Chapitre 3

Préparation à l'oral

3.1 Fonctions usuelles

Exercice 1 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que :
- $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = 2f(x)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = |f(x)|^2$. td evn

Révision : Fonctions usuelles. Fonctions logarithmes, fonctions exponentielles, fonctions puissances, fonctions circulaires, fonction exponentielle complexe.

3.2 Suites

Exercice 2 Soit $a > 1$. Soit (u_n) une suite réelle telle que : $\forall n : u_{n+1} = au_n - \dfrac{1}{n+1}$. Etudier la convergence de la suite.

Révision : Le corps des nombres réels, toute partie majorée..., partie entière, valeurs décimales, suites monotones, suites convergentes, suites extraites, relations de comparaisons, théorèmes d'existence de limites. Suites à valeurs complexes, extension, suites de Cauchy, suites définies par une relation de récurrence.

Exercice 3 Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Donner un développement asymptotique à l'ordre 2 de la suite de terme général $\displaystyle\int_0^1 t^n g(t)dt$

Révision: idem

3.3 Fonctions d'une variable réelle

Exercice 4 Montrer que $n : (x,y)) \longmapsto \displaystyle\int_0^1 |x + ty|dt$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$, représenter la boule unité.

Exercice 5 Soit E l'ensemble des applications de $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ telles que $f(0) = 0$. Montrer que N_1 et N_2 définies par $N_1(f) = \sup\limits_I |f(t)|$ et $N_2(f) = \sup\limits_I |f'(t)|$ où $I = [0,1]$ sont des normes et les comparer. (td evn)

Révision: Fonctions d'une variable réelle, extremum, fonctions bornées, fonctions monotones, fonctions périodiques, limites, fonctions équivalentes, relations de comparaison. Fonctions continues sur un intervalle, théorèmes classiques. Extension aux fonstions à valeurs complexes. Normes et distances, espace vectoriel normé, de dimension finie, relations de comparaison de suites. Etude locale d'une application, limite et continuité. Ouverts et fermés. Continuité des applications linéaires en dimension finie, compacité

3.4 Séries numériques

Exercice 6 Soit, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{cos\,(x)^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}$

1) Nature de la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)dx - f(n)$.
2) Nature de la série de terme général $f(n)$.
3) Nature de la série de terme général $\dfrac{sinn^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{2}{3}}}$.

Exercice 7 Soit $\alpha > 0$ on pose $u_n\,(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{\alpha}(t)cos^n tdt$.
a) nature de la série de terme général $u_n(1)$.
b) plus généralement, nature de la série $u_n(\alpha)$.
c) Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(\alpha)$ pour $\alpha = 2{,}3$.

Exercice 8 Soit la suite définie par $a_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n$.
a) Montrer que la série de terme général $(-1)^n a_n$ converge.
b) Monter que la série de terme général a_n diverge.
c) Quel est le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.

Révision: Suites et séries, cas complexe, séries alternées. Séries à termes positifs, comparaisons. Cas général, critère de Cauchy, séries absolument convergentes, série géométrique, série exponentielle. Comparaison série et intégrale, produit de deux séries absolument convergentes.

3.5 Suites et séries de fonctions

Exercice 9 Soit (f_n) la suite de fonctions définies par : $f_n(x) = \dfrac{1}{sin^2 x + (1+x^2)^n}$. Etudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$, la convergence uniforme sur $[-1{,}1]$, la convergence uniforme sur $]0{,}1]$.

Exercice 10 Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs qui tend vers $+\infty$ en croissant. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ telle que : $x \longmapsto (-1)^n e^{-a_n x}$.
a) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement. La somme est f.
b) Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$.
c) Montrer que f est intégrable sur $]0, +\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$.

Révision: Convergence simple, uniforme, uniforme sur tout segment d'une suite de fonctions, transfert de régularité (continuité, intégrabilité, dérivabilité). Convergence normale d'une série de fonctions. Intégrabilité, norme de la convergence en moyenne, dérivabilité sur un segment quelconque.

3.5.1 Corrigés

Exercice 1 On a $f(0)=0$ ce qui nous permet de considérer $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ si $x\neq 0$ et $g(0)=f'(0)$ ainsi g est continue en 0 et $g(2x)=g(x)$ puis $g(\frac{x}{2^n})=g(x)=g(0)=\alpha$ nous trouvons $f(x)=\alpha x$ qui convient bien. Montrons d'abord que $f(0)=1$ en effet si $f\neq 0$ alors il existe $b\neq 0$ tel que $f(b)>0$ car nous avons remarqué que $f\geq 0$. Considèrons $f(b)=\left(f(\dfrac{b}{2^n})\right)^{2^n}$ on a $\ln f(\frac{b}{2^n})=\frac{1}{2^n}\ln f(b)$ et donc $\ln f(0)=0$ et $f(0)=1$. Montrons maintenat que $f\neq 0$. En effet si il existe a tel que $f(a)=0$ alors $f(\frac{a}{2^n})=0$ et $f(0)=0$. Finalement $f>0$ et nous pouvons considérer $g=\ln f$ qui vérifie $g(2x)=2g(x)$ et $f(x)=e^{\lambda x}$.

Exercice 2 Il est facile de montrer que $u_{n+1}-u_n\geq a(u_n-u_{n-1})\leq a^n(u_1-u_0)$ ainsi la série diverge et la suite u_n aussi si $u_1-u_0>0$. Remarquons que $\dfrac{u_{n+1}}{a^{n+1}}=\dfrac{u_n}{a^n}-\dfrac{1}{(n+1)a^{n+1}}$ ainsi par addition $\dfrac{u_n}{a^n}=u_0-\frac{1}{a}-\frac{1}{2a^2}-\cdots-\frac{1}{na^n}$ or $-\frac{1}{a}-\frac{1}{2a^2}-\cdots-\frac{1}{na^n}$ tend vers $\ln(1-\frac{1}{a})$. Si $u_0+\ln(1-\frac{1}{a})>0$ alors$u_n\to+\infty$ et Si $u_0+\ln(1-\frac{1}{a})<0$ alors$u_n\to-\infty$ on a même $u_n\sim a^n(u_0+\ln(1-\frac{1}{a}))$. Il reste le cas où $u_0=-\ln(1-\frac{1}{a})$ on utilise le lemme : $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^nR_n(x)$ avec $R_n(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{t^n}{1+t}dt$ en effet $\ln(1+x)=\displaystyle\int_0^x\frac{dt}{1+t}=\int_0^x(1-t+t^2+\cdots+(-1)^{n-1}t^{n-1}+(-1)^n\frac{t^n}{1+t}dt$. Ce qui donne $u_n=a^n(-1)^{n-1}R_n(-\frac{1}{a})=(-1)^{n+1}a^n\displaystyle\int_0^{-\frac{1}{a}}\frac{t^n}{1+t}dt=\int_0^1\frac{v^n}{a-v}dv$ d'où $0\leq u_n\leq\displaystyle\int_0^1\frac{v^n}{a-1}=\frac{1}{(a-1)(n+1)}$ tend vers 0 donc u_n tend vers 0. De plus $u_n=a^n(u_0+\ln(1-\frac{1}{a}))+\displaystyle\int_0^1\frac{v^n}{a-v}dv$ et $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{v^n}{a-v}dv=\int_0^1\frac{e^{n\ln v}}{a-v}dv=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ns}}{ae^s-1}ds$. Un D.L. en 0 de $s\mapsto\frac{1}{ae^s-1}$ donne un D.A. en $+\infty$ de I_n, c'est la méthode de Laplace.

Exercice 3 Deux intégrations par parties donnent $u_n=\frac{g(1)}{n+1}-\frac{g'(1)}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\displaystyle\int_0^1 t^{n+2}g''(t)dt$ soit $u_n=g(1)\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}+o(\dfrac{1}{n^2})\right)-g'(1)\dfrac{1}{n^2}+o(\dfrac{1}{n^2})+o(\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{g(1)}{n}-\left(\dfrac{g(1)+g'(1)}{n^2}\right)+o(\dfrac{1}{n^2}$. En effet g est $\mathcal{C}^2$ et g'' est bornée sur [0,1]. et $|\displaystyle\int_0^1 t^{n+2}g''(t)dt|\leq M\frac{1}{n+3}\longrightarrow 0$.

Exercice 4 Par invariance en changeant (x,y) en $(-x,-y)$ il suffit de considérer deux cas $x\geq 0,y\geq 0$, par intégration la boule unité donne $x+\frac{y}{2}\leq 1$. Pour $x\geq 0,y\leq 0$ l'étude de $x+ty\geq 0$ donne $t\leq\frac{x}{-y}$. Mais $-\frac{x}{y}$ n'appatient pas toujours à [0,1]. On a bien $-\frac{x}{y}\geq 0$ mais $\frac{x}{-y}\leq 1\Leftrightarrow x\leq -y$. Dans ce cas $n(x,y)=\displaystyle\int_0^{\frac{x}{-y}}(x+ty)dt+\int_{\frac{x}{-y}}^1(-x-ty)dt=-\frac{x^2}{y}-x-\frac{y}{2}$.

Récapitulons :

$x\geq 0,y\geq 0$ le segment $x+\frac{y}{2}$

$x\geq 0,y\leq 0$ et $x\geq -y$ le segment $x+\frac{y}{2}\leq 1$

$x\geq 0,y\leq 0$ et $x\leq -y$ l'ellipse $x^2+xy+\frac{y^2}{2}+y\leq 0$ de centre $(-1,2)$.

Exercice 5 $\forall t\in[0,1]:|f'(t)|\leq N_2(f)$ les accroissements finis donnent $|f(t)-f(0)|\leq N_2(f)$ et donc $N_1(f)\leq N_2(f)$. Elles ne sont pas équivalentes, il suffit de prendre $f_n(x)=x^n$ sur [0,1].

Exercice 6 On pose $g(x)=\sin x^{\frac{1}{3}}$ on a $g'(x)=\frac{1}{3}f(x)$ donc $u_n=3(g(n+1)-g(n)-g'(n))=\frac{3}{2}g''(\xi_n)$ avec $\xi_n\in[n,n+1]$. Nous avons $|g''(\xi_n)|\leq\frac{1}{3}\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}+\frac{2}{3}\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}$ qui est le terme général d'une série convergente.

2) La série de terme général $\displaystyle\int_n^{n+1}f(x)dx=3(\sin(n+1)^{\frac{1}{3}}-\sin n^{\frac{1}{3}})$ est de la même nature que la suite $(\sin n^{\frac{1}{3}})$ donc diverge par suite $\sum f(n)$ diverge.

3) de même $\cos x^{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}\frac{\sin x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}$.

Exercice 7 a) $u_n(1) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos^n t dt = \left[-\frac{\cos^{n+1} t}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{n+2}$ et la série diverge.

b) des intégrations par parties donent pour $\alpha \neq 1$: $u_n(\alpha) = \frac{\alpha-1}{n+1}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{\alpha-2}\cos^{n+2} t dt = \dfrac{(\alpha-1)(\alpha-3)}{n+1)(n+3)}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{\alpha-4} cos^{n+4} tdt$ ce pour $\alpha \neq 2$. Or $\left|\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{\alpha-4} cos^{n+4} tdt\right| \leq \frac{\pi}{2}$ si $\alpha \geq 4$. La série converge.

c) La série est absolument convergente et $\sum u_n(2) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum \sin^2 t \cos^n tdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum \cos^n t\right) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum \cos^{n+4} t\right) dt$. Coupons $\displaystyle\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-\cos t} dt - \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{1-\cos t} dt = \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{1-\cos t}$ puis on fait tendre ε vers 0. Ainsi $u_n(3) = \frac{2}{n+1}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos^{n+2} tdt = \frac{2}{(n+1)(n+3)}$.

Exercice 8 a) On a $a_n \geq 0$ et $a_n \searrow 0$ en effet $\left|\left(\dfrac{1+t^2}{2}\right)^n\right| \leq 1$ et donc cette fonction est intégrable sur [0,1] et $\left(\dfrac{1+t^2}{2}\right)^n \longrightarrow 0$ sur [0,1[en appliquant le théorème de convergence dominée. Ainsi $\sum(-1)^n a_n$ converge.

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^n a_n = \sum_{k=0}^n \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^k dt = 2\int_0^1 \frac{1-\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}}{1-t^2} dt$. Or $\dfrac{1-\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}}{1+t^2}$ est une suite qui croit vers $\frac{1}{1-t^2}$, donc $\sum a_n \longrightarrow \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1-t^2} = +\infty$ (simple décomposition en éléments simples). Ainsi $\sum a_n$ n'est pas majorée.
c) $\rho = 1$ car $\sum a_n x^n$ converge en -1 et diverge en 1.

Exercice 9 La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}^*$ et vers 1 en 0. Mais $f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \longrightarrow \dfrac{1}{e}$ il n'y a donc pas convergence uniforme sur $[-1,1]$. D'autre part $|f_n(x)| \leq \frac{1}{(1+x^2)^n} \leq \frac{1}{(1+\varepsilon^2)^n}$ si $x \geq \varepsilon$. Il y a convergence uniforme sur tout $]-\infty, -\varepsilon[\cup]\varepsilon, +\infty[$ et ce $\forall \varepsilon > 0$.

Exercice 10 a) C'est une série alternée et $e^{-a_n x}$ décroit vers 0, il y a convergence simple.
b) Le reste $|R_n(x)| \leq e^{-a_{n+1}x} \leq e^{-a_{n+1}\varepsilon}$ sur $[\varepsilon, +\infty$ il y a donc convergence normale, donc uniforme
c) f est convexe et $|f_n(x)| \leq e^{-nx}$ pour n assez grand. La fonction $x \mapsto e^{-nx}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Nous ouvons donc intervertir : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f = \sum(-1)^n \int_0^{+\infty} e^{-a_n x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}$. Il n'y a pas convergence uniforme sur $]0, +\infty[$ il suffit de prendre $f_n(x_n)$ avec $x_n = \frac{1}{a_n}$.