Chapitre 1

Préparation à l'oral

1.1 Polynômes

Trouver $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que P' divise P.

Révision des polynômes : définition et opérations, degré, structure algèbrique, multiples et diviseurs d'un polynôme, division euclidienne, pgcd et ppcm définitions d'une racine et ordre de multiplicité, formules entre les coefficients et les racines, décomposition en facteurs irréductibles, polynômes premiers entr'eux.

1.2 Structures

Dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ où p est premier, résoudre $x^2 = 1$

Révision : définition d'un groupe, d'un sous-groupe, d'un morphisme de groupes, noyau et image, définition d'un anneau, d'un corps. Arithmétique dans $\mathbb{Z}$, division euclidienne, nombre premier, décomposition, formule du binôme. Vocabulaire sur les fonctions. Dénombrement.

1.3 Algèbre linéaire

Soit $A \in M_n(K)$

1.3.1

Montrer que D, droite vectorielle de K^n est stable par A si et seulement si $\exists\lambda \in K$ tel que $D \subset Ker(A - \lambda I)$.

1.3.2

Soit H un hyperplan de K^n. Montrer l'existence d'un vecteur colonne non nul C tel que H admet pour équation ${}^tCX = 0$. En déduire que H est stable par A si et seulement si $\exists\lambda \in K$: $H \supset Im(A - \lambda I)$.

Révision de la structure d'espace vectoriel, bases et dimension. Sous-espaces vectoriels, supplémentaires, somme directe. Application linéaire, rang et formule, trace, dual. Sous-espace stable. Déterminant.

1.4 Matrices

Quelles sont les matrices réelles d'ordre n, de trace n telles que $M^5 = M^2$.

Révision : Matrices, calcul matricielle, structure d'algèbre, transposée, matrices symétriques et antisymétriques. Matrices et applications linéaires, matrices de passage. Opérations élémentaires sur les matrices. Rang d'une matrice. Systèmes d'équations linéaires.

1.5 Réduction

Soit $n \geq 2$ et $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

1.5.1

Trouver son polynôme caractéristique ; montrer que les sous-espaces propres sont de dimension 1.

1.5.2

montrer que A_3 est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

1.5.3

montrer que A_n admet une unique valeur propre x_n dans $]0, +\infty[$.

1.5.4

Comportement de (x_n) quand n tend vers $+\infty$.

Révision : Sous espaces stables et matrices triangulaires. Polynômes d'endomorphisme. Valeurs et vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme ou d'une matrice. Automorphisme intérieurs et matrices semblables. Polynôme caractéristique. Conditions de diagonalisabilité. Réduction à la forme triangulaire

1.6 Polynômes d'endomorphismes

Soit $p_1, \cdots, p_n$ des endomorphismes tous non nuls du K-espace vectoriel E de dimension finie, $x_1, \cdots, x_n$ des scalaires deux à deux distincts et $f \in L(E)$ tels que

$$\forall m \in \mathbb{N} : f^m = \sum_{k=1}^{n} x_k^m p_k$$

1.6.1

Montrer, si $P \in K[X]$, que $P(f) = \sum_{k=1}^{n} P(x_k)\, p_k$. En déduire que f est diagonalisable.

1.6.2

Calculer $p_k \circ p_l$ pour k,l dans $\{1, \cdots, n\}$.

1.6.3

Déterminer le spectre de f.

1.6.4

Montrer que p_k est la projection sur $ker\,(f - x_k id)$ parallèlement à $\bigoplus_{l \neq k} ker\,(f - x_l id)$.

1.6.5

Ici $K = \mathbb{C}$ et $dimE = n$. Calculer $card\left\{g \in L(E) : g^2 = f\right\}$.