant

[Dem] On peut remarquer que $\tan(k+1)x-\tan kx=\dfrac{\sin x}{\cos kx\cos(k+1)x}$ donc

$$\tan(n+1)x=\sin x\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\cos kx\cos(k+1)x}$$

On en déduit la somme Σ cherchée lorsque $\sin x\neq 0$; si x est un multiple pair de π, alors $\Sigma=n+1$ et si x est un multiple impair de π, $\Sigma=-n-1$.

0.6 Techniques à connaître

0.6.1 Amplitude-phase

Soient a et b des réels $(a,b) \neq (0,0)$, il existe un unique réel φ appartenant à $]-\pi,\pi]$ tel que

$$a + ib = \sqrt{a^2+b^2}\exp(i\varphi)$$

On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)$$

Exercice 14 Quel est le maximum de la fonction $x \mapsto 3\cos x + 4\sin x$?

[Ind] Apliquer la méthode de transformation Amplitude-phase.

[Dem] Il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout réel x, on a $3\cos x + 4\sin x = 5\cos(x-\varphi)$, le maximum de la fonction est donc 5.

0.6.2 Linéarisation

Pour tous réels α et β:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta))$$

En revanche, pour les puissances, il est préférable d'utiliser les formules d'Euler : pour tout réel α

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{i\alpha}+\mathrm{e}^{-i\alpha}\right)$$

et

$$\sin\alpha = -\frac{i}{2}\left(\mathrm{e}^{i\alpha}-\mathrm{e}^{-i\alpha}\right)$$

on obtient, en utilisant la formule du binôme et la formule de De Moivre :

$$\begin{aligned}
\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\cos\alpha)^{2n} &= \frac{1}{2^{2n}}\left(\binom{2n}{n} + 2\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}\cos 2(n-k)\alpha\right) \\
(\cos\alpha)^{2n+1} &= \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}\cos(2(n-k)+1)\alpha)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\sin\alpha)^{2n} &= \frac{1}{2^{2n}}\left(\binom{2n}{n} + 2(-1)^n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}(-1)^k\cos 2(n-k)\alpha\right) \\
(\sin\alpha)^{2n+1} &= \frac{(-1)^n}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}(-1)^k\sin(2(n-k)+1)\alpha)
\end{aligned}$$

Exercice 15 Trouver des primitives des fonctions $x \mapsto \cos^4 x$, $x \mapsto \cos^5 x$, $x \mapsto \cos^4 x \sin^4 x$

[Ind] Linéariser les expressions.

[Dem] Pour tout réel x, on a $\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$, d'où

$$\int \cos^4 x dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + \text{cste}$$

Pour tout réel x, on a $\cos^5 x = \frac{5}{8}\cos x + \frac{5}{16}\cos 3x + \frac{1}{16}\cos 5x$, d'où

$$\int \cos^5 x dx = \frac{5}{8}\sin x + \frac{5}{48}\sin 3x + \frac{1}{80}\sin 5x + \text{cste}$$

On peut aussi faire un changement de variable dans l'intégrale en remarquant que $\cos^5 x = (1 - \sin^2 x)^2 \cos x$, on trouve alors

$$\int \cos^5 x dx = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + \text{cste}$$

Pour tout réel x, on a $\cos^4 x \sin^4 x = \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^4 = \frac{1}{16}\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{8}\cos 8x\right)$, d'où

$$\int \sin^4 x \cos^4 x dx = \frac{1}{16}\left(\frac{3}{8}x - \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{64}\sin 8x\right) + \text{cste}$$

0.6.3 Somme d'une progression géométrique

Pour tout réel α et tout entier naturel n

$$\sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} k\alpha = \left\{ \begin{array}{c} \Re \\ \text{Im} \end{array} \right\} \left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\alpha} \right)$$

On applique alors la formule

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad z \neq 1 \implies \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

pour trouver, si $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Z}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \cos k\alpha = \cos n\frac{\alpha}{2} \frac{\sin \frac{n+1}{2}\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$
$$\sum_{k=0}^{n} \sin k\alpha = \sin n\frac{\alpha}{2} \frac{\sin \frac{n+1}{2}\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

en appliquant les formules de factorisation.

Exercice 16 Exprimer sous une forme simple $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos kx$

[Ind] Penser à la formule du binôme.

[Dem] La somme Σ cherchée est la partie réelle de $(1 + \mathrm{e}^{ix})^n$ donc

$$\Sigma = 2^n \cos^n \frac{x}{2} \cos n\frac{x}{2}$$

0.6.4 Développement de $\cos nx$ et $\sin nx$

En utilisant la formule de De Moivre, on peut écrire, pour tout réel α et tout entier naturel n:

$$\cos nx + i\sin nx = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \sin^k x \cos^{n-k} x$$

Ce qui permet, en égalant les parties réelles, d'écrire $\cos nx$ comme un polynôme en $\cos x$:

$$\cos nx = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{2k} (-1)^k (1-\cos^2 x)^k \cos^{n-2k} x$$

Exercice 17 Calculer $\tan 6\alpha$ en fonction de $\tan\alpha$. En déduire une équation algébrique que vérifie $x = \tan\frac{\pi}{24}$.

[Ind] Calculer $\tan 6\alpha$ en fonction de $\tan 3\alpha$, puis $\tan 3\alpha$ en fonction $\tan 2\alpha$ et $\tan\alpha$ et enfin $\tan 2\alpha$ en fonction de $\tan\alpha$.

[Dem] On peut développer $\sin 6x$ et $\cos 6x$, puis remplacer $\sin x$ par $\cos x \tan x$ et $\cos^2 x$ par $\frac{1}{1+\tan^2 x}$, on peut aussi utiliser les formules donnant la tangente de la somme de deux angles, ce qui donne ici des calculs légèrement moins compliqués.
On a, en supposant que toutes les tangentes considérées existent et en posant $T = \tan\alpha$:

$$\tan 2\alpha = \frac{2T}{1-T^2}$$

$$\tan 3\alpha = \frac{\tan 2\alpha + \tan\alpha}{1-\tan 2\alpha\tan\alpha} = \frac{3T-T^3}{1-3T^2}$$

$$\tan 6\alpha = \frac{2\tan 3\alpha}{1-\tan^2 3\alpha} = \frac{6T-20T^3+6T^5}{1-15T^2+15T^4-T^6}$$

On en déduit que x vérifie l'équation

$$6x - 20x^3 + 6x^5 = 1 - 15x^2 + 15x^4 - x^6$$

0.7 Fonctions réciproques

0.7.1 Arcsin

La résolution de l'équation $\sin\theta = x$ où x est un réel donné n'est possible que si le réel x est compris entre -1 et 1 et admet alors une infinité de solutions. Si on note θ_0 l'une d'entre elles, les autres solutions sont de la forme $\theta_0 + 2k\pi$ et $\pi - \theta_0 + 2k\pi$ où k est un entier relatif quelconque. Parmi ces solutions, il en existe 2 comprises entre $-\pi$ et π (si $x \neq 1$) et qui sont soit toutes les deux positives soit toutes les deux négatives. On note $\operatorname{Arcsin} x$ celle de ces deux solutions qui est le plus proche de 0, elle est alors comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

Plus formellement, la restriction de la fonction sinus à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ est une bijection de cet intervalle sur l'intervalle $[-1,1]$ et la fonction réciproque noté Arcsin est une bijection de l'intervalle $[-1,1]$ sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.
On en déduit alors les propriétés de cette fonction: Elle est croissante, impaire, dérivable sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$ et

$$\forall x \in]-1,1[\quad \operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Exercice 18 Tracer précisément cette fonction dans un repère orthonormé (unité 5cm)

[Ind] Utiliser la symétrie par rapport à la première bissectrice.

[Dem] voir graphes

0.7.2 Arccos

La résolution de l'équation $\cos\theta = x$ où x est un réel donné n'est possible que si le réel x est compris entre -1 et 1 et admet alors une infinité de solutions. Si on note θ_0 l'une d'entre elles, les autres solutions sont de la forme $\theta_0 + 2k\pi$ et $-\theta_0 + 2k\pi$ où k est un entier relatif quelconque. Parmi ces solutions, il en existe 2 comprises entre $-\pi$ et π (si $x \neq 1$) et qui sont opposées. On note $\operatorname{Arccos} x$ celle qui est comprise entre 0 et π.

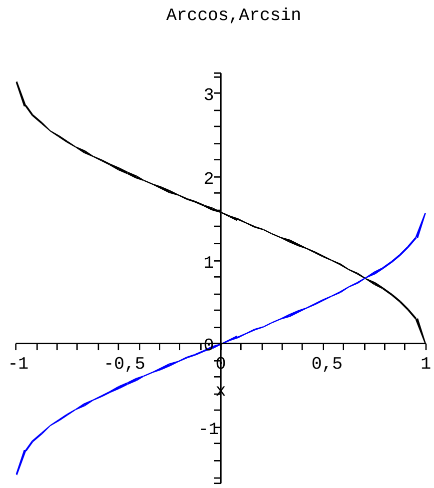
Plus formellement, la restriction de la fonction cosinus à l'intervalle $[0,\pi]$ est une bijection de cet intervalle sur l'intervalle $[-1,1]$ et la fonction réciproque noté Arccos est une bijection de l'intervalle $[-1,1]$ sur l'intervalle $[0,\pi]$.
On en déduit alors les propriétés de cette fonction: Elle est décroissante, dérivable sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$ et

$$\forall x \in]-1,1[\quad \operatorname{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Exercice 19 Tracer précisément cette fonction dans un repère orthonormé (unité 5cm)

[Ind] Utiliser la symétrie par rapport à la première bissectrice.

[Dem] voir graphes



Exercice 20 Montrer que

$$\forall x \in [-1,1] \quad \operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\forall x \in [-1,1] \quad \sin(\operatorname{Arccos}(x)) = \cos(\operatorname{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

[Ind] Vérifier

[Dem] Pour tout $x \in [-1,1]$, l'angle $\alpha = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x$ est compris entre 0 et π, vérifie $\cos\alpha = x$, on a donc $\alpha = \operatorname{Arccos} x$.
Il suffit de remarquer que le sinus d'un Arccosinus ou le cosinus d'un Arcsinus sont positifs et d'appliquer la formule: $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

0.7.3 Arctan

La résolution de l'équation $\tan\theta = x$ où x est un réel donné admet toujours une infinité de solutions. Si on note θ_0 l'une d'entre elles, les autres solutions sont de la forme $\theta_0 + k\pi$ où k est un entier relatif quelconque. Parmi ces solutions, il en existe une seule comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. On la note $\operatorname{Arctan} x$.

Plus formellement, la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ est une bijection de cet intervalle sur $\mathbb{R}$ et la fonction réciproque noté Arctan est une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

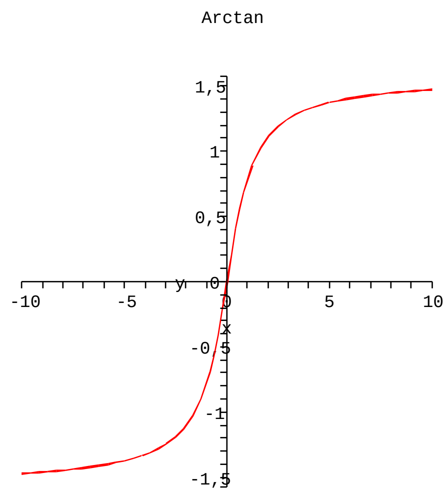
On en déduit alors les propriétés de cette fonction: Elle est croissante, impaire, dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Exercice 21 Tracer précisément cette fonction dans un repère orthonormé (unité 5cm)

[Ind] Utiliser la symétrie par rapport à la première bissectrice.

[Dem] voir graphes



Exercice 22 Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(\frac{1}{x}) = \operatorname{signe}(x)\frac{\pi}{2}$$

[Ind] La tangente de l'angle complémentaire est la cotangente.

[Dem] Puisque la fonction Arctangente est impaire, il suffit de démontrer la formule pour x strictement positif.

Pour tout réel $\theta \in]0,\frac{\pi}{2}[$, on a

$$\frac{1}{\tan\theta} = \tan(\frac{\pi}{2} - \theta)$$

donc, puisqu'alors $\frac{\pi}{2} - \theta$ est strictement compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on a, en posant, pour un réel x strictement positif, $\theta = \operatorname{Arctan} x$

$$\begin{aligned} \operatorname{Arctan}(\frac{1}{x}) &= \operatorname{Arctan}(\tan(\frac{\pi}{2} - \theta)) \\ &= \frac{\pi}{2} - \theta \\ &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x) \end{aligned}$$

Exercice 23 Déterminer les fonctions Arcsin et Arccos en fontion de la fonction Arctan

[Ind] Determiner la tangente d'un angle en fonction de son sinus

[Dem] Prenons α strictement compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, on a $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$ et donc, pour $x \in]-1,1[$,

$$\operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arccos} x = \operatorname{Arctan} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Exercice 24 Montrer que, si u et v sont des réels tels que $|\operatorname{Arctan} u + \operatorname{Arctan} v| < \frac{\pi}{2}$ alors

$$\operatorname{Arctan} u + \operatorname{Arctan} v = \operatorname{Arctan}\left(\frac{u+v}{1-uv}\right)$$

En déduire la formule de Machin

$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{239}$$

[Ind] Calculer l'arctangente de la tangente d'une somme de deux angles.

[Dem] Pour démontrer la formule, il suffit d'appliquer celle donnant la tangente de la somme de deux angles et de remarquer que si un réel x vérifie $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ alors $\operatorname{Arctan}(\tan x) = x$.

Appliquons la formule pour $u = v = \frac{1}{5}$

$$2\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} = \operatorname{Arctan}\frac{5}{12}$$

On a aussi

$$2\operatorname{Arctan}\frac{5}{12} = \operatorname{Arctan}\frac{120}{119}$$

On cherche w tel que $\operatorname{Arctan} 1 + \operatorname{Arctan} w = \operatorname{Arctan}\frac{120}{119}$, il suffit pour cela que $\frac{1+w}{1-w} = \frac{120}{119}$. En résolvant cet équation, on trouve $w = \frac{1}{239}$, ainsi

$$4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} = \frac{\pi}{4} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{239}$$

John Machin (1706) comme d'autres cherche des décimales de π. Cette formule lui a permis de trouver les 100 premières décimales.

0.8 Argument d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe non nul, x et y ses parties réelles et imaginaires, r son module et θ un argument que l'on prendra dans l'intervalle $]-\pi,\pi]$.

On a $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$, on en déduit que

$$\theta = \begin{cases} \operatorname{Arccos}\frac{x}{r} & \text{si } y \geq 0 \\ -\operatorname{Arccos}\frac{x}{r} & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

enfin de $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$, on en déduit que

$$\theta = \begin{cases} \operatorname{Arcsin}\frac{y}{r} & \text{si } x \geq 0 \\ -\operatorname{Arcsin}\frac{y}{r} + \pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y \geq 0 \\ -\operatorname{Arcsin}\frac{y}{r} - \pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y < 0 \end{cases}$$

Si $x \neq 0$, on a $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$, on en déduit que

$$\theta = \begin{cases} \operatorname{Arctan}\frac{y}{x} & \text{si } x > 0 \\ \operatorname{Arctan}\frac{y}{x} + \pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y \geq 0 \\ \operatorname{Arctan}\frac{y}{x} - \pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y < 0 \end{cases}$$

Ces formules demandent un peu d'attention et se retrouvent assez facilement en regardant le cercle trigonométrique.

Pour obtenir un formule plus simple, on passe par l'angle moitie qui est compris entre $\frac{-\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ et qui peut donc être déterminé par sa tangente ou son sinus. La formule avec la tangente étant un peu plus simple, c'est celle que l'on retient en général:

Si z est un réel négatif:$x < 0$ et $y = 0$, $\theta = \pi$, sinon, on a $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{y}{x + r}$, on en déduit que

$$\theta = 2 \operatorname{Arctan} \frac{y}{x + r}$$

Exercice 25 Montrer que si un nombre complexe z n'est pas un réel négatif, un argument de z est égal à $2 \operatorname{Arcsin} \frac{\operatorname{Im} z}{\sqrt{2\,|z|\,(\Re z + |z|)}}$

[Ind] Déterminer le sinus d'un angle en fonction de sa tangente

[Dem] Si α est strictement compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, on a

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$$

On en déduit, en notant r et $\theta \in]-\pi,\pi[$ le module et un argument de z et x,y ses parties réelle et imaginaire, que

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{y}{(x + r)\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x+r}\right)^2}} = \frac{y}{\sqrt{2r(x + r)}}$$

d'où la formule proposée.