Programme 9 : du 29 Janvier au 10 Février 2 007: Intégrales sur un segment d'une fonction continue par morceaux ; intégrales généralisées

0.1. Intégrales sur un segment.

Intégrales d'une fonction en escalier. Définition, linéarité, formule de la moyenne

Intégrales d'une fonction continue par morceaux. Définition, linéarité, notation $\int_a^b f(t)\,dt$, formule de la moyenne, relation de Chasles, $u\left(\int_a^b f\right) = \int_a^b u(f)$ où u est linéaire, cas des fonctions continues, positivité et comparaison, inégalité de Cauchy-Schwarz.

Intégration d'une suite de fonctions continues. Norme de la convergence en moyenne, comparaison de normes, $\int_a^b \lim f_n = \lim \int_a^b f_n$ pour une suite convergeant uniformément de fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans un evn de dimension finie.Norme de la convergence quadratique.

Dérivation et intégration. $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$: dérivabilité à droite et à gauche, primitives, intégrations par parties, changement de variables.

Etude globale des fonctions de classe C^1. Inégalité des accroissements finis, formules de Taylor,

Suites et séries de fonctions de classe C^k. Théorèmes d'inversions pour la primitivation, pour la dérivation. Etude de la fonction exponentielle.

En seconde semaine

0.2. Intégrales sur un intervelle quelconque.

Intégrales généralisées. Pour une fonction continue par morceaux sur un intervalle $I = [a,b[$ l'intégrale $\int_I f$ converge si la limite suivante existe et $\int_I f = \lim_{x\to b} \int_a^x f$, sinon elle diverge

Fonctions intégrables à valeurs positives. Définition : $\int_I f = \sup_{J\subset I} \int_J f$ où J est un segment inclus dans I, définitions équivalentes, linéarité, comparaison, relationde Chasles, intégrales de Riemann, comparaison séries et intégrales, formule de Stirling.

Fonctions intégrables à valeurs complexes. fonctions sommables, propriétés...

Convergence en moyenne et quadratique. Définitions des normes, $L^2(I)$.

Convergence dominée. Théorème de convergence dominée, cas des séries.

Intégrales dépendant d'un paramètre. Seuls ces théorèmes de condition de domination sont au programme. Théorème,continuité, dérivabilité, applications.
[1]

1. Lycée Vaugelas 2 006-2 007