Chapitre 2

Préparation à l'oral

2.1 Espaces euclidiens

Exercice 1 On munit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit A une matrice réelle $n \times n$, de colonnes $X_1, X_2, \cdots, X_n$.
a) Montrer que : $|detA| \leq \|X_1\| \|X_2\| \cdots \|X_n\|$
b) Montrer, dans le cas où aucun des X_i n'est nul, il y a égalité si et seulement si la famille $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ est orthogonale.
c) Soit $B = ((b_{ij}))_{i,j}$ une matrice réelle. On pose $b = \max_{i,j} |b_{ij}|$. Montrer que $|detB| \leq b^n n^{\frac{n}{2}}$.

Révision : Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques. Produits scalaires, inégalité de Cauchy-Schwarz, normes et distances. Orthogonalité de vecteurs, de sous-espaces vectoriels. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Projection orthogonale dans un espace préhilbertien sur un sev de dimension finie. Adjoint d'un endomorphisme, matrices symétriques. Automorphisme orthogonal, structure, matrice orthogonale, classification dans le cas $n = 2$. Réduction des endomorphismes autoadjoints, application aux coniques et aux quadriques.

2.2 Espaces préhilbertiens

Exercice 2 Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice canonique $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
a) Montrer qu'il existe un seul plan P stable par u.
b) Soit $x \in P/\{0\}$. On pose $y = u(x)$. Montrer que (x,y) est une base de P. Soit $v = u_{|P}$. Déterminer la matrice de v dans (x,y).
c) Trouver un produit scalaire sur P tel que v soit une rotation.

Révision : Transformation du plan et de l'espace. Isométries du plan, translation, réflexion, rotation. Isométrie et barycentres. Similitudes directes du plan. Homothéties. Structure, écriture complexe. Isométries de l'espace, translation, réflexion, rotation, vissage. Toute isométrie est un produit de réflexion, pratique.

2.3 Nombres complexes

Exercice 3 Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(a + kb) X^k$ avec $a+nb$ n'appartenant pas à $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ Trouver les racines de P et montrer qu'elles sont réelles.2000

Révision: Le corps $\mathbb{C}$ et le plan, groupe U des nombres complexes de module 1, racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité, exponentiel complexe. Droites, alignement, cercles dans le plan. Dans l'espace, produit vectoriel, produit mixte, droites, plans, sphères

Exercice 4 Simplifier $\displaystyle\sum_{\alpha^{15}} \frac{\alpha^3}{x+\alpha^6}$ (année 98)

2.4 Géométrie élémentaire

Exercice 5 Soit P le plan d'équation $x+y+z=0$ et D la droite $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$. Calculer dans la base canonique la matrice de projection sur D parallèlement à P.

Révision: Le corps $\mathbb{C}$ et le plan, groupe U des nombres complexes de module 1, racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité, exponentiel complexe. Droites, alignement, cercles dans le plan. Dans l'espace, produit vectoriel, produit mixte, droites, plans, sphères

Exercice 6 Soit R la rotation d'axe $(z=1,y=0)$ orienté par $\overrightarrow{i}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, et R' la rotation d'axe $(z=-1,x=0)$ orienté par $\overrightarrow{j}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Etudier $R'\circ R$ et $R\circ R'$.

2.4.1 Corrigés

Exercice 1 Si $\det(A)=0$ la relation est vraie. Sinon $(X_1,\cdots,X_n)$ est une base et $\det A=\det(X_1,\cdots,X_n)=||X_1||\cdots||X_n||det\left(\frac{X_1}{||X_1||},\cdots,\frac{X_n}{||X_n||}\right)$. Posons $e_1=\frac{X_1}{||X_1||},\cdots,e_n=\frac{X_n}{||X_n||}$ et orthogonalisons cette famille par Gramm-Schmidt. Soit $e_1'=e_1,e_2'=e_2-\langle e_2,e_1'\rangle,\cdots,e_p'=e_p-\sum_{i=1}^{p-1}\langle e_p,e_i'\rangle)e_i',\cdots$. On a $\det(e_1,\cdots,e_n)=\det(e_1',\cdots,e_n')$. Nous allons montrer par récurrence que $||e_i'||\leq 1$. D'abord $||e_1'||=||e_1||=1$ et $||e_2'||^2=||e_2||^2-|langlee_2,e_1'\rangle^2(2-1)\leq 1$. S'il en est ainsi pour $e_1',\cdots,e_{p-1}'$ on a $||e_p'||^2=||e_p||^2-2\sum_{i=1}^{p-1}\langle e_p,e_i'\rangle^2+||\sum_{i=1}^{p-1}\langle e_p,e_i'\rangle e_i'||^2$. Or $||\sum_{i=1}^{p-1}\langle e_p,e_i'\rangle e_i'||^2=\sum_{i=1}^{p-1}\langle e_p,e_i'\rangle^2||e_i'||^2$ car les e_i' sont orthogonaux et $||\sum_{i=1}^{p-1}\langle e_p,e_i'\rangle e_i'||^2\leq\sum_{i=1}^{p-1}\langle e_p,e_i'\rangle^2$. Comme $||e_p||=1$ cela donne $||e_i'||\leq 1$. Ainsi $\det(A)=||X_1||\cdots||X_n||\times||e_1'||\cdots||e_n'||\det\left(\frac{e_1'}{||e_1'||},\cdots,\frac{e_n'}{||e_n'||}\right)\leq ||X_1||\cdots||X_n||$. $\det A=||X_1||\cdots||X_n||det\left(\frac{X_1}{||X_1||},\cdots,\frac{X_n}{||X_n||}\right)$. Si la base est orthogonle ce dernier déterminant vaut ±1 et il y a égalité. S'il y a égalité d'après ce qui précède cela impose $||e_i'||=||e_i||=1$ et ainsi $||e_2||^2-\langle e_2,e_1'\rangle^2=||e_2||^2$ et $e_1\perp e_2$ de même $||e_p'||=||e_p||$ donne $\sum_{i=1}^{p-1}\langle e_p,e_i\rangle^2=0$ et $\forall i\ :\ e_p\perp e_i$, la famille est orthogonale. On a $|\det B|\leq||X_1||\cdots||X_n||\leq\left(\sqrt{b^2n}\right)^n=b^nn^{\frac{n}{2}}$.

Exercice 2 Le plan $x=0$ convient. S'il y en avait un autre Q alors la droite $P\cap Q$ serait stable doc propre. Mais seul 1 est valeur propre et le sous espace propre associé est $V(1)=\left\{\begin{array}{l}x-y+z=0\\ y=0\end{array}\right.$ qui n'est pas contenue dans P. Posons $x=\begin{pmatrix}0\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ et $u(x)=\begin{pmatrix}0\\ \gamma\\ -\beta+\gamma\end{pmatrix}$. Si ces deux vecteurs sont liés, comme $x\neq 0$, il existe $\lambda:\gamma=\lambda\beta$ et $-\beta+\gamma=\lambda\gamma$ ou $-\beta+\gamma=\lambda^2\beta$ ou $\lambda^2\beta+\beta-\lambda\beta=0$ si $\beta\neq 0$ cela donnerait $\lambda^2-\lambda+1=0$ polynôme n'ayant pas de racine réelle donc $\beta=0$ ce qui donnerait $\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \gamma\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\ \gamma\\ \gamma\end{pmatrix}$ qui sont encore indépendants. Ainsi $u^2(x)=\begin{pmatrix}-\beta+\gamma\\ -\beta\end{pmatrix}=-x+u(x)$ et $\mathcal{M}(v)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. Pour un produit scalaire quelconque $\begin{pmatrix}a & b\\ b & d\end{pmatrix}$, l'expression de la norme est $ax^2+2bxy+dy^2$. Il suffit que v soit une symétrie car $\det M=1$. Or $||x||^2=2\beta^2+2b\beta\gamma+d\gamma^2$ et $||u(x)||^2=\alpha\beta^2-2(b+\alpha)\beta\gamma+(a+2b+d)\gamma^2$. La condition $||x||=||u(x)||$ donne $a=-2b,a=d$ le produit scalaire devient x^2+xy+y^2 qui en est bie un.

Exercice 3 En considèrant $P\left(X\right)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\sin\left(a+kb\right)X^k$ on a $P(X)+iQ(X)=\sum_{k=0}^{n}C_n^ke^{i(a+kb)}X^k=e^{ia}(1+e^{ib}X)^n$ puis $P(X)=\frac{1}{2}\left(e^{ia}(1+e^{ib}X)^n+e^{i}{}^{a}(1+e^{-ib}X)^n\right)$. Ainsi $P(X)=0\Leftrightarrow\left(\frac{1+e^{ib}X}{1+e^{-ib}X}\right)=-e^{-2ia}$. Posons $\alpha=e^{-\frac{2ia+\pi}{n}}$ et $\zeta_n\in\mathcal{U}_n$. $\frac{1+e^{ib}X_k}{1+e^{-ib}X_k}=\zeta_k\alpha$ ou $X_k=\frac{1-\zeta_k\alpha}{\zeta_k\alpha e^{-ib}-e^{ib}}$ avec $\alpha^n=e^{-2ia},\zeta_k^n=1$. Montrons que $X_n\in\mathbb{R}$: en posant $\alpha_k=\zeta_k\alpha$ on a $|\alpha_k|=1$ et $\overline{\alpha_k}=\frac{1}{\alpha_k}$ d'où $X_k=\frac{1-\alpha_k}{\alpha_ke^{-ib}-e^{ib}}$ et $\overline{X_k}=\frac{1-\frac{1}{\alpha_k}}{\frac{1}{\alpha_k}e^{ib}-e^{-ib}}=\frac{\alpha_k-1}{e^{ib}-\alpha e^{-ib}}=X_k$.Pour calculer X_k il faut $\alpha_ke^{-ib}-e^{ib}\neq 0$ ou $\alpha_k\neq e^{2ib}$ ce qui donne $a+bn\neq k\pi\ \ [2\pi]$.

Exercice 4 Posons $\alpha = e^{\frac{2ik\pi}{15}}$ avec $0 \leq k \leq 14$ on a $\alpha^3 = e^{\frac{6ik\pi}{15}} = e^{\frac{2ik\pi}{5}}$ et $\Lambda = 3\sum_{\beta^5} \frac{\beta}{x+\beta^2}$ avec $\beta = e^{\frac{2ik\pi}{5}}$ pour $0 \leq k \leq 4$. $\Lambda' = \sum_{\beta^5} \frac{\beta}{x+\beta^2} = \frac{1}{x+1} + \frac{\beta}{x+\beta^2} + \frac{\beta^2}{x+\overline{\beta}} + \frac{\overline{\beta}^2}{x+\beta} + \frac{\overline{\beta}}{x+\overline{\beta}^2} =$ $\frac{1}{x+1} + \frac{(\beta+\overline{\beta})x+1}{x^2+(\beta^2+\overline{\beta}^2)x+1} + \frac{(\beta^2+\overline{\beta}^2)(x+1)}{x^2+(\beta+\underline{\beta})x+1}$ or $1+\beta+\overline{\beta}+\beta^2+\overline{\beta}^2 = 0$ et donc $\Lambda' = \frac{1}{x+1} +$ $(x+1)\left[\frac{(\beta+\overline{\beta})}{x^2+(\beta^2+\overline{\beta}^2)x+1} + \frac{(\beta^2+\overline{\beta}^2)}{x^2+(\beta+\overline{\beta})x+1}\right] = \frac{1}{x+1} + (x+1)\frac{-x^3+3x-1}{x^4-x^3+x^2-x+1} =$ $\frac{5x^2}{x^5+1}$

Exercice 5 Une méthode serait de prendre une base adaptée à la décomposition $D \oplus P = \mathbb{R}^3$, d'écrire la matrice de la projection dans cette base et de faire le changement de base. Une autre est de remarquer que le rang de la matrice est 1 et que les colonnes sont dans D donc la matrice est de la forme : $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \end{pmatrix}$. Mais $i = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont dans le noyau et donc $\alpha - \beta = 0$ et $\beta - \gamma = 0$ ce qui donne $\alpha = \beta = \gamma$ enfin $p(i+2j+3k) = i+2j+$'$3k$ donne $\alpha + 2\beta + 3\gamma = 1$ ou $\alpha = \frac{1}{6}$ et la matrice.

Exercice 6 $\varphi = R' \circ R$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. C'est forcément une rotation vectorielle autour de $i+j-k$. $R' \circ R$ est ou bien une rotation ou la composée d'une translation et d'une rotation selon les invariants. A a pour image $B\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ainsi M est invariant si et seulement si $\overrightarrow{BM} = \varphi(\overrightarrow{AM}$ ce qui donne $\begin{cases} x-2 = y \\ y = -z+1 \\ z+1 = x \end{cases}$ b. Il n'y en a pas. $R' \circ R$ est donc la composée de la rotation autour de $i+j-k$ d'angle $2\cos\theta + 1 = 0$ ou $\theta = \pm\frac{2\pi}{3}$ en orientant l'axe on a $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2+1 > 0$ et $\theta = \frac{2\pi}{3}$. on axe est caractérisé par $\forall M \ : \ \overrightarrow{MM' \in \Delta}$ ou $MM' = BM' - BM = \varphi(AM) - BM$ ce qui donne $\begin{pmatrix} y \\ -z+1 \\ -x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x-2 \\ y \\ z+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-x+2 \\ -y-z+1 \\ -x-z-1 \end{pmatrix}$ ou $y-x+2 = -y-z+1 = x+z+1$ c'est la droite d'équation $\begin{cases} -x+2y+z+1 = 0 \\ -2x+y-z+1 = 0 \end{cases}$ passant par $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ et de direction $i+j-k$ et la translation est de vecteur $u = CC' = BC' - BC = \varphi(AC) - BC = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$ qui est bien colinéaire à $i+j-k$.

On fait de même pour $R \circ R'$ et on trouve la composée de la rotation autour de la droite de direction $i+j+k$ passant par $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et de la translation de vecteur $v = -\frac{2}{3}(i+j+k)$.