Chapitre 2

Préparation à l'oral

2.1 Espaces euclidiens

Exercice 1 Trouver toutes les matrices symétriques réelles telles que : $M^3 - M^2 + M - I = 0$

Exercice 2 On munit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit A une matrice réelle $n \times n$, de colonnes $X_1, X_2, \cdots, X_n$.
a) Montrer que : $|detA| \leq \|X_1\|\|X_2\| \cdots \|X_n\|$
b) Montrer, dans le cas où aucun des X_i n'est nul, il y a égalité si et seulement si la famille $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ est orthogonale.
c) Soit $B = ((b_{ij}))_{i,j}$ une matrice réelle. On pose $b = \max\limits_{i,j} |b_{ij}|$. Montrer que $|detB| \leq b^n n^{\frac{n}{2}}$.

Exercice 3 Réduire la forme quadratique $q(x, y, z) = 2(xy + xz + yz) - (x^2 + y^2 + z^2)$

Révision : Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques. Produits scalaires, inégalité de Cauchy-Schwarz, normes et distances. Orthogonalité de vecteurs, de sous-espaces vectoriels. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Projection orthogonale dans un espace préhilbertien sur un sev de dimension finie. Adjoint d'un endomorphisme, matrices symétriques. Automorphisme orthogonal, structure, matrice orthogonale, classification dans le cas $n = 2$. Réduction des endomorphismes autoadjoints, application aux coniques et aux quadriques.

2.2 Espaces préhilbertiens

Exercice 4 Trouver a, b, c pour que la matrice : $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & a \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & b \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & c \end{pmatrix}$ soit une matrice de rotation.
Déterminer ses éléments caractéristiques

Exercice 5 Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice canonique $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
a) Montrer qu'il existe un seul plan P stable par u.
b) Soit $x \in P/\{0\}$. On pose $y = u(x)$. Montrer que (x, y) est une base de P. Soit $v = u_{|P}$. Déterminer la matrice de v dans (x, y).
c) Trouver un produit scalaire sur P tel que v soit une rotation.

Révision : Transformation du plan et de l'espace. Isométries du plan, translation, réflexion, rotation. Isométrie et barycentres. Similitudes directes du plan. Homothéties. Structure, écriture complexe. Isométries de l'espace, translation, réflexion, rotation, vissage. Toute isométrie est un produit de réflexion, pratique.

2.3 Nombres complexes

Exercice 6 Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(a+kb) X^k$ avec $a+nb$ n'appartenant pas à $\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$. Trouver les racines de P et montrer qu'elles sont réelles.2000

Révision: Le corps $\mathbb{C}$ et le plan, groupe U des nombres complexes de module 1, racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité, exponentiel complexe. Droites, alignement, cercles dans le plan. Dans l'espace, produit vectoriel, produit mixte, droites, plans, sphères

Exercice 7 Simplifier $\sum_{\alpha^{15}} \frac{\alpha^3}{x+\alpha^6}$ (année 98)

2.4 Géométrie élémentaire

Exercice 8 Soit P le plan d'équation $x+y+z=0$ et D la droite $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$. Calculer dans la base canonique la matrice de projection sur D parallèlement à P.

Exercice 9 Soit R la rotation d'axe $(z=1, y=0)$ orienté par $\overrightarrow{i}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et R' la rotation d'axe $(z=-1, x=0)$ orienté par $\overrightarrow{j}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Etudier $R' \circ R$ et $R \circ R'$.

2.5 Exos en vrac

Exercice 10 Trouver tous les plans de $\mathbb{R}^3$ tangents à la surface d'équation $x^2+y^2+4z^2=1$ et parallèles au plan d'équation $x+2y+z=0$

Exercice 11 Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3, B une base de E, $u \in L(E)$. On considère l'application A de E^3 dans $\mathbb{R}$ définie par : $(x,y,z) \longmapsto \det_B(u(x),y,z)+\det_B(x,u(y),z)+\det_B(x,y,u(z))$. Montrer que A est une forme trilinéaire alternée et que $A = \text{tr}\,(u)\det_B$

Exercice 12 Soit E un espace vectoriel de dimension n, $(u,v) \in E^2$ on considère l'application $\rho_{u,v} \;:\; x \longmapsto x - \langle v, x\rangle u$, vérifier que $\rho_{u,v}$ est bien un endomorphisme.
1) Trouver les sous espaces propres.
2) $\rho_{u,v)}$ est elle diagonalisable
3) Donner une condition nécessaire et suffisante d'inversibilité.
4) Trouver l'adjoint de $\rho_{u,v}$.
5) Montrer que $\forall u \neq 0$ de E $\exists! \hat{u} \in E \;:\; \rho_{u,v}$ soit ortogonale.

Exercice 13 Householder Soit $u \in \mathbb{R}^n$ non nul on le notera sous forme de vecteur-colonne .
On définit une matrice de Householder par
$H(u) = I - \frac{2}{u^t u} u u^t$

1) montrer que $H(u)$ est symétrique et orthogonale .
2) Soit a et b 2 vecteurs non nuls et non colinéaires trouver un vecteur v tel que $H(v)a = \alpha b$ où α est un coefficient réel..
3) Soit une matrice A de dimension $n \times n$: Montrer qu'Il existe une matrice de Householder $H_1 = H(u_1)$ telle que $A_1 = H_1 A$ ait sa première colonne de la forme $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.
Puis par récurrence qu'il existe $n-1$ matrices H_i de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & & 1 & & \\ & & & & H(u_i) \end{pmatrix}$$

($H(u_i)$ de dimension $n+1-i$) et telles que $H_{n-1}\dots H_2 H_1 A$ soit triangulaire supérieure.
4) Écrire un algorithme de résolution du système linéaire $Ax=b$ à l'aide de ces matrices de Householder.

2.5.1 Corrigés

Exercice 1 Un polynôme annulateur donne les valeurs propres possibles mais la matrice est symétrique réelle.

Exercice 2 Si $\det(A) = 0$ la relation est vraie. Sinon $(X_1, \cdots, X_n)$ est une base et $\det A = \det(X_1, \cdots, X_n) = ||X_1|| \cdots ||X_n|| det\left(\frac{X_1}{||X_1||}, \cdots, \frac{X_n}{||X_n||}\right)$. Posons $e_1 = \frac{X_1}{||X_1||}, \cdots, e_n = \frac{X_n}{||X_n||}$ et orthogonalisons cette famille par Gramm-Schmidt. Soit $e'_1 = e_1, e'_2 = e_2 - \langle e_2, e'_1\rangle, \cdots, e'_p = e_p - \sum_{i=1}^{p-1} \langle e_p, e'_i\rangle) e'_i, \cdots$. On a $\det(e_1, \cdots, e_n) = \det(e'_1, \cdots, e'_n)$. Nous allons montrer par récurrence que $||e'_i|| \leq 1$. D'abord $||e'_1|| = ||e_1|| = 1$ et $||e'_2||^2 = ||e_2||^2 - |langlee_2, e'_1\rangle^2 (2-1) \leq 1$. S'il en est ainsi pour $e'_1, \cdots, e'_{p-1}$ on a $||e'_p||^2 = ||e_p||^2 - 2\sum_{i=1}^{p-1} \langle e_p, e'_i\rangle^2 + ||\sum_{i=1}^{p-1} \langle e_p, e'_i\rangle e'_i||^2$. Or $||\sum_{i=1}^{p-1} \langle e_p, e'_i\rangle e'_i||^2 = \sum_{i=1}^{p-1} \langle e_p, e'_i\rangle^2 ||e'_i||^2$ car les e'_i sont orthogonaux et $||\sum_{i=1}^{p-1} \langle e_p, e'_i\rangle e'_i||^2 \leq \sum_{i=1}^{p-1} \langle e_p, e'_i\rangle^2$. Comme $||e_p|| = 1$ cela donne $||e'_i|| \leq 1$. Ainsi $\det(A) = ||X_1|| \cdots ||X_n|| \times ||e'_1|| \cdots ||e'_n|| \det\left(\frac{e'_1}{||e'_1||}, \cdots, \frac{e'_n}{||e'_n||}\right) \leq ||X_1|| \cdots ||X_n||$. $\det A = ||X_1|| \cdots ||X_n|| det\left(\frac{X_1}{||X_1||}, \cdots, \frac{X_n}{||X_n||}\right)$. Si la base est orthogonle ce dernier déterminant vaut ± 1 et il y a égalité. S'il y a égalité d'après ce qui précède cela impose $||e'_i|| = ||e_i|| = 1$ et ainsi $||e_2||^2 - \langle e_2, e'_1\rangle^2 = ||e_2||^2$ et $e_1 \perp e_2$ de même $||e'_p|| = ||e_p||$ donne $\sum_{i=1}^{p-1} \langle e_p, e_i\rangle^2 = 0$ et $\forall i \ : \ e_p \perp e_i$, la famille est orthogonale. On a $|\det B| \leq ||X_1|| \cdots ||X_n|| \leq \left(\sqrt{b^2 n}\right)^n = b^n n^{\frac{n}{2}}$.

Exercice 3 L'axe est $(1, 1, 1)$ utiliser$\|OM\|$ et $OM \bullet k$

Exercice 4 Il faut que ce soit une matrice orthogonale directe. Rechercher les invariants et l'angle par la trace après avoir orienter l''espace.

Exercice 5 Le plan $x = 0$ convient. S'il y en avait un autre Q alors la droite $P \cap Q$ serait stable doc propre. Mais seul 1 est valeur propre et le sous espace propre associé est $V(1) = \left\{ \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$ qui n'est pas contenue dans P. Posons $x = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et $u(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \\ -\beta + \gamma \end{pmatrix}$. Si ces deux vecteurs sont liés, comme $x \neq 0$, il existe $\lambda : \gamma = \lambda\beta$ et $-\beta + \gamma = \lambda\gamma$ ou $-\beta + \gamma = \lambda^2\beta$ ou $\lambda^2\beta + \beta - \lambda\beta = 0$ si $\beta \neq 0$ cela donnerait $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ polynôme n'ayant pas de racine réelle donc $\beta = 0$ ce qui donnerait $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \\ \gamma \end{pmatrix}$ qui sont encore indépendants. Ainsi $u^2(x) = \begin{pmatrix} -\beta + \gamma \\ -\beta \end{pmatrix} = -x + u(x)$ et $\mathcal{M}(v) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Pour un produit scalaire quelconque $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$, l'expression de la norme est $ax^2 + 2bxy + dy^2$. Il suffit que v soit une symétrie car $\det M = 1$. Or $||x||^2 = 2\beta^2 + 2b\beta\gamma + d\gamma^2$ et $||u(x)||^2 = \alpha\beta^2 - 2(b + \alpha)\beta\gamma + (a + 2b + d)\gamma^2$. La condition $||x|| = ||u(x)||$ donne $a = -2b, a = d$ le produit scalaire devient $x^2 + xy + y^2$ qui en est bie un.

Exercice 6 En considèrant $P(X) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(a + kb) X^k$ on a $P(X) + iQ(X) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{i(a+kb)} X^k = e^{ia}(1 + e^{ib}X)^n$ puis $P(X) = \frac{1}{2}\left(e^{ia}(1 + e^{ib}X)^n + e^{ia}(1 + e^{-ib}X)^n\right)$. Ainsi $P(X) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1 + e^{ib}X}{1 + e^{-ib}X}\right) = -e^{-2ia}$. Posons $\alpha = e^{-\frac{2ia + \pi}{n}}$ et $\zeta_n \in \mathcal{U}_n$. $\frac{1 + e^{ib}X_k}{1 + e^{-ib}X_k} = \zeta_k\alpha$ ou $X_k = \frac{1 - \zeta_k\alpha}{\zeta_k\alpha e^{-ib} - e^{ib}}$ avec $\alpha^n = e^{-2ia}, \zeta_k^n = 1$. Montrons que $X_n \in \mathbb{R}$: en posant $\alpha_k = \zeta_k\alpha$ on a $|\alpha_k| = 1$ et $\overline{\alpha_k} = \frac{1}{\alpha_k}$

d'où $X_k = \dfrac{1-\alpha_k}{\alpha_k e^{-ib} - e^{ib}}$ et $\overline{X_k} = \dfrac{1-\frac{1}{\alpha_k}}{\frac{1}{\alpha_k}e^{ib} - e^{-ib}} = \dfrac{\alpha_k - 1}{e^{ib} - \alpha e^{-ib}} = X_k$.Pour calculer X_k il faut $\alpha_k e^{-ib} - e^{ib} \neq 0$ ou $\alpha_k \neq e^{2ib}$ ce qui donne $a + bn \neq k\pi\ [2\pi]$.

Exercice 7 Posons $\alpha = e^{\dfrac{2ik\pi}{15}}$ avec $0 \leq k \leq 14$ on a $\alpha^3 = e^{\dfrac{6ik\pi}{15}} = e^{\dfrac{2ik\pi}{5}}$ et $\Lambda = 3\displaystyle\sum_{\beta^5} \frac{\beta}{x+\beta^2}$ avec $\beta = e^{\dfrac{2ik\pi}{5}}$ pour $0 \leq k \leq 4$. $\Lambda' = \displaystyle\sum_{\beta^5} \frac{\beta}{x+\beta^2} = \frac{1}{x+1} + \frac{\beta}{x+\beta^2} + \frac{\beta^2}{x+\overline{\beta}} + \frac{\overline{\beta}^2}{x+\beta} + \frac{\overline{\beta}}{x+\overline{\beta}^2} = \frac{1}{x+1} + \frac{(\beta+\overline{\beta})x+1}{x^2+(\beta^2+\overline{\beta}^2)x+1} + \frac{(\beta^2+\overline{\beta}^2)(x+1)}{x^2+(\beta+\underline{\beta})x+1}$ or $1+\beta+\overline{\beta}+\beta^2+\overline{\beta}^2 = 0$ et donc $\Lambda' = \dfrac{1}{x+1} + (x+1)\left[\dfrac{(\beta+\overline{\beta})}{x^2+(\beta^2+\overline{\beta}^2)x+1} + \dfrac{(\beta^2+\overline{\beta}^2)}{x^2+(\beta+\overline{\beta})x+1}\right] = \dfrac{1}{x+1} + (x+1)\dfrac{-x^3+3x-1}{x^4-x^3+x^2-x+1} = \dfrac{5x^2}{x^5+1}$

Exercice 8 Une méthode serait de prendre une base adaptée à la décomposition $D \oplus P = \mathbb{R}^3$, d'écrire la matrice de la projection dans cette base et de faire le changement de base. Une autre est de remarquer que le rang de la matrice est 1 et que les colonnes sont dans D donc la matrice est de la forme : $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \end{pmatrix}$. Mais $i = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont dans le noyau et donc $\alpha - \beta = 0$ et $\beta - \gamma = 0$ ce qui donne $\alpha = \beta = \gamma$ enfin $p(i+2j+3k) = i+2j+`3k$ donne $\alpha + 2\beta + 3\gamma = 1$ ou $\alpha = \dfrac{1}{6}$ et la matrice.

Exercice 9 $\varphi = R' \circ R$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. C'est forcément une rotation vectorielle autour de $i+j-k$. $R' \circ R$ est ou bien une rotation ou la composée d'une translation et d'une rotation selon les invariants. A a pour image $B \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ainsi M est invariant si et seulement si $\overrightarrow{BM} = \varphi(\overrightarrow{AM}$ ce qui donne $\begin{cases} x-2 = y \\ y = -z+1 \\ z+1 = x \end{cases}$ b. Il n'y en a pas. $R' \circ R$ est donc la composée de la rotation autour de $i+j-k$ d'angle $2\cos\theta + 1 = 0$ ou $\theta = \pm\dfrac{2\pi}{3}$ en orientant l'axe on a $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2+1 > 0$ et $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$. on axe est caractérisé par $\forall M\ :\ \overrightarrow{MM'} \in \Delta$ ou $MM' = BM' - BM = \varphi(AM) - BM$ ce qui donne $\begin{pmatrix} y \\ -z+1 \\ -x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x-2 \\ y \\ z+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-x+2 \\ -y-z+1 \\ -x-z-1 \end{pmatrix}$ ou $y-x+2 = -y-z+1 = x+z+1$ c'est la droite d'équation $\begin{cases} -x+2y+z+1 = 0 \\ -2x+y-z+1 = 0 \end{cases}$ passant par $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ et de direction $i+j-k$ et la translation est de vecteur $u = CC' = BC' - BC = \varphi(AC) - BC = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$ qui est bien colinéaire à $i+j-k$.

On fait de même pour $R \circ R'$ et on trouve la composée de la rotation autour de la droite de direction $i+j+k$ passant par $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et de la translation de vecteur $v = -\frac{2}{3}(i+j+k)$.

Exercice 10 Trouver un point de la surface en lequel le vecteur normal à la surface est parallèle au plan

Exercice 11 L'espace vectoriel des formes trilinéaires alternées d'un espace vectoriel de dimension 3 est de dimenson 1.

Exercice 12

Exercice 13 Si a et b sont 2 vecteurs non nuls et non colinéaires $v = a \pm \frac{\|a\|}{\|b\|} b$ est tel que $H(v)a = \alpha b$ où α est un coefficient réel .
On a l'algorithme de résolution du système linéaire $Ax = b$:
pour i de 1 à n-1
construction matrice H_i
multiplication de A et b par H_i
résolution du système triangulaire