Chapitre 3

Préparation à l'oral

3.1 Fonctions usuelles

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que :

3.1.1

$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = 2f(x)$.

3.1.2

$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = |f(x)|^2$. td evn

Révision : Fonctions usuelles. Fonctions logarithmes, fonctions exponentielles, fonctions puissances, fonctions circulaires, fonction exponentielle complexe.

3.2 Suites

Soit $a > 1$. Soit (u_n) une suite réelle telle que : $\forall n : u_{n+1} = au_n - \dfrac{1}{n+1}$. Etudier la convergence de la suite.

Révision : Le corps des nombres réels, toute partie majorée..., partie entière, valeurs décimales, suites monotones, suites convergentes, suites extraites, relations de comparaisons, théorèmes d'existence de limites. Suites à valeurs complexes, extension, suites de Cauchy, suites définies par une relation de récurrence.

3.3

Soit g une fonction de classe C^2 de [0,1] dans $\mathbb{R}$. Donner un développement asymptotique à l'ordre 2 de la suite de terme général $\displaystyle\int_0^1 t^n g(t)dt$

Révision: idem

3.4 Fonctions d'une variable réelle

3.4.1

Montrer que $n:(x,y))\longmapsto \displaystyle\int_0^1 |x+ty|dt$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$, représenter la boule unité.

3.4.2

Soit E l'ensemble des applications de $C^1\left([0,1],\mathbb{R}\right)$ telles que $f(0)=0$. Montrer que N_1 et N_2 définies par $N_1\left(f\right)=\sup\limits_I |f(t)|$ et $N_2(f)=\sup\limits_I |f'(t)|$ où $I=[0,1]$ sont des normes et les comparer. (td evn)

Révision: Fonctions d'une variable réelle, extremum, fonctions bornées, fonctions monotones, fonctions périodiques, limites, fonctions équivalentes, relations de comparaison. Fonctions continues sur un intervalle, théorèmes classiques. Extension aux fonstions à valeurs complexes. Normes et distances, espace vectoriel normé, de dimension finie, relations de comparaison de suites. Etude locale d'une application, limite et continuité. Ouverts et fermés. Continuité des applications linéaires en dimension finie, compacité

3.5 Séries numériques

3.5.1

Soit, pour $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\cos\left(x\right)^{\frac13}}{x^{\frac23}}$

Nature de la série de terme général $u_n=\displaystyle\int_n^{n+1} f(x)dx-f(n)$.

Nature de la série de terme général $f(n)$.

Nature de la série de terme général $\dfrac{\sin n^{\frac13}}{n^{\frac23}}$.

3.5.2

Soit $\alpha>0$ on pose $u_n\left(\alpha\right)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\alpha}(t)\cos^n t dt$.

nature de la série de terme général $u_n(1)$.

plus généralement, nature de la série $u_n(\alpha)$.

Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(\alpha)$ pour $\alpha=2{,}3$.

3.5.3

Soit la suite définie par $a_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n$.

Montrer que la série de terme général $(-1)^n a_n$ converge.

Monter que la série de terme général a_n diverge.

Quel est le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.

Révision: Suites et séries, cas complexe, séries alternées. Séries à termes positifs, comparaisons. Cas général, critère de Cauchy, séries absolument convergentes, série géométrique, série exponentielle. Comparaison série et intégrale, produit de deux séries absolument convergentes.

3.6 Suites et séries de fonctions

3.6.1

Soit (f_n) la suite de fonctions définies par : $f_n(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x + (1+x^2)^n}$. Etudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$, la convergence uniforme sur $[-1{,}1]$, la convergence uniforme sur $]0{,}1]$.

3.6.2

Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs qui tend vers $+\infty$ en croissant. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ telle que : $x \longmapsto (-1)^n e^{-a_n x}$.

Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement. La somme est f.

Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$.

Montrer que f est intégrable sur $]0, +\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$.

Révision: Convergence simple, uniforme, uniforme sur tout segment d'une suite de fonctions, transfert de régularité (continuité, intégrabilité, dérivabilité). Convergence normale d'une série de fonctions. Intégrabilité, norme de la convergence en moyenne, dérivabilité sur un segment quelconque.