Chapitre 4

Préparation à l'oral

4.1 Fonctions d'une variable réelle : dérivation et intégration

4.1.1

Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Trouver toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $\forall x : f\left(\frac{x}{3}\right) - f(x) = g(x)$ et $f(0) = 0$. Que dire si g est C^1 à dérivée bornée. (01)

4.1.2

Calculer $\displaystyle\int_a^{a+1} \frac{dt}{\sqrt{t-a}+\sqrt{a+1-t}}$. (03)

Révision : Dérivée en un point, fonctions de classe C^1, dérivée d'une forme bilinéaire, fonctions de classe C^k, composée, difféomorphisme, formule de Leibniz, théorème de Rolle, égalité et inégalité des accroissements finis, fonctions convexes. Intégration sur un segment, fonctions en escalier, fonctions continues par morceaux, approximations, propriétés de l'intégrale, inégalité de la moyenne, sommes de Riemann, méthode des trapèzes, primitives, calcul de primitives, formules de taylor, développement limité. Approximation, des zéros d'une fonction par dichotomie, d'une intégrale par la méthode des trapèzes, de réels

4.2 Intégrales impropres, fonctions intégrables

4.2.1

Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt$.

4.2.2

On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} xt}{t\,(1+t^2)} dt$.

Etudier l'existence, la continuité et la dérivabilité de F.

Calculer F' puis F.

Calculer $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\text{Arctan}\, t}{t}\right)^2 dt$.

Révision : Intégrales impropres convergentes, intégrales de fonctions positives, intégrales absolument convergente, propriétés, convergence en moyenne et en moyenne quadratique, théorème de convergence dominée, intégration terme à terme d'une série de fonctions, intégrale dépendant d'un paramètre.

4.3 Séries entières, série de Fourier

4.3.1

Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{e^{-x}}{1+x}$.

Calculer les coefficients a_n du développement en série entière de f. Rayon de convergence.

Déterminer le domaine de convergence simple. Trouver des parties de $\mathbb{R}$ où il y a convergence uniforme.

4.3.2

Développer en série entière $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$.

4.3.3

Rayon de convergence et somme de la série entière de terme général : $\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) z^n$.

4.3.4

Soit (a_n) une suite de réels de limite a non nul. Donner le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n} x^n$.

Révision: Rayon de convergence, lemme d'Abel, mode de convergence, régularité, développement en série entière. Coefficients de Fourier, série de Fourier, mode de convergence en moyenne quadratique et simple, théorème de Dirichlet.

4.4 Equations différentielles

4.4.1

Résoudre $(2+x)y' = 2 - y$.

4.4.2

Résoudre $y'' + 4y' + 5y = ch2x \cos x$.

4.4.3

Résoudre $x^2y'' + 4xy' + 2y = \ln(1+x)$. On recherchera des solutions développables en séries entières.

Révision: Equations différentielles linéaires d'ordre 1 et d'ordre 2, cas des coefficients constants, systèmes linéaires, wronskien. Exemples d'équations non linéaires.

4.5 Fonctions de plusieurs variables réelles

4.5.1

Soit un réel $a > 0$. Pour tous réels x tels que $0 < x < \pi$ et y on pose $f(x,y) = \dfrac{x^a}{1 - 2y\cos x + y^2}$. Etudier l'existence d'une limite de f en (0,1).

4.5.2

Pour tout couple (x,y) de réels autre que (0,0), on pose $f(x,y) = xy^3\left(x^4+y^4\right)^{\frac{-1}{2}}$ et $f(0,0) = 0$. Etudier en (0,0) la continuité de f , puis l'existence de dérivées selon tout vecteur, puis la différentiabilité. (00)

Révision: Applications contnument différentiables, fonctions de classe C^1, dérivées partielles, composée, difféomorphisme, cas des fonctions numériques, dérivées partielles d'ordre 2. Extrèmum. Intégrales doubles, formule de Fubini, changement de variables, cas des coordonnées polaires, intégrales curvilignes, formes différentielles fermées ou exactes.

4.6 Courbes du plan ou de l'espace

4.6.1

Trouver les droites à la fois tangentes et normales à Γ définie par $x = 2t^3$ et $y = 3t^2$.

4.6.2

Etudier la courbe $\rho = \dfrac{\tan\theta}{1 - 2\sin\theta}$.

Révision: Courbes paramétrées, paramétrage admissible, étude locale, branches infinies. Courbes définies en polaires. Propriétés métriques d'un arc orienté.