Chapitre 1

Préparation à l'oral

1.1 Polynômes

Exercice 1 Déterminer le reste de la division de $P(X) = \prod_{k=1}^{n} (X \sin k + \cos k)$ par $X^2 + 1$

Révision des polynômes : définition et opérations, degré, structure algèbrique, multiples et diviseurs d'un polynôme, division euclidienne, pgcd et ppcm définitions d'une racine et ordre de multiplicité, formules entre les coefficients et les racines, décomposition en facteurs irréductibles, polynômes premiers entr'eux.

1.2 Structures

Exercice 2 Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

pour $n \in \mathbb{N}$

Révision : définition d'un groupe, d'un sous-groupe, d'un morphisme de groupes, noyau et image, définition d'un anneau, d'un corps. Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ division euclidienne, nombre premier, décomposition, formule du binôme. Vocabulaire sur les fonctions. Dénombrement.

1.3 Algèbre linéaire

Exercice 3 Soit $n \geq 2$ et $f : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par $P \longmapsto f(P) = XP(1) + (X^2 - 4)P(0)$. Montrer que f est linéaire, trouver la dimension du noyau et de l'image.

Exercice 4 Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie.
1) Montrer que $\text{im}\,(f) = \text{im}\,(f^2) \Leftrightarrow \ker(f) = \ker(f^2)$
2) Montrer que $\ker(f) = \ker(f^2) \Rightarrow E = \text{im}\,(f) \oplus \ker(f)$
3) Montrer que $E = \text{im}\,(f) \oplus \ker(f)^2) \Rightarrow \text{im}\,(f) = \text{im}\,(f^2)$

Révision de la structure d'espace vectoriel, bases et dimension. Sous-espaces vectoriels, supplémentaires, somme directe. Application linéaire, rang et formule, trace, dual. Sous-espace stable. Déterminant.

1.4 Matrices

Exercice 5 Quelles sont les matrices réelles d'ordre n, de trace n telles que $M^5 = M^2$.

Exercice 6 Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $\text{tr}\,(A) = \text{rg}\,(A) = 1$ montrer que $A^2 = A$

Révision : Matrices, calcul matricielle, structure d'algèbre, transposée, matrices symétriques et antisymétriques. Matrices et applications linéaires, matrices de passage. Opérations élémentaires sur les matrices. Rang d'une matrice. Systèmes d'équations linéaires.

1.5 Réduction

Exercice 7 Soit $n \geq 2$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 4 & 12 & 5 \end{pmatrix}$

a) Diagonaliser A.
b) Si $B \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = A$ montrer que B et A commutent.
c) Déterminer $\{B \in M_n(\mathbb{C}) \,:\, B^2 = A\}$.

Révision : Sous espaces stables et matrices triangulaires. Polynômes d'endomorphisme. Valeurs et vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme ou d'une matrice. Automorphisme intérieurs et matrices semblables. Polynôme caractéristique. Conditions de diagonalisabilité. Réduction à la forme triangulaire

1.6 Polynômes d'endomorphismes

Exercice 8 Soit $A \in M_n(\mathbb{R}) \,:\, A^2 + A + 4I = 0$
a) A n'a pas de valeur propre réelle.
b) n est pair. c) Calculer le déterminant et la trace de A.

1.7 exos en vrac

Exercice 9 Déterminer le polynôme caractéristique et minimal de $\Phi \,:\, X \in M_n(\mathbb{C}) \longmapsto -X + \mathrm{tr}\,(X) I_n \in M_n(\mathbb{C})$

Exercice 10 $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $M^t M M = I$, montrer que M est inversible et symétrique Déterminer M.

Exercice 11 Soit $A = ((a_{ij}))$ avec $\forall i, j\ a_{ij} = 1$. Déterminer les éléments propres de A.

Exercice 12 Trouver $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que P' divise P.

Exercice 13 Dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ où p est premier, résoudre $x^2 = 1$

Exercice 14 Soit $A \in M_n(K)$
1) Montrer que D, droite vectorielle de K^n est stable par A si et seulement si $\exists \lambda \in K$ tel que $D \subset Ker\,(A - \lambda I)$.

2) Soit H un hyperplan de K^n. Montrer l'existence d'un vecteur colonne non nul C tel que H admet pour équation ${}^tCX = 0$. En déduire que H est stable par A si et seulement si $\exists \lambda \in K : H \supset Im\,(A - \lambda I)$.

Exercice 15 Soit $n \geq 2$ et $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

1) Trouver son polynôme caractéristique ; montrer que les sous-espaces propres sont de dimension 1.

2) montrer que A_3 est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

3) montrer que A_n admet une unique valeur propre x_n dans $]0, +\infty[$.

1.7.1 Corrigés

Exercice 1 On écrit l'égalité de la division euclidienne et on remplace X par i pour trouver les deux coefficients que l'on veut.

Exercice 2 partir de $(1-x)^n$ et intégrer.

Exercice 3 Pour montrer que f est linéaire bien regarder les variables. Pour le noyau un polynôme qui s'annule en un point a est divisible par $(X-a)$, pour l'image utiliser la formule du rang.

Exercice 4 utilser la formule du rang

Exercice 5 M annule le polynôme $X^2(X^3-1)$ qui admet pour racine $0, 1, j, \overline{j}$ or $j+\overline{j}=1$, comme la trace est n et que sur la diagonale il ne peut y avoir que $0, 1, j, \overline{j}$, c'est qu'il n'y a que des 1 sur la diagonale. Le polynôme minimal divise $X^2(X^3-1)$, ce ne peut être que $X-1$ pour qu'il n'y ait que des 1 sur la diagonale. Finalement $M = Id$.

Exercice 6 Étudier les valeurs propres et la diagonalisabilité de A

Exercice 7 Il y a trois valeurs propres simples, B et A sont simultanément diagonalisables.

Exercice 8 Le discriminant est négatif, la matrice est réelle, produit et somme des valeurs propres.

Exercice 9 En calculant Φ^2 trouver un polynôme annulateur de degré 2, en déduire le polynôme minimal, que donne Φ pour une matrice de trace nulle, que vaut $\Phi(I)$, en déduire le polynôme caractéristique.

Exercice 10 Finalement $M^3 = I$, donc M est diagonalisable et réelle c'est ...

Exercice 11

Exercice 12

Exercice 13

Exercice 14

Exercice 15