

Chapitre 13

Séries entières

13.1 introduction

Les séries entières dans leur version moderne sont apparues lors de l'étude de la mécanique céleste, par exemple avec Cauchy (1823) qui étudiait à ce propos la convergence des séries de Laplace. Le théorème du rayon de convergence est dû à Hadamard (1892). Les problèmes de convergence au bord du disque ont été étudiés par Abel (1826). Avant une théorie des séries entières il y a eu l'étude de la série de Taylor faites par Lagrange (1797). Cette série était considérée comme la plus importante pendant plus de 25 ans.

En fait on peut remonter plus loin pour trouver des séries entières comme développement. En effet après la formule du binôme (que l'on trouve déjà en 1080 avec Omar Alkhaijâmâ et formulé par Pascal en 1654), on s'est intéressé à $(a + b)^{-1}$. C'est ainsi que l'on procédait à l'époque :

On suppose $|b| < |a|$, en première approximation on a $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \delta$ ou $1 = 1 + \frac{b}{a} + a\delta + b\delta$, on néglige alors $b\delta$, ce qui donne $\delta = -\frac{b}{a^2}$ et on recommence pour trouver

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \dots$$

En posant $x = \frac{b}{a}$ on obtient

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots$$

pour $|x| < 1$. C'est la série géométrique démontrée ainsi par Viète en 1593. C'est bien après que les problèmes de convergence ont été résolus.

13.2 Généralités

K désigne l'un des corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Définition 1 Soit $(a_n) \in K^{\mathbb{N}}$ une suite de scalaires, on appelle série entière de terme général $a_n z^n$ la série de fonctions $\sum u_n$ définie sur K par $u_n(z) = a_n z^n$. Le domaine de convergence \mathcal{D} de la série est l'ensemble des scalaires z tels que la série numérique $\sum a_n z^n$ converge.

Définition 2 Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières. On appelle série somme des deux séries la série entière de terme général $(a_n + b_n)z^n$ et série produit la série de terme général $\left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}\right)z^n$. Si λ est un scalaire, le produit par λ de la série $\sum a_n z^n$ est la série de terme général $\lambda a_n z^n$.

13.2.1 Rayon de convergence

Proposition 1 Lemme d'Abel. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. S'il existe $z_0 \in K - \{0\}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)$ soit bornée, alors, pour tout $z \in K$, l'inégalité stricte $|z| < |z_0|$ entraîne que la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

[Ind] Faire apparaître une série géométrique.

Théorème 1 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. L'ensemble des réels positifs r tels que la série numérique $\sum |a_n| r^n$ converge est un intervalle de \mathbb{R}_+ (contenant 0). Sa borne supérieure ρ est appelée rayon de convergence de la série entière et on a

$$\begin{aligned} \rho &= \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{La suite } (a_n r^n) \text{ est bornée}\} \\ &= \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{La suite } (a_n r^n) \text{ converge vers 0}\} \\ &= \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{La série } (\sum a_n r^n) \text{ est convergente}\} \\ &= \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{La série } (\sum |a_n| r^n) \text{ est convergente}\} \end{aligned}$$

[Ind] Faire une preuve en commençant par en bas.

Exercice 1 Trouver les rayons de convergence des séries entières de terme général:

a) $n z^n$ b) $n! z^n$ c) $\frac{z^n}{n!}$.

Proposition 2 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et ρ son rayon de convergence.

1) Si $\rho \neq 0$, alors, pour tout $z \in K$ tel que $|z| < \rho$, la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument.

2) Si $z \in K$ vérifie $|z| > \rho$, la série numérique $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

[Ind] Bien comprendre le théorème.

Remarque: Si $\sum a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$. Pour $z \in K$, on a

$$|z| < \rho \implies \sum a_n z^n \text{ convergente}$$

et

$$|z| < \rho \implies (a_n z^n) \text{ est une suite bornée}$$

mais

$$\sum a_n z^n \text{ convergente} \implies |z| \leq \rho$$

et

$$(a_n z^n) \text{ est une suite bornée} \implies |z| \leq \rho$$

Exercice 2 Soit (a_n) une suite bornée de complexes ne tendant pas vers 0. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est égal à 1.

Exercice 3 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, les deux séries $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n| z^n$ ont même rayon de convergence.

Proposition 3 Règle de D'Alembert. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière; si, à partir d'un certain rang, $a_n \neq 0$ et si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l \in \overline{\mathbb{R}}_+$ alors le rayon de convergence de la série entière est $\rho = \frac{1}{l}$ avec la convention $\rho = +\infty$ si $l = 0$ et $\rho = 0$ si $l = +\infty$.

[Ind] Se rappeler de la règle de D'Alembert pour les séries numériques.

Remarque: Les hypothèses d'application de la règle de D'Alembert sont contraignantes et cette règle ne peut résoudre qu'un nombre restreint de problèmes et en tout cas, il convient de l'appliquer sans précipitation. D'autre part, il est important de se rappeler que la détermination du rayon est celui du disque de convergence et que trouver ce disque permet de trouver son rayon !

Exercice 4 Trouver le rayon de convergence des séries entières dont les termes généraux sont:

a) $\frac{n^n}{n!} z^n$

b) $2^n z^{2^n}$, c'est à dire la série entière $\sum a_n z^n$ avec $a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 2^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$

c) $a_n z^n$ avec $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 2^n & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$.

Exercice 5 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$ et qu'il existe un entier p tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+p}|}{|a_n|} = l \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Quel est le rayon de convergence de la série entière ?

Exercice 6 Quel sont les rayons de convergence des séries entières $\sum (1+(-1)^n)^n z^n$ et $\sum 2^n (j^n - 1)^n z^n$?

13.3 Propriétés

Définition 3 On appelle *disque de convergence* d'une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence ρ le disque **ouvert** centré en 0 de rayon ρ (si $\rho = +\infty$, le disque est le corps K tout entier). On appelle *intervalle de convergence*, l'intervalle inclus dans \mathbb{R} , intersection de \mathbb{R} et du disque de convergence.

Continuité de la somme

Théorème 2 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ρ . La série entière converge normalement sur tout disque fermé borné inclus dans le disque de convergence.

[Ind] Prendre un disque contenu dans le disque de convergence.

Proposition 4 La somme d'une série entière est continue sur le disque de convergence.

[Ind] Une limite uniforme de fonctions continues est continue et la continuité est une propriété locale.

Remarque: Si $\rho = +\infty$ et si la suite (a_n) n'est pas nulle, la série entière ne converge pas normalement sur K .

Exercice 7 Si $\rho < +\infty$ et si la série $\sum |a_n| \rho^n$ converge, montrer que la série entière converge normalement sur le disque fermé de centre 0 de rayon ρ et donc que sa somme est continue sur ce disque fermé.

Développement limité de la somme

Proposition 5 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$. La somme S de la série entière possède des développements limités à tout ordre:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + o(z^n).$$

[Ind] Le vérifier, en utilisant les propriétés du reste d'une série.

Dérivation d'une série entière

Définition 4 Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière. On appelle série entière dérivée (terme à terme) la série entière $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$.

Proposition 6 Une série entière et sa série entière dérivée ont même rayon de convergence.

[Ind] Procéder par double inégalités.

Théorème 3 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$. La restriction de sa somme à l'intervalle $] -\rho, \rho[$ est une fonction de classe C^∞ .

[Ind] Par récurrence en appliquant le théorème de dérivation d'une série de fonctions.

Proposition 7 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$ et f la restriction de sa somme à l'intervalle $] -\rho, \rho[$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f^{(n)}(0) = n! a_n$$

[Ind] Écrire la série dérivée $n^{\text{ème}}$ puis faire $x = 0$.

Proposition 8 Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières de rayons de convergence non nuls de sommes respectives S_a et S_b , s'il existe $r > 0$ tel que, pour tout $x \in] -r, r[$, $S_a(x) = S_b(x)$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n = b_n$.

[Ind] Tout se passe en 0 utiliser la proposition précédente.

Exercice 8 En remarquant que, pour tout entier $p \geq 0$ inférieur ou égal à l'entier $n \geq 0$, $(x^n)^{(p)} = p! \binom{n}{p} x^{n-p}$, montrer que

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in] -1, 1[\quad \frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^{n-p}$$

Intégration d'une série entière

Définition 5 Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière. On appelle série entière intégrée (terme à terme) la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$.

Proposition 9 Une série entière et sa série entière intégrée terme à terme ont même rayon de convergence.

[Ind] Se ramener au cas de la dérivation.

Théorème 4 La somme d'une série entière intégrée terme à terme est une primitive de la somme de la série sur l'intervalle ouvert de convergence.

[Ind] Se rappeler le théorème d'intégration des séries.

Somme de deux séries entières

Proposition 10 Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs ρ_a et ρ_b . Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = a_n + b_n$ et ρ_c le rayon de convergence de la série somme $\sum c_n z^n$. On a :

$$\begin{aligned} \rho_a \neq \rho_b &\implies \rho_c = \inf(\rho_a, \rho_b) \\ \rho_a = \rho_b &\implies \rho_c \geq \inf(\rho_a, \rho_b) \end{aligned}$$

[Ind] Regarder là où les séries convergent et trouver des contre exemples.

Exercice 9 Soit $r \geq 1$. Trouver deux séries entières de rayon de convergence 1 dont la somme est de rayon de convergence r .

Produit de deux séries entières

Proposition 11 Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs ρ_a et ρ_b . Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ et ρ_d le rayon de convergence de la série produit $\sum d_n z^n$. On a :

$$\rho_d \geq \inf(\rho_a, \rho_b)$$

[Ind] Appliquer le théorème sur le produit de séries absolument convergentes.

Remarque: On ne peut rien dire de plus en général:

$$(1-z) \times \sum_{n \geq 0} z^n = 1$$

13.4 Développement en série entière

Définition 6 Soit $A \subset K$, $f : A \rightarrow K$ et $a \in A$. On dit que f est développable en série entière au voisinage de z_0 s'il existe $r > 0$ et une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $\rho \geq r$ tel que

- 1) le disque ouvert de centre z_0 de rayon r est inclus dans A
- 2) Pour tout $h \in K$,

$$|h| < r \implies f(z_0 + h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n h^n.$$

Proposition 12 Si f et g sont développables en série entière au voisinage d'un point z_0 , alors $f + g$ et $f \cdot g$ sont développables en série entière au voisinage de z_0 .

[Ind] Appliquer ce qui précède.

Limitons-nous à des fonctions d'une variable réelle et cherchons des conditions pour qu'une fonction soit développable en série entière au voisinage de x_0 .

Définition 7 Soit f une fonction de classe C^∞ sur un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$, la série de fonctions de terme général $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ est appelée série de Taylor de f en x_0 .

Proposition 13 Une fonction f est développable en série entière au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ si et seulement si elle est de classe C^∞ sur un voisinage de x_0 et égale à la somme de sa série de Taylor en x_0 sur ce voisinage.

[Ind] Que peut-être le développement en série entière ?

Proposition 14 Soit f une fonction C^∞ sur un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. Elle est développable en série entière au voisinage de x_0 si et seulement s'il existe un voisinage de x_0 sur lequel la suite de fonctions (R_n) définie par

$$R_n(x) = \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

converge simplement vers la fonction nulle.

[Ind] C'est encore la faute à Taylor !

Théorème 5 Soit f une fonction de classe C^∞ définie sur un intervalle ouvert contenant 0; f est développable en série entière au voisinage de 0 si et seulement s'il existe des réels $M > 0$, $k > 0$ et $r > 0$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I \quad |x| < r \implies |f^{(n)}(x)| \leq M k^n n!$$

[Ind] hors programme.

Proposition 15 Principe des zéros isolés. Soit f une fonction développable en série entière au voisinage de 0. Si $f \neq 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout réel x , $0 < |x| < \alpha$ entraîne $f(x) \neq 0$.

[Ind]

Voir la démonstration.

Exercice 10 Soit f définie sur $I =]-r, r[$ ($r > 0$). Si f est de classe C^∞ sur I , s'il existe un réel M tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f^{(n)}\|_\infty \leq M$ alors f est développable en série entière en 0 et égale à la somme de sa série de Taylor en 0 sur I .

13.4.1 Développement en séries entières des fonction usuelles

Utilisation du développement de Taylor

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (\rho = +\infty)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (\rho = +\infty)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (\rho = +\infty)$$

Exercice 11 Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (\rho = +\infty)$$

et que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (\rho = +\infty)$$

Exercice 12 Montrer que les fonctions f et g définies sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ et $g(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ sont prolongeables sur \mathbb{R} en des fonctions de classe C^∞ .

Fonctions rationnelles

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| < 1 \implies \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \quad (\rho = 1)$$

En calculant, par récurrence, les puissances de cette série, on trouve

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad |z| < 1 \implies \frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} z^{n-p} \quad (\rho = 1)$$

et si $a \in \mathbb{C}^*$

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad |z| < |a| \implies \frac{1}{(a-z)^{p+1}} = \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} \frac{z^{n-p}}{a^{n+1}} \quad (\rho = |a|)$$

Proposition 16 Soient P et Q deux polynômes premiers entre eux et tels que $Q(0) \neq 0$. La fonction rationnelle $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ est développable en série entière sur le disque centré en 0 de rayon ρ où ρ est le minimum des modules des zéros de Q . De plus, la série de Taylor de R en 0 est de rayon de convergence ρ .

[Ind] Décomposer en éléments simples.

Remarque: Si la fraction rationnelle est paire ou impaire, il est intéressant de poser $Z = z^2$ pour accélérer les calculs.

Exercice 13 Développer en série entière au voisinage de 0 la fonction $x \mapsto \frac{x}{1+x^2+x^4}$.

Exercice 14 Soit P et Q des polynômes non nuls. Comment se traduit l'égalité $\frac{P}{Q} \frac{Q}{P} = 1$ en termes de séries entières ? Que peut-on en conclure sur le rayon de convergence d'une série entière produit ?

Fonctions à dérivées rationnelles

$$\forall x \in]-1, 1[\quad \ln(1-x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \quad (\rho = 1)$$

$$\forall x \in]-1, 1[\quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad (\rho = 1)$$

Exercice 15 Montrer que

$$\forall x \in]-1, 1[\quad \text{Arctan } x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (\rho = 1)$$

Exercice 16 Soit P un polynôme à coefficients réels vérifiant $P(0) \neq 0$. Montrer que la fonction $\ln|P|$ est développable en série entière au voisinage de zéro. Quel est le plus grand rayon de convergence possible ?

Solutions d'une équation différentielle linéaire Considérons l'équation différentielle

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$$

où a , b , c et f sont des fonctions développables en séries entières au voisinage de O dont les rayons de convergence sont supérieurs à $\rho_0 > 0$. S'il existe une solution y développable en série entière au voisinage de 0, notons

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$$

et $\rho > 0$ son rayon de convergence. La fonction $ay'' + by' + c$ est donc développable en série entière avec un rayon de convergence supérieur ou égal à $\inf(\rho, \rho_0)$. D'après l'unicité du développement en séries entières, les coefficients des séries de Taylor de f et de $ay'' + by' + c$ en 0 sont donc égaux, ce qui entraîne une suite d'équations linéaires dont les inconnues sont les coefficients α_n . On essaie alors de résoudre ces équations, ce qui permet de déterminer la série entière $\sum \alpha_n x^n$. Si (α_n) est alors une suite de scalaires vérifiant le système d'équations et si le rayon de convergence de la série entière $\sum \alpha_n x^n$ est $\rho \geq \rho_0$, alors la fonction y définie sur $]-\rho_0, \rho_0[$

par $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$ est bien une fonction développable en série entière qui vérifie pour tout $x \in]-\rho_0, \rho_0[: a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = f(x)$. C'est donc une solution de l'équation différentielle sur l'intervalle $]-\rho_0, \rho_0[$.

Exercice 17 Montrer que les solutions de l'équation différentielle $(1+x^2)y'' - y = 0$ sont développables en série entière sur $] -1, 1[$.

Fonctions puissances Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction f définie sur $] -1, +\infty[$ par $f(x) = (1+x)^\alpha$ est la solution de l'équation différentielle $(1+x)y' - \alpha y = 0$ définie sur $] -1, +\infty[$ et vérifiant $y(0) = 1$. Elle est développable en série entière sur $] -1, 1[$ et

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (\rho = 1)$$

où pour tout entier n positif, $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$.

Exercice 18 Montrer que

$$\forall x \in]-1, 1[\quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^n \quad (\rho = 1)$$

Exercice 19 Montrer que

$$\forall x \in]-1, 1[\quad \text{Arcsin } x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (\rho = 1)$$

Montrer que ce développement en série entière converge sur $[-1, 1]$ vers la fonction Arcsin

Exercice 20 Retrouver le développement en série entière de $(1-x)^p$ ($p \in \mathbb{Z}$) à l'aide de la formule donnant le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

13.5 Exercices

Exercice 21 Donner le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes:

$$\begin{array}{ccc} \sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n(n-1)} & \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{(n-1)!} & \sum_{n \geq 0} \frac{3n}{n+2} x^n \\ \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + n - 1}{n!} x^n & \sum_{n \geq 1} \frac{2n+2}{n(n+2)} x^n & \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)} x^n \\ \sum_{n \geq 1} \frac{x^{3n}}{(3n)!} & \sum_{n \geq 0} n(n+1)x^n & \end{array}$$

Exercice 22 Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières telles que $|a_n| \sim |b_n|$. Montrer qu'elles ont même rayon de convergence.

Exercice 23 Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence ρ et ρ' . Quels sont les rayons de convergence des séries entières $\sum \frac{a_n}{1+|a_n|} x^n$, $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$, $\sum a_n b_n x^n$?

Exercice 24 Soit $(\sum a_n)$ une suite divergente à termes strictement positifs. On note $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ et on suppose que $a_n = o(S_n)$. Quels sont les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum S_n x^n$?

Exercice 25 Montrer que les séries entières $\sum_{n \geq 0} \frac{z^{3n}}{(3n)!}$, $\sum_{n \geq 0} \frac{z^{3n+1}}{(3n+1)!}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{z^{3n+2}}{(3n+2)!}$ sont de rayon de convergence infini et que leurs sommes u , v et w vérifient:

$$u^3 + v^3 + w^3 = 3uvw + 1.$$

Exercice 26 a) Soit θ un réel vérifiant $\cos \theta \neq 1$ et α et β deux réels. Développer en série entière sur un intervalle centré en 0 la fonction f d'une variable réelle définie par:

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x^2 - 2x \cos \theta + 1}$$

Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?

b) Si cette série entière s'écrit sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, montrer que la suite (a_n) vérifie la relation de récurrence linéaire à coefficients constants:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n - 2 \cos \theta a_{n+1} + a_{n+2} = 0$$

c) Réciproquement, que peut-on dire de la somme d'une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ si la suite a_n est définie par ses deux premiers termes a_0 et a_1 et la relation de récurrence linéaire précédente ?

d) Plus généralement, que peut-on dire des coefficients du développement en série entière d'une fonction rationnelle de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont des polynômes vérifiant: $Q(0) \neq 0$ et le degré de P est strictement inférieur au degré de Q .

Exercice 27 Calculer le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n z^n$ où la suite (a_n) est définie par $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ et $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} - a_n$ pour tout entier $n \geq 0$.

Exercice 28 On considère l'équation différentielle suivante:

$$x(x^2 + 1)y'' + (x^2 - 1)y' = 1.$$

a) Chercher une solution développable en série entière en 0. Quel est le rayon de convergence de cette série.

b) Résoudre l'équation.

Exercice 29 Développer en série entière les fonctions:

$$f(x) = \operatorname{Arctan} \left(\frac{x \sin a}{1 - x \cos a} \right) \quad g(x) = (\operatorname{Arcsin} x)^2.$$

Exercice 30 Soit n un entier naturel donné. En utilisant le développement en série entière de $f(x) = \frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)}$, trouver le nombre de couples d'entiers naturels (a, b) tels que $2a + 3b = n$.

Exercice 31 Trouver les rayons de convergence des séries entières de terme général $\exp(-sh n)z^n$, $n!z^{n^2}$ et $n^{\sqrt{n}}z^{2n}$.

Exercice 32 Trouver le développement en série entière en 0 des fonctions:

$$f(x) = (2x + 1) \ln(1 + x) \quad g(x) = \cos^2 x \quad h(x) = \operatorname{sh}^3 x.$$

Exercice 33 Trouver les rayons de convergence et les sommes de

$$\sum_{n \geq 0} \operatorname{ch}(na)z^n, \quad \sum_{n \geq 0} \frac{\sin(na)}{n!} z^n, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{n^2 + 1}{n(n+2)} z^n.$$

Exercice 34 Déterminer une solution développable en série entière en 0 dans les cas suivants:

a) $y'' + 2xy' + 2y = 0$ avec $y'(0) = 0$.

b) $xy'' + y' + xy = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. Montrer alors que $y = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t) dt$.

Exercice 35 Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\sum a_n x^n$ ait un rayon de convergence infini. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la somme de la série est équivalente au reste $R_p(x) = \sum_{n \geq p+1} a_n x^n$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 36 Montrer que :

$$\forall x \in [-1, 1] \quad \int_0^1 \frac{1-t}{1-xt^3} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)}.$$

En déduire la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$.

Exercice 37 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangularisable. Quel est le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum \text{tr}(A^n)x^n$?

13.6 Exercices

13.6.1 Indications

Exercice 1 Quelle est la valeur de r avant laquelle la série converge et après laquelle la série diverge.

Exercice 2 Si la suite ne tend pas vers 0 pour quelle valeur de z pouvez-vous dire que la série diverge ? Montrer qu'elle converge avant.

Exercice 3 Utiliser le théorème 1.

Exercice 4 Vous pouvez appliquer la règle de D'Alembert, ou mieux regarder la convergence de la série comme série numérique. En aucun cas penser série extraite.

Exercice 5 Regarder les séries $\sum a_{pn+j} z^{pn+j}$ pour $0 \leq j \leq p-1$.

Exercice 6 Penser série numérique et valeur de séparation.

Exercice 7 Trouver une série majorante.

Exercice 8 Il suffit de dériver, après savoir où on peut le faire.

Exercice 9 La somme se faisant termes à termes, penser à détruire des termes gênants.

Exercice 10 Majorer le reste intégrale de la série de Taylor.

Exercice 11 Les fonctions ch et sh s'expriment à l'aide de l'exponentielle.

Exercice 12 Si une fonction est développable en série entière, elle est de classe C^∞ .

Exercice 13 Le plus simple sera de dériver une primitive que l'on développera en série entière après avoir posé $u = x^2$.

Exercice 14 Penser au produit de série entières, quelle est le rayon de convergence de 1 ?

Exercice 15 Développer en série entière la dérivée puis intégrer.

Exercice 16 Dériver, où peut-on développer ?

Exercice 17 Appliquer exactement ce qui est au-dessus.

Exercice 18 Penser à la puissance $-\frac{1}{2}$. Arranger les coefficients.

Exercice 19 Développer la dérivée, puis intégrer.

Exercice 20 p entier est un réel.

Exercice 21 Prendre la méthode la plus adaptée, le rayon de convergence est une valeur de séparation.

Exercice 22 L'équivalence peut se traduire par des inégalités pour n assez grand.

Exercice 23 pour la première poser $c_n = \frac{a_n}{1 + |a_n|}$, formule qui s'inverse et raisonner : si $\sum a_n x^n$ converge alors... Pour la seconde utiliser la comparaison. Pour la troisième, montrer que le rayon est supérieur ou égal à $\rho\rho'$ en décomposant un $z = uv$...trouver un contre exemple pour montrer que l'inégalité peut être stricte.

Exercice 24 Le fait que $\sum a_n$ diverge donne un renseignement sur le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$, la comparaison permet de comparer les deux rayons de convergence, enfin former $\frac{S_{n+1}}{S_n}$ et chercher la limite.

Exercice 25 Écrire différemment l'expression en utilisant les racines cubiques de l'unité.

Exercice 26 C'est une fraction rationnelle. Penser à faire le produit en croix.

Exercice 27 La somme est : $\frac{1+z+z^2}{(1-z)^2(1+z)}$.

Exercice 28 Appliquer la méthode du cours, quand on en connaît une on en connaît deux.

Exercice 29 Dériver, développer, intégrer pour la première, pour la seconde, trouver une équation différentielle.

Exercice 30 C'est une fraction rationnelle. Ordonner le série entière.

Exercice 31 Un peu plus difficile, penser au développements limités.

Exercice 32 Dériver. Linéariser.

Exercice 33 D'Alembert, majorer, d'Alembert.

Exercice 34 Appliquer la méthode du cours. Reconnaître une série entière.

Exercice 35 Difficile manier les epsilons.

Exercice 36 Développer la fraction rationnelle puis intégrer, calculer l'intégrale pour $x = 1$.

Exercice 37 On sait exprimer la trace de A^n à l'aide des valeurs propres. On en déduit le rayon de convergence. Penser à la dérivée logarithmique du polynôme caractéristique.

13.7 Démonstrations

Proposition 1 Avec les hypothèses on a si $|z| < |z_0|$ alors $|a_n z^n| = |a_n| |z_0|^n \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \leq M \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$ où M est la borne de la suite $(a_n z_0^n)$ et on a que la série de terme général $\left| \frac{z}{z_0} \right|^n$ est convergente comme série géométrique de raison strictement plus petit que 1 donc la série entière de terme général $a_n z^n$ converge.

Théorème 1 Si $\mathcal{C} = \{r \in \mathbb{R}^+; \sum |a_n| r^n \text{ converge}\}$ alors \mathcal{C} contient 0 et est un intervalle de \mathbb{R}^+ car si $r_0 \in \mathcal{C}$ la suite $(|a_n| r_0^n)$ est bornée et donc d'après le lemme d'Abel $\forall r < r_0 \sum |a_n| r^n$ converge. Posons $\rho = \text{Sup} \mathcal{C}$

Appelons ρ_1, ρ_2, ρ_3 les bornes des trois premiers ensembles.

Si $r < \rho$ alors la série est absolument convergente, donc convergente, donc son terme général tend vers 0, donc son terme général est borné. Ce qui montre $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \rho_3 \geq \rho$.

Mais si $r < \rho_1$ il existe r_0 tel que $r < r_0 < \rho_1$ la suite $(a_n r_0^n)$ est bornée, d'après le lemme d'Abel la série $\sum a_n r^n$ converge absolument $r < \rho$. D'où $\rho \geq \rho_1$. D'où $\rho \geq \rho_1 \geq \rho_2 \geq \rho_3 \geq \rho$. Ce qui montre que toutes ces bornes sont égales.

Proposition 2 1) Si $\rho \neq 0$ alors d'après le théorème 1 $\forall |z| < \rho$ la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

2) Si $|z| > \rho$ toujours d'après le théorème 1 le terme général ne tend pas vers 0.

Proposition 3 la règle de D'Alembert pour les séries numériques donne sous les hypothèses $\lim_{l \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = |z| \ell$ et donc la série numérique convergera si $|z| \ell < 1$ et divergera si $|z| \ell > 1$ c'est à dire si $|z| < \frac{1}{\ell}$.

Le rayon de convergence est $\rho = \frac{1}{\ell}$ avec les conventions d'usage.

Théorème 2 C'est le résultat le plus fort des séries entières. Soit $0 < r < \rho$ alors la série $\sum |a_n| r^n$ converge et comme $\forall |z| \leq r$ on a $|a_n z^n| \leq |a_n| r^n$ la série entière $\sum a_n z^n$ est normalement convergente.

Proposition 4 Soit z_0 un point du disque de convergence. Puisque $|z_0| < \rho$ il existe un disque ferm D de rayon $\alpha < \rho$ tel que $z_0 \in D$. Dans ce disque on a la convergence uniforme. La suite des sommes partielles de la série $\sum a_n z^n$ est une suite fonctions continues convergeant uniformément donc leur limite qui est la somme de la série est continue sur D donc en outre en z_0 .

Proposition 5 Vu ce qui est écrit il suffit de vérifier que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k z^k$ est un $o(z^n)$. Or $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k z^k =$

$z^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k z^{k-n}$ et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k z^{k-n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ comme reste d'une série convergente.

Proposition 6 Soit R et R' les rayons de convergence de la série et de la série dérivée. Si $|z| < R$ prenons $r : |z| < r < R$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{|z|}{r} \right)^n = 0$ car $\frac{|z|}{r} < 1$ donc pour n assez grand

on a $|z|^n \leq \frac{r^n}{n}$ ou $n |a_n| |z|^{n-1} \leq |a_n| \frac{1}{|z|} r^n$ ainsi la série des dérivées converge d'où $R' \geq R$.

Si $|z| < R'$ alors $|a_n z^n| \leq n |a_n| |z|^{n-1} |z|$ et la série de départ converge, d'où $R \geq R'$ et l'égalité.

Théorème 3 Les fonctions $x \mapsto a_n x^n$ sont $\mathcal{C}^{+\infty}$ les séries dérivées converge uniformément sur tout disque fermé D contenu dans $D(0, \rho)$. La somme est donc $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur D donc sur $D(0, \rho)$.

Proposition 7 On a $f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{n=+\infty} n(n-1) \cdots (n-p+1) a_n x^{n-p}$ et sa valeur en 0 est $f^{(p)}(0) = p! a_p$.

Proposition 8 On peut récupérer les coefficients en regardant autour de zéro. On a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \frac{1}{n!}a^{(n)}(0) = \frac{1}{n!}b^{(n)}(0) = b_n$, car a, b coïncide sur un voisinage de 0. D'où $a = b$.

Proposition 9 Dans la proposition 6 on pose $na_n = b_{n-1}$, ainsi $\sum b_n x_n$ et $\sum \frac{b_{n-1}}{n} x^n$ ont le même rayon, ce qui donne que $\sum b_n x^n$ et $\sum \frac{b_n}{n+1} x^{n+1}$ ont même rayon de convergence, ce qu'il fallait montrer.

Théorème 4 Soit $x < \rho$ où ρ est le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ il existe r tel que $0 < r < \rho$. Si S est la somme de la série, la convergence étant uniforme sur le disque $\mathcal{D}(0, r)$ on a :
$$\int_0^x S = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x_{n+1}}{n+1}$$
. Ces deux séries ont le même rayon de convergence.

Proposition 10 Supposons par exemple $\rho_a < \rho_b$. Si $\rho_a \neq \rho_b$ alors pour $|z| < \rho_a$ les deux séries convergent et leur somme aussi. Pour $\rho_a < |z| < \rho_b$ une série converge et l'autre diverge donc la somme diverge. Comme le rayon de convergence est une valeur de séparation on a $\rho_c = \rho_a$. Par contre dans le cas d'égalité des rayons la première partie prouve que $\rho_c \geq \rho_a$ mais on ne peut rien dire de plus. Si nous prenons une série et son opposée la somme, nulle converge sur tout \mathbb{R} .

Proposition 11 Supposons par exemple $\rho_a < \rho_b$. Pour $|z| < \rho_a$ les deux séries convergent absolument et leur produit aussi.

Proposition 12 En effet on peut faire la somme et le produit de séries entières au voisinage de z_0 .

Proposition 13 Si f est développable en série entière, alors f est C^∞ et d'après la formule donnant les coefficients c'est forcément la série de Taylor de f . Réciproquement si f est égale à la somme de sa série de Taylor elle est développable en série entière.

Proposition 14 Si la fonction est développable en série entière, la série est la série de Taylor. Pour que celle-ci converge il faut et il suffit que la suite des restes de Taylor converge vers zéro.

Théorème 5 hors programme.

Proposition 15 Puisque $f \neq 0$ il existe $n_0 : f^{(n_0)}(0) \neq 0$. Soit n_0 le plus petit entier n tel que $a_n \neq 0$. On peut écrire $f(x) = x^{n_0} \left(a_{n_0} + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} a_n x^{n-n_0} \right)$ et la fonction définie par

$g(x) = a_{n_0} + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} a_n x^{n-n_0}$ est une fonction continue non nulle en 0 il existe donc $\mathcal{D}(0, \alpha)$ tel que $\forall x \in \mathcal{D}$ on ait $g(x) \neq 0$. Si $n_0 \geq 1$ alors 0 est un zéro isolé et si $n_0 = 0$ alors f est localement non nulle.

Proposition 16 La fonction R se décompose dans \mathbb{C} en $R(x) = \sum \frac{1}{(x-a)^\alpha}$, bien entendu cette somme est finie. Chaque élément $\frac{1}{(x-a)^\alpha}$ se décompose en séries entières de rayon de convergence $|a|$ et donc R aussi et le rayon de convergence est le plus petit des rayons de convergence des éléments, c'est à dire le minimum des modules des zéros de Q .

13.8 Travaux Dirigés

Exercice 38 Quel est le domaine de convergence des séries entières suivantes? Calculer leur somme.

$$\begin{aligned} \text{a) } A(x) &= \sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n(n-1)} ; \text{ b) } B(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{3n}{n+2} x^n ; \text{ c) } C(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{n^2+n-1}{n!} x^n ; \text{ d) } D(x) = \\ & \sum_{n \geq 1} \frac{2n+2}{n(n+2)} x^n ; \text{ e) } E(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)} ; \text{ f) } F(x) = \sum_{n \geq 1} n(n+1)x^n ; \text{ g) } G(x) = \\ & \sum_{n \geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}. \end{aligned}$$

Pour toutes ces séries de fonctions on pose $\Lambda(x) = \sum_{n \geq 0} u_n(x)$.

- $A(x) = \sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n(n-1)}$ donne $\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = |x| \frac{n-1}{n+1} \rightarrow |x|$ et donc d'après D'Alembert, on a si $|x| < 1$ la série de terme général $|u_n(x)|$ converge et la série est abscv le rayon $R = 1$. Dans l'intervalle ouvert de convergence on peut alors dériver termes à termes : $A'(x) = \sum_{n \geq 2} \frac{x^{n-1}}{n-1} = \sum_{i \geq 1} \frac{x^i}{i} = -\ln(1-x)$ et $A(x) = A(0) - \int_0^x \ln(1-t) dt = x + (1-x) \ln(1-x)$.

- $B(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{3n}{n+2} x^n$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{(n+3)n} |x| = |x|$ et $R = 1$. Pour le calcul $\sum_{n \geq 0} \frac{3n}{n+2} x^n = \sum_{n \geq 0} \frac{3(n+2)-6}{n+2} x^n = \sum_{n \geq 0} 3x^n - \frac{6}{x^2} \sum_{n \geq 0} \frac{x^{n+2}}{n+2} = 3 \frac{1}{1-x} - \frac{6}{x^2} \left(\sum_{i \geq 1} \frac{x^i}{i} - x \right) = \frac{3}{1-x} - \frac{6}{x^2} (-\ln(1-x) - x)$. On peut scinder en deux la série entière car les deux séries sont convergentes.

- $C(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{n^2+n-1}{n!} x^n$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = 0$ et $R = +\infty$. En écrivant $n^2+n-1 = n(n-1) + 2n-1$ on obtient $C(x) = \sum_{n \geq 2} \frac{n(n-1)x^n}{n!} + 2 \sum_{n \geq 1} \frac{n}{n!} x^n - \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ chacune des séries convergent avec un rayon infini et $C(x) = x^2 \sum_{n \geq 2} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + 2x \sum_{n \geq 1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{x^i}{i!} (x^2 + 2x - 1) = e^x (x^2 + 2x - 1)$;

- $D(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{2n+2}{n(n+2)} x^n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+2)^2}{(n+1)^2(n+3)} |x| = |x|$ et $R = 1$. d'autre part $\frac{2n+2}{n(n+2)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+2}$ et $D(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} + \frac{1}{x^2} \sum_{n \geq 1} \frac{x^{n+2}}{n+2}$ séries de rayon de convergence 1 et $D(x) = -\ln(1-x) + \frac{1}{x^2} \left(\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} - x - \frac{x^2}{2} \right) = -\ln(1-x) - \frac{1}{x^2} \left(\ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2} \right)$.

- $E(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}$ et $\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = |x^2| \frac{2n-1}{2n+3} \rightarrow |x^2|$ et $R = 1$. Ensuite $\frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$ et $E(x) = \frac{x^2}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2n-1} - \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = -\frac{x^2}{2} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$. Or si $h(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ de rayon 1

alors $h'(x) = \sum_{n \geq 0} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}$ et $h(x) = h(0) + \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \text{Arc tan } x$ et $E(x) = -\frac{x^2}{2} \text{Arc tan } x - \frac{1}{2} (\text{Arc tan } x - x)$.

- $F(x) = \sum_{n \geq 1} n(n+1)x^n$ de rayon de convergence 1 et si $G(x) = \sum_{n \geq 1} nx^{n+1}$ de rayon 1

et $G'(x) = F(x)$. Or $G(x) = x^2 \sum_{n \geq 1} nx^{n-1} = x^2 \left(\sum_{n \geq 0} x^n \right)' = x^2 \left(\frac{1}{1-x} \right)'$ et $G(x) = \frac{x^2}{(1-x)^2}$ soit $F(x) = G'(x) = \frac{2x}{(1-x)^3}$.

- $G(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ et $R = +\infty$ car $\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = |x|^3 \frac{1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \rightarrow 0$ on

peut donc dériver termes à termes et $G'(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}$; $G''(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}$

et $G'''(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^{3(n-1)}}{3(n-1)!} = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = G(x)$. Ainsi G est solution de l'équation

différentielle homogène de degré 3 : $y = y'''$ dont l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 3. Les conditions sont $y(0) = 1, y'(0) = y''(0) = 0$ on cherche y sous la forme $e^{\alpha x}$ et $\alpha^3 = 1$ par suite $y(x) = \lambda e^x + \mu e^{jx} + \nu e^{j^2 x}$ les conditions

initiales donnent $\begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 1 \\ \lambda + \mu j + \nu j^2 = 0 \\ \lambda + \mu j^2 + \nu j = 0 \end{cases}$ et $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ convient. $G(x) = \frac{1}{3} (e^x + e^{jx} + e^{j^2 x}) = \frac{1}{3} (e^x + 2e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x)$.

Il y a ici deux méthodes intégrer et dériver puis résoudre une équation.

Exercice 39 Considérons l'équation différentielle suivante :

$$(E) \quad x(x^2 + 1)y'' + (x^2 - 1)y' = 1$$

a) Chercher une solution de (E) développable en série entière. Quel est le rayon de convergence de cette série. (Poser $y = \sum a_n x^n$ et trouver une relation entre les a_n).

b) Résoudre l'équation (E).

On cherche à priori $y(x)$ sous la forme $y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ on a donc $y'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$

et $y''(x) = \sum_{n \geq 2} n(n-1) x^{n-2}$ l'équation E donne $\sum_{n \geq 2} n(n-1) a_n x^{n+1} + \sum_{n \geq 2} n(n-1) a_n x^{n-1} +$

$\sum_{n \geq 1} n a_n x^{n+1} - \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} = 1$ et par unicité des développements en séries entières, on peut identifier les coefficients de x^p dans les deux membres de l'égalité.

$$x^0 : -a_1 = 1$$

$$x^1 : 2a_2 - 2a_2 = 0$$

$$x^2 : 6a_3 + a_1 - 3a_3 = 0$$

$$x^p : p \geq 2, (p-1)(p-2)a_{p-1} + (p+1)pa_{p+1} + (p-1)a_{p-1} = 0$$

ou $(p-1)((p-1)a_{p-1} + (p+1)a_{p+1}) = 0$ ou $(p-1)a_{p-1} + (p+1)a_{p+1} = 0$ car $p \neq 0$ et cette relation est encore vraie pour $p = 2$. D'où pour tout $p \geq 2, (p+1)a_{p+1} = -(p-1)a_{p-1}$ ou a_{2p} (resp. a_{2p+1}) est multiple de a_0 (resp. a_1). Comme on cherche une solution on peut imposer $a_0 = 0$ et $a_{2p} = 0$. Par suite $(2p+1)a_{2p+1} = -(2p-1)a_{2p-1} = \dots = (-1)^p a_1 = (-1)^{p+1}$ et

$y(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{p+1}}{2p+1} x^{2p+1} = -\text{Arc tan } x$. Il s'agit d'une série entière de rayon 1. Réciproquement

$-\text{Arc tan } x$ vérifie bien (E).

Le coefficient de y'' s'annule en 0 on résoudra sur \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* . On a $\frac{y''}{y} = \frac{1}{x} - \frac{2x}{1+x^2}$ ou $\ln|y'| = C^{ste} + \ln\left|\frac{x}{1+x^2}\right|$ soit $y' = \lambda \frac{2x}{1+x^2}$ et $y(x) = \lambda \ln(1+x^2) + \mu$. Les solutions de (E) sont données par $y(x) = -\text{Arc tan } x + \lambda \ln(1+x^2) + \mu$ sur \mathbb{R}_+^* ou \mathbb{R}_-^* en fait elles sont prolongeables sur \mathbb{R} .

Exercice 40 Rayon de convergence des séries entières de terme général :

$$\exp(-shn)z^n; n!z^{n^2}; \text{ et } n^{\sqrt{n}}z^{2n}$$

Nous avons $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = e^{shn-sh(n+1)}$ et $shn-sh(n+1) = \frac{e^n - e^{-n}}{2} - \frac{e^{n+1} - e^{-(n+1)}}{2} = \frac{e^n - e^{n+1}}{2} + \frac{-e^{-n} + e^{-(n+1)}}{2} = \frac{e^n}{2} \overset{<0}{\rightarrow -\infty} + \frac{e^{-(n+1)} - e^{-n}}{2}$ et $R = +\infty$.

soit $u_n(z) = n!z^{n^2}$ on a $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{(n+1)!|z|^{(n+1)^2}}{n!|z|^{n^2}} = (n+1)|z|^{2n+1}$ si $|z| < 1$ la série converge et si $|z| > 1$ la série diverge le rayon de convergence est $R = 1$.

De même $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{(n+1)^{\sqrt{n+1}}}{n^{\sqrt{n}}} |z|^2$. Développons $\frac{(n+1)^{\sqrt{n+1}}}{n^{\sqrt{n}}} = e^{\sqrt{n+1}\ln(n+1) - \sqrt{n}\ln n}$ et $\sqrt{n+1}\ln(n+1) - \sqrt{n}\ln n = \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \ln n \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \sqrt{n}\ln n = \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \left(\ln n + \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) - \sqrt{n}\ln n \sim \sqrt{n}$ et $R = 0$.

Exercice 41 Trouver le développement en série entière de :

a) $f(x) = (2x+1)\ln(1+x)$; b) $f(x) = \cos^2 x$; c) $f(x) = sh^3 x$

Partant de $\ln(1+x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ de rayon de convergence 1 on a $f(x) = (2x+1) \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} =$

$$2 \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^{n+1}}{n} + \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x + \sum_{n \geq 2} \left(\frac{2(-1)^n}{n-1} - \frac{(-1)^n}{n} \right) x^n.$$

$$f(x) = \cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{2n!} \text{ de rayon } R = +\infty$$

En écrivant $f(x) = sh^3(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(e^{3x} + 3e^{-x} - 3e^x - e^{-3x})$ on trouve $\frac{1}{8} \left(\sum_{n \geq 0} \frac{(3x)^n}{n!} - \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \right)$

$$\frac{1}{8} \sum_{n \geq 0} \frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{3}{8} \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ de rayon } +\infty.$$

Exercice 42 Rayon de convergence et somme de :

a) $\sum_{n \geq 0} ch(na)x^n$; b) $\sum_{n \geq 0} \frac{\sin(n\alpha)}{n!} x^n$; c) $\sum_{n \geq 1} \frac{n^2 + 1}{n(n+2)} x^n$

$\sum_{n \geq 0} ch(na)x^n$ en supposant $a \geq 0$ on a $\frac{ch((n+1)a)}{ch(na)} = \frac{e^{(n+1)a} + e^{-(n+1)a}}{2} \frac{2}{e^{na} + e^{-na}} = \frac{e^{(n+1)a} + e^{-(n+1)a}}{e^{na} + e^{-na}}$ et $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{(n+1)a}}{e^{na}} = e^a$ et le rayon de convergence $r = e^{-a}$.

On peut faire le calcul avec D'Alembert ou écrire $\left|\frac{\sin(n\alpha)}{n!} x^n\right| \leq \frac{x^n}{n!}$ cette dernière série a un rayon infini donc $R = +\infty$.

La règle de D'Alembert donne pour $\sum_{n \geq 1} \frac{n^2 + 1}{n(n+2)} x^n$ un rayon 1.

Exercice 43 Discuter dans \mathbb{C} , l'équation $\tan z = z$.

Posons $z = x + iy$ on a $x + iy = \frac{\tan x + i \operatorname{th} y}{1 - i \tan x \operatorname{th} y}$ ou $(x + iy)(1 - i \tan x \operatorname{th} y) = \tan x + i \operatorname{th} y$
ou $\begin{cases} x + y \tan x \operatorname{th} y = \tan x \\ y - x \tan x \operatorname{th} y = \operatorname{th} y \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = \tan x (1 - y \operatorname{th} y) \\ y = \operatorname{th} y (1 + \tan x) \end{cases}$ En supposant $y \neq 0$ ce qui donne $\operatorname{th} y \neq 0$ et $\tan x \neq 0$ car par la deuxième si $\tan x = 0$ alors $y = \operatorname{th} y = 0$ on a $\frac{x}{\tan x} + y \operatorname{th} y = 1 = \frac{y}{\operatorname{th} y} - x \tan x$ ce qui donne $x \left(\tan x + \frac{1}{\tan x} \right) = y \left(\frac{1}{\operatorname{th} y} - \operatorname{th} y \right)$ ou $\frac{2x}{\sin 2x} = \frac{2y}{\operatorname{sh} 2y}$. Ceci est impossible car $\frac{\sin t}{t} < 1 < \frac{\operatorname{sh} u}{u}$. En effet il suffit d'étudier pour $x > 0$ la fonction $x \mapsto \sin x - x$ et $x \mapsto \operatorname{sh} x - x$ puis utiliser la parité. On a donc $y = 0$ et toutes les solutions sont réelles et vérifient $\tan x = x$ il y a une seule solutions dans $\left] -\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi \right[$ avec $n \in \mathbb{Z}$

Exercice 44 Montrer que la série entière $\sum z^n \sin na$ et $\sum z^n \cos na$ ($a \in \mathbb{R}$) divergent en tout point de leur cercle de convergence. Déterminer leur somme.

Si $|z| < 1$ alors la série converge et si $|z| \geq 1$ alors le terme général ne tend pas vers 0. En effet si $|z| = 1$ on pose $z = e^{i\alpha}$ et $|z^n \cos na| = |\cos na|$ qui ne tend pas vers 0. Pour ce résultat on dit que si $(\cos na)$ a une limite ℓ alors $(\sin na)$ en aurait une m par la formule $\cos(n+1)a = \cos na \cos a - \sin na \sin a$ et $(\sin 2na)$ aurait pour limite ℓ la relation $\cos^2 na + \sin^2 na = 1$ et $\sin 2na = 2 \sin na \cos na$ donne la contradiction. Pour le calcul de la somme on a $S = iT = \sum_{n \geq 0} (ze^{ia})^n = \frac{1}{1 - ze^{ia}}$ et puis on sépare les parties réelles et imaginaires.

Exercice 45 Soit (a_n) une suite de nombres positifs strictement telle que $\sum a_n z^n$ ait un rayon de convergence infini. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la somme de la série est équivalente au

reste $R_p(x) = \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n x^n$ lorsque x tend vers $+\infty$.

On écrit $S(x) = \sum_{n=0}^p a_n x^n + \sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n x^n \left(1 + \frac{\sum_{n=0}^p a_n x^n}{\sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n x^n} \right)$ cette dernière expres-

sion $\frac{\sum_{n=0}^p a_n x^n}{\sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n x^n} \sim \frac{a_p x^p}{\sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n x^n}$ qui tend vers 0 car $\frac{a_p x^p}{\sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n x^n} \leq a_p \frac{x^p}{x^{p+1}} = \frac{a_p}{x}$, au voisinage

de $+\infty$.

Exercice 46 Déterminer les rayons de convergence des séries entières :

1) $\sum_{n \geq 0} z^n \tan \frac{n\pi}{7}$; 2) $\sum_{p \geq 0} u_p z^p$ avec $u_{2n} = a^{2n}$, $u_{2n+1} = b^{2n+1}$ et $0 < a < b$.

Pour n entier $\left| \tan \frac{n\pi}{7} \right|$ prend 4 valeurs différentes : $0, \tan \frac{\pi}{7}, \tan \frac{2\pi}{7}, \tan \frac{3\pi}{7}$ et pour tout n on a : $\left| z^n \tan \frac{n\pi}{7} \right| \leq r^n \tan \frac{3\pi}{7}$. Or pour tout r de $[0, 1[$: la série converge donc le rayon de convergence $\rho \geq 1$. Si $|z| \geq 1$ alors la suite $n \mapsto r^{7n+3} \tan \frac{(7n+3)\pi}{7} = r^{7n+3} \tan \frac{3\pi}{7}$ est constante pour $r = 1$ et tend vers ∞ pour $r > 1$ donc ne tend pas vers 0, et comme c'est une suite extraite de $(r^n \tan \frac{n\pi}{7})$ cette suite ne tend pas vers 0 et donc $\rho = 1$. En fait il y a divergence sur tout le bord du disque.

On a $u_{2n} r^{2n} = (ar)^{2n}$ et $\lim_{+\infty} u_{2n} r^{2n} = 0 \Leftrightarrow 0 \leq r \leq \frac{1}{a}$ tandis que $u_{2n+1} r^{2n+1} = (br)^{2n+1}$ donne

$\lim_{+\infty} u_{2n+1} r^{2n+1} = 0 \Leftrightarrow 0 \leq r \leq \frac{1}{b}$. Par ailleurs $\lim u_n r^n = 0 \Leftrightarrow \left(\lim u_{2n} r^{2n} = 0 \text{ et } \lim u_{2n+1} r^{2n+1} = 0 \right)$

on a donc $\rho = \frac{1}{b}$.

Exercice 47 Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle, comparer les rayons de convergence de $\sum a_n z^n$ et $\sum a_n^2 z^n$.

Soit $R_1 = \sup \left\{ |z|; \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n z^n = 0 \right\}$ et $R_2 = \sup \left\{ |z|; \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^2 z^n = 0 \right\}$ on a si $|z| < R_1$ alors $\lim a_n z^n = 0$ et donc $\lim a_n^2 z^{2n} = 0$ d'où $|z|^2 \leq R_2$ soit $R_1^2 \leq R_2$. D'autre part si $|z| < R_2$ alors $\lim a_n^2 z^n = 0$ et en posant $z = u^2$ on a $\lim a_n^2 u^{2n} = 0$ et $\lim a_n u^n = 0$ ce qui donne $|z| = |u|^2 \leq R_1^2$ ou $R_2 \leq R_1^2$ on a donc $R_2 = R_1^2$.

Exercice 48 Développement en série entière de :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \int_{-\infty}^x \frac{dt}{1+t^2+t^4}$$

L'intégrale est bien convergente et $f(x) = \int_0^x \varphi(t) dt + \int_{-\infty}^0 \varphi(t) dt$ avec $\varphi(t) = \frac{1}{1+t^2+t^4}$ ainsi f est bien \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et $f'(x) = \frac{1}{1+x^2+x^4} = \frac{1-x^2}{1-x^6}$. Pour $|x| < 1$ on a $\frac{1}{1-x^6} = \sum_{n \geq 0} x^{6n}$ et $f'(x) = \sum_{n \geq 0} x^{6n} - x^{6n+2}$. Ainsi f est développable en série entière avec un rayon de 1.

Calculons $f(0) = \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+t^2+t^4} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{1+t^2+t^4} dt$ avec le changement $u = \frac{1}{t}$. Puis $f(0) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1-t+t^2} + \frac{1}{1+t+t^2} \right) dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\frac{1}{2} + \left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{\frac{1}{2} + \left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$ par le changement $u = -t$ ainsi $f(0) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{\frac{1}{2} + \left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2} \left[\arctan \left(t\sqrt{2} - 1 \right) \right]_{-\infty}^{+\infty} = \pi\sqrt{2}$

$$\text{et } f(x) = \pi\sqrt{2} + \sum_{n \geq 0} \frac{x^{6n+1}}{6n+1} - \frac{x^{6n+3}}{6n+3}.$$

Exercice 49 Développement en série entière de $x \mapsto f(x) = \ln \left(1 + \frac{x}{1+x^2} \right)$. Comportement de la série aux bornes de l'intervalle de convergence.

f est bien définie si $|x| < 1$ on a $f(x) = \ln \frac{1-x^3}{1-x} - \ln(1+x^2) = \sum_{n \geq 1} -\frac{x^{3n}}{n} + \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{x^n}{n}$ ou $f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{6n+1}}{6n+1} + \frac{1+2(-1)^{n+1}}{6n+2} x^{6n+2} - \frac{2}{6n+3} x^{6n+3} + \frac{1+2(-1)^n}{6n+4} x^{6n+4} + \frac{x^{6n+5}}{6n+5} - \frac{1+(-1)^n}{3n+3} x^{6n+6}$ de rayon de convergence 1. En posant $f(x) = \sum_{n \geq 1} a_n x^n$ pour $|x| < 1$

et $b_n = \sum_{k=1}^6 a_{6n+k}$ et $c_n = \sum_{k=1}^6 (-1)^k a_{6n+k}$ on a $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $c_n = \frac{(-1)^{n+1}}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Or $\lim_{+\infty} a_n = 0$ et donc $\sum b_n$ et $\sum c_n$ converge ce qui donne par groupement des termes

dans une série absolument convergente $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ convergent et $f(1) = \ln \frac{3}{2}$ et $f(-1) = -\ln 2$.

Exercice 50 Développement en série entière de $f(x) = e^{-x} \sin x$.

On pose $f(x) = \text{Im} \left(e^{(-1+i)x} \right) = \text{Im} \left(\sum_{n \geq 0} (-1+i)^n \frac{x^n}{n!} \right)$ de rayon de convergence $+\infty$. En

écrivant $-1+i = \sqrt{2} e^{3i\frac{\pi}{4}}$ on a $(-1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}} e^{3ni\frac{\pi}{4}}$ et $f(x) = \sum_{n \geq 0} 2^{\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right) \frac{x^n}{n!}$.

Exercice 51 Développer en série entière de $f(x) = (1+x^2)^{\frac{\alpha}{2}} \cos(\alpha \arctan x)$.

Nous cherchons une équation différentielle, posons $t = \arctan x$ ou $x = \tan t, t \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ et $y = f(x) = \frac{\cos(\alpha t)}{(\cos t)^\alpha}$. On a $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t}; \frac{dy}{dx} = \alpha \frac{\sin(1-\alpha)t}{(\cos t)^{\alpha-1}}$ ce qui donne $\frac{d^2y}{dx^2} =$

$\alpha(1-\alpha) \frac{\cos(2-\alpha)t}{\cos^{\alpha-2}t}$ et $\frac{1}{\cos^2 t} \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{\sin t}{\cos t} \frac{dy}{dx} (1-\alpha) = \alpha(1-\alpha) \frac{\cos \alpha t}{(\cos t)^\alpha}$. Ainsi f est solution de

$\begin{cases} (1+x^2)y'' + 2(1-\alpha)xy' - \alpha(1-\alpha)y = 0 \\ f(0) = 1; f'(0) = 0 \end{cases}$. Posons $y = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ en remplaçant on obtient

$(1+x^2) \sum_{n \geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2(\alpha-1) \sum_{n \geq 0} na_n x^n + \alpha(\alpha-1) \sum_{n \geq 0} a_n x^n = 0$ ou $\sum_{n \geq 0} ((n+2)(n+1)a_{n+2} + (n-\alpha)(n-\alpha-1)a_n) x^n = 0$

ce qui donne $a_0 = 1, a_1 = 0, a_{2n+1} = 0$ et $a_{2n} = (-1)^n \frac{\alpha(1-\alpha) \cdots (2n-1-\alpha)}{(2n)!}$ ceci permet

de calculer le rayon de convergence $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} \right| = 1$ soit $R = 1$ et pour tout x de $] -1, +1[$ on a

$f(x) = 1 + \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{\alpha(1-\alpha)(2-\alpha) \cdots (2n-1-\alpha)}{(2n)!} x^{2n}$.

Exercice 52 Déterminer la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, et pour tout $n \geq 0, u_{n+1} =$

$\sum_{p=0}^n u_p u_{n-p}$.

Posons $f(x) = \sum_{n \geq 0} u_n x^n$ avec un certain rayon de convergence R . On a $f^2(x) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{p=0}^n u_p u_{n-p} \right) x^n =$

$\sum_{n \geq 0} u_{n+1} x^{n+1}$ donc $xf^2(x) - f(x) + 1 = 0$ ce qui donne en dehors de 0 : $f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$. La

continuité de f en 0 donne $f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$ avec $f(0) = 0$. Nous pouvons alors développer f

en série entière pour $|x| < \frac{1}{4}$: $(1-4x)^{\frac{1}{2}} = 1 - 2 \sum_{n \geq 1} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!} x^n$ et $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!} x^{n-1} =$

$\sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} x^n$. On a donc $R = \frac{1}{4}$ et $xf^2(x) - f(x) + 1 = 0$. Nous posons $u_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$

avec $u_0 = f(0) = 1$ et $u_{n+1} = \sum_{p=0}^n u_p u_{n-p}$.

Exercice 53 On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$, $x \in \mathbb{R}$, déterminer l'ensemble de définition de f et exprimer f au moyen des fonctions usuelles.

On a $0 \leq \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)} \leq \frac{1}{2n^3}$ si $|x| \leq 1$ le rayon est donc $R = 1$. D'autre part

$\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1}$ ceci permet de calculer $f(x) = 3x^2 - (1-x)^2 \ln(1-x) -$

$(1+x)^2 \ln(1+x)$ et $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f = 3 - 4 \ln 2$ et par parité $f(-1) = f(1)$.

Exercice 54 Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}$.

Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{4n+1}$ on a $|u_n| = \frac{1}{4n+1}$ qui décroît vers 0. La série est bien convergente. Soit

$\delta_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{4k+1}$ dont la limite est δ , somme de la série. Ecrivons $\delta = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 t^{4k} dt =$

$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^{4k} dt = \int_0^1 \frac{1 - (-1)^n t^{4n}}{1 + t^4} dt$ ainsi $\delta_n - \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^4} = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{4n}}{1 + t^4} dt$. En valeur absolue : $\left| \delta_n - \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^4} \right| \leq \int_0^1 t^{4n} dt = \frac{1}{4n+1} \rightarrow 0$. Un calcul simple donne $\delta = \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$.

Exercice 55 Développer en série entière les fonctions :

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x \sin a}{1 - x \sin a}\right) ; \text{ puis } g(x) = (\arcsin x)^2$$

- En remarquant que $f'(x) = \frac{\sin a}{(1 - x \sin a)^2 + x^2 \sin^2 a}$ on supposera $a \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$ et

$$f'(x) = \frac{\sin a}{(1 - x\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \sin a)(1 - x\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \sin a)} = \frac{\frac{1+i}{2i} \sin a}{1 - x\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \sin a} - \frac{\frac{1-i}{2i} \sin a}{1 - x\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \sin a}.$$

Or nous savons que $\frac{1}{1 - \lambda x} = \sum_{n \geq 0} \lambda^n x^n$ dès que $|x| < \frac{1}{|\lambda|}$ d'où si $|x| < \frac{1}{|\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \sin a|} =$

$$\frac{1}{|\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \sin a|} = R_a. \text{ Ainsi } f'(x) = \frac{1+i}{2i} \sum_{n \geq 0} (x\sqrt{2} \sin a)^n e^{i\frac{\pi}{4}} \sin a - \frac{1-i}{2i} \sin a \sum_{n \geq 0} (x\sqrt{2} \sin a e^{-i\frac{\pi}{4}})^n =$$

$$f'(x) = \sum_{n \geq 0} x^n (\sqrt{2} \sin a)^{n+2} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}(n+1)} - e^{-i\frac{\pi}{4}(n+1)}}{2i} = \sum_{n \geq 0} x^n (\sqrt{2} \sin a)^{n+1} \sin \frac{\pi(n+1)}{4}.$$

Comme il s'agit d'une série entière on peut intégrer termes à termes tant que $|x| < R_a$.

$$\text{Ainsi } f(x) - f(0) = \sum_{n \geq 0} \frac{(x\sqrt{2} \sin a)^{n+1}}{n+1} \sin \frac{\pi(n+1)}{4} \text{ et } f(x) = f(0) + \sum_{n \geq 1} \frac{(x\sqrt{2} \sin a)^n}{n} \sin \frac{\pi n}{4}$$

valable pour $|x| < R_a = \frac{1}{\sqrt{2}|\sin a|}$ qui est bien le rayon de convergence de la série trouvée.

- Pour $g(x) = (\arcsin x)^2$ on a $g'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x$ et $g''(x) = \frac{2}{(1-x^2)} + \frac{2x \arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Nous trouvons une équation différentielle (E) : $(1-x^2)y'' - xy' = 2$ avec $y(0) = y'(0) = 0$.

On pose $y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et en remplaçant $(1-x^2) \sum_{n \geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2} - x \sum_{n \geq 1} na_n x^{n-1} =$

$$\sum_{n \geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n \geq 2} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n \geq 2} na_n x^n = 2. \text{ D'où } 2a_0 = 2, 6a_3 = 0 \text{ et pour}$$

$p \geq 2 : (p+2)(p+1)a_{p+2} - p^2 a_p = 0$ en fait pour $p \geq 1 : (p+2)(p+1)a_{p+2} = p^2 a_p$.

On a $a_{2p+1} = 0$ et $a_{2p} = \frac{2^{2p}((p-1)!)^2}{2(2p)!} a_2$ et $y(x) = \sum_{p \geq 1} \frac{2^{2p}((p-1)!)^2}{2(2p)!} x^{2p}$. Cette so-

lution convient et par unicité $g(x) = \sum_{p \geq 1} \frac{2^{2p}((p-1)!)^2}{2(2p)!} x^{2p}$ le rayon de convergence est

$$\left| \frac{u_{p+1}(x)}{u_p(x)} \right| = |x^2| \frac{a_{2p+2}}{a_{2p}} = \frac{4p^2}{(2p+2)(2p+1)} |x|^2 \rightarrow |x|^2 \text{ et } R = 1.$$

Exercice 56 Soit n un entier naturel donné, en utilisant le développement en série entière de $f(x) = \frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^5)}$, trouver le nombre de triplets $(a, b, c) \in \mathbf{N}^3$ tels que $2a + 3b + 5c = n$.

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n = \left(\sum_{n \geq 0} x^{2n} \right) \left(\sum_{n \geq 0} x^{3n} \right) \left(\sum_{n \geq 0} x^{5n} \right) = \sum_{n \geq 0} \sigma(n) x^n \text{ où } \sigma(n) \text{ est le nombre de}$$

triplets (a, b, c) d'entiers tels que $2a + 3b + 5c = n$. Or $1 = (1-x^2)(1-x^3)(1-x^5) \sum_{n \geq 0} a_n x^n$,

ou $1 = \sum_{n \geq 0} a_n x^n (1 - x^2 - x^3 + x^7 + x^8 - x^{10})$ et $1 = \sum_{n \geq 0} a_n x^n - \sum_{n \geq 2} a_{n-2} x^n - \sum_{n \geq 3} a_{n-3} x^n + \sum_{n \geq 7} a_{n-7} x^n + \sum_{n \geq 8} a_{n-8} x^n - \sum_{n \geq 10} a_{n-10} x^n$. Il nous reste plus qu'à identifier : pour tout $n \geq 10$: $0 = a_n - a_{n-2} - a_{n-3} + a_{n-7} + a_{n-8} - a_{n-10}$ on trouve $a_1 = 0, a_0 = a_2 = a_3 = a_4 = 1, a_5 = a_6 = a_7 = 2, a_8 = a_9 = 3$.

Exercice 57 Résoudre dans \mathbb{C} : $8 \cos z + 4i \sin z = 7 + 5i$.

On a $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ et $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ et l'équation donne $4(e^{iz} + e^{-iz}) + 2(e^{iz} - e^{-iz}) = 7 + 5i$, en multipliant par $e^{iz} \neq 0$ on obtient $6e^{2iz} - (7 + 5i)e^{iz} + 2 = 0$, posons $u = e^{iz}$ cela donne $6u^2 - (7 + 5i)u + 2 = 0$, le discriminant est $\Delta = -24 + 70i$ et $\delta^2 = \Delta$ donne avec $\delta = a + ib$: $\begin{cases} a^2 + (-b^2) = 24 \\ 2ab = 70 \end{cases}$ ou a^2, b^2 sont solutions de $t^2 + 24t - (35)^2 = 0 = (t - 25)(t + 49)$ soit $\begin{cases} a^2 = 25 \\ -b^2 = -49 \end{cases}$ d'où $\delta_1 = 5 + 7i$ et $\delta_2 = -5 - 7i$ puis $u_1 = 1 + i$ et $u_2 = \frac{1 - i}{6}$. On résoud $e^{iz} = 1 + i$ avec $z = x + iy$ soit $e^{-y}e^{ix} = 1 + i$ ou $e^{-y} = |1 + i| = \sqrt{2}$ et $y = -\ln(\sqrt{2})$ et d'autre part $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ce qui donne $z = \frac{\pi}{4} + 2k\pi - i \ln(\sqrt{2})$ avec $k \in \mathbb{Z}$. L'autre $e^{iz} = \frac{1 - i}{6}$ donne $z = -\frac{\pi}{4} + 2k'\pi - i \ln \frac{\sqrt{2}}{6}$ avec $k' \in \mathbb{Z}$.