Chapitre 4

Préparation à l'oral

4.1 Fonctions d'une variable réelle : dérivation et intégration

Exercice 1 Soit $a > 0$

1) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+(1+a^2)\sin^2 x}$ en posant $t = \tan x$. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+(1+a^2)\sin^2 x}$.

2) Étudier la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{1+x^3\sin^2 x}$.

Révision : Dérivée en un point, fonctions de classe C^1, dérivée d'une forme bilinéaire, fonctions de classe C^k, composée, difféomorphisme, formule de Leibniz, théorème de Rolle, égalité et inégalité des accroissements finis, fonctions convexes. Intégration sur un segment, fonctions en escalier, fonctions continues par morceaux, approximations, propriétés de l'intégrale, inégalité de la moyenne, sommes de Riemann, méthode des trapèzes, primitives, calcul de primitives, formules de taylor, développement limité. Approximation, des zéros d'une fonction par dichotomie, d'une intégrale par la méthode des trapèzes, de réels

4.2 Intégrales impropres, fonctions intégrables

Exercice 2 Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt$.

Exercice 3 On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} xt}{t\,(1+t^2)} dt$.

a) Etudier l'existence, la continuité et la dérivabilité de F.

b) Calculer F' puis F.

c) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{Arctant}{t}\right)^2 dt$.

Révision : Intégrales impropres convergentes, intégrales de fonctions positives, intégrales absolument convergente, propriétés, convergence en moyenne et en moyenne quadratique, théorème de convergence dominée, intégration terme à terme d'une série de fonctions, intégrale dépendant d'un paramètre.

4.3 Séries entières, série de Fourier

Exercice 4 Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{1+x}$.

a) Calculer les coefficients a_n du développement en série entière de f. Rayon de convergence.

b) Déterminer le domaine de convergence simple. Trouver des parties de $\mathbb{R}$ où il y a convergence uniforme.

Exercice 5 Développer en série entière $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}}$.

Exercice 6 Rayon de convergence et somme de la série entière de terme général : $\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)z^n$.

Exercice 7 Soit (a_n) une suite de réels de limite a non nul. Donner le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{n}x^n$.

Révision: Rayon de convergence, lemme d'Abel, mode de convergence, régularité, développement en série entière. Coefficients de Fourier, série de Fourier, mode de convergence en moyenne quadratique et simple, théorème de Dirichlet.

4.4 Equations différentielles

Exercice 8 Résoudre $(2+x)y' = 2-y$.

Exercice 9 Résoudre $y''+4y'+5y = ch2xcosx$.

Exercice 10 Résoudre $x^2y''+4xy'+2y = ln(1+x)$. On recherchera des solutions développables en séries entières.

Révision: Equations différentielles linéaires d'ordre 1 et d'ordre 2, cas des coefficients constants, systèmes linéaires, wronskien. Exemples d'équations non linéaires.

4.5 Fonctions de plusieurs variables réelles

Exercice 11 Soit un réel $a>0$. Pour tous réels x tels que $0<x<\pi$ et y on pose $f(x,y) = \frac{x^a}{1-2ycosx+y^2}$. Etudier l'existence d'une limite de f en $(0,1)$.

Exercice 12 Pour tout couple (x,y) de réels autre que $(0,0)$, on pose $f(x,y) = xy^3\left(x^4+y^4\right)^{\frac{-1}{2}}$ et $f(0,0)=0$. Etudier en $(0,0)$ la continuité de f , puis l'existence de dérivées selon tout vecteur, puis la différentiabilité. (00)

Révision: Applications contnument différentiables, fonctions de classe C^1, dérivées partielles, composée, difféomorphisme, cas des fonctions numériques, dérivées partielles d'ordre 2. Extrèmum. Intégrales doubles, formule de Fubini, changement de variables, cas des coordonnées polaires, intégrales curvilignes, formes différentielles fermées ou exactes.

4.6 Courbes du plan ou de l'espace

Exercice 13 Trouver les droites à la fois tangentes et normales à Γ définie par $x=2t^3$ et $y=3t^2$.

Exercice 14 Etudier la courbe $\rho = \frac{tan\theta}{1-2sin\theta}$.

Révision: Courbes paramétrées, paramétrage admissible, étude locale, branches infinies. Courbes définies en polaires. Propriétés métriques d'un arc orienté.

4.7 exos en vrac

Exercice 15 Soit $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ continue. Trouver toutes les fonctions continues $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ continues telles que $\forall x: f\left(\frac{x}{3}\right)-f(x) = g(x)$ et $f(0)=0$. Que dire si g est C^1 à dérivée bornée. (01)

Exercice 16 Calculer $\int_a^{a+1}\frac{dt}{\sqrt{t-a}+\sqrt{a+1-t}}$. (03)

4.7.1 Corrigés

Exercice 1 On trouve $I = \dfrac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}}$. En coupant en $\dfrac{\pi}{2}$ et en faisant le changement de variable $x' = \pi - x$ on trouve $2I$. Après avoir ramené l'intégrale entre $0, \pi$, par le théorème de convergence dominée en majorant f_n par 1 on a que u_n tend vers 0.

Exercice 2 Elle converge bien. Posons $u = \ln(1 + \frac{1}{t^2})$, $u' = -\dfrac{2}{t^3+t}$ et $v' = 1$ $v = t$. Une intégration par parties donne $I = \left[t\ln(1 + \dfrac{1}{t^2})\right]_0^{+\infty} + \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2}{t^{2+1}}dt$. En $+\infty$ on a $t\ln(1+\frac{1}{t^2})$ tend vers 0 et en 0 on a $t\ln(1+t^2) - 2t\ln t$ tend vers 0. On en déduit que $I = \pi$.

Exercice 3 a) $f(x,t) = \dfrac{\operatorname{Arctan} xt}{t(1+t^2)}$ est prolongeable par continuité en $t = 0$ et en $+\infty$ on a $f(x,t) \sim \dfrac{\pi}{2t^3}$. F existe sur $\mathbb{R}$. F est impaire et $|f(x,t)| \leq \dfrac{\pi}{2t(1+t^2)}$ sur $[1, +\infty[$ et $|f(x,t)| \leq \dfrac{x}{t(1+t^2)} \leq \dfrac{A}{t(1+t^2)}$ sur $[0,1]$. D'où la continuité sur tout intervalle $[0, A]$, puis sur $\mathbb{R}^+$ et enfin sur $\mathbb{R}$. D'autre part $f'_x(x,t) = \dfrac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} \leq \dfrac{1}{1+t^2}$ sur $\mathbb{R}$ d'où la dérivabillité de F. De plus $F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{x}{x^2-1}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+x^2t^2} + \frac{1}{1-x^2}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{1-x^2} - \frac{x}{1-x^2}\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{1+x}\right)$. Ce pour $c \neq 1$ puis en $x = 1$ par continuité. D'où $F(x) = \dfrac{\pi}{2}\ln|1++x| + 0$.

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\right)dt = \int_0^{+\infty}(\operatorname{Arctan} t)^2\frac{1}{t^2}dt = \left[\frac{1}{t}\operatorname{Arctan} t\right]_0^{+\infty} + 2\int\frac{\operatorname{Arctan} t}{(1+t^2)t} = 2F(1).$$

Exercice 4 a) $e^{-x} = \displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$ et $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n$ d'où $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ avec $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}(-1)^{n-k} = (-1)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$. On a $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{\dfrac{1}{(n+1)!} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}} \longrightarrow 1$ et $\rho = 1$.

b) En 1 on a $\displaystyle\sum_n(-1)^n\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)$ diverge car le terme ne tend pas vers 0. Et en -1 on a $\displaystyle\sum_n\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)$ diverge aussi. Mais il y a convergence uniforme sur tout $[-a, +a]$ avec $0 < a < 1$.

Exercice 5 $f(x) = (1+x^3)^{-\frac{1}{2}} = \displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n n!}x^{3n}$.

Exercice 6 Pour $z = 1$ il y a divergence et pour $|z| < 1$ il y a convergence car $\left|(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})z^n\right| \leq n|z^n|$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}z^k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}\left(\frac{1}{i}\right)z^k = \frac{1}{1-z}\sum_{i=1}^{n}\frac{z^i}{i} - \frac{z}{1-z}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}z^n$ qui a pour limite $\dfrac{\ln(1-z)}{z-1}$.

Exercice 7 On a $\dfrac{a_n}{n} \sim \dfrac{a}{n}$ il y a donc divergence en 1 et convergence si $|x| < 1$ d'où $\rho = 1$. Si on sait que dans le cas de la convergence, les sommes partielles sont équivalentes avec $\ln(1-x) = -\displaystyle\sum\frac{x^n}{n}$.

Exercice 8 Il faut éviter $x = -2$. Sur $]-\infty, -2[$ ou $]-2, +\infty[$ on a $y = 2$ qui est solution et sur chaque intervalle $y = 2 + \dfrac{k}{x+2}$. Aucune des solutions n'est prolongeable en -2 à part $y = 2$.

Exercice 9 La solution générale de l'équation homogène est $\lambda e^{(-2+i)x}+\mu e^{(-2-i)x}$ ou $e^{-2x}(\alpha\cos x+\beta\sin x)$. Le second membre s'écrit $\dfrac{1}{4}\left(e^{(2+i)x}+e^{(2-i)x}+e^{(-2+i)x}+e^{(-2-i)x}\right)$. Une solution particulière est : $e^{2x}(a\cos x+b\sin x)+xe^{-2x}(c\cos x+d\sin x)$. Soit $e^{2x}\left(\dfrac{1}{40}\cos x+\dfrac{1}{80}\sin x\right)+xe^{-2x}\left(\dfrac{1}{4}\sin x\right)+e^{2x}(\alpha\cos x+\beta\sin x)$.

Exercice 10 Sur les intervalles $]-1,0[$ et sur $]0,+\infty[$ en posant $y(x)=\sum a_nx^n$ on obtient $a_0=0$ et $a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)}$ avec $\rho=1$. Sur $]-1,+1[$ on a $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)}x^n$ est solution. Mais l'équation s'écrit $(x^2y)''=\ln(1+x)$. Cherchons z : $z''=\ln(1+x)$ avec $z'(0)=z(0)=0$ d'où $z'=(1+x)\ln(1+x)-x$ puis $z=\dfrac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x)-\dfrac{1}{4}(1+x)^2+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}x^2$. Un D.L. en 0 donne $z\sim\dfrac{1}{6}x^3$. Ce qui donne y sur $]-1,\infty[$: $y=\dfrac{1}{x^2}z$ qui est dévelopale en série entière sur $]-1,+1[$. Finalement $y(x)=\dfrac{1}{x^2}z(x)+\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x^2}$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

Exercice 11 On fait un D.L. du dénominateur : $f(x,y)=\dfrac{x^2}{(y-1)^2+x^y+yo(x^2)}$. Le chemin $y=1$ impose $a>2$. On passe en polaire au point $(0,1)$: $f^*(r,\theta)=\dfrac{r^{a-2}\cos^a\theta}{1+o(r^2)}$. $a=2$ ne convient pas car nous obtenons deux limites différentes pour $\theta=0$ et $\theta=\dfrac{\pi}{2}$. Il faut donc $a>2$.

Exercice 12 Le passage en polaire prouve la continuité en 0. Pour la dérivée suivant tout vecteur (a,b), en faisant en $\dfrac{1}{t}f(ta,tb)$ on prouve que si la différentielle existe en $(0,0)$ alors elle est nulle. Comme $(h^2-k^2)^2\geq 0$ on a $\sqrt{h^4+k^4}\geq\sqrt{2}\,|hk|$ et donc $|f(h,k)|\leq\dfrac{1}{\sqrt{2}}k^2=o(||(h,k)||$. f est bien différentiable en 0.

Exercice 13 On a $x'(t)=6t^2$, $y'(t)=6t$. Il y a un point stationnaire le pôle et $\dfrac{y'}{x'}=\dfrac{1}{t}$, la tangente est verticale. Existe-t-il un point de la courbe dont la normale est Oy ou la tangente est parallèle à Ox ? non. On peut donc supposer $t_0\neq 0$. La tangente en t_0 a pour équation $x-t_0y-2t_0^3+3t_0^3=0$ et la normale en t_1 : $t_1x+y-2t_1^4-3t_1^2=0$ ce qui donne $6t_0(x-2t_0^3)-6t_0^2(y-3t_0^2)=0$ et $6t_1^2(x-2t_1^2)+6t_1(y-3t_1^2=0$. En supposant $t_1\neq 0$ ce qui est possible car à l'origine la normale est horizontale et il n'y a pas de tangente horizontale à la courbe. Ces deux droites sont les mêmes si et seulement si $\dfrac{t_1}{1}=\dfrac{1}{-t_0}=\dfrac{-2t_1^4-3t_1^2}{-2t_0^3+3t_0^3}$ ou $2t_1^6+3t_1^4-1=0$ en posant $x=t_1^2$ on a à résoudre $(x+1)(2x^2+x-1)=0$ ou comme $x>0$ on retient $2(x+1)(x-\frac{1}{2}=0$ soit $t_1=\mp\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $t_0=-\dfrac{1}{t_1}=\mp\sqrt{2}$. Les droites ont pour équation : $x-\varepsilon\sqrt{2}y+4\varepsilon\sqrt{2}=0$.

Exercice 14 ρ est 2π-périodique, et $\rho(\pi-\theta)=\rho(\theta)$ ce qui donne une symétrie par rapport à Ox. L'étude se fait sur $]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{6}[\cup]\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}[$. La déivée $\rho'=\dfrac{1-2\sin^3\theta}{\cos^2\theta(1-2\sin\theta)^2}$ s'annule en changeant de signe en $\theta_0=\mathrm{Arcsin}(\frac{1}{2}^{\frac{1}{2}}\in]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}[$. En $-\frac{\pi}{2}$ on a $\lim\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{2})=-\dfrac{1}{3}$, en $\dfrac{\pi}{6}$ on a $\lim\rho(\sin(\theta-\frac{\pi}{6}))=-\dfrac{1}{3}$ et enfin $\displaystyle\lim_{\frac{\pi}{2}}\rho\sin(\theta-\frac{\pi}{2})=+1$. Voir la courbe.

Exercice 15 Par récurrence $f(x)=f(\frac{x}{3^n})-\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}g(\frac{x}{3^k})$. Puis quand $n\to+\infty$ on obtient $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}g(\frac{x}{3^k})$, si la série converge. Ainsi si f existe et est continue avec $f(0)=0$ alors nécessairement cette série converge (si la série diverge la fonction n'existe pas. Ainsi si g est $\mathcal{C}^1$ à dérivée bornée alors $\left|g(\frac{x}{3^k})\right|\leq k\frac{|x|}{3^k}$ car $g(0)=0$ et la série converge.

Attention si g est continue et $g(0) = 0$ alors la série peut ne pas converger, prendre $g(x) = \frac{1}{|\ln x|}$. Si g est uniformément continue alors on aura la convergence car $\forall x\ :\ |g(x)| \leq u\,|x|$.

Exercice 16 Posons $u = t - a$ on obtient $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t} + \sqrt{1-t}}$, puis pour $u = \sqrt{t}$ on a $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{2udu}{u + \sqrt{1-u^2}}$, enfin avec $u = \cos t$ on arrive à $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin t \cos t}{\cos t + \sin t} dt$, intégrale que l'on a déjà calculé.