# Chapitre 1

# Préparation à l'oral

## 1.1 Polynômes

**Exercice 1** Trouver $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P'$ divise $P$.

Révision des polynômes : définition et opérations, degré, structure algèbrique, multiples et diviseurs d'un polynôme, division euclidienne, pgcd et ppcm définitions d'une racine et ordre de multiplicité, formules entre les coefficients et les racines, décomposition en facteurs irréductibles, polynômes premiers entr'eux.

## 1.2 Structures

**Exercice 2** Dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ où $p$ est premier, résoudre $x^2 = 1$

Révision : définition d'un groupe, d'un sous-groupe, d'un morphisme de groupes, noyau et image, définition d'un anneau, d'un corps. Arithmétique dans $\mathbb{Z}$, division euclidienne, nombre premier, décomposition, formule du binôme. Vocabulaire sur les fonctions. Dénombrement.

## 1.3 Algèbre linéaire

Soit $A \in M_n(K)$

**Exercice 3** Montrer que $D$, droite vectorielle de $K^n$ est stable par $A$ si et seulement si $\exists \lambda \in K$ tel que $D \subset Ker(A - \lambda I)$. Soit $H$ un hyperplan de $K^n$. Montrer l'existence d'un vecteur colonne non nul $C$ tel que $H$ admet pour équation ${}^tCX = 0$. En déduire que $H$ est stable par $A$ si et seulement si $\exists \lambda \in K : H \supset Im(A - \lambda I)$.

Révision de la structure d'espace vectoriel, bases et dimension. Sous-espaces vectoriels, supplémentaires, somme directe. Application linéaire, rang et formule, trace, dual. Sous-espace stable. Déterminant.

## 1.4 Matrices

**Exercice 4** Quelles sont les matrices réelles d'ordre $n$, de trace $n$ telles que $M^5 = M^2$.

Révision : Matrices, calcul matricielle, structure d'algèbre, transposée, matrices symétriques et antisymétriques. Matrices et applications linéaires, matrices de passage. Opérations élémentaires sur les matrices. Rang d'une matrice. Systèmes d'équations linéaires.

## 1.5 Réduction

**Exercice 5** Soit $n \geq 2$ et $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

a) Trouver son polynôme caractéristique ; montrer que les sous-espaces propres sont de dimension 1.
b) Montrer que $A_3$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.
c) Montrer que $A_n$ admet une unique valeur propre $x_n$ dans $]0, +\infty[$.
d) Comportement de $(x_n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

Révision : Sous espaces stables et matrices triangulaires. Polynômes d'endomorphisme. Valeurs et vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme ou d'une matrice. Automorphisme intérieurs et matrices semblables. Polynôme caractéristique. Conditions de diagonalisabilité. Réduction à la forme triangulaire

## 1.6 Polynômes d'endomorphismes

**Exercice 6** Soit $p_1, \cdots, p_n$ des endomorphismes tous non nuls du $K$-espace vectoriel $E$ de dimension finie, $x_1, \cdots, x_n$ des scalaires deux à deux distincts et $f \in L(E)$ tels que

$$\forall m \in \mathbb{N} : f^m = \sum_{k=1}^{n} x_k^m p_k$$

a) Montrer, si $P \in K[X]$, que $P(f) = \sum_{k=1}^{n} P(x_k) p_k$. En déduire que $f$ est diagonalisable.
b) Calculer $p_k \circ p_l$ pour $k,l$ dans $\{1, \cdots, n\}$.
c) Déterminer le spectre de $f$.
d) Montrer que $p_k$ est la projection sur $ker(f - x_k id)$ parallèlement à $\bigoplus_{l \neq k} ker(f - x_l id)$.
e)Ici $K = \mathbb{C}$ et $dimE = n$. Calculer $card\left\{g \in L(E) : g^2 = f\right\}$.

### 1.6.1 Corrigés

**Exercice 1** $P'|P$ s'écrit $P = QP'$ avec $Q$ polynôme de degré 1, soit $Q = (X-a)P'$. Si $\alpha$ est une racine de $P$ alors $X-a$ divise $P$. Mais si $\alpha \neq a$ alors $X-\alpha|P'$ et donc $(X-\alpha)^2|P$, mais aussi $P'$ etc...donc $\alpha$ serait racine d'ordre $n$ pour tout $n$. Ceci ne se peut pas donc $\alpha = a$ et $P = \lambda(X-a)^n$ qui convient bien.

**Exercice 2** $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+)$ est un groupe à $p$ éléments. Posons $x = k+pn$ ainsi $x^2 = k^2+p^2n^2+2kpn = 1$ ce qui donne $p|k^2-1 = (k+1)(k-1)$. Ou bien $p|k+1$ et $k = -1+\lambda p$ ce qui donne $x \equiv -1$ ou $x \equiv p-1$. Ou bien $p|k-1$ et $x \equiv 1$.

**Exercice 3** Une droite stable est une droite propre. Si $D$ est stable par $A$, écrivons $D = K\overrightarrow{u}$ on a $Au = \lambda u$ et $u \in KerA - \lambda I$ d'où $D \subset Ker\,(A-\lambda I)$. $H$ un hyperplan de $K^n$, $H$ est le noyau d'une forme linéaire $\varphi$ et d'après Riesz $\varphi = \langle a,\dot{\rangle}$ et $H$ a pour équation ${}^tCX = 0$ ou $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_ix_i = 0$ (une forme linéaire se représente par une matrice 1 ligne et $n$ colonnes). De plus $H = D^\perp$ et si $H$ est stable par $A \iff D$ est stable par $A^\star \iff D \subset Ker\,(A^\star-\lambda I) \iff H \supset (Ker\,(A^\star-\lambda I))^\perp = Im\,(A-\lambda I)$.

**Exercice 4** $M$ annule le polynôme $X^2(X^3-1)$ qui admet pour racine $0,1,j,\overline{j}$ or $j+\overline{j} = 1$, comme la trace est $n$ et que sur la diagonale il ne peut y avoir que $0,1,j,\overline{j}$, c'est qu'il n'y a que des 1 sur la diagonale. Le polynôme minimal divise $X^2(X^3-1)$, ce ne peut être que $X-1$ pour qu'il n'y ait que des 1 sur la diagonale. Finalement $M = Id$.

**Exercice 5**

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 2 & -X & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & -X & 1 \\ n & 0 & \cdots & 0 & -X \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1-X & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 2 & -X & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ n-2 & \vdots & \ddots & -X & 1 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} - X\Delta_{n-1} = (-1)^{n+1}n - X\Delta_{n-1}$$

en développant par rapport la dernière colonne. D'où $\Delta_n(X) = (-1)^n(X^n - X^{n-1} - 2X^{n-2} - 3X^{n-3} - \cdots - (n-1)X - n)$. La matrice $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & -\lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ n & 0 & \cdots & \cdots & -\lambda \end{pmatrix}$ est de rang au moins $n-1$ car les $n-1$ dernières colonnes sont indépendantes donc $Ker\,(A-\lambda I)$ est de dimension au plus 1. C'est 1 car $\lambda$ est valeur propre. On a $\Delta_2(X) = X^2-X-2$ et $\Delta_3(X) = -X^3+X^2+2X+3$. Posons $f(x) = \dfrac{(-1)^n\Delta_n(x)}{x^n} = 1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}-\cdots-\dfrac{n-1}{x^{n-1}}-\dfrac{n}{x^n}$. ainsi $f'(x) = \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}+cdots+\dfrac{n^2}{x^n} > 0$ sur $]0,+\infty$. $f$ est strictement croissante sur $]0,+\infty$ et $f(0) = -\infty$ avec $f(+\infty) > 0$ d'où $f$ a un seul zéro sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\Delta_n$ aussi, soit $x_n$. $A_3$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$ car elle a trois valeurs propres distinctes $x_3,z,\overline{z}$. (vue la question on étudie $\Delta_3,\Delta_3'$. $x_n$ vérifie : $x_n^n = x_n^{n-1}+2x_n^{n-2}+3x_n^{n-3}+\cdots+(n-1)x_n+n$ et $\lim x_n^n = +\infty$ car les $x_n$ sont positifs on a même $x_n > 1$.

**Exercice 6** On a $P(f) = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{m} a_\ell f^\ell = \sum_{\ell}^{m} a_\ell \sum_{k=1}^{n} x_k^\ell p_k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=0}^{m} a_\ell x_k^\ell p_k = \sum_{k=1}^{n} P(x_k)p_k$. Ainsi en prenant $P(X) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X-x_i)$, polynôme scindé à racines simples on a $P(f) = 0$ donc $f$ est diagonalisable. Posons maintenant $P_k(X) = \displaystyle\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}(X-x_i)$. On a $P_k(f) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P_k(x_i)p_i = P_k(x_k)p_k$

ainsi $p_k \circ p_\ell = \dfrac{1}{P_\ell(x_\ell)} \times \dfrac{1}{P_k(x_k)} P_k(f) \circ P_\ell(f) = \dfrac{1}{P_\ell(x_\ell)P_k(x_k)}(P_k \times P_\ell)(f) = \dfrac{1}{P_\ell(x_\ell)P_k(x_k)} \sum_{i=1}^{n} P_k \times P_\ell(x_i) p_i = \delta_{k,l} p_k$. On a $spec(f) \subset x_1, \cdots, x_n$ mais si un des scalaires $x_i$ n'était pas valeur propre alors $P_c(f) = P_i(x_i)p_i = 0$ ce qui n'est pas donc $spec(f) = x_1, \cdots, x_n$. $p_k$ est déjà une projection, on vérifie que $p_k$ est nulle sur $\bigoplus_{\ell \neq k} Ker(f - x_\ell id)$ et que sur $Ker(f - x_k id)$, $p_k$ est l'identité. En effet par exemple : $p_k = \dfrac{1}{P_k(x_k)} P_k(f)$ or $P_k(f)(x) = \prod_{i \neq k} (f(x) - x_i x)$ et si $x \in Ker(f - x_k id)$ on a $f(x) = x_k$ donc $p_k(x) = \dfrac{1}{P_k(x_k)} \prod_{i \neq k} (x_k - x_i)x = x$. $f$ est diagonalisable et à $n$ valeurs propres distinctes. Si $g$ est telle que $g^2 = f$ alors $g$ est aussi diagonalisable car $g$ annule le polynôme $\prod_{i=1}^{n} (g - \sqrt{x_i} id)(g + \sqrt{x_i} id)$, scindé à racines simples. Si l'un des $x_i$ est nul, on le met qu'une fois. Si $x$ est vecteur propre de $g$ disons $g(x) = \sqrt{x_i} x$ alors $f(x) = g \circ g(x) = x_i x$ il est vecteur propre de $f$.Ainsi il existe une base propre commune à $f$ et $g$. Dans cette base propre il s'agit de $D^2 = D$, en pensant au cas où 0 est valeur propre, donc le cardinal est $2^n$ ou $2^n - 1$.