Chapitre 3

Préparation à l'oral

3.1 Fonctions usuelles

Exercice 1 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que :
$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = 2f(x)$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$
une fonction continue et positive telle que : $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = L < 1$ montrer que f possède un point fixe.

Révision : Fonctions usuelles. Fonctions logarithmes, fonctions exponentielles, fonctions puissances, fonctions circulaires, fonction exponentielle complexe.

3.2 Suites

Exercice 3 Étude de la suite définie par : $u_{n+1} = \dfrac{6}{2 + u_n^2}$ pour tout n avec $u_0 \geq 0$

Exercice 4 Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Donner un développement asymptotique à l'ordre 2 de la suite de terme général $\displaystyle\int_0^1 t^n g(t)dt$

Révision : Le corps des nombres réels, toute partie majorée..., partie entière, valeurs décimales, suites monotones, suites convergentes, suites extraites, relations de comparaisons, théorèmes d'existence de limites. Suites à valeurs complexes, extension, suites de Cauchy, suites définies par une relation de récurrence.

3.3 Fonctions d'une variable réelle

Exercice 5 Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P \in E$ et $n \in \mathbb{N}$ on pose : $\theta_n(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)t^n dt$. Justifier l'existence de $N(P) = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |\theta_n(P)|$. Montrer que c'est une norme sur E.

Exercice 6 Soit E l'ensemble des applications de $\mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ telles que $f(0) = 0$. Montrer que N_1 et N_2 définies par $N_1(f) = \sup\limits_I |f(t)|$ et $N_2(f) = \sup\limits_I |f'(t)|$ où $I = [0,1]$ sont des normes et les comparer.

Révision: Fonctions d'une variable réelle, extremum, fonctions bornées, fonctions monotones, fonctions périodiques, limites, fonctions équivalentes, relations de comparaison. Fonctions continues sur un intervalle, théorèmes classiques. Extension aux fonstions à valeurs complexes. Normes et distances, espace vectoriel normé, de dimension finie, relations de comparaison de suites. Etude locale d'une application, limite et continuité. Ouverts et fermés. Continuité des applications linéaires en dimension finie, compacité

3.4 Séries numériques

Exercice 7 Soit $C(n)$ le nombre de chiffres dans l'écriture décimal de n. Existence et calcul de $\sum_{n\geq 1} \frac{C(n)}{n(n+1)}$.

Exercice 8 Soit $u_n = \int_0^1 \frac{t^n + 2t^{2n}}{1+t^n+t^{2n}}$.
1) Montrer que u_n tend vers 0
2) Montrer que la série de terme général u_n est divergente.
3) Montrer que nu_n converge vers une limite à préciser.

Exercice 9 Soit la suite définie par $a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n$.
a) Montrer que la série de terme général $(-1)^n a_n$ converge.
b) Monter que la série de terme général a_n diverge.
c) Quel est le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.

Révision: Suites et séries, cas complexe, séries alternées. Séries à termes positifs, comparaisons. Cas général, critère de Cauchy, séries absolument convergentes, série géométrique, série exponentielle. Comparaison série et intégrale, produit de deux séries absolument convergentes.

3.5 Suites et séries de fonctions

Exercice 10 Soit (f_n) la suite de fonctions définies par : $f_n(x) = \frac{1}{sin^2 x + (1+x^2)^n}$. Etudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$, la convergence uniforme sur $[-1, 1]$, la convergence uniforme sur $]0, 1]$.

Exercice 11 Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs qui tend vers $+\infty$ en croissant. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ telle que : $x \longmapsto (-1)^n e^{-a_n x}$.
a) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement. La somme est f.
b) Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$.
c) Montrer que f est intégrable sur $]0, +\infty[$ et calculer $\int_0^{+\infty} f$.

Révision: Convergence simple, uniforme, uniforme sur tout segment d'une suite de fonctions, transfert de régularité (continuité, intégrabilité, dérivabilité). Convergence normale d'une série de fonctions. Intégrabilité, norme de la convergence en moyenne, dérivabilité sur un segment quelconque.

3.6 exos en vrac

Exercice 12 $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = |f(x)|^2$.

Exercice 13 Soit $a > 1$. Soit (u_n) une suite réelle telle que : $\forall n : u_{n+1} = au_n - \frac{1}{n+1}$. Etudier la convergence de la suite.

Exercice 14 Montrer que $n : (x, y)) \longmapsto \int_0^1 |x + ty|dt$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$, représenter la boule unité.

Exercice 15 Soit, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{cos\,(x)^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}$
1) Nature de la série de terme général $u_n = \int_n^{n+1} f(x)dx - f(n)$.
2) Nature de la série de terme général $f(n)$.
3) Nature de la série de terme général $\frac{sinn^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{2}{3}}}$.

3.6.1 Corrigés

Exercice 1 On a $f(0)=0$ ce qui nous permet de considérer $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = f'(0)$ ainsi g est continue en 0 et $g(2x) = g(x)$ puis $g(\frac{x}{2^n}) = g(x) = g(0) = \alpha$ nous trouvons $f(x) = \alpha x$ qui convient bien.

Exercice 2 poser $g(x) = f(x) - x$ et applique le TVI entre 0 et $+\infty$

Exercice 3 Chercher les trois points fixes , $1, \alpha, 2$. Si $u_0 \leq 1$ alors comme f est décroissante donc $f \circ f$ est croissante on montre que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes vers 1.. On fait de même ssur les autres intervalles.

Exercice 4 Deux intégrations par parties donnent $u_n = \frac{g(1)}{n+1} - \frac{g'(1)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \displaystyle\int_0^1 t^{n+2} g''(t)dt$ soit $u_n = g(1)\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})\right) - g'(1)\dfrac{1}{n^2} + o(\dfrac{1}{n^2}) + o(\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{g(1)}{n} - \left(\dfrac{g(1)+g'(1)}{n^2}\right) + o(\dfrac{1}{n^2}$.
En effet g est $\mathcal{C}^2$ et g'' est bornée sur $[0,1]$. et $|\displaystyle\int_0^1 t^{n+2} g''(t)dt| \leq M \dfrac{1}{n+3} \longrightarrow 0$.

Exercice 5 $(\theta_n(P))$ est une suite majorée par la norme 1 de P. C'est bien une norme, l'axiome de séparation si $\forall n$ on a $\theta_n(P) = 0$ on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 P(t)P(t)dt = 0$

Exercice 6 $\forall t \in [0,1] : |f'(t)| \leq N_2(f)$ les accroissements finis donnent $|f(t) - f(0)| \leq N_2(f)$ et donc $N_1(f) \leq N_2(f)$. Elles ne sont pas équivalentes, il suffit de prendre $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$.

Exercice 7 On a ou bien $C(n+1) = C(n)$ ou bien $C(n+1) = C(n)+1$ ainsi la série donne $1\left[\dfrac{1/2}{1} - \dfrac{1/2}{2} + \dfrac{1/2}{2} - \dfrac{1/2}{3} + \cdots + \dfrac{1/2}{8} - \dfrac{1/2}{9}\right] + 1\left[\dfrac{1/2}{9} - \dfrac{1/2}{10}\right] + 2\left[\dfrac{1/2}{10} - \dfrac{1/2}{11}\right] + \cdots$ la $n^{\text{ème}}$ somme partielle donne : $1 + \dfrac{1/2}{10} + \dfrac{1/2}{100} + \cdots - \dfrac{1/2}{n+1}$ qui tend vers $1 + 1/2\left(\dfrac{1/10}{1-1/10}\right) = \dfrac{19}{9}$

Exercice 8 1) En utilisant le théorème de convergence dominée et en majorant f_n par 3.
2) En minorant $u_n \geq \displaystyle\int_0^1 \dfrac{t^n}{3} = \dfrac{1}{3(n+1)}$ on a la divergence de la série.
3) $nu_n = \displaystyle\int_0^1 t\dfrac{u'(t)}{u(t)} = \left[tln(1+t^n+t^{2n})\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 ln(1+t^n+t^{2n})dt$ la dernière intégrale tend vers 0 et donc nu_n tend vers $ln(3)$.

Exercice 9 a) On a $a_n \geq 0$ et $a_n \searrow 0$ en effet $\left|\left(\dfrac{1+t^2}{2}\right)^n\right| \leq 1$ et donc cette fonction est intégrable sur $[0,1]$ et $\left(\dfrac{1+t^2}{2}\right)^n \longrightarrow 0$ sur $[0,1[$ en appliquant le théorème de convergence dominée. Ainsi $\sum(-1)^n a_n$ converge.
b) $\displaystyle\sum_{k=0}^n a_n = \sum_{k=0}^n \int_0^1 \left(\dfrac{1+t^2}{2}\right)^k dt = 2\int_0^1 \dfrac{1-\left(\dfrac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}}{1-t^2} dt$. Or $\dfrac{1-\left(\dfrac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}}{1+t^2}$ est une suite qui croit vers $\frac{1}{1-t^2}$, donc $\sum a_n \longrightarrow \displaystyle\int_0^1 \dfrac{dt}{1-t^2} = +\infty$ (simple décomposition en éléments simples). Ainsi $\sum a_n$ n'est pas majorée.
c) $\rho = 1$ car $\sum a_n x^n$ converge en -1 et diverge en 1.

Exercice 10 La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}^*$ et vers 1 en 0. Mais $f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \longrightarrow \dfrac{1}{e}$ il n'y a donc pas convergence uniforme sur $[-1,1]$. D'autre part $|f_n(x)| \leq \frac{1}{(1+x^2)^n} \leq \frac{1}{(1+\varepsilon^2)^n}$ si $x \geq \varepsilon$. Il y a convergence uniforme sur tout $]-\infty, -\varepsilon[\cup]\varepsilon, +\infty[$ et ce $\forall \varepsilon > 0$.

Exercice 11 a) C'est une série alternée et $e^{-a_n x}$ décroit vers 0, il y a convergence simple.
b) Le reste $|R_n(x)| \leq e^{-a_{n+1}x} \leq e^{-a_{n+1}\varepsilon}$ sur $[\varepsilon, +\infty$ il y a donc convergence normale, donc uniforme

c) f est convexe et $|f_n(x)| \leq e^{-nx}$ pour n assez grand. La fonction $x \mapsto e^{-nx}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. Nous ouvons donc intervertir : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f = \sum (-1)^n \int_0^{+\infty} e^{-a_n x}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}$. Il n'y a pas convergence uniforme sur $]0,+\infty[$ il suffit de prendre $f_n(x_n)$ avec $x_n = \frac{1}{a_n}$.

Exercice 12 Montrons d'abord que $f(0) = 1$ en effet si $f \neq 0$ alors il existe $b \neq 0$ tel que $f(b) > 0$ car nous avons remarqué que $f \geq 0$. Considèrons $f(b) = \left(f(\dfrac{b}{2^n})\right)^{2^n}$ on a $\ln f(\frac{b}{2^n}) = \frac{1}{2^n} \ln f(b)$ et donc $\ln f(0) = 0$ et $f(0) = 1$. Montrons maintenat que $f \neq 0$. En effet si il existe a tel que $f(a) = 0$ alors $f(\frac{a}{2^n}) = 0$ et $f(0) = 0$. Finalement $f > 0$ et nous pouvons considérer $g = \ln f$ qui vérifie $g(2x) = 2g(x)$ et $f(x) = e^{\lambda x}$.

Exercice 13 Il est facile de montrer que $u_{n+1} - u_n \geq a(u_n - u_{n-1}) \leq a^n(u_1 - u_0)$ ainsi la série diverge et la suite u_n aussi si $u_1 - u_0 > 0$. Remarquons que $\dfrac{u_{n+1}}{a^{n+1}} = \dfrac{u_n}{a^n} - \dfrac{1}{(n+1)a^{n+1}}$ ainsi par addition $\dfrac{u_n}{a^n} = u_0 - \frac{1}{a} - \frac{1}{2a^2} - \cdots - \frac{1}{na^n}$ or $-\frac{1}{a} - \frac{1}{2a^2} - \cdots - \frac{1}{na^n}$ tend vers $\ln(1 - \frac{1}{a})$. Si $u_0 + \ln(1 - \frac{1}{a}) > 0$ alors$u_n \to +\infty$ et Si $u_0 + \ln(1 - \frac{1}{a}) < 0$ alors$u_n \to -\infty$ on a même $u_n \sim a^n(u_0 + \ln(1 - \frac{1}{a}))$. Il reste le cas où $u_0 = -\ln(1 - \frac{1}{a})$ on utilise le lemme : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n R_n(x)$ avec $R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt$ en effet $\ln(1+x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x (1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + (-1)^n \frac{t^n}{1+t}dt$. Ce qui donne $u_n = a^n(-1)^{n-1}R_n(-\frac{1}{a}) = (-1)^{n+1}a^n \displaystyle\int_0^{-\frac{1}{a}} \frac{t^n}{1+t}dt = \int_0^1 \frac{v^n}{a-v}dv$ d'où $0 \leq u_n \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{v^n}{a-1} = \frac{1}{(a-1)(n+1)}$ tend vers 0 donc u_n tend vers 0. De plus $u_n = a^n(u_0 + \ln(1 - \frac{1}{a})) + \displaystyle\int_0^1 \frac{v^n}{a-v}dv$ et $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{v^n}{a-v}dv = \int_0^1 \frac{e^{n\ln v}}{a-v}dv = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ns}}{ae^s - 1}ds$. Un D.L. en 0 de $s \mapsto \frac{1}{ae^s-1}$ donne un D.A. en $+\infty$ de I_n, c'est la méthode de Laplace.

Exercice 14 Par invariance en changeant (x,y) en $(-x,-y)$ il suffit de considérer deux cas $x \geq 0, y \geq 0$, par intégration la boule unité donne $x + \frac{y}{2} \leq 1$. Pour $x \geq 0, y \leq 0$ l'étude de $x + ty \geq 0$ donne $t \leq \frac{x}{-y}$. Mais $-\frac{x}{y}$ n'appatient pas toujours à $[0,1]$. On a bien $-\frac{x}{y} \geq 0$ mais $\frac{x}{-y} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq -y$. Dans ce cas $n(x,y) = \displaystyle\int_0^{\frac{x}{-y}} (x+ty)dt + \int_{\frac{x}{-y}}^1 (-x-ty)dt = -\frac{x^2}{y} - x - \frac{y}{2}$.
Récapitulons :
$x \geq 0, y \geq 0$ le segment $x + \frac{y}{2}$
$x \geq 0, y \leq 0$ et $x \geq -y$ le segment $x + \frac{y}{2} \leq 1$
$x \geq 0, y \leq 0$ et $x \leq -y$ l'ellipse $x^2 + xy + \frac{y^2}{2} + y \leq 0$ de centre $(-1,2)$.

Exercice 15 On pose $g(x) = \sin x^{\frac{1}{3}}$ on a $g'(x) = \frac{1}{3}f(x)$ donc $u_n = 3(g(n+1) - g(n) - g'(n)) = \frac{3}{2}g''(\xi_n)$ avec $\xi_n \in [n, n+1]$. Nous avons $|g''(\xi_n)| \leq \frac{1}{3}\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}} + \frac{2}{3}\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}$ qui est le terme général d'une série convergente.

2) La série de terme général $\displaystyle\int_n^{n+1} f(x)dx = 3(\sin(n+1)^{\frac{1}{3}} - \sin n^{\frac{1}{3}})$ est de la même nature que la suite $(\sin n^{\frac{1}{3}})$ donc diverge par suite $\sum f(n)$ diverge.

3) de même $\cos x^{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}\frac{\sin x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}$.