Chapitre 2

Préparation à l'oral

2.1 Espaces euclidiens

On munit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit A une matrice réelle $n \times n$, de colonnes $X_1, X_2, \cdots, X_n$.

2.1.1

Montrer que : $|detA| \leq \|X_1\| \|X_2\| \cdots \|X_n\|$

2.1.2

Montrer, dans le cas où aucun des X_i n'est nul, il y a égalité si et seulement si la famille $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ est orthogonale.

2.1.3

Soit $B = ((b_{ij}))_{i,j}$ une matrice réelle. On pose $b = \max\limits_{i,j} |b_{ij}|$. Montrer que $|detB| \leq b^n n^{\frac{n}{2}}$.

Révision : Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques. Produits scalaires, inégalité de Cauchy-Schwarz, normes et distances. Orthogonalité de vecteurs, de sous-espaces vectoriels. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Projection orthogonale dans un espace préhilbertien sur un sev de dimension finie. Adjoint d'un endomorphisme, matrices symétriques. Automorphisme orthogonal, structure, matrice orthogonale, classification dans le cas $n = 2$. Réduction des endomorphismes autoadjoints, application aux coniques et aux quadriques.

2.2 Espaces préhilbertiens

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice canonique $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

2.2.1

Montrer qu'il existe un seul plan P stable par u.

2.2.2

Soit $x \in P/\{0\}$. On pose $y = u(x)$. Montrer que (x,y) est une base de P. Soit $v = u_{|P}$. Déterminer la matrice de v dans (x,y).

2.2.3

Trouver un produit scalaire sur P tel que v soit une rotation.

Révision : Transformation du plan et de l'espace. Isométries du plan, translation, réflexion, rotation. Isométrie et barycentres. Similitudes directes du plan. Homothéties. Structure, écriture complexe. Isométries de l'espace, translation, réflexion, rotation, vissage. Toute isométrie est un produit de réflexion, pratique.

2.3 Nombres complexes

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(a+kb)\, X^k$ avec $a+nb$ n'appartenant pas à $\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$. Trouver les racines de P et montrer qu'elles sont réelles.2000

Révision: Le corps $\mathbb{C}$ et le plan, groupe U des nombres complexes de module 1, racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité, exponentiel complexe. Droites, alignement, cercles dans le plan. Dans l'espace, produit vectoriel, produit mixte, droites, plans, sphères

2.4

Simplifier $\sum_{\alpha^{15}} \frac{\alpha^3}{x+\alpha^6}$ (année 98)

2.5 Géométrie élémentaire

Soit P le plan d'équation $x+y+z=0$ et D la droite $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$. Calculer dans la base canonique la matrice de projection sur D parallèlement à P.

Révision: Le corps $\mathbb{C}$ et le plan, groupe U des nombres complexes de module 1, racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité, exponentiel complexe. Droites, alignement, cercles dans le plan. Dans l'espace, produit vectoriel, produit mixte, droites, plans, sphères

2.6

Soit R la rotation d'axe $(z=1,y=0)$ orienté par $\overrightarrow{i}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et R' la rotation d'axe $(z=-1,x=0)$ orienté par $\overrightarrow{j}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Etudier $R' \circ R$ et $R \circ R'$.