Chapitre 8

Séries numériques

8.1 Généralités

Définition 1 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* K*. On appelle série de terme général* u_n *ou encore série* $\sum u_n$ *le couple de suites* $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}})$ *où, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*:*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

La suite (S_n) *est appelée suite des sommes partielles de la série.*
On dit que la série $\sum u_n$ *est convergente si la suite* (S_n) *est convergente vers une limite appelée somme de la série et on note alors:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Dans le cas contraire, on dit que la série est divergente

8.1.1 Une condition nécessaire de convergence

Proposition 1 *Soit* $(\sum u_n)$ *une série d'éléments de* K*. Si la série* $(\sum u_n)$ *est convergente alors la suite* (u_n) *converge vers* 0*.*

[Ind] On a, pour n supérieur à 1, $u_n = S_n - S_{n-1}$

Remarque: La réciproque est fausse. Si le terme général ne tend pas vers 0, la série est divergente, ce type de divergence est parfois appelé divergence grossière.

Exercice 1 Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n+1}$ n'est pas convergente.

Exercice 2 Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que la série $\sum \alpha^n$ est convergente si et seulement si $|\alpha| < 1$. Trouver sa somme.

8.1.2 Structure de l'ensemble des séries convergentes

Proposition 2 *L'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel et l'application qui, à une série convergente, associe sa somme est une application linéaire.*

[Ind] Vérifiez...

Proposition 3 *On ne modifie la nature (convergente ou divergente) d'une série* $(\sum u_n)$ *en modifiant un nombre fini de termes de la suite* (u_n)*.*

[Ind] A partir d'un certain rang, les deux sommes partielles ne diffèrent que par une constante.

8.1.3 Reste d'une série convergente

Définition 2 *Soit $(\sum u_n)$ une série convergente de K et S sa somme. On appelle suite des restes de la série, la suite dont le terme général est $R_n = S - \sum_{k=0}^{n} u_k$.*

Proposition 4 *Soit (R_n) la suite des restes de la série convergente $(\sum u_n)$ de somme S. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a: $S = S_n + R_n$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ et $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$.*

[Ind] On a $R_n = \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{p} u_k$.

Remarque: Le terme u_{n+1} (premier terme de la série $\sum_{k\geq n+1} u_k$) est appelé premier terme négligé de l'approximation de S par la somme partielle S_n.

8.1.4 Relation entre suites et séries

Proposition 5 *Soit (u_n) une suite de K et $(\sum v_n)$ la série dont le terme général est $v_n = u_{n+1} - u_n$. La suite (u_n) est convergente vers l si et seulement si la série $(\sum v_n)$ est convergente vers $l - u_0$.*

[Ind] Calculer les sommes partielles de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$.

Remarque: Toute série $(\sum u_n)$ peut se mettre sous cette forme: en notant (v_n) la suite définie par $v_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}*$, $v_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_{n+1} - v_n$.

Exercice 3 Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n(n+1)}$ est convergente.

8.1.5 Critère de Cauchy

Théorème 1 *Soit $(\sum u_n)$ une série de K.*
La série $(\sum u_n)$ est convergente si et seulement si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall p, q \in \mathbb{N} \quad n \leq p \leq q \implies \left|\sum_{k=p}^{q} u_k\right| \leq \varepsilon.$$

[Ind] L'espace vectoriel normé K est complet

Exercice 4 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que la série de terme général défini, pour $n \geq 1$, par $\frac{1}{n^\alpha}$ est divergente si $\alpha \leq 1$.

8.1.6 Séries absolument convergentes

Définition 3 *La série $(\sum u_n)$ est absolument convergente si la série $(\sum |u_n|)$ est convergente.*

Définition 4 *Soit $(\sum u_n)$ une série de K. On appelle série majorante, toute série $(\sum v_n)$ à termes positifs telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n| \leq v_n$.*

Proposition 6 *Toute série* $(\sum u_n)$ *absolument convergente est convergente et*

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$$

[Ind] Vérifier que la suite des sommes partielles est une suite de Cauchy.

Proposition 7 *Toute série* $(\sum u_n)$ *admettant une série* $(\sum v_n)$ *majorante convergente est convergente et*

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \left|\sum_{n=p+1}^{\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=p+1}^{\infty} v_n.$$

[Ind] La série est alors absolument convergente.

8.2 Séries à termes positifs

Théorème 2 *Soit* $(\sum u_n)$ *une série à termes réels positifs. La série est convergente si et seulement si la suite* (S_n) *des sommes partielles est majorée. On a alors* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} S_n$.

[Ind] La suite (S_n) est croissante.

Remarque: Si une série $(\sum u_n)$ à termes positifs est divergente, alors $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty$, et on note alors $\sum_{k=0}^{\infty} u_k = +\infty$.

Exercice 5 Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Montrer que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si les séries de termes généraux u_{2n} et u_{2n+1} convergent.

8.2.1 Utilisation des relations de comparaison

Proposition 8 *Soient* $(\sum u_n)$ *et* $(\sum v_n)$ *deux séries à termes positifs. Si, à partir d'un certain rang,* $u_n \leq v_n$ *alors* $(\sum v_n)$ *convergente implique* $(\sum u_n)$ *convergente.*

[Ind] Comparer les sommes partielles.

Exercice 6 Trouver la nature des séries $(\sum_{n\geq 0} \frac{\sin^2(n)}{2^n})$, $(\sum_{n\geq 1} \frac{r^n}{n})$ avec $r \in \mathbb{R}_+$, $(\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln n})$.

Proposition 9 *Soient* $(\sum u_n)$ *et* $(\sum v_n)$ *deux séries à termes positifs. Si* $u_n \sim v_n$ *alors les séries* $(\sum u_n)$ *et* $(\sum v_n)$ *sont de même nature.*

[Ind] A partir d'un certain rang $\frac{1}{2}u_n \leq v_n \leq \frac{3}{2}u_n$.

Exercice 7 Trouver la nature des séries $(\sum \frac{2^n+3}{5^n-9})$, $(\sum (\operatorname{ch} n)^\alpha - (\operatorname{sh} n)^\alpha)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 8 Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Étudier la série de terme général $\frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta}$. En déduire que, pour $\alpha \in R$, la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha \in]1, \infty[$.

Exercice 9 Soient $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ deux séries à termes positifs dont les termes généraux sont équivalents. Montrer que, si elles sont convergentes, leurs restes sont équivalents, tandis que, si elles sont divergentes, ce sont leurs sommes qui sont équivalentes.

Proposition 10 *Soient $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ deux séries à termes positifs. Si $u_n << v_n$ alors $(\sum v_n)$ convergente implique $(\sum u_n)$ convergente.*

[Ind] A partir d'un certain rang $u_n \geq v_n$

Proposition 11 (Comparaison logarithmique) *Soient $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ deux séries à termes* **strictement positifs**. *Si, à partir d'un certain rang, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ alors $(\sum v_n)$ convergente implique $(\sum u_n)$ convergente.*

[Ind] Vérifier que la suite (u_n) est dominée par la suite (v_n).

8.2.2 Comparaison à une série géométrique

Proposition 12 (Méthode de D'Alembert) *Soit $(\sum u_n)$ une série à termes* **strictement positifs**.
1) S'il existe un réel $k \in [0,1[$ tel qu'à partir d'un certain rang $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq k$ alors la série $(\sum u_n)$ est convergente.
2) S'il existe un réel $k \geq 1$ tel qu'à partir d'un certain rang $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq k$ alors la série $(\sum u_n)$ est divergente.

[Ind] Comparer la suite (u_n) et la suite géométrique (k^n).

Proposition 13 (Règle de D'Alembert) *Soit $(\sum u_n)$ une série réelle ou complexe telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \neq 0 \text{ et } \lim_{n \to \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = l.$$

Si $0 \leq l < 1$ alors la série $(\sum u_n)$ est absolument convergente (donc convergente).
Si $l > 1$ alors la série $(\sum u_n)$ est divergente car le terme général u_n ne tend pas vers 0.

[Ind] Essayer d'appliquer la méthode de D'Alembert à la série $\sum |u_n|$.

Remarque: Le cas où $l = 1$ est appelé cas douteux de la règle de D'Alembert.

8.2.3 Comparaison avec une intégrale

Soit f une fonction continue définie sur $[a, b[$ $(a < b \leq +\infty)$ **à valeurs positives**. Nous verrons que ce type de fonction est appelée fonction intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si la limite lorsque x tend vers b de $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ existe. Cette limite est alors notée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

Exemple 1 Soit α un réel, la fonction qui, à $x \in [1, +\infty[$, associe $\dfrac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Proposition 14 *Soit f une fonction continue définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs positives. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs tendant vers $+\infty$.*
La série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)dt$ est convergente si et seulement si la fonction f est intégrable sur $[0, +\infty[$ et lorsqu'elle est convergente : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \int_{x_0}^{+\infty} f(t)dt$.

[Ind] Considérer la fonction croissante $F \ : \ x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

Proposition 15 *Soit f une fonction continue décroissante définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs positives. La série de terme général $f(n)$ est convergente si et seulement si la fonction f est intégrable sur $[0, +\infty[$.*

[Ind] Examiner la méthode des rectangles appliquée à l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[0, n]$ avec des pas de 1.

Exercice 10 Soit f une fonction positive décroissante continue sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que la série de terme général $f(n) - \displaystyle\int_n^{n+1} f$ est convergente. En déduire que si la fonction f n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$ alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k) \sim \int_0^n f(t)dt$.

8.2.4 Comparaison à une série de Riemann

Définition 5 *On appelle séries de Riemann les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Proposition 16 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.*

[Ind] Comparer la série à l'intégrale de la fonction $x \mapsto 1/x^\alpha$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$

Proposition 17 *Soit $(\sum u_n)$ une série à termes positifs telle qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}_+$ vérifiant $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha u_n = l$.*
1) Si $l \in R_+^*$, la série $(\sum u_n)$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
2) Si $l = +\infty$ et $\alpha \leq 1$, la série $(\sum u_n)$ est divergente.
3) Si $l = 0$ et $\alpha > 1$, la série $(\sum u_n)$ est convergente.

[Ind] Comparer la série à une série de Riemann.

8.3 Séries à termes réels ou complexes

8.3.1 Séries alternées

Définition 6 *Soit $(\sum u_n)$ une série à termes réels. On dit que la série est alternée s'il existe une série $(\sum v_n)$ à termes réels de signe constant telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = (-1)^n v_n$.*

Théorème 3 (Règle de convergence des séries alternées) *Soit $(\sum v_n)$ une série à termes positifs.*
Si la suite (v_n) est décroissante et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors la série alternée $(\sum(-1)^n v_n)$ est convergente.

[Ind] Montrer que la suite des sommes partielles est une suite de Cauchy.

Proposition 18 *Soit (u_n) une suite de réels de signe constant telle que la suite $(|u_n|)$ est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. En notant respectivement (S_n) et (R_n) les suites des sommes partielles et des restes de la série alternée $\sum(-1)^n u_n$, on a :*
1) Les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes de limite la somme de la série alternée $(\sum(-1)^n u_n)$.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: R_n est du signe de u_{n+1} et $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

[Ind] Calculer ...

Remarque: Le théorème précédent présente une règle et non un critère. En effet, il existe des séries alternées convergentes ne vérifiant ni la règle, ni la proposition qui suit.

Exercice 11 Étudier, pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$.

8.3.2 Série produit

Définition 7 *Soient $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ deux séries à termes réel ou complexes. On appelle série produit des deux séries, la série dont le terme général est* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

Proposition 19 *Soient $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ deux séries à termes réels positifs. Si les deux séries sont convergentes de sommes S et T, la série produit est convergente et sa somme est le produit ST.*

[Ind] Encadrer la somme partielle de la série produit par des sommes partielles des deux séries de départ.

Proposition 20 *Soient $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ deux séries à termes réels ou complexes. Si les deux séries sont* **absolument** *convergentes de sommes S et T, la série produit est absolument convergente et sa somme est le produit ST.*

[Ind] Pour montrer que la somme de la série produit est ST, montrer $(W_{2n} - S_n T_n)$ converge vers 0, S_n, T_n et W_n représentant les sommes partielles des séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et de la série produit.

Exercice 12 Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série de terme général $\frac{z^n}{n!}$ est convergente. On note $\exp(z)$ sa somme. Montrer que, pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$: $\exp(z + z') = \exp(z)\exp(z')$.

Remarque: La série produit de deux séries convergentes peut être divergente.

Exercice 13 Soit $(\sum u_n)$ la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Montrer que la série produit de cette série avec elle-même est divergente.

8.4 Exercices

Exercice 14 Étudier la convergence et la somme des séries dont les termes généraux sont:

$$\frac{1}{n(n+1)}, \quad \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, \quad \frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)}$$

Exercice 15 Étudier la convergence des séries dont les termes généraux sont:
$\dfrac{n!}{n^n}$, $\quad n^{-(1+n^{-1})}$, $\quad n^{-1} - \ln(n-1) + \ln n$, $\quad (1+\sqrt{n})^{-n}$, $\quad (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^{\sqrt{n}}$, $\quad \dfrac{1}{\ln(n!)}$, $\quad n^{-1}\cos\ln n$.

Exercice 16 Étudier les séries de terme général:

a) $\operatorname{Arcsin}\dfrac{n^2}{n^2+1} - \operatorname{Arcsin}\dfrac{n^2}{n^2+2}$

b) $\dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.

c) $(\sqrt{n} + 2^{(-1)^n} n)^{-1}$.

d) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 17 Étudier la convergence des séries dont les termes généraux sont:
$(-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$, $\quad \ln(n)\ln(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$, $\quad (-1)^n R(n)$ où $R \in \mathbb{R}(X)$, $\quad \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$.

Exercice 18 Calculer les sommes des séries suivantes, après avoir montrer leur convergence: $\ln(1+(-1)^n n^{-1})$, $\ln(1-n^{-2})$, $\dfrac{1}{n^3-n}$, $(-1)^n \dfrac{n-1}{3^n}$.

Exercice 19 Étudier la convergence de la série de terme général: $u_n = \dfrac{x^n}{H_n}$ où $x \in \mathbb{R}$ et où $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Exercice 20 Étudier la suite de terme général:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^\alpha}{n^{\alpha+1}}$$

et en déduire un équivalent de la suite de terme général:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \quad \alpha \leq 1$$

Exercice 21 **Séries de Bertrand.** Soient α, β_1, β_2, ..., β_p des réels. Montrer que la série de terme général

$$\frac{1}{n^\alpha \ln^{\beta_1} n \ln^{\beta_2}(\ln n) \cdots \ln^{\beta_p}(\ln(\cdots\cdots(\ln n)\cdots))}$$

converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta_1 > 1$) ou ... ou ($\alpha = \beta_1 = \cdots = \beta_{p-1} = 1$ et $\beta_p > 1$).

Exercice 22 Soit (P_k) la suite de polynômes définie par: $P_k = X(X-1)\dots(X-(k-1)$. Montrer que cette suite forme une base de $\mathbb{R}[X]$. En déduire une méthode pour trouver la somme de la série convergente:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!}$$

où P est un polynôme.
Calculer: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+2n+1}{n!}$.

Exercice 23 a) Étudier la convergence de la série de terme général: $\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.
b) Rappeler brièvement pourquoi $e = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, en déduire la nature de la série de terme général $\sin(n!e\pi)$.

Exercice 24 a) Soit (u_n) une suite de réels positifs décroissante, montrer que si la série de terme général u_n converge, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nu_n = 0$. (Indication: Étudier les suites de terme général $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} u_k$ et $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n+1} u_k$)
b) Trouver une suite (u_n) de réels positifs décroissante telle que la série de terme général u_n diverge alors que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nu_n = 0$.
c) Trouver une suite (u_n) de réels positifs telle que la série de terme général u_n converge alors que la suite (nu_n) n'admet pas de limite.

Exercice 25 Soit (u_n) une suite réelle décroissante, de limite 0; montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum 2^n u_{2^n}$ sont de même nature.

Exercice 26 Soit (u_n) une suite réelle décroissante, de limite 0 et telle que la suite $(nu_n - \sum_{k=1}^{n} u_k)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 27 Montrer que la série obtenue à partir de la série harmonique en supprimant les termes $\frac{1}{n}$ où n contient le chiffre 9 dans son écriture décimale, converge.

Exercice 28 Règle de Raabe-Duhamel. Soit (u_n) une série à termes strictement positifs telle que $\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \beta \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Montrer que si $\beta > 1$ alors $\sum u_n$ converge et que si $\beta < 1$, la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 29 Règle de Gauss. Soit (u_n) une série à termes strictement positifs telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Montrer que la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 30 Règle de Cauchy. Soit (u_n) une série à termes positifs telle que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \beta$. Montrer que si $\beta < 1$ alors $\sum u_n$ converge et que si $\beta > 1$, la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 31 Règle d'Abel. Soient (a_n) et (b_n) deux suites d'éléments de K telles que:
a) $\exists \beta \in \mathbb{R}_+ \quad \forall p, q \in \mathbb{N} \qquad \left|\sum_{k=p}^{p+q} b_k\right| \leq \beta$
b) $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$
c) la série de terme général $|a_n - a_{n+1}|$ converge.
Montrer que la série de terme général $b_n a_n$ converge et que:

$$\forall p \in \mathbb{N} \qquad \left|\sum_{n=p+1}^{+\infty} b_n a_n\right| \leq \beta \sum_{n=p+1}^{+\infty} |a_n - a_{n+1}|\,.$$

Retrouver ainsi la règle de convergence des séries alternées.

Exercice 32 Soit (a_n) et (b_n) deux suites d'éléments de K telles que:
a') la série de terme général b_n converge.
b') $\exists \gamma \in \mathbb{R}_+ \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq \gamma$.
c) la série de terme général $|a_n - a_{n+1}|$ converge.
Montrer que la série de terme général $b_n a_n$ converge et que:

$$\forall p \in \mathbb{N} \qquad \left|\sum_{n=p+1}^{+\infty} b_n a_n\right| \leq \left(\gamma + \sum_{n=p+1}^{+\infty} |a_n - a_{n+1}|\right) \sup_{n\in[p+1,+\infty]} \left|\sum_{k=p}^{n} b_k\right|$$

Exercice 33 Soit $\sum u_n$ une série à termes complexes qui converge. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{u_n}{n}$ converge.

Exercice 34 Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs.

a) On suppose que la série de terme général u_n diverge. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que la série de terme général $\dfrac{u_n}{S_n}$ diverge (raisonner par l'absurde et comparer la série à la série de terme général $\ln \dfrac{S_n}{S_{n+1}}$).

b) On suppose que la série de terme général converge et on pose $T_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k$. Montrer que la série de terme général $\dfrac{u_n}{\sqrt{T_n}}$ converge (comparer la série à la série de terme général $\displaystyle\int_{T_{n+1}}^{T_n} \frac{dx}{\sqrt{x}}$).

Exercice 35 Soit α un réel strictement compris entre 0 et 1. On définit la suite x_n par son premier terme $x_0 = \alpha$ et la relation:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = x_n - x_n^2$$

a) Étudier cette suite.
b) Trouver un équivalent de la suite de terme général $\dfrac{1}{x_{n+1}} - \dfrac{1}{x_n}$.
c) En déduire que, lorsque n tend vers $+\infty$, x_n équivaut à $\frac{1}{n}$

Exercice 36 Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et la relation:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$$

a) Étudier la suite (u_n).
b) Pour quelle valeur du réel α, la série de terme général u_n^α converge-t-elle ? (Indication : Trouver un équivalent simple de la suite $(x_{n+1} - x_n)$)

Exercice 37 Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente de réels non nuls. On construit la suite x_n par son premier terme $x_0 = 0$ et la relation

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \sqrt{x_n^2 + u_n^2}\right)$$

a) Montrer que la série de terme général u_n^2 converge
b) Montrer que la suite (x_n) converge.

8.5 Démonstrations

Proposition 1 Si la suite (S_n) converge, la suite $(u_n) = (S_n - S_{n-1})$ converge vers 0.

Proposition 2 Si on note C l'espace vectoriel des suites convergentes de K, cet ensemble est une partie non vide et stable de $C \times C$. La linéarité de l'application considérée provient alors de la linéarité de l'application de C dans K qui, à une suite convergente, associe sa limite.

Proposition 3 Notons u_n le terme général de la série originelle et S_n la somme partielle d'indice n de cette série. Si on modifie un nombre fini de termes de la suite (u_n), on obtient alors une suite (v_n) telle qu'il existe un entier n_0 qui vérifie, pour tout $n \geq n_0$, $u_n = v_n$. Notons lors T_n la somme partielle d'indice n de la série de terme général v_n. Pour $n \geq n_0$, on a $T_n - S_n = \sum_{k=0}^{n_0-1}(v_k - u_k)$. Ainsi les deux suites (S_n) et (T_n) sont de même nature.

Proposition 4 Puisque la suite (S_n) converge vers S, la suite (R_n) converge vers 0.
Pour tout entier p supérieur à $n+1$, on a $S_p = S_n + \sum_{k=n+1}^{p} u_k$, ainsi $R_n = \lim_{p \to +\infty} S_p - S_n$ est la somme de la série de terme général u_k pour $k \geq n+1$.

Proposition 5 Pour tout entier n, $\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1} - u_0$. La proposition découle alors du fait que la suite (u_n) est convergente vers l si et seulement si la suite (u_{n+1}) est convergente vers l.

Théorème 1 La propriété est celle qui identifie les suites convergentes et les suites de Cauchy dans un espace complet.

Proposition 6 Pour un entier n, notons $A_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k|$. Si la série de terme général u_n est absolument convergente, alors la suite de terme général A_n est convergente donc est une suite de Cauchy, de l'inégalité $\left|\sum_{k=p}^{q} u_k\right| \leq \sum_{k=p}^{q} |u_k|$, valable pour les entiers $p \leq q$, on en déduit alors que la série $\sum u_n$ vérifie le critère de Cauchy des séries et donc est convergente. L'inégalité proposée s'obtient alors en passant à la limite lorsque q tend vers $+\infty$ et en prenant $p = 0$ dans l'inégalité ci-dessus.

Proposition 7 La suite (A_n) des sommes partielles de la série de terme général $|u_k|$ est alors majorée par la suite (V_n) des sommes partielles de la série $\sum v_n$. On vérifie alors que les suites (A_n) et (V_n) sont croissantes et puisque la suite (V_n) est convergente, elle est donc majorée, on en déduit donc que la suite (A_n) est convergente puisqu'elle est croissante et majorée, donc la série $\sum u_n$ est absolument convergente.
L'inégalité proposée provient alors de la comparaison des restes des séries $\sum u_n$, $\sum |u_n|$ et $\sum v_n$.

Théorème 2 Pour tout entier n, on a $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$. La suite (S_n) est donc croissante et on peut alors appliquer le théorème sur la convergence des suites croissantes de réels.

Proposition 8 Soit n_0 un entier tel que, pour tout entier $n \geq n_0 + 1$, $u_n \leq v_n$. On a alors, pour $n \geq n_0$, $\sum_{k=n_0+1}^{n} u_k \leq \sum_{k=n_0+1}^{n} v_k$. En notant S_n et T_n les sommes partielles respectives des deux séries, on a donc $S_n \leq T_n - T_{n_0} + S_{n_0}$ pour $n \geq n_0 + 1$.
Si la série de terme général v_n converge, la suite (T_n) converge et donc est majorée, on en déduit alors que la suite S_n est majorée et, étant croissante, est donc convergente.

Proposition 9 Si les deux suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes, il existe alors un entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $|u_n - v_n| \leq \frac{1}{2}|u_n|$. On en déduit alors, puisque le terme u_n est positif, que $\frac{1}{2}u_n \leq v_n \leq \frac{3}{2}u_n$. On applique alors la proposition sur la comparaison de deux séries à termes positifs.

Proposition 10 Si la suite (u_n) est négligeable devant la suite (v_n), il existe alors un entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $|v_n| \leq |u_n|$ et donc $v_n \leq u_n$ puisque les deux suites sont positives. On applique alors la proposition sur la comparaison de deux séries à termes positifs.

Proposition 11 On vérifie, en le démontant par récurrence que, pour tout $n \geq n_0$, $\dfrac{u_n}{u_{n_0}} \leq \dfrac{v_n}{v_{n_0}}$. On applique alors la proposition sur la comparaison de deux séries à termes positifs.

Proposition 12 1) Si, à partir du rang n_0, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq k$, alors, à partir de ce rang, on a $\dfrac{u_n}{u_{n_0}} \leq \dfrac{k^n}{k^{n_0}}$. On applique alors la proposition sur la comparaison de deux séries à termes positifs. 2) Il suffit de renverser les inégalités dans la démonstration précédente.

Proposition 13 1) Si $l < 1$, alors, pour tout réel ε strictement positif, à partir d'un certain rang $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leq l + \varepsilon$. En prenant $\varepsilon = \dfrac{1-l}{2}$, on pose alors $k = l + \varepsilon$ et on a $k < 1$. On en déduit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente.
2) Si $l > 1$, alors, pour tout réel ε strictement positif, à partir d'un certain rang $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \geq l - \varepsilon$. En prenant $\varepsilon = \dfrac{l-1}{2}$, on pose alors $k = l - \varepsilon$ et on a $k > 1$. On en déduit que la suite $(|u_n|)$ domine la suite géométrique (k^n) et donc diverge vers $+\infty$.

Proposition 14 Notons F la primitive de f qui s'annule en 0.
La somme partielle S_n de la série $\sum u_n$ est égale à $F(x_{n+1}) - F(x_0)$. Or la fonction f étant positive, est intégrable si et seulement F possède une limite en $+\infty$, mais, puisque F est une fonction croissante, F possède une limite en $+\infty$ si et seulement s'il existe une suite x_n qui tend vers $+\infty$ telle que la suite $(F(x_n))$ converge. On en déduit donc la proposition.

Proposition 15 Puisque la fonction f est décroissante, on a , pour tout entier k, $f(k+1) \leq \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k)$. En notant S_n la somme partielle de la série de terme général $f(n)$, on a donc, en sommant cette dernière égalité pour k variant de 0 à n: $S_{n+1} - f(0) \leq \displaystyle\int_0^n f(t)dt \leq S_n$.
Si la fonction f est intégrable, on en déduit que, pour tout entier $n \geq 1$, $S_n \leq f(0) + \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$, la suite (S_n) est majorée et donc étant croissante, qu'elle est convergente.
Si la série $\sum f(n)$ est convergente, de somme S, on en déduit que la fonction F définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ vérifie, pour tout entier n, $F(n) \leq S$. Ceci implique, puisque F est croissante, qu'elle est majorée par S et donc qu'elle possède une limite en $+\infty$.

Proposition 16 Si α est négatif, le terme général de la série ne tend pas vers 0, la série est donc divergente.
Si $\alpha > 0$, la série est convergente si et seulement si la fonction $x \mapsto 1/x^\alpha$ est intégrable sur l'intervalle $[1, +\infty[$, on vérifie, en utilisant un primitive de cette fonction que c'est le cas si et seulement si $\alpha > 1$.

Proposition 17 1) Dans ce cas $u_n \sim l \times n^{-\alpha}$, donc la série est convergente si $\alpha > 1$
2) Ici $u_n >> n^{-\alpha}$, donc si $\alpha \leq 1$, la série $\sum u_n$ est divergente.
3) On a alors $u_n << n^{-\alpha}$, donc si $\alpha > 1$, la série $\sum u_n$ est convergente.

Théorème 3 Soit p et n des entiers, notons $R_p^n = \left|\sum_{k=p}^{p+n}(-1)^k v_k\right|$, on a $R_p^n = \left|\sum_{k=p}^{p+n}(-1)^{k-p} v_k\right|$.

Montrons que $A_n^p = \sum_{k=p}^{p+n}(-1)^{k-p} v_k$ est positif. Si $n = 0$, $A_n^0 = v_p \geq 0$. Si n est impair: $n = 2m+1$ avec $m \geq 0$, $A_n^{2m+1} = \sum_{k=0}^{m}(v_{p+2k} - v_{p+2k+1})$ est positif car, pour tout entier q, $v_q \geq v_{q+1}$ enfin si n est pair et supérieur à 2: $n = 2m+2$ avec $m \geq 0$, $A_n^{2m+2} = A_n^{2m+1} + v_{p+2m+2}$ est positif comme somme de nombres positifs.

On a ainsi $R_n^0 = v_p$ et $R_p^n = A_n^p = v_p - A_{p+1}^{n-1} \leq v_p$ si $n > 0$, et on peut conclure, puisque la suite (v_n) converge vers 0, que la série de terme général $(-1)^n v_n$ vérifie le critère de Cauchy et est donc convergente.

Proposition 18 Quitte à multiplier toute la série par -1, on peut supposer que la suite (v_n) est positive.

1) Pour tout entier n, on a $S_{2n+2} = S_{2n} - v_{2n+1} + v_{2n+2} \leq S_{2n}$ car $v_{2n+2} \leq v_{2n+1}$ et $S_{2n+3} = S_{2n+1} + v_{2n+2} - v_{2n+1} \geq S_{2n+1}$ car $v_{2n+3} \leq v_{2n+2}$, d'autre part $S_{2n+1} - S_{2n} = -v_{2n+1} \leq 0$ et, puisque la suite (v_n) converge vers 0, les deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes et convergent vers la même limite S et la suite (S_n) converge aussi vers S.2) Pour tout entier n, $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$ donc $-v_{2n+1} \leq S_{2n+1} - S_{2n} \leq R_{2n} \leq 0$ et $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2}$ donc $0 \leq R_{2n+1} \leq S_{2n+2} - S_{2n+1} \leq v_{2n+2}$.

Proposition 19 Notons $\sum w_n$ la série produit et (W_n) la suite des sommes partielles.

Pour tout entier n, $W_n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{p} u_j v_{i-j}$. Notons T_n la partie de $\mathbb{N}^2$ constituée des couples (p,q) qui vérifient $p+q \leq n$. On a $W_n = \sum_{(p,q)\in T_n} u_p v_q$, or $[0,[n/2]] \times [0,[n/2]] \subset T_n \subset [0,n] \times [0,n]$ et puisque les réels de la forme $u_p v_q$ sont positifs, on en déduit

$$\sum_{(p,q)\in[0,[n/2]]\times[0,[n/2]]} u_p v_q \leq W_n \leq \sum_{(p,q)\in[0,n]\times[0,n]} u_p v_q$$

Ainsi, en notant (S_n) et (T_n) les suites des sommes partielles des deux séries, on a

$$S_{[n/2]} T_{[n/2]} \leq W_n \leq S_n T_n$$

.

Si les suites (S_n) et (T_n) sont convergentes, les suites $(S_{[n/2]})$ et$(T_{[n/2]})$ le sont vers les mêmes limites respectives, ainsi la série produit est bien convergente et sa somme est le produit ST.

Proposition 20 Sous les hypothèses du théorème, le module du terme général de la série produit est majoré par le terme général de la série produit des séries des modules, on en déduit que la série produit possède une série majorante convergente et donc est absolument convergente. Pour tout entier n, notons respectivement S_n , T_n et W_n les sommes partielles des séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et de la série produit, S_a et T_a les sommes des séries des modules.L'ensemble T_{2n} des couples d'entiers vérifiant (p,q) vérifiant $p+q \leq 2n$ peut se partitionner en trois parties, l'ensemble C_n des couples (p,q) où p et q appartiennent à $[0,n]$, l'ensemble $P_n = \{(p,q) \mid p \in [n+1,2n], q \in [0,2n-p]\}$ et enfin l'ensemble $Q_n = \{(p,q) \mid q \in [n+1,2n], p \in [0,2n-q]\}$ Avec ces notations, on a $W_{2n} = \sum_{(p,q)\in T_{2n}} u_p v_q$ et $S_n T_n = \sum_{(p,q)\in C_n} u_p v_q$. Ainsi

$$\begin{aligned}
|W_{2n} - T_n S_n| &= \left| \sum_{(p,q)\in P_n} u_p v_q + \sum_{(p,q)\in Q_n} u_p v_q \right| \\
&\leq \sum_{(p,q)\in P_n} |u_p|\,|v_q| + \sum_{(p,q)\in Q_n} |u_p|\,|v_q| \\
&\leq \sum_{p=n+1}^{2n} \sum_{q=0}^{2n-p} |u_p|\,|v_q| + \sum_{q=n+1}^{2n} \sum_{p=0}^{2n-q} |u_p|\,|v_q| \\
&\leq \sum_{p=n+1}^{2n} |u_p|\,T_a + \sum_{q=n+1}^{2n} |v_q|\,S_a
\end{aligned}$$

Mais puisque les séries $\sum |u_n|$ et $\sum |v_n|$ convergent, les suites $(\sum_{p=n+1}^{2n} |u_p|)$ et $(\sum_{q=n+1}^{2n} |v_q|)$ convergent vers 0, ainsi la suite $(W_{2n} - T_n S_n)$ converge vers 0 et la somme de la suite produit est bien le produit ST.