Chapitre 2

Matrices et Déterminants

2.1 Matrices

Définition 1 *Soit n un entier naturel non nul. On appelle colonne de taille n la disposition verticale de n scalaires $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ entourée ou non de parenthèses:*

$$\begin{matrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{matrix} \quad \textit{ou} \quad \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$$

On appelle ligne de taille n la disposition horizontale de n scalaires $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ entourée ou non de parenthèses:

$$\lambda_1,\dots,\lambda_n \quad \text{ou} \quad (\lambda_1,\dots,\lambda_n).$$

Définition 2 *Soient p et q deux entiers naturels non nuls et $(a_{i,j})_{i\in[1,p],j\in[1,q]}$ une famille de scalaires. On appelle matrice $A=(a_{ij})_{\substack{i\in[1,p]\\ j\in[1,q]}}$ à p lignes et q colonnes (ou encore de taille $p\times q$), le tableau rectangulaire*

$$\begin{matrix}a_{11} & \dots & a_{1q}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{p1} & \dots & a_{pq}\end{matrix} \quad \textit{ou} \quad \begin{pmatrix}a_{11} & \dots & a_{1q}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{p1} & \dots & a_{pq}\end{pmatrix}$$

et, pour $i\in[1,p]$ et $j\in[1,q]$, on appelle $i^{\text{ième}}$ ligne de la matrice, la ligne

$$L_i=(a_{i1},\dots,a_{iq})$$

et $j^{\text{ième}}$ colonne, la colonne

$$C_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\ \vdots\\ a_{pj}\end{pmatrix}$$

ce qui permet de noter

$$A=\begin{pmatrix}L_1\\ \vdots\\ L_p\end{pmatrix}=(C_1,\dots,C_q)$$

Lorsque $p=q$, on parle aussi de matrice carrée de taille p

Définition 3 *Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $n>0$ et $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Pour tout $x\in E$, on note $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$ la matrice à n lignes et une colonne composée des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$:*

$$\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in K^n \quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i)=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$$

Si $x_1,\dots,x_m$ sont des éléments de E, on appelle matrice des vecteurs $x_1,\dots,x_m$ dans la base $\mathcal{B}$ et on note $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_m)$ la matrice à n lignes et m colonnes dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $x_1,\dots,x_m$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_n) = (\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_1),\dots,\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_m))$$

Soient :
- E un K-espace vectoriel de dimension finie $q > 0$ et $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_q)$ une base de E
- F un K-espace vectoriel de dimension finie $p > 0$ et $\mathcal{C} = (f_1,\dots,f_p)$ une base de F.

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
Notons $e'_1,\dots,e'_q$ les images par u des vecteurs de la base $\mathcal{B}$.

$$\forall j \in [1,q] \quad \exists!(a_{1j},\dots,a_{pj}) \in K^p \quad e'_j = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} f_i.$$

Définition 4 *La matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est la matrice à p lignes et q colonnes:*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = (a_{ij})_{\substack{i\in[1,p]\\ j\in[1,q]}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}\left(u(e_1),\dots,u(e_q)\right))$$

Exercice 1 Soit H l'hyperplan de $\mathbb{R}^n$ défini par l'équation $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ où les constantes (a_i) ne sont pas toutes nulles. Soit V le s.e.v. engendré par le vecteur $(v_1,v_2,\dots,v_n) \in \mathbb{R}^n$. A quelle condition V et H sont-ils supplémentaires? Trouver alors, dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, la matrice de projection sur H parallèlement à V et la matrice de la projection sur V parallèlement à H.

2.1.1 Bases de $\mathcal{L}(E,F)$

Soient $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_q)$ une base de E et $\mathcal{C} = (f_1,\dots,f_p)$ une base de F. Pour tout $j \in [1,q]$ et tout $i \in [1,p]$, notons u_{ij} l'application linéaire définie par l'image suivante de la base $\mathcal{B}$:

$$\forall k \in [1,q] \quad u_{ij}(e_k) = \delta_{jk} f_i.$$

Sa matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est donc $E_{ij} = (\delta_{il}\delta_{jm})_{\substack{l\in[1,p]\\ m\in[1,q]}}$. Elle est constituée de zéros et d'un seul 1 situé à l'intersection de la $i^{ième}$ ligne et de la $j^{ième}$ colonne.

Proposition 1 *La famille $(u_{ij})_{\substack{i\in[1,p]\\ j\in[1,q]}}$ est une base de $\mathcal{L}(E,F)$ qui est donc un K-espace vectoriel de dimension finie pq.*

[Ind] Appliquer le théorème de caractérisation des applications linéaires

Exercice 2 Soient $p,q \in \mathbb{N}^*$, E et F des espaces vectoriels sur K de dimensions respectives q et p. Notons $n = \inf(p,q)$.
Existe-t-il une base de $\mathcal{L}(E,F)$ constituée d'applications linéaires de rang n?

Exercice 3 Soit E un K-e.v. de dimension $n \geq 1$.
a) Montrer qu'il existe une base de $\mathcal{L}(E)$ constituée d'automorphismes.
b) Montrer que, pour tout entier $r \in [1,n]$, il existe une base de $\mathcal{L}(E)$ constituée d'endomorphismes de rang r.

2.1.2 Calcul matriciel

Définition 5 *Soit $A = (a_{ij})_{\substack{i\in[1,p]\\ j\in[1,q]}} \in \mathcal{M}_{pq}(K)$. La transposée de A est la matrice, noté ${}^tA = (b_{ji})_{\substack{j\in[1,q]\\ i\in[1,p]}}$ appartenant à $\mathcal{M}_{qp}(K)$ et définie par:*

$$\forall (i,j) \in [1,p] \times [1,q] \quad b_{ji} = a_{ij}.$$

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $A = (a_{ij})_{\substack{i\in[1,p]\\ j\in[1,q]}}$ sa matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
Soit $x \in E$ et $(x_1,\ldots,x_q)$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. Les coordonnées de $u(x)$ dans la base $\mathcal{C}$ sont : $(\sum_{j=1}^{q} a_{1j}x_j,\ldots,\sum_{j=1}^{q} a_{pj}x_j)$ et l'on note

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{q} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{q} a_{pj}x_j \end{pmatrix}$$

Notons $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$ la matrice à q lignes et 1 colonne constituée des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$, on obtient alors

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(u(x)) = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x).$$

Définition 6 *Soient $A = (a_{ij})_{\substack{i\in[1,p]\\ j\in[1,q]}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{i\in[1,p]\\ j\in[1,q]}}$ deux éléments de $\mathcal{M}_{pq}(K)$ on note $A+B$ l'élément de $\mathcal{M}_{pq}$ défini par*

$$A + B = (a_{ij} + b_{i,j})_{\substack{i\in[1,p]\\ j\in[1,q]}}$$

Si $\lambda \in K$, on note $\lambda.A$ la matrice:

$$\lambda.A = (\lambda a_{ij})_{\substack{i\in[1,p]\\ j\in[1,q]}}$$

Définition 7 *On appelle $\mathcal{M}_{pq}(K)$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients dans K.*

Proposition 2 *Muni de ces opérations $\mathcal{M}_{pq}(K)$ est un K-espace vectoriel et l'application de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathcal{M}_{pq}(K)$ qui à u associe $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ est un isomorphisme.*

[Ind] $\mathcal{M}_{pq}(K)$ est une autre façon de voir K^{pq}, construire une application bijective entre les deux qui respecte l'addition et le produit par les scalaires. Pour montrer que $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ est un isomorphisme, utiliser une base de $\mathcal{L}(E,F)$.

Définition 8 *Soient $A = (a_{ij})_{\substack{i\in[1,p]\\ j\in[1,q]}}$ un élément de $\mathcal{M}_{pq}(K)$ et, r étant un entier strictement positif, $B = (b_{jk})_{\substack{j\in[1,q]\\ k\in[1,r]}}$ un élément de $\mathcal{M}_{qr}(K)$. Le produit des deux matrices A et B est la matrice, élément de $\mathcal{M}_{pr}(K)$, notée $A \times B$ ou AB, définie par*

$$A \times B = (\sum_{j=1}^{q} a_{ij}b_{jk})_{\substack{i\in[1,p]\\ k\in[1,r]}}$$

Exercice 4 Soient $A \in \mathcal{M}_{pq}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{qr}(K)$. On décrit la matrice A à l'aide de ses lignes $L_1,\ldots,L_p$ et la matrice B à l'aide de ses colonnes $C_1,\ldots,C_r$. Montrer que

$$AB = \begin{pmatrix} L_1B \\ \vdots \\ L_pB \end{pmatrix} = (AC_1,\ldots,AC_r)$$

Proposition 3 *Soient E, F et G des K-espaces vectoriels de dimension finie q, p et r et $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ des bases de E, F et G. Pour toutes applications $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$, on a*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(v \circ u) = \mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(v) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$$

[Ind] Calculer les coordonnées des images des éléments de $\mathcal{B}$.

Proposition 4 *Soient A et B appartenant à $\mathcal{M}_{pq}(K)$ et $\lambda \in K$:*

$$^t(A + \lambda.B) = {}^tA + \lambda.{}^tB$$

Soient $A \in \mathcal{M}_{pq}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{qr}(K)$:

$$^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA$$

[Ind] Calculer ... Il ne faut pas hésiter à inventer de nouvelles notations pour des nouveaux objets et écrire, par exemple, ${}^tA = (a'_{lm})_{\substack{l\in[1,q]\\ m\in[1,p]}}$

Définition 9 *On note $\mathcal{M}_n(K)$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes à coefficients dans K.*

Définition 10 *Si u est un endomorphisme de E, sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u)$, notée, plus simplement, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$.*

Proposition 5 $(\mathcal{M}_n(K), + , \times ,.)$ *est une K-algèbre et l'application qui, à un endomorphisme u de E, associe sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est un isomorphisme d'algèbre.*

[Ind] Pour montrer que $(\mathcal{M}_n(K), +, \times ,.)$ est une algèbre, on le fait par "transport de structure" sachant que $(\mathcal{L}(E), + , \circ ,.)$ en est une.

Notation: I_n est l'élément unité de $\mathcal{M}_n(K)$.

Exercice 5 Soit E un K-ev muni de la base $\mathcal{B} = \{e_1,e_2,e_3\}$. Soit u et v les endomorphismes de E caractérisés par leurs matrices respectives A et B dans la base $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & 4 & 4 \\ 4 & -1 & 8 \\ 4 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que u est une projection et que v est une symétrie. Caractériser les.

Définition 11 *On note $GL_n(K)$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(K)$.*

Proposition 6 $(GL_n(K),\times)$ *est un groupe et l'application qui à un automorphisme u de E associe sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est un isomorphisme du groupe $\mathcal{GL}(E)$ dans le groupe $GL_n(K)$.*

[Ind] L'ensemble des éléments inversibles d'un anneau est un groupe pour la multiplication.

Proposition 7 *Soit $A \in GL_n(K)$, on a ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$.*

[Ind] Calculer ${}^t(AA^{-1})$.

Exercice 6 Que valent les produits des éléments de la base canonique de $\mathcal{L}(K^n)$?

Exercice 7 Étudier la structure de l'ensemble des matrices de la forme

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} -(x+y) & y & x \\ x & -(x+y) & y \\ y & x & -(x+y) \end{pmatrix} \qquad x,y \in \mathbb{R}$$

Exercice 8 On note $E = \mathcal{M}_n(K)$.
a) Montrer que l'application qui, à $A,B \in E$, associe $[A,B] = AB - BA$ est une application bilinéaire de $E \times E$ dans E et que, pour $A,B,C \in E$,

$$[A,BC] = [A,B]C + B[A,C]$$

Soit $A \in E = \mathcal{M}_n(K)$. On définit une suite $(E_p)_{p\geq 0}$ de parties de E par:

$$E_0 = \{B \in E \mid [A,B] = 0\}$$

$$E_p = \{B \in E \mid [A,B] \in E_{p-1}\} \quad (p \geq 1)$$

b) Montrer que la suite (E_p) est croissante et stationnaire.
c) Montrer que $F = \bigcup_{p\geq 0} E_p$ est une sous algèbre de E.

2.1.3 Applications linéaires de K^q dans K^p

En général, on identifie K^n et $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ et les éléments de K^n sont vus comme des matrices unicolonnes.

Proposition 8 *Soit $u \in \mathcal{L}(K^q,K^p)$. Il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_{pq}(K)$, appelée canoniquement associée, telle que pour tout X appartenant à K^q, $u(X) = AX$.*
Réciproquement, si $A \in \mathcal{M}_{pq}(K)$, l'application de K^q dans K^p qui, à $X \in K^q$ associe $AX \in K^p$ est une application linéaire u, appelée canoniquement associée de K^q dans K^p.
A est alors la matrice, dans les bases canoniques de K^q et K^p, de l'application linéaire u.

[Ind] C'est la dernière phrase qui est la clef.

Remarque: On identifie souvent $A \in \mathcal{M}_{pq}$ et l'application correspondante $u \in \mathcal{L}(K^q,K^p)$, mais l'identification est réductrice, en effet, il est parfois intéressant de prendre d'autres bases dans K^p ou K^q que les bases canoniques, l'application u reste alors la même tandis que sa(?) matrice change.

Exercice 9 Donner une interprétation géométrique des endomorphismes associés aux éléments de la base canonique de $\mathcal{L}(K^n)$.

Exercice 10 Soit $f \in \mathcal{L}(K^q,K^p)$ de rang r. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(K^q,K^r)$ et $h \in \mathcal{L}(K^r,K^p)$ telles que $f = h \circ g$.

2.1.4 Changements de bases

Définition 12 *Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ des bases de E. La matrice de l'identité de E dans les bases $\mathcal{B}'$ au départ et $\mathcal{B}$ à l'arrivée est constituée des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$. Elle est appelée matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et notée $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.*

Remarque: Une matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$ est inversible. Réciproquement, si M est une matrice inversible, elle peut être considérée comme une matrice de passage: si $\mathcal{B}$ est une base de E, il existe une unique base $\mathcal{B}'$ de E telle que $M = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

Proposition 9 *Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ des bases de E. On a $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = P^{-1}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$*

[Ind] Id_E est son propre inverse.

Proposition 10 *Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ des bases de E. Pour tout $x \in E$*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(x)$$

[Ind] Une matrice de passage est la matrice de l'identité dans les bases choisies.

Proposition 11 *Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ des bases de E et $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ des bases de F. Pour tout $u \in \mathcal{L}(E,F)$.*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u) = P_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}^{-1}\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$$

[Ind] Une matrice de passage est la matrice de l'identité dans les bases choisies.

Proposition 12 *Soient $\mathcal{B}_1,\dots,\mathcal{B}_n$ des bases de E. En notant $P_{i,j}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_i$ à la base $\mathcal{B}_j$ ($i,j \in [1,n]$):*

$$P_{1,n} = P_{1,2}P_{2,3}\cdots P_{n-1,n}$$

[Ind] Une matrice de passage est la matrice de l'identité dans les bases choisies.

Formules mnémotechniques $Q = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, $P = P_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$; les lettres Q et P faisant référence aux dimensions de E et F.
Avec les notations $X = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$, $X' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(x)$ et $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$, $A' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u)$, les formules deviennent:

$$X = QX' \text{ ou } X' = Q^{-1}X$$

$$A = PA'Q^{-1} \text{ ou } A' = P^{-1}AQ$$

Exercice 11 Soit $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base de l'espace vectoriel E et u un endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $A = (a_{ij})$. Quels sont les coefficients de la matrice de u dans la base $(e_n,\dots,e_1)$?

2.1.5 Rang d'une matrice

Définition 13 *Soit $A \in \mathcal{M}_{pq}(K)$. Le rang de A est la dimension du s.e.v. engendré dans K^p par les q vecteurs colonnes de A. Il est donc inférieur à p et à q.*

Proposition 13 *Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie, u un endomorphisme de E dans F et des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de E et F. Le rang de u est le rang de sa matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.*

[Ind] Un isomorphisme conserve les dimensions

Définition 14 *Deux matrices A et B éléments de $\mathcal{M}_{pq}(K)$ sont équivalentes si*

$$\exists Q \in GL_q(K) \quad \exists P \in GL_p(K) \quad A = PBQ$$

Remarque: Cette relation est une relation d'équivalence et on peut la traduire par: deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles sont les matrices d'une même application linéaire dans des choix de bases différents.

Théorème 1 *Soit $A \in \mathcal{M}_{pq}(K)$ une matrice de rang r. A est équivalente à la matrice*

$$I_{r,p,q} = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,q-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,q-r} \end{pmatrix}$$

où $0_{n,m}$ est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{nm}(K)$.

[Ind] Utiliser l'application linéaire $\tilde{A}$ canoniquement associé à A. Que doivent vérifier des bases de K^q et K^p pour que la matrice de $\tilde{A}$ dans ces bases ait la forme voulue?

Proposition 14 *Deux matrices appartenant à $\mathcal{M}_{pq}(K)$ sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.*

[Ind] Une relation d'équivalence est transitive

Proposition 15 *Le rang d'une matrice est celui de sa transposée.*

[Ind] Prendre des matrices équivalentes

Définition 15 *Soit $A = (a_{ij})_{\substack{i\in[1,p]\\ j\in[1,q]}} \in \mathcal{M}_{pq}(K)$. On appelle matrice extraite de A une matrice de la forme $(a_{ij})_{\substack{i\in I\\ j\in J}}$ où $I \subset [1,p]$ et $J \subset [1,q]$.*

Proposition 16 *Le rang d'une matrice A est la taille maximale des matrices carrées inversibles extraites de A.*

[Ind] Travailler sur la dimension de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes ou lignes des différentes matrices considérées.

Définition 16 *Soient $A,B \in \mathcal{M}_n(K)$. A et B sont semblables s'il existe $P \in GL_n(K)$ telle que $A = P^{-1}BP$.*

Remarque: Cette relation est une relation d'équivalence

Proposition 17 *Soient $A,B \in \mathcal{M}_n(K)$. A et B sont semblables si et seulement s'il existe un K-espace vectoriel E de dimension n, un endomorphisme u de E et deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de E tels que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = A$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(u) = B$.*

[Ind] Une matrice inversible peut être vue comme une matrice de passage entre deux bases.

Proposition 18 *Deux matrices carrées semblables sont équivalentes.*

[Ind] Appliquer la définition

Exercice 12 Trouver deux matrices carrées équivalentes et non semblables

Exercice 13 Soient A et B deux matrices carrées de taille n telles que $AB = 0$ et $A + B$ inversible. Montrer que $\operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B = n$.

Exercice 14 Soit A une matrice carrée de taille n et de rang 1. Montrer qu'il existe $X,Y \in K^n$ vérifiant $A = X\,{}^tY$. En déduire qu'il existe $\alpha \in K$ tel que $A^2 = \alpha A$. Pour quelle valeur de α la matrice $I + A$ est-elle inversible?

2.1.6 Trace d'une matrice ou d'un endomorphisme

Définition 17 *Soit $A = (a_{ij})_{i,j\in[1,n]} \in \mathcal{M}_n(K)$. La trace de A est le scalaire* $\operatorname{Trace} A = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Remarque: Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $\operatorname{Trace} A = \operatorname{Trace} {}^tA$.

Proposition 19 *L'application* Trace *est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(K)$.*

[Ind] Vérifier ...

Proposition 20 *Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(K)$:*

$$\operatorname{Trace}(AB) = \operatorname{Trace}(BA)$$

[Ind] Calculer ...

Remarque: Si $A,B,C \in \mathcal{M}_n(K)$, Trace$(ABC)$ = Trace(CAB) = Trace(BCA), mais, en général, Trace$(ABC) \neq$ Trace(BAC).

Exercice 15 Trouver trois éléments A, B et C de $\mathcal{M}_2(K)$ telles que Trace$(ABC) \neq$ Trace(BAC)

Exercice 16 Soient A et B deux matrices appartenant à $\mathcal{M}_n(K)$ telles que, pour tout $X \in \mathcal{M}_n(K)$, on ait:

$$\mathrm{Tr}(AX) = \mathrm{Tr}(BX)$$

Montrer que $A = B$.

Exercice 17 Montrer qu'à toute forme linéaire f définie sur l'ensemble des matrices carrées $n \times n$, on peut associer une matrice F telle que, pour toute matrice carrée A, on a:

$$f(A) = \mathrm{Tr}(AF)$$

Exercice 18 Soit f une forme linéaire définie sur l'ensemble des matrices carrées de taille n telle que, pour toutes matrices A et B: $f(AB) = f(BA)$. Montrer qu'il existe un scalaire α tel que $f = \alpha\mathrm{Tr}$.

Proposition 21 *Deux matrices semblables ont même trace.*

[Ind] Appliquer la définition et la proposition précédente

Proposition 22 *Soit u un endomorphisme d'un K-ev E de dimension finie. Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, les traces des matrices de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont égales. Ce scalaire, qui ne dépend pas de la base choisie, s'appelle la trace de u.*

[Ind] Appliquer la proposition précédente

Proposition 23 *Soit p un projecteur d'un K-ev E de dimension finie, la trace de p est un entier égal à son rang.*

[Ind] Prendre une base de E adaptée à p.

Exercice 19 Montrer que la trace d'une symétrie s est égale à $\dim\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) - \dim\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

Exercice 20 Soit E un espace vectoriel de dimension au moins 2. Montrer que, si f est un endomorphisme qui n'est pas une homothétie, alors il existe une base $(e_1,e_2,...,e_n)$ de $\mathcal{E}$ telle que $f(e_1) = e_2$.
En déduire que toute matrice carrée réelle de trace nulle est semblable à une matrice dont tout élément diagonal est nul.

Exercice 21 Soit E un K-ev de dimension finie et $(p_i)_{i\in[1,n]}$ une famille de projecteurs de E. Démontrer que:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \text{ est un projecteur} \Longleftrightarrow \forall i,j \in [1,n]\ i \neq j \implies p_i \circ p_j = 0.$$

2.2 Déterminants

2.2.1 Groupe symétrique

Définition

Avant de donner la définition du groupe symétrique, remarquons que tout ensemble fini de n éléments est en bijection avec $\{1,2,\cdots,n\}$.

Définition 18 *L'ensemble des bijections de $\{1,2,\cdots,n\}$ est un groupe pour la composition des applications.*

Exercice 22 Montrer que S_n est un groupe de cardinal $n!$ qui n'est pas commutatif pour $n \geq 3$.

Définition 19 *Un cycle s est l'identité ou une permutation différente de l'identité telle qu'il existe p éléments $\{a_1,a_2,\cdots,a_p\} = P$ pour lesquels la restriction de s à P soit* $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{p-1} & a_p \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_p & a_1 \end{pmatrix}$ *les autres éléments étant invariants. Le nombre p s'appelle la longueur du cycle. Dans ces conditions on a $s^p = I_d$.*
Un cycle d'ordre 2 s'appelle transposition (deux éléments sont échangés les autres étant invariants).

Remarque: On peut faire opérer le groupe S_n sur $I_n = \{1,2,\cdots,n\}$ par l'application $S_n \times I_n \to I_n$ tel que $(\sigma,i) \longmapsto \sigma(i)$. L'orbite de i est alors $\{j \in I_n :$ il existe $\sigma \in S_n : \sigma(i) = j\}$, l'ensemble des orbites forment alors une partition de I_n. Etant donné une permutation σ on peut faire opérer le groupe G_σ formé des itérées de σ sur I_n. Un cycle est alors une permutation qui possède au plus une orbite associée à σ de cardinal strictement supérieure à 1.

Générateurs

Théorème 2 *Les transpositions forment un système générateurs de S_n . Autrement dit toute permutation est produit de transpositions.*

Exercice 23 On peut montrer que les $n-1$ transpositions $\tau_{1,2}; \tau_{2,3}; \cdots \tau_{n-1,n}$ constitue un système générateur irréductible de S_n. De même on peut montrer que $\tau_{1,2}$ et la permutation circulaire $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$ engendre S_n.

Signature

Définition 20 *On appelle signature d'une permutation σ, le nombre ϵ_σ défini par* $\epsilon_\sigma = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$.

Ce nombre est égal à $+1$ ou -1 car σ étant une bijection les termes au numérateur se retrouve au dénominateur. Ainsi $\epsilon_\sigma = \prod_{(i,j) \in \{\text{paires de 2 éléments de } I_n\}} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$. Or les paires $\{\sigma(i),\sigma(j)\}$ redonnent les paires de I_n. Si n_σ est le nombre de paires $\{i,j\}$ distinctes telles que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$ on a $\epsilon_\sigma = (-1)^{n_\sigma}$. On a encore $\epsilon_\sigma = (-1)^{n_\sigma}$ où n_σ est le nombre d'inversions de la permutation, c'est à dire le nombre de paires de I_n telles que $\frac{\sigma(u) - \sigma(v)}{u - v} < 0$.

Proposition 24 *La signature de toute transposition est -1.*

Théorème 3 *L'application signature $\sigma \longmapsto \epsilon_\sigma$ est un morphisme de S_n dans $\{-1,+1\}$ muni de la multiplication.*

Proposition 25 *La signature ϵ_σ est égale à $(-1)^{p_\sigma}$ où p_σ est le nombre de transpositions de la décomposition de σ en transpositions.*

Exercice 24 Il faut apprendre à décomposer des permutations: soit le cycle $\left(\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 \\ 7 & 9 & 10 & 1 & 5 & 11 & 4 & 6 & 3 & 2 \end{matrix} \right.$

Définition 21 *on peut considérer le sous-groupe formé des permutations paires, c'est à dire dont la signatureest $+1$, ce sous-groupe s'appelle le groupe alterné d'ordre n et est noté A_n.*

2.2.2 Déterminants de n vecteurs

Formes n-linéaires

Définition 22 *on appelle forme n-linéaire sur le $K-$ espace vectoriel E une application f : $E^n \to K$ qui est linéaire par rapport à chaque variable. $f : (x_1,x_2,\cdots,x_n) \longmapsto f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. Elle est dîte alternée si elle s'annule lorsque deux des variables prennent des valeurs égales.*

Remarque: Si le corps K est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, une forme n-linéaire est alternée si et seulement si elle est antisymétrique c'est à dire si elle est changée en son opposée dès que l'on permute deux éléments.(on développe $f(\cdots,X_i+X_j,\cdots,X_i+X_j,\cdots)$ et on obtient alternée$\Longrightarrow$antisymétrique dans l'autre sens on a $f(\cdots T,\cdots T,\cdots) = -f(\cdots T,\cdots T,\cdots)$ par antisymétrie et donc f est alternée)

Proposition 26 *(comportement d'une forme n-linéaire alternée avec une permutation) Pour toute σ permutation de I_n et toute forme n-linéaire f on a $f\left(x_{\sigma(1)},\cdots x_{\sigma(n)}\right) = \epsilon_\sigma f(x_1,\cdots x_n)$.*

Théorème 4 *Si E est de dimension n l'espace vectoriel des applications n-linéaires alternées est de dimension 1.*

Proposition 27 *Si $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ est une base de l'espace vectotiel E, il existe une forme n-linéaire alternée unique Δ sur E vérifiant $\Delta(e_1,e_2,\cdots,e_n) = 1$.*

Ce n'est qu'une reformulation de l'étude ci-dessus qui permet de donner la définition suivante :

déterminant de n vecteurs

Définition 23 *Le déterminant de n vecteurs $x_1,x_2,\cdots,x_n$ de E par rapport à la base $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ est le scalaire $\Delta(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ où Δ est l'unique forme n-linéaire alternée du corollaire ci-dessus.*

En posant $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}e_j$ on a $\Delta(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \sum_{\sigma\in G_n} \epsilon_\sigma a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n}$. En considèrant une autre base $\mathcal{C} = (f_1,f_2,\cdots,f_n)$ et $\mathcal{B} = (e_1,e_2,\cdots,e_n)$ on a la formule :
$\det_{\mathcal{B}}(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \det_{\mathcal{C}}(x_1,x_2,\cdots,x_n) \times \det_{\mathcal{B}}(f_1,f_2,\cdots,f_n)$ en effet les deux membres sont deux formes n-linéiares alternées en $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ sur E qui prennent la même valeur en $(f_1,f_2,\cdots,f_n)$, elles sont donc égales.

Théorème 5 *caractérisation des bases*
Soit E un K-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1,\cdots,e_n)$. Les vecteurs $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ sont linéairement indépendants (donc forment une base) si et seulemnt si $\det_{\mathcal{B}}(x_1,x_2,\cdots,x_n) \neq 0$.

Application : formule de Cramer.

Soit un système linéaire $n \times n$ que l'on peut écrire $U(x) = b$ où x,b sont des vecteurs de E (espace vectoriel de dimension n) et U un endomorphisme de E. Si ce système possède une solution unique (ce qui revient à dire que U est un automorphisme) il est dit de Cramer.
Soit $\mathcal{B} = (e_1,e_2,\cdots,e_n)$ une base de E et pour tout i de 1 à n $a_i = U(e_i)$. L'application étant bijective on a que $\mathcal{C} = (a_1,a_2,\cdots,a_n)$ est une base. Il en résulte que le vecteur b s'écrit : $b = \sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i$ et que la solution est le vecteur $x = (\xi_1,\cdots,\xi_n)$en effet $u\left(\sum \zeta_\iota e_i\right) = \sum \zeta_i u(e_i) = \sum \zeta_i a_i = b$. Calculons $\det_{\mathcal{B}}(a_1,\cdots,a_{j-1},b,a_{j+1},\cdots,a_n) = \xi_i \det_{\mathcal{B}}(a_1,\cdots a_{j-1},a_j,a_{j+1},\cdots,a_n)$. Nous en déduisons les formules de Cramer :

$$\xi_i = \frac{\det_{\mathcal{B}}(a_1,\cdots,a_{j-1},b,a_{j+1},\cdots,a_n)}{\det_{\mathcal{B}}(a_1,\cdots,a_{j-1},a_j,a_{j+1},\cdots,a_n)} \text{ pour } 1 \leq i \leq n$$

2.2.3 Déterminant d'un endomorphisme

Définitions

Nous savons que $\Lambda^n(E)$, espace vectoriel des formes n-linéaires alternées sur l'espace vectoriel E de dimension n est de dimension 1 (c'est une droite). Soit u un endomorphisme de E. Pour toute forme linéaire alternée f définissons $f_u : E^n \to K$ par $(x_1,x_2,\cdots,x_n) \longmapsto f(u(x_1),u(x_2),\cdots u(x_n))$ on a immédiatement que f_u est une forme n-linéaire alternée. Elle est donc proportionnelle à f (car $\Lambda^n(E)$ est une droite), le coefficient de proportionnalité est appelé $\det u$.

Définition 24 *Si u est un endomorphisme de E espace vectoriel de dimension finie, l'application $f \longmapsto f_u$ de la droite $\Lambda^n(E)$ est une homothétie de rapport* $\det u$. *Ainsi le déterminant de u vérifie la relation fondamentale : Pour toute forme n-linéaire alternée f et tout n-uplet de vecteurs $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$: $f(u(x_1),\cdots,u(x_n)) = (\det u)\, f(x_1,\cdots,x_n)$.*

Ainsi en prenant une base $\mathcal{B} = (e_1,\cdots,e_n)$ on a $\det u = \det_{\mathcal{B}}(u(e_1),u(e_2),\cdots,u(e_n))$ et cette formule est indépendante de la base choisie.

Théorème 6 *-1- Le déterminant de l'application identique est 1.*
-2- Si v,u sont des endomorphismes de E alors $\det(v \circ u) = \det(v)\det(u)$.
-3- L'endomorphisme u est inversible si et seulement si $\det u \neq 0$.

Application : Orientation

Si E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$ deux bases $\mathcal{B} = (e_1,e_2,\cdots,e_n)$ et $\mathcal{C} = (f_1,f_2,\cdots,f_n)$ sont dîtes de même orientation si l'endomorphisme u ayant $\mathcal{C}$ comme image de $\mathcal{B}$ a un déterminant positif. En effet $\det(u) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ est non nul donc est ou bien positif ou négatif. Ceci permet de classer l'ensemble des bases en deux classes disjointes. Orienter l'espace E c'est choisir une des deux classes et de les décreter directes. Regarder en dimension 2 ou 3.

2.2.4 Déterminant d'une matrice carrée

Définition

Nous avons vu que le déterminant d'un endomorphisme est le déterminant des images des vecteurs d'une base.

Définition 25 *Soit $M = ((a_{ij}))_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carrée d'ordre n, on appelle déterminant de M, noté* $\det(M)$ *ou* $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ *le déterminant de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de K^n. De plus pour toute base $\mathcal{B}$ de E on a :* $\det(M_{\mathcal{B}}(u)) = \det(u)$.

Théorème 7 *Si $M = ((a_{ij}))_{1\leq i,j\leq n}$ alors* $\det(M) = \sum\limits_{\sigma\in G_n} \epsilon_\sigma a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n}$ *et on a :*
-1- pour toutes matrices A,B : $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
-2- A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.
-3- pour toute matrice A : $\det({}^tA) = \det(A)$

Développement suivant une ligne ou une colonne

Définition 26 *Soit $A = ((a_{ij}))_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice. On appelle mineur associé au terme a_{ij} le déterminant Δ_{ij} d'ordre $n-1$ obtenu en supprimant dans A la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.*

Théorème 8 *Avec les notations ci-dessus on a* $\det(A) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj}\Delta_{kj}$ *(développement par rapport aux colonnes) et* $\det(A) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik}\Delta_{ik}$ *(développement par rapport aux lignes)*

Nous utilisons un résultat important digne d'être revu : **déterminant d'une matrice triangulaire de matrices.**

Soit $M = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{rr} \end{pmatrix}$ une matrice décomposée en blocs. Par récurrence il suffit de faire le cas $r = 2$. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$, où A est de taille p, B de taille $p,n-p$ et D de taille $n-p$. Soit $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ la base canonique de K^n, F le sous-espace vectoriel de K^n engendré par $(e_1,\cdots,e_p)$, G celui engendré par $(e_{p+1},\cdots,e_n)$. Notons U l'endomorphisme de K^n canoniquement associé à M, V celui de F associé à A et W celui de G associé à D. Soit $\mathbf{f}$ le déterminant dans la base canonique de K^n. Par définition de $\det(M)$ on a $\det(M) = \mathbf{f}(U(e_1),\cdots,U(e_n))$ (1). Or puisque M est décomposée en blocs trigonaux, pour tout j de 1 à p on a $U(e_j) = V(e_j)$. Nous sommes donc amené à étudier l'application $\mathbf{g}$ définie sur F^p dans K par $\mathbf{g}(x_1,\cdots,x_p) = \mathbf{f}(x_1,x_2,\cdots,x_p,U(e_{p+1}),\cdots,U(e_n))$(2). Il est clair que $\mathbf{g}$ est une forme p-linéaire alternée sur F. Par définition du déterminant de l'endomorphisme V, il en découle que $\mathbf{g}(V(e_1),\cdots,V(e_p)) = \det(V)\,\mathbf{g}(e_1,\cdots,e_p)$(3). On déduit de (1),(2),(3) que $\det(M) = \det(A)\,\mathbf{f}(e_1,\cdots,e_p,U(e_{p+1}),\cdots,U(e_n))$. Or pour tout j de $p+1$ à n, le vecteur $U(e_j) - W(e_j)$ appartient à F c'est donc une combinaison linéaire de $e_1,\cdots,e_p$. $\mathbf{f}$ étant multilinéaire on a donc $\mathbf{f}(e_1,e_2,\cdots,e_p,U(e_{p+1}),\cdots,U(e_n)) = \mathbf{f}(e_1,e_2,\cdots,e_p,W(e_{p+1}),\cdots,W(e_n))$. Nous sommes amener à étudier l'application $\mathbf{h}$ de G^{n-p} dans K définie par $\mathbf{h}(x_{p+1},\cdots,x_n) = \mathbf{f}(e_1,\cdots,e_p,x_{p+1},\cdots,x_n)$. Or $\mathbf{f}(W(e_{p+1}),\cdots,W(e_n)) = \det(w)\,\mathbf{h}(e_{p+1},\cdots,e_n)$. On en déduit que $\det(W) = \det(D)$ et puis $\det(M) = \det(A)\det(D)$.

Nous remarquons que nous avons ici les déterminats classique diagonaux, triangulaires.

Matrices inverses

Définition 27 *Etant donné une matrice $A = ((a_{ij}))_{1\le i,j\le n}$ on appelle cofacteur de l'élément a_{ij} le scalaire $a'_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ où A_{ij} est le mineur d'ordre i,j . On définit ensuite la matrice des cofacteurs $A' = \left((a'_{ij})\right)_{1\le i,j\le n}$ et la matrice complémentaire de A : $\tilde{A} =^t A'$.*

Théorème 9 *Avec les notations ci-dessus on a $A \times \tilde{A} = \tilde{A} \times A = (\det(A))\, I_n$.*

Théorème 10 *Soit A une matrice carrée inversible on a : $A^{-1} = \frac{1}{(\det(A))}\tilde{A}$.*

Exercice 25 **Déterminant de Van Der Monde.** Soient $x_1,\ldots,x_n$ des scalaires. Montrer que

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)$$

Exercice 26 Soient $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$ des polynômes unitaires de degré respectifs $1, 2, \cdots, n-1$. Montrer que

$$\begin{vmatrix} 1 & P_1(x_1) & \cdots & P_{n-1}(x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & P_1(x_n) & \cdots & P_{n-1}(x_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

en déduire, si $a_1,\ldots,a_{n+1}$ sont des réels, la valeur du déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(a_1) & \cdots & \cos(na_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos(a_{n+1}) & \cdots & \cos(na_{n+1}) \end{vmatrix}$$

Exercice 27 Soit P un polynôme à coefficients complexes de degré n et $a_0,a_1,\ldots,a_n$ une suite de $n+1$ complexes distincts. La famille de polynômes $P(X+a_0),\ldots,P(X+a_n)$ est-elle libre?

Exercice 28 Déterminant de Cauchy. Soient $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n$ des réels tels que pour tous $i,j \in [1,n]$, $x_i + y_j \neq 0$. Calculer le déterminant de la matrice $\left(\dfrac{1}{x_i + y_j}\right)_{i,j\in[1,n]}$

Application: Calculer le déterminant et l'inverse de la matrice de Hilbert $\left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{i,j\in[1,n]}$.

Exercice 29 Calculer

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & b & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & 0 & b & a \end{vmatrix}$$

Exercice 30 a) Soit $M = (a_{ij})_{i,j\in[1,n]}$ une matrice à coefficients complexes. Montrer que le déterminant de la matrice $M(X) = (a_{ij} + X)_{i,j\in[1,n]}$ est un polynôme du premier degré.
b) Calculer le déterminant de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} r_1 & a & \cdots & a \\ b & r_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & r_n \end{pmatrix}$$

Exercice 31 Montrer que:

$$x < y < z \implies \begin{vmatrix} \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^y & \mathrm{e}^z \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} < 0$$

Exercice 32 Trouver les zéros du polynôme:

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}$$

Exercice 33 Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des fonctions du type $P.\exp$ où P est un polynôme de degré au plus n. Quel est le déterminant de l'endomorphisme de $\mathcal{E}$ induit par la dérivation?

Exercice 34 Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall i \in [1,n] \quad \sum_{j\neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}|$$

Montrer que A est inversible.

2.3 Applications des déterminants

2.3.1 Systèmes de Cramer

Soit $A \in \mathcal{GL}_n(K)$ et $B \in K^n$. Étudions l'équation linéaire

$$AX = B.$$

Notons $C_1,\ C_2,\ \dots,\ C_n$ les colonnes de la matrice A. Le n-uplet $(x_1,\dots,x_n)$ est solution de l'équation si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{n} x_i C_i = B$$

Calculons alors, pour $i \in [1,n]$, le déterminant des colonnes $C_1,\ldots,C_{i-1},B,C_{i+1},\ldots,C_n$:

$$\begin{aligned}
\det(C_1,\ldots,C_{i-1},B,C_{i+1},\ldots,\, C_n) &= \sum_{j=1}^{n} x_j \det(C_1,\ldots,C_{i-1},C_j,C_{i+1},\ldots,\, C_n) \\
&= x_i \det(C_1,\ldots,C_{i-1},C_i,C_{i+1},\ldots,\, C_n) \\
&= x_i \det A
\end{aligned}$$

Ainsi, si A est inversible, il existe bien une unique solution à l'équation et elle est déterminée par

$$\forall i \in [1,n] \quad x_i = \frac{\det(C_1,\ldots,C_{i-1},B,C_{i+1},\ldots,\, C_n)}{\det A}$$

2.3.2 Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, on dit que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont positivement équivalentes si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$.
La relation ainsi définie est une relation d'équivalence et détermine une partition de l'ensemble des bases de E en deux classes d'équivalences. Orienter l'espace consiste à choisir l'une de ces deux classes, un base quelconque de la classe choisie est dite alors directe, tandis qu'une base située dans l'autre classe est appelée indirecte.

2.4 Travaux Dirigés

Exercice 35 Soit $f :\}^3 \to \}^3$ une application linéaire de matrice dans la base canonique $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
Montrer que $\ker f \oplus im f = \mathbb{R}^3$.Ecrire la matrice de f dans une base adaptée à cette décomposition.

Exercice 36 On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Montrer que l'on a, pour tout n : $M^n = a_n M + b_n I$ et expliciter $(a_n,b_n) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 37 E est un K-ev de dimension finie n et $u \in L(E)$ tel que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im m} u$. Montrer que n est pair et qu'il existe une base de E où la matrice de u s'écrit en blocs: $\begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 38 Calculer $\Delta_{2n} = \begin{vmatrix} a & \cdot 0 \cdot & b \\ \dot{0} & \ddots & \dot{0} \\ \dot{b} & \cdot 0 \cdot & \dot{a} \end{vmatrix}$. Puis $C_n =$. $\begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & 0 \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & \ddots & \dot{0} \\ \dot{0} & \ddots & \ddots & 1 \\ \dot{0} & \cdot 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$

Exercice 39 Inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} C_0^0 & \cdots & C_n^0 \\ 0\cdot & \ddots & \vdots \\ \dot{0} & \cdot 0 & C_n^n \end{pmatrix}$, pour cette dernière introduire un endomorphisme associé.

Exercice 40 Soit $A = ((a_{ij})) \in M_n(\mathbb{R})$ avec: $a_{ii} = 2$, $a_{i,i+1} = 1$, $a_{i,i-1} = 3$ et $a_{ij} = 0$ pour les autres $(|i-j| \geq 2)$. Calculer $detA$.

Exercice 41 Calculer le déterminant $D_n = \begin{vmatrix} & & \vdots \\ a+b & b\cdots & b \\ a & \ddots & \dot{b} \\ \vdots & & \\ a\cdots & a & a+b \end{vmatrix}$ d'ordre n.

Exercice 42 Soit p dans $\mathbb{N}$. Quel est le rang de la matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$:

$$M = \begin{pmatrix} p^2 & (p+1)^2 & \cdots & (p+n-1)^2 \\ (p+1)^2 & (p+2)^2 & \cdots & (p+n)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (p+n-1)^2 & (p+n)^2 & \cdots & (p+2n-2)^2 \end{pmatrix}$$

Exercice 43 Résoudre, dans $\mathbb{C}$, le système. $\begin{cases} x+\alpha y+\alpha^2 z = 0 \\ \bar{\alpha}x + y + \alpha z = 0 \\ \bar{\alpha}^2 x + \bar{\alpha} y + z = 0 \end{cases}$

Pour quelles valeurs de m le système suivant n'est-il pas de Cramer? Le résoudre dans ces cas particuliers. $\begin{cases} x+my+2mz = a \\ mx+y+mz = b \\ 2mx+2my+\ z = c \end{cases}$.

Exercice 44 Résoudre le système:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \alpha_1 \\ x_2 + x_3 = \alpha_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} + x_n = \alpha_{n-1} \\ x_n + x_1 = \alpha_n \end{cases} \quad \text{avec } (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$$

Exercice 45 Pour $A \in M_n(K)$, déterminer le rang de $\tilde{A}$, la transposée de la matrice des cofacteurs de A.

Exercice 46 On se place dans $M_n(K)$
1) Soient A et B deux matrices carrées telles que, pour toute matrice carrée X, on ait $Tr(AX) = Tr(BX)$. Montrer que $A = B$.
2) Montrer qu'à toute forme linéaire f définie sur l'ensemble des matrices carrées, on peut associer une matrice F telle que, pour toute matrice carrée A, on ait: $f(A) = Tr(AF)$.
3) Soit f une forme linéaire définie sur l'ensemble des matrices carrées vérifiant pour toutes matrices A,B : $f(AB) = f(BA)$. Montrer qu'il existe un complexe α tel que $f = \alpha Tr$ (i.e. pour toute matrice A : $f(A) = \alpha Tr(A)$).

Exercice 47 $E = M_n(\mathbb{R})$. A et B étant deux élments donnés de E, α un réel donné discuter et résoudre l'équation sur E: $\alpha X + (TrX)A = B$.

Exercice 48 Matrices de Gramm: Soit E un espace préhilbertien, la matrice de Gramm de n vecteurs $(v_1, \ldots, v_n)$ est $Gram((v_i)) = ((< v_i,v_j >))_{1\leq i,j\leq n}$.
1) Montrer que $(v_1, \ldots, v_n)$ est libre si et seulement si $\det Gram((v_i)) \neq 0$.
2) Montrer que pour E de dimension n : $\det(Gram(v_i)) = (det(v_i))^2 det(Gram(e_i))$ où $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.
3) Soit F un s.e.v.de E de dimension finie, on écrit $E = F \oplus F^\perp$. Soit a un élément de E, montrer que $d(a,F)^2 = \dfrac{\det(Gram(a,e_1,e_2,\ldots,e_n)}{\det(Gram(e_1,e_2,\ldots,e_n)}$ où $(e_1,\ldots e_n)$ est une base de F.

Exercice 49 [Décomposition LU (voir Info)]
Soit A une matrice carrée d'ordre n, à coefficients réels. On suppose que les mineurs principaux Δ_k de A sont tous non nuls. ($\Delta_k = \det(A_k)$ où A_k est la matrice extraite de A formée des k premières lignes et des k premières colonnes de A). Montrer par récurrence qu'il existe un unique couple T_-, T_+ de matrices triangulaires inférieure et supérieure de diagonale formée de 1 telle que: $A = T_-\Delta T_+$ où $\Delta = diag\left(\Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \cdots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right)$. En déduire une application pour la résolution des systèmes de Cramer.

2.5 Démonstrations

Proposition 1 La famille considérée est libre car, si $(a_{ij})_{\substack{i\in[1,p]\\ j\in[1,q]}}$ est une famille de scalaires telle que $\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} a_{ij}u_{ij} = 0$ alors, pour tout $k \in [1,q]$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} a_{ij}u_{ij}(e_k) &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} a_{ij}\delta_{jk}f_i\\ &= \sum_{i=1}^{p} a_{ik}f_i\\ &= 0\end{aligned}$$

Puisque la famille $(f_1,\ldots,f_p)$ est libre, on en déduit que, pour tout $i \in [1,p]$, $a_{ik} = 0$ et donc que la famille $(u_{ij})_{\substack{i\in[1,p]\\ j\in[1,q]}}$ est libre.
Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Pour tout $k \in [1,q]$, il existe une famille de scalaires $(a_{i,k})_{i\in[1,p]}$ telle que $u(e_k) = \sum_{i=1}^{p} a_{ik}f_i$. Les applications linéaires $\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} a_{ij}u_{ij}$ et u ont alors même image de la base $\mathcal{B}$ et sont donc égales. La famille $(u_{ij})_{\substack{i\in[1,p]\\ j\in[1,q]}}$ est donc génératrice.

Proposition 2 Soit φ l'application de $\mathcal{M}_{pq}(K)$ dans K^{pq} qui, à une matrice A dont les lignes sont $L1,\ldots,L_p$ associe $\varphi(A) = (L_1,\ldots,L_p)$. φ est une bijection et pour tous éléments A et B de $\mathcal{M}_{pq}(K)$ et tout scalaire λ , on a $\varphi(A+\lambda.B) = \varphi(A)+\lambda.\varphi(B)$. On en déduit que $\mathcal{M}_{pq}(K)$ est un K-espace vectoriel : pour vérifier un axiome de la structure d'espace vectoriel, on le vérifie dans K^{pq} pour les images des éléments, puis on revient dans $\mathcal{M}_{pq}(K)$ en appliquant φ^{-1} à l'égalité obtenue.
L'application $\mathcal{M}_{\mathcal{BC}}$ de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathcal{M}_{pq}(K)$ est l'application qui à une application linéaire u associe ses coordonnées dans la base $(u_{ij})_{\substack{i\in[1,p]\\ j\in[1,q]}}$ ordonnées en une matrice.

Proposition 3 Notons $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_q)$, $\mathcal{C} = (f_1,\ldots,f_p)$ et $\mathcal{D} = (g_1,\ldots,g_r)$, $\mathcal{M}_{\mathcal{BC}}(u) = (a_{ij})_{\substack{i\in[1,p]\\ j\in[1,q]}}$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{CD}}(v) = (b_{kl})_{\substack{k\in[1,r]\\ l\in[1,p]}}$. Pour tout $j \in [1,q]$

$$\begin{aligned}v\circ u(e_j) &= v\left(\sum_{i=1}^{p} a_{ij}f_i\right)\\ &= \sum_{i=1}^{p} a_{ij}v(f_i)\\ &= \sum_{i=1}^{p} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{r} b_{ki}g_k\right)\\ &= \sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{i=1}^{p} b_{ki}a_{ij}\right)g_k\end{aligned}$$

Ainsi, la matrice de $v\circ u$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$ est bien le produit cherché.

Proposition 4 On vérifie sans peine que l'application transposée est linéaire.
Notons $A = (a_{ij})_{\substack{i\in[1,p]\\ j\in[1,q]}}$, $B = (b_{jk})_{\substack{j\in[1,q]\\ k\in[1,r]}}$, ${}^tA = (a'_{lm})_{\substack{l\in[1,q]\\ m\in[1,p]}}$ et ${}^tB = (b'_{nm})_{\substack{n\in[1,r]\\ m\in[1,q]}}$ avec $a'_{lm} = a_{ml}$ et $b'_{nm} = b_{mn}$.

On a

$$
\begin{aligned}
{}^tB\,{}^tA &= \left(\sum_{m=1}^{q} b'_{nm}a'_{ml}\right)_{\substack{n\in[1,r]\\ l\in[1,p]}}\\
&= \left(\sum_{k=1}^{q} b'_{jk}a'_{ki}\right)_{\substack{j\in[1,r]\\ i\in[1,p]}}\\
&= \left(\sum_{k=1}^{q} a_{ik}b_{kj}\right)_{\substack{j\in[1,r]\\ i\in[1,p]}}
\end{aligned}
$$

On reconnaît alors dans cette dernière matrice ${}^t(AB)$.

Proposition 5 Soit $\mathcal{B}$ une base de E. L'application $\mathcal{M}_\mathcal{B}$ de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{M}_n(K)$ qui, à un endomorphisme u, associe sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est un isomorphisme entre K-espaces vectoriels et vérifie de plus: pour tous éléments u et v de $\mathcal{L}(E)$, $\mathcal{M}_\mathcal{B}(v\circ u) = \mathcal{M}_\mathcal{B}(v)\times\mathcal{M}_\mathcal{B}(u)$. On vérifie alors que $\mathcal{M}_n(K), +\ , \times\ ,.)$ est une K-algèbre en utilisant cette bijection qui devient alors un isomorphisme d'algèbre.

Proposition 6 Soit $\mathcal{B}$ une base de E. L'application $\mathcal{M}_\mathcal{B}$ étant un isomorphisme d'algèbre, les groupes des éléments inversibles sont isomorphes.

Proposition 7 Il existe $B \in GL_n(K)$ tel que $AB = BA = I_n$. Ainsi ${}^t(BA) = {}^tA\,{}^tB = I_n$ et ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA = I_n$, on en déduit que ${}^tA$ est inversible d'inverse ${}^t(A^{-1})$.

Proposition 8 Notons $\mathcal{C}_p$ et $\mathcal{C}_q$ les bases canoniques de K^p et K^q. Pour tout $X \in K^q$, on a $X = \mathcal{M}_{\mathcal{C}_q}(X)$. Ainsi $u(X) = \mathcal{M}_{\mathcal{C}_p}(u(X)) = \mathcal{M}_{\mathcal{C}_q,\mathcal{C}_p}(u)\mathcal{M}_{\mathcal{C}_q}(X)$ Donc en notant $A = \mathcal{M}_{\mathcal{C}_q,\mathcal{C}_p}(u)$, on a bien $u(X) = AX$. La matrice A est bien unique, car, s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_{pq}(K)$ telle que, pour tout $X \in K^q$, $u(X) = BX$ alors, nécessairement, B est la matrice de u dans les bases canoniques de K^q et K^p.
Réciproquement, si $A \in \mathcal{M}_{pq}(K)$, l'application u qui à $X \in K^q$ associe $AX \in K^p$ est bien linéaire et la matrice de u dans les bases canoniques de K^q et K^p est A.

Proposition 9 On a $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(Id_E)^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(Id_E^{-1}) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(Id_E)$.

Proposition 10 En calculant les coordonnées de l'image d'un vecteur x par Id_E, on trouve $\mathcal{M}_\mathcal{B}(x) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(Id_E)\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(x)$.

Proposition 11 On a $u = Id_F \circ u \circ Id_E$ et donc

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}(u) &= \mathcal{M}_{\mathcal{C}\mathcal{C}'}(Id_F)\mathcal{M}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(u)\mathcal{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(Id_E)\\
&= P^{-1}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}\mathcal{M}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(u)P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}
\end{aligned}
$$

Proposition 12 En partant de $Id_E = Id_E \circ \cdots \circ Id_E$, on trouve

$$
\mathcal{M}_{\mathcal{B}_n\mathcal{B}_1}(Id_E) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}(Id_E)\cdots\mathcal{M}_{\mathcal{B}_n\mathcal{B}_{n-1}}(Id_E)
$$

et donc l'égalité cherchée.

Proposition 13 L'application $\mathcal{M}_\mathcal{C}$ est un isomorphisme de F dans K^p (où $p = \dim F$). La dimension du sous-espace engendré par $u(\mathcal{B})$ est donc celle du sous-espace engendré par son image, c'est à dire le sous-espace engendré par les colonnes de la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Théorème 1 L'application linéaire $\tilde{A}$ canoniquement associée à la matrice A est de rang r. Soit $(e_{r+1},\ldots,e_q)$ une base de $\operatorname{Ker}\tilde{A}$, complétée en une base $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_q)$ de K^q, l'image par $\tilde{A}$ de la famille $(e_1,\ldots,e_r)$ qui engendre un supplémentaire du noyau de $\tilde{A}$ est donc une base de l'image de $\tilde{A}$. Complétons cette famille libre en une base $\mathcal{C} = (u(e_1),\ldots,u(e_r),f_{r+1},\ldots,f_p)$ de K^p. La matrice de $\tilde{A}$ dans les bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ est bien de la forme indiquée et est équivalente à la matrice A.

Proposition 14 Elle sont toutes les deux équivalents à $I_{r,p,q}$ et sont donc équivalentes.

Proposition 15 Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$ une matrice de rang r, elle est équivalente à $I_{r,p,q}$ et il existe des matrices $P \in \mathcal{GL}_p(K)$ et $Q \in \mathcal{GL}_q(K)$ telles que $A = PI_{r,p,q}Q$. On a alors, ${}^tA = {}^tQ{}^tI_{r,p,q}{}^tP$ et puisque ${}^tP$ et ${}^tQ$ sont inversibles, ${}^tA$ et ${}^tI_{r,p,q} = I_{r,q,p}$ sont équivalentes, ainsi le rang de ${}^tA$ est r.

Proposition 16 Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$ et r son rang. Notons $(C_1,\dots,C_q)$ la famille des colonnes de A, on peut extraire de cette famille une famille libre $(C_{j_1},\dots,C_{j_r})$ et la matrice $B = ((C_{j_1},\dots,C_{j_r})$ est de rang r. La matrice ${}^tB$ est donc de rang r et on peut donc extraire de la famille $(C'_1,\dots,C'_p)$ des vecteurs colonnes de ${}^tB$, une famille libre $(C'(_{i_1},\dots,C'_{i_r})$. On constate alors que la matrice $C = (C'(_{i_1},\dots,C'_{i_r})$ est une matrice carrée de taille r et de rang r, elle est donc inversible et ${}^tC$ est une matrice extraite de A. En notant s la taille maximale des matrices carrées inversibles extraites de A , on a donc $r \leq s$.
Soit $A' = (a_{ij})_{\substack{i\in I\\ k\in J}}$ une matrice carrée inversible extraite de A et notons $(C'_j)_{j\in J}$ la famille de ses vecteurs colonnes. Soit $\mathcal{C}_p = (e_1,\dots,e_p)$ la base canonique de K^p et Π la projection sur l'espace engendré par la famille $\mathcal{D} = (e_i)_{i\in I}$ parallèlement à l'espace engendré par la famille $(e_k)_{k\in[1,p]\setminus I}$. L'application P de K^p dans K^r qui à un vecteur X associe $\mathcal{M}_{\mathcal{D}}(\Pi(X))$ est linéaire et l'image par P de l'espace engendré E' par la famille $(C_j)_{j\in J}$ est l'espace E'' engendré par la famille $(C'_j)_{j\in J}$. La dimension s de E'' est donc inférieure à celle de E' et donc $s \leq \dim E' \leq r$. Au total, on a bien $r = s$.

Proposition 17 Si A et B sont semblables, il existe $P \in GL_n(K)$ telle que $A = P^{-1}BP$. Soit u l'endomorphisme de K^n canoniquement associé à B et $\mathcal{B} = (C_1,\dots,C_n)$ la famille des vecteurs colonnes de P. Puisque P est de rang n, $\mathcal{B}$ est une base de K^n et P est la matrice de passage de la base canonique de K^n à la base $\mathcal{B}$. on a bien $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = P^{-1}BP = A$.
Réciproquement, la relation qui lie deux matrices d'un même endomorphisme dans des bases différentes est bien celle de la définition de deux matrices semblables.

Proposition 18 Clair en comparant les deux définitions.

Proposition 19 Cette application est une combinaison des formes linéaires coordonnées de la base canonique de $\mathcal{M}_n(K)$.

Proposition 20 Notons $A = (A_{ij})_{i,j\in[1,n]}$ et $B = (b_{ij})_{i,j\in[1,n]}$

$$\begin{aligned}\operatorname{Trace}(AB) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik}\\ &= \operatorname{Trace}(BA)\end{aligned}$$

Proposition 21 Si A et B sont semblables, il existe une matrice carrée $P \in GL_n(K)$ telle que $A = P^{-1}BP$, ainsi

$$\begin{aligned}\operatorname{Trace}(A) &= \operatorname{Trace}(P^{-1}(BP))\\ &= \operatorname{Trace}((BP)P^{-1})\\ &= \operatorname{Trace}(B)\end{aligned}$$

Proposition 22 Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, les matrices de u dans ces deux bases sont semblables, elles ont donc même trace.

Proposition 23 On a $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$. Si r est la rang de p, notons $(e_1,\dots,e_r)$ une base de $\operatorname{Im} p$ et $f_1,\dots,f_{n-r}$ une base de $\operatorname{Ker} p$, la famille $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_r,f_1,\dots,f_{n-r})$ est une base de E et la matrice de p dans cette base a pour trace r.

Théorème 2 Montrons ce résultat par récurrence. Pour $n = 2$ on a que $S_2 = \{e,\tau\}$ avec e l'identité et $\tau = \tau_{12}$ et τ est bien générateur puisque $\tau^2 = e$. On suppose la propriété vraie pour $n-1$. Soit $\alpha \in S_n$. Premier cas : $\alpha(n) = n$, la restriction α' de α $I_{n-1} = \{1,2,\cdots,n-1\}$ est une permutation de S_{n-1} et est donc produit de transpositions de I_{n-1} : $a' = \tau_1'\tau_2'\cdots\tau_n'$, en prolongeant ces transpositions τ_i' en des transpositions τ_i de S_n en laissant fixe n on a que $\alpha = \tau_1\tau_2\cdots\tau_n$ (ce résultat se vérifie en prenant les images de chaque entier). Deuxième cas $\alpha(n) = m < n$ on considère $\tau_{m,n}$ et $\beta = \tau_{n,m}\alpha$. Cette dernière permutation β vxrifie $\beta(n) = n$ et se décompose en un produit de transpositions d'après le premier cas, il en est donc de même de α.

Proposition 24 Pour τ transposition de u et v avec $u < v$, on cherche pour les paires $\{i,j\}$ avec $1 \leq i < j \leq n$, le nombre de rapports $\dfrac{\tau(i)-\tau(j)}{i-j}$ négatifs.
Si i et j sont tous deux différents de u et v, $\frac{\tau(i)-\tau(j)}{i-j} = 1$.
Si $i = u$ comme $j > i$ on a :
soit $j < v$ alors $(u,j) \longmapsto (v,j)$ et il y aura une inversion et ceci pour $j = u+1,u+2,\cdots,v-1$ soit $v-u-1$.
soit $j = v$ alors $(i,j) = (u,v) \longmapsto (v,u)$ encore une inversion.
q¡p soit $j > v$ alors $(i,j) = (u,j) \longmapsto (v,j)$ mais ici $u < j$ et $v < j$ il n'y a pas d'inversion.
Si $j = u$ comme $i < j, i \neq u$ et $i \neq v$ donc $(i,j) = (i,u) \longmapsto (i,v)$ pas d'inversion.
Si $i = v$ comme $j > v$ on a $(i,j) = (v,j) \longmapsto (u,j)$ pas d'inversion.
Si $j = v$ et $i < v$ il reste soit $i < u$ alors $(i,j) = (i,v) \longmapsto (i,u)$ avec $i-v$ et $i-u$ de même signe : pas d'inversion. Soit $u < i < j = v$ et $(i,v) \longmapsto (i,u)$ et il y a une inversion et ceci se présente comme précédemment $v-u-1$ fois.
Finalement il y a $2(v-u-1)+1$ inversions d'où $\epsilon_\tau = -1$.

Théorème 3 Il est bon de savoir que $\{\{-1,+1\},\times\}$ est un groupe (écrire la table de multiplication). Ensuite calculons $\epsilon_{\alpha\beta} = \prod\limits_{1\leq i<j\leq n} \frac{\alpha(\beta(i))-\alpha(\beta(j))}{i-j}$ on a $\frac{\alpha(\beta(i))-\alpha(\beta(j))}{i-j} = \frac{\alpha(\beta(i))-\alpha(\beta(j))}{\beta(i)-\beta(j)} \times \dfrac{\beta(i)-\beta(j)}{i-j}$ car si $i \neq j$ alors $\beta(i) \neq \beta(j)$ ainsi $\epsilon_{\alpha\beta} = \left(\prod\limits_{1\leq i<j\leq n} \dfrac{\alpha(\beta(i))-\alpha(\beta(j))}{\beta(i)-\beta(j)}\right) \times \left(\prod\limits_{1\leq i<j\leq n} \dfrac{\beta(i)-\beta(j)}{i-j}\right) = \epsilon_\alpha \times \epsilon_\beta$ car pour la première expression β étant bijective l'ensemble $\{\beta(i),\beta(j)\}$ donne l'ensemble des paires $\{i,j\}$.

Proposition 25 A partir du moment où $\sigma \longmapsto \varepsilon_\sigma$ est un morphisme, on a le résultat, puisque la signature d'une transposition est -1.

Proposition 26 Il suffit de décomposer σ en produit de transpositions $\tau_1\tau_2\cdots\tau_k$. On utilise le caractère alterné et $\epsilon_\sigma = (-1)^k$.

Théorème 4 Il est claire que cet ensemble $\Lambda^n(E)$ est un espace vectoriel. En écrivant $x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji}e_j$ on obtient par développement $f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \sum\limits_{\kappa\in F_{n,n}} a_{\kappa(1),1}\cdots a_{\kappa(n),n} f\left(e_{\kappa(1)},\cdots,e_{\kappa(n)}\right)$ où $F_{n,n}$ est l'ensemble de toutes les fonctions de I_n. Comme les termes correspondant à des applications κ non bijectives sont nuls on obtient $f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \sum\limits_{\sigma\in G_n} a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n} f\left(e_{\sigma(1)},\cdots,e_{\sigma(n)}\right) = \sum\limits_{\sigma\in G_n} \epsilon_\sigma a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n} f(e_1,\cdots,e_n)$.ainsi f est multiple de l'application définie par : $\sum\limits_{\sigma\in G_n} \epsilon_\sigma a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n}$. Ceci montre que $\dim \Lambda^n(E) \leq 1$. Il suffit alors de montrer que $\Delta(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \sum\limits_{\sigma\in G_n} \epsilon_\sigma a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n}$ est bien n-linéaire alternée et non nulle. Il est clair que Δ est n-linéaire. Nous allons montrer que si $x_i = x_j$ alors $\Delta(x_1,x_2,\cdots,x_n) = 0$. Soit $\tau_{i,j}$ la transposition $(1 \leq i < j \leq n)$. On a :¿$\Delta(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \sum\limits_{\sigma\in A_n} \epsilon_\sigma a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n} + \sum\limits_{\sigma\in G_n\backslash A_n} \epsilon_\sigma a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n}$ or l'application $\sigma \longmapsto \sigma\circ\tau$ est une bijection de $A_n \to S_n\backslash A_n$. Ceci permet d'écrire que : $\Delta(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \sum\limits_{\sigma\in A_n} \epsilon_\sigma a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n} + \sum\limits_{\sigma\in A_n} \epsilon_{\sigma\tau} a_{\sigma\tau(1),1}\cdots a_{\sigma\tau(n),n}$ et comme $\epsilon_{\sigma\tau} = -\epsilon_\sigma$ on a $\Delta(x_1,x_2,\cdots,x_n) =$

$\sum\limits_{\sigma\in A_n} \epsilon_\sigma a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n} - \sum\limits_{\sigma\in A_n} \epsilon_\sigma a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n}$ Or, comme $x_i = x_j$, on a $a_{k,i} = a_{k,j}$ pour tout $k = 1{,}2,\cdots,n$ d'où $a_{\sigma(j),i} = a_{\sigma(j),j}$ et $a_{\sigma(i),j} = a_{\sigma(i),i}$. Donc $\Delta(x_1,\cdots x_n) = 0$. Enfin Δ n'est pas nulle car en écrivant $e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \delta_{ij} e_j$ on a : $\Delta\left(e_1,\cdots,e_n\right) = \sum\limits_{\sigma\in G_n} \epsilon_\sigma \delta_{\sigma(1),1}\cdots\delta_{\sigma(n),n} = \delta_{11}\cdots\delta_{nn} = 1$.

Théorème 5 Si la famille n'est pas libre, un des vecteurs est combinaison linéaire des autres et par le caractère alterné du déterminant on a donc $\det_B\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right) = 0$. Si la famille est libre alors c'est une base de E appelons-la C. La formule ci-dessus donne $\det_B(B) = \det_C(B) \times \det_B(C) = 1$ ceci prouve que $\det_B(C) \neq 0$.

Théorème 6 La première assertion est évidente, pour la seconde on a $f\left(v\circ u\left(x_1\right),\cdots,v\circ u(x_n)\right) = \det\left(v\circ u\right) f\left(x_1,\cdots,x_n\right)$ et d'autre part $f\left(v\circ u\left(x_1\right),\cdots,v\circ u(x_n)\right) = \det\left(v\right) f\left(u\left(x_1\right),\cdots,u(x_n)\right) = \det\left(v\right)\det\left(u\right) f\left(x_1,\cdots,x_n\right)$ en choisissant une forme n-linéaire alternée non nulle on obtient $\det\left(v\circ u\right) = \det\left(v\right)\det\left(u\right)$. La dernière assertion si u est un automorphisme on a $\det\left(u\right)\det\left(u^{-1}\right) = 1$ donc $\det\left(u\right) \neq 0$. Si u n'est pas inversible alors si $B = \left(e_1,\cdots,e_n\right)$ est une base son image $(u(e_1),u(e_2),\cdots,u(e_n))$ n'est pas une base et $\det u = \det_B\left(u(e_1),u(e_2),\cdots,u(e_n)\right) = 0$.

Théorème 7 Nous avons à montrer l'assertion -3- Si $A = \left(\left(a_{ij}\right)\right)_{1\leq i,j\leq n}$ on a $\det(A) = \sum\limits_{\sigma\in G_n} \epsilon_\sigma a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n}$ et $\det({}^tA) = \sum\limits_{\rho\in G_n} \epsilon_\sigma a_{1,\rho(1)}\cdots a_{n,\rho(n)}$ or $a_{1,\rho(1)}\cdots a_{n,\rho(n)} = a_{\sigma(1),\rho\sigma(1)}\cdots a_{\sigma(n),\rho\sigma(n)}$ car ce produit est invariant si on fait subir à ses éléments une permutation quelconque σ. Choisissons $\sigma = \rho^{-1}$ on obtient $a_{1,\rho(1)}\cdots a_{n,\rho(n)} = a_{\rho^{-1}(1),1}\cdots a_{\rho^{-1}(n),n}$ ainsi $\det({}^tA) = \sum\limits_{\rho\in G_n} \epsilon_\rho a_{\rho^{-1}(1),1}\cdots a_{\rho^{-1}(n),n} = \sum\limits_{\sigma\in G_n} \epsilon_\sigma a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n}$. Car $\epsilon_{\rho^{-1}} = \epsilon_\rho$ et $\rho \longmapsto \rho^{-1}$ est une bijection de S_n dans lui-même.

Théorème 8 Posons dans K^n : $B = (e_1,\cdots e_n)$ la base canonique et $(a_1,\cdots,a_n)$ les vecteurs colonnes de A. Par transposition il suffit de faire la démonstration de la première assertion. On a $\det\left(A\right) = \det_B\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)$. Soit j un entier de 1 à n la décomposition de a_j dans la base B s'écrit : $a_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$ et l'on a donc $\det\left(A\right) = \left(-1\right)^{j-1}\det_B\left(a_j,a_1,\cdots,a_{j-1},a_{j+1},\cdots,a_n\right)$ $= \left(-1\right)^{j-1}\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}\det_B\left(a_i,a_1,\cdots,a_{j-1},a_{j+1},\cdots,a_n\right)$ donc $\det\left(A\right) = \left(-1\right)^{j-1}\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}\det\left(A_{ij}\right)$ où A_{ij} a pour colonnes $\left(e_i,a_1,\cdots,a_{j-1},a_{j+1},\cdots,a_n\right)$. Si on échange successivement la $i^{\text{ème}}$ ligne avec les $i-1$ premières on obtient $\det\left(M_{ij}\right) = \left(-1\right)^{i-1}\det\left(M'_{ij}\right)$ où $M'_{ij} =$ et on a $\det\left(M'_{ij}\right) = \Delta_{ij}$. D'où le résultat.

Théorème 9 Nous allons montrer que $A = \left(\det\left(A\right)\right) I_n$ c'est à dire $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(-1\right)^{i+h} a_{ij}\det\left(A_{ih}\right) = \delta_{hj}\det\left(A\right)$. Soit $\left(a_1,\cdots,a_n\right)$ les vecteurs colonnes de A et $A_1 = \left(\gamma_{lm}\right)$ la matrice obtenue en remplaçant dans A le vecteur a_h par le vecteur a_j. Le déterminant de A_1est nul car il a deux colonnes identiques, et son développement suivant la $h^{\text{ème}}$ colonne donne s'écrit $\det\left(A_1\right) = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(-1\right)^{i+h}\gamma_{ih}\det\left(A_{ih}\right)$, puisque la matrice mineure de A_1 associée à γ_{ih} n'est autre que A_{ih}. Comme pour tout i de 1 à n on a $\gamma_{ih} = \alpha_{ij}$ nous obtenons la formule.

Théorème 10 Si une matrice est inversible alors son déterminant est non nulle et il suffit d'applique le théorème précèdent.

2.6 Exercices

2.6.1 Indications

Exercice 1 Il faut et il suffit que $v \notin H$.
Les deux projections sont associées et la première est de rang 1.

Exercice 2 Prendre des bases de E et F. Construire une partie génératrice constituée d'applications de rang n.

Exercice 3 On peut prouver une existence sans donner un moyen explicite de construction. Le théorème de la base incomplète est un moyen d'exhiber une base sans trop savoir comment on la construit.
Montrer que l'ensemble des endomorphismes de rang r engendre l'ensemble des automorphismes.

Exercice 4 Reconnaître les éléments de la matrice produit

Exercice 5 Calculer u^2, v^2 et les sous-espaces appropriés.

Exercice 6 Utiliser les symboles de Kronecker pour effectuer par exemple un produit de matrices.

Exercice 7 C'est une sous-espace vectoriel, trouver en une base.

Exercice 8 a) Calculer.
b) L'application u qui, à $B \in \mathcal{M}_n(K)$, associe $[A,B]$ est linéaire, que sont les espaces E_p par rapport à u?
c) Montrer que $u^p(BC) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} u^k(B) u^{p-k}(C)$. Où se trouve le produit de deux éléments de E_p?

Exercice 9 Ce sont des projections et des composées de projections.

Exercice 10 L'image de f est isomorphe à K^r

Exercice 11 Noter $(f_1, \ldots, f_n)$ la nouvelle base et chercher les coordonnées des images des vecteurs de cette base.

Exercice 12 Seule l'identité est semblable à l'identité.

Exercice 13 Utiliser la formule du rang.

Exercice 14 Comment s'écrivent les colonnes d'une matrice de rang 1?
Une matrice est inversible si on peut calculer son inverse.

Exercice 15 L'égalité n'a lieu que de façon exceptionnelle: chercher des matrices simples.

Exercice 16 Utiliser les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(K)$.

Exercice 17 Développer $\mathrm{Tr}(AF)$, peut on faire une identification?

Exercice 18 Utiliser les exercices précédents.

Exercice 19 Prendre une base de E adaptée à s.

Exercice 20 Quelle est la caractérisation des homothéties? La déduction proposée peut s'effectuer par récurrence

Exercice 21 Montrer que les images des projecteurs sont en somme directe si leur somme est un projecteur.

Exercice 22 pour la non commutativité on s'appuyera sur les permutations qu'il est commode de noter: $\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,3\,2 \end{pmatrix}$ et $\sigma' = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,1\,3 \end{pmatrix}$ dont le produit n'est pas commutatif et pour $n \geq 3$ on laissera fixes les autres éléments.)

Exercice 23 Décomposer ainsi une transposition.

Exercice 24 Partir d'un élément et regarder ses images réitérés, puis recommencer avec un élément non pris.

Exercice 25 Si on note $V(x_1,\ldots,x_n)$ ce déterminant, quels sont les zéros du polynôme $V(X,x_2,\ldots,x_n)$? son degré ? son coefficient dominant ?

Exercice 26 Utiliser le caractère n-linéaire alterné du déterminant.
Développer $\cos n\alpha$ en polynôme de $\cos\alpha$ pour se ramener à la forme précédente à un coefficient multiplicatif près.

Exercice 27 Calculer la matrice de la famille dans la base canonique à l'aide de la formule de Taylor.

Exercice 28 Retrancher la première ligne à toutes les autres, puis la première colonne de la matrice qui en résulte aux autres colonnes, mettre en facteur ce qui est possible.

Exercice 29 Établir une formule de récurrence

Exercice 30 a) Le déterminant d'une matrice est une forme n-linéaire alternée de ses colonnes.
b) Le déterminant cherché est la valeur en 0 de $\det M(X)$.

Exercice 31 La fonction exponentielle est convexe.

Exercice 32 Le scalaire $a+b+c$ en est un.

Exercice 33 Calculer la matrice de la dérivation dans une base de E.

Exercice 34 Résoudre l'équation $AX=0$.

2.6.2 Corrigés

Exercice 1 Puisque H est un hyperplan, $H \oplus [v]$ si et seulement si $v \notin H$, donc si et seulement si $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i \neq 0$. Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et f la forme linéaire qui à $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ associe $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$.

Le noyau de f est H et pour tout $i \in [1,n]$, il existe $\alpha_i \in \mathbb{R}$ et $y_i \in H$ tel que $e_i = \alpha_i v + y_i$. On a donc $f(e_i) = \alpha_i f(v) + f(y_i)$ donc $a_i = \alpha_i f(v)$, ainsi la matrice dans la base canonique de la projection p sur V parallèlement à H est

$$\frac{1}{f(v)} \begin{pmatrix} a_1 v_1 & a_2 v_1 & \cdots & a_n v_1 \\ a_1 v_2 & a_2 v_2 & \cdots & a_n v_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 v_n & a_2 v_n & \cdots & a_n v_n \end{pmatrix}$$

La projection sur H parallèlement à V est égale à $\mathrm{Id} - p$, on en déduit facilement sa matrice dans la base canonique.

Exercice 2 Prenons des bases $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_q)$ de E et F.

L'application linéaire u définie par $u(e_i) = f_i$ pour $i \in [1,p]$ si $p \leq q$ ou définie par $u(e_i) = f_i$ pour $i \in [1,q]$ et $u(e_i) = 0$ pour $i \in [q+1,p]$ si $q < p$ est de rang n. Considérons alors, en utilisant les notations de la proposition précédente, la base (u_{ij}) de $\mathcal{L}(E,F)$ déduite des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et pour $i \in [1,p]$ et $j \in [1,q]$, l'application linéaire $v_{ij} = u + u_{ij}$. On vérifie que pour tout $(i,j) \in [1,p] \times [1,q]$, v_{ij} est de rang n et que la famille $(u,(v_{ij}))$ est une famille génératrice de $\mathcal{L}(E,F)$. En appliquant le théorème de la base incomplète, on en déduit qu'il existe une partie de cette famille qui constitue une base de $\mathcal{L}(E,F)$ (en fait les pq premières suffisent)

Exercice 3 a) On applique le procédé de l'exercice précédent

b) Soit $\mathcal{B}$ une base de E et u un automorphisme de E. Pour toute partie $P = i_1, \ldots, i_r$ à r éléments de l'ensemble $[1,n]$ construisons l'endomorphisme u_P défini par $u_P(e_i) = u(e_i)$ si $i \in P$ et $u_P(e_i) = 0$ si $i \notin P$. L'endomorphisme u_P est de rang r et puisqu'il existe $\binom{n-1}{r-1}$ parties à r éléments de l'ensemble $[1,n]$ contenant un élément donné de $[1,n]$, la somme de toutes les applications u_P ainsi définies est donc égale à $\binom{n-1}{r-1} u$. On en déduit que u est une combinaison linéaire d'endomorphismes de rang r.

Notons $\mathcal{R}$ l'ensemble des endomorphismes de rang r. L'espace vectoriel engendré par $\mathcal{R}$ contient donc $\mathcal{GL}(E)$ qui est une partie génératrice de $\mathcal{L}(E)$, ainsi $\mathcal{R}$ est elle-même une partie génératrice de $\mathcal{L}(E)$, on peut donc en extraire une base de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 4 Soit $(i,k) \in [1,p] \times [1,r]$, l'élément d'indice (i,k) de la matrice AB est égal à $L_i C_k$, la ligne d'indice i de la matrice produit est donc $L_i(C_1, \ldots, C_r) = L_i B$ et sa colonne d'indice k est égale à $\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_p \end{pmatrix} C_k = AC_k$.

Exercice 5 On vérifie que $A^2 = A$ et $B^2 = I_3$, on en déduit que $u^2 = u$ et $v^2 = \mathrm{Id}_E$ puisque l'application $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ est bijective.

Le noyau de u est l'ensemble des vecteurs dont les coordonnées (x,y,z) dans la base $\mathcal{B}$ vérifient $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On résout alors le système

$$\begin{cases} \quad -2y + z = 0 \\ x + 3y - z = 0 \\ 2x + 4y - z = 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des triplets de la forme $(\lambda, -\lambda, -2\lambda)$ où λ est un scalaire arbitraire, ainsi le noyau de u est l'espace vectoriel F engendré par le vecteur $e_1-e_2-2e_3$, l'image de u est l'espace vectoriel G engendré par les vecteurs $e_2+2e_3,-2e_1+3e_2+4e_3,e_1-e_2-e_3$ dont on peut donner une base : (e_2+2e_3,e_1-3e_3) et donc u est la projection sur G parallèlement à F.
Pour déterminer s, qui est la symétrie par rapport à $F' = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $G' = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$, on étudie les systèmes $(B - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $(B + I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou les systèmes équivalents

$$\begin{cases} -16x & +4y & +4z & = 0 \\ 4x & -10y & +8z & = 0 \\ 4x & +8y & -10z & = 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} 2x & +4y & +4z & = 0 \\ 4x & +8y & +8z & = 0 \\ 4x & +8y & +8z & = 0 \end{cases}$$

On trouve ainsi que F' est l'espace vectoriel engendré par $e_1 + 2e_2 + 2e_3$ et que G' est l'espace vectoriel engendré par $2e_1 - e_2$ et $e_2 - e_3$.

Exercice 6 Soit $(p,q) \in [1,n]$. La matrice E_{pq} de l'endomorphisme u_{pq} dans la base canonique de K^n est $(\delta_{ip}\delta_{jq})_{i,j\in[1,n]}$.
Soit p,q,r et s des éléments de $[1,n]$, on a

$$\begin{aligned} E_{pq}E_{rs} &= \left(\sum_{k=1}^{n} \delta_{ip}\delta_{kq}\delta_{kr}\delta_{js})\right)_{i,j\in[1,n]} \\ &= (\delta_{ip}\delta_{qq}\delta_{qr}\delta_{js}))_{i,j\in[1,n]} \\ &= \delta_{qr}E_{ps} \end{aligned}$$

Exercice 7 L'ensemble E considéré est l'espace vectoriel engendré par les matrices $M(1,0)$ et $M(0,1)$ car pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $M(x,y) = xM(1,0) + yM(0,1)$.
La famille $\{M(1,0),M(0,1)\}$ est libre car on vérifie sans difficulté que l'équation $M(x,y) = (0)$ possède comme seule solution $x = y = 0$. On en déduit que E est un sous-espace de dimension 2 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

E ne contient pas la matrice I_3 donc ce n'est pas une sous-algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, en revanche on peut vérifier que E est stable par multiplication, il suffit pour cela de vérifier que les produits $M(1,0)^2 = M(-2,1)$, $M(0,1)^2 = M(1,-2)$ et $M(1,0)\times M(0,1) = M(0,1)\times M(1,0) = M(-1,-1)$ sont des éléments de E.

Exercice 8 a) Clair.
b) On vérifie sans difficulté que u est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(K)$ et on a $E_0 = \mathrm{Ker}\, u$, $E_1 = \mathrm{Ker}\, u^2$, …, $E_p = \mathrm{Ker}\, u^{p+1}$. La suite (E_p) est donc une suite de sous-espaces vectoriels et on a clairement $E_p \subset E_{p+1}$ pour tout entier p.
La suite des dimensions des espaces E_p est donc une suite croissante d'entiers majorée par n^2, elle est donc nécessairement constante à partir d'un certain rang, ce qui implique que la suite (E_p) est stationnaire.
c) À partir de la formule $u(BC) = u(B)C + Bu(C)$, on montre par récurrence la formule

$$u^p(BC) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} u^k(B)u^{p-k}(C)$$

pour tout entier $p \geq 1$ en utilisant la construction du triangle de Pascal des coefficients binomiaux.

On en déduit que si B et C sont dans E_p, $u^{2p}(BC) = 0$, ainsi la somme, le produit par un scalaire et le produit de deux matrices quelconques de F est dans F en effet si B et C sont deux éléments de F, alors il existe des entiers p et q tels que $B \in E_p$ et $C \in E_q$ et donc B et C appartiennent à E_{p+q}, on en déduit que, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $B + \lambda C \in E_{p+q}$ et $BC \in E_{2p+2q}$. D'autre part I_n appartient a E_0 donc F est une sous-algèbre de E.

Exercice 9 En notant $(e_i)_{i\in[1,n]}$ la base canonique de K^n, la famille $(u_{ii})_{i\in[1,n]}$ est une famille de projecteurs associés dont les images sont les sous-espaces $E_i = [e_i]$.
l'endomorphisme u_{ij} est égal par exemple à la composée de la projection p sur E_i parallèlement à $[e_1,\dots,e_{i-1},e_{i+1},\dots,e_{j-1},e_j - e_i,e_{j+1},\dots,e_n]$ et de u_{jj}.

Exercice 10 La dimension de $\operatorname{Im} u$ est r. Il existe donc un isomorphisme φ de $\operatorname{Im} u$ dans K^r. Notons g l'application linéaire de K^q dans K^r qui à $x \in K^q$ associe $\varphi(f(x)) \in K^r$ et h l'application de K^r dans K^p qui à $y \in K^r$ associe $\varphi^{-1}(y) \in K^p$. Alors, pour tout $x \in K^q$, $h \circ g(x) = \varphi^{-1}(\varphi(f(x))) = f(x)$.

Exercice 11 Soit $A = (a_{i,j})_{i,j\in[1,n]}$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$. Pour tout $j \in [1,n]$:

$$\begin{aligned} u(f_j) &= u(e_{n+1-j}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1-j} e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1-j} f_{n+1-i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{n+1-i,n+1-j} f_i \end{aligned}$$

La matrice de u dans la nouvelle base est donc $(a_{n+1-i,n+1-j})_{i,j\in[1,n]}$

Exercice 12 Les matrices $2I_n$ et I_n sont équivalentes car elles ont le même rang et elles sont non semblables.

Exercice 13 Soit u et v les endomorphismes associés a A et B, on a $uv = 0$ donc $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u$ et donc $\operatorname{rang} v \leq n - \operatorname{rang} u$. D'autre part $K^n = \operatorname{Im}(u+v) \subset \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$ donc $n \leq \dim(\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v) \leq \operatorname{rang} u + \operatorname{rang} v$, d'où l'égalité cherchée.

Exercice 14 L'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes $C_1,\dots,C_n$ de la matrice A est de dimension1, il existe donc une colonne X est des scalaires $y_1,\dots,y_n$ tels que, pour tout $j \in [1,n]$, $C_j = y_j X$, on a donc $A = C \times (y_1,\dots,y_n)$.
On en déduit que $A^2 = X\,{}^tYX\,{}^tY = X({}^tYX){}^tY = ({}^tYX)A$. On a donc $A^2 = \alpha A$ avec $\alpha = {}^tYX$.
Si $\alpha + 1 \neq 0$, on remarque que $(I + A)(I - \dfrac{1}{\alpha+1}A) = I$, on en déduit que la matrice $I + A$ est inversible.
Si $\alpha = -1$, on a $A^2 = -A$ et donc $A(A + I) = 0$ on en déduit donc que $A + I$ est non inversible car sinon en multipliant cette dernière égalité à droite par l'inverse de $I + A$ on trouverait $A = 0$ ce qui est exclus par l'hypothèse.

Exercice 15 Par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
En effet $ABC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BAC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 16 Soit $(p,q) \in [1,n]^2$ et notons E_{pq} la matrice de la base canonique de $\mathcal{M}_n(K)$ définie par $E_{pq} = (\delta_{ip}\delta_{iq})$.
On a, en posant $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$:

$$\operatorname{Tr}(AE_{pq}) = a_{qp} = b_{qp} = \operatorname{Tr}(AE_{pq})$$

On en déduit donc que $A = B$.

Exercice 17 Toute forme linéaire f sur $\mathcal{M}_n(K)$ est définie par n^2 scalaires α_{ij} tels que, pour toute matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(K)$, on ait

$$f(A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} a_{ij}$$

On vérifie alors que cette expression est aussi la trace du produit de la matrice $F = (f_{ij})$ et de la matrice A si on pose, pour tous $i,j \in [1,n]$, $f_{ij} = \alpha_{ji}$.

Exercice 18 Il existe donc une matrice F telle que, pour toute matrice M, $f(M) = \mathrm{Tr}(FM)$, on en déduit que, pour toutes matrices A et B, $\mathrm{Tr}(FAB) = \mathrm{Tr}(FBA)$.
Or $\mathrm{Tr}(FAB) = \mathrm{Tr}(BFA)$, donc, pour toute matrice A on a $\mathrm{Tr}((BF)A) = \mathrm{Tr}((FB)A)$, on en déduit que $BF = FB$. La matrice F commute avec toute matrice B, la matrice F est donc une matrice d'homothétie et il existe donc $\alpha \in K$ tel que $F = \alpha I_n$, ainsi, pour toute matrice M, $f(M) = \mathrm{Tr}(\alpha I_n M) = \alpha \mathrm{Tr}(M)$

Exercice 19 On a $E = \mathrm{Ker}(s+\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s-\mathrm{Id}_E)$. Prenons une base adaptée à la décomposition en somme directe, la matrice de s dans cette base est diagonale et sa trace est bien celle demandée.

Exercice 20 Si f n'est pas une homothétie, il existe alors un vecteur x tel que la famille $\{x,f(x)\}$ soit libre (négation de la caractérisation des homothéties), en notant $e_1 = x$ et $e_2 = f(x)$, on peut compléter la famille (e_1,e_2) en une base de E possédant la propriété demandée.
Montrons la dernière propriété par récurrence sur la taille de la matrice. Celle-ci est vraie pour les matrices de taille 1.
Supposons la propriété vraie pour les matrices de taille $n-1$ ($n/ge2$).
Soit M de taille n et de trace nulle. Si M est une matrice d'homothétie de trace nulle, elle est alors nulle. Si cette matrice n'est pas une matrice d'homothétie l'application linéaire associée $\tilde{M}$ n'est pas une homothétie, il existe donc une base dans laquelle sa matrice M_1 est de la forme

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & L_2 \\ 1 & \\ 0 & \\ \vdots & M_2 \\ 0 & \end{pmatrix}$$

où L_2 est une ligne de $n-1$ éléments et M_2 est une matrice carrée de taille $n-1$ de trace nulle, il existe donc une matrice inversible P_2 de taille $n-1$ telle que $N_2 = (P_2)^{-1} M_2 P_2$ soit une matrice dont la diagonale est nulle. Considérons la matrice

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \\ \vdots & P_2 \\ 0 & \end{pmatrix}$$

dont l'inverse est

$$(P_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \\ \vdots & (P_2)^{-1} \\ 0 & \end{pmatrix}$$

On vérifie alors que

$$(P_1)^{-1} M_1 P_1 = \begin{pmatrix} 0 & L_2 P_2 \\ C_2 & N_2 \end{pmatrix}$$

où C_2 est la première colonne de $(P_2)^{-1}$. Cette dernière matrice étant bien de diagonale nulle, la propriété est donc démontrée.

Exercice 21 La réciproque est claire car $\left(\sum_i p_i\right)\left(\sum_j p_j\right) = \left(\sum_{i,j} p_i p_j\right) = \left(\sum p_i\right)$. Pour la partie directe : suivons l'indication. Si la somme est un projecteur $p \circ p = p$ donne que $\sum_{j \neq i} p_i \circ p_j = 0$. Si maintenant nous prenons pour tout i un élément de $\mathrm{Im\,m}\, p_i \bigcap \sum_{j \neq i} \mathrm{Im\,m}\, p_j$, ils'écrit $y = p_i(x_i) = \sum_{j \neq i} p_j(x_j$ et en composant des deux côtés par p_i on obtient $y = p_i \circ p_i(x_i) = 0$ donc a somme des images est directe. Maintenant pour tout $x \in E$ le vecteur $p_i(x) + \sum_{j \neq i} p_j \circ p_i(x)$ est dans $\bigoplus \mathrm{Im\,m}\, p_i$ donc chaque vecteur est nul ce qui donne pour tout (i,j) : $p_j \circ p_i = 0$.

Exercice 22 La composée de deux bijections est une bijection, La loi $\circ$ est donc bien une loi de composition interne qui est toujours associative, Id est bien une bijection et l'inverse d'une bijection est une bijection , S_n est bien un groupe. Pour 1 il y a $n-1$ choix possibles, puis pour 2 iln'y en a plus que $n-2$ et ainsi de suite. Le nombre de bijection d'un ensemble à n éléments ext $n!$. Le contre exemple est donné dans l'indication.

Exercice 23 $\tau_{i,j} = \tau_{i,i+1}\tau_{i+1,i+2}\cdots\tau_{j-2,j-1}\tau_{j-1,j}\tau_{j-2,j-1}\cdots\tau_{i+1,i+2}\tau_{i,i+1}$. Il est irréductible dans le sens où si on en enlève une le système n'est plus générateur.
Calculer γ^k et γ^{-k} puis $\gamma^k\tau_{1,2}\gamma^{-k} = \tau_{k+1,k+2}$

Exercice 24 En prenant les transformés des éléments : 1 a pour réitéré 1,7,4 puis 2 a 2,9,3,10 puis 5 qui est tout seul puis 6 a 6,11,8 d'où $\sigma = [1,7,4][2,9,3,10][6,11,8]$. On a $\sigma^{12} = I_d$. Décomposer σ en produit de transpositions.

Exercice 25 Si les scalaires $x_1,\ldots,x_n$ ne sont pas tous distincts, la matrice possède deux lignes identiques et son déterminant est nul. Supposons que les scalaires $x_1,\ldots,x_n$ sont tous distincts. Le polynôme $V(X,x_2,\ldots,x_n)$ possède donc $n-1$ zéros distincts x_2, …, x_n; en développant le déterminant suivant la première ligne, on s'aperçoit que ce polynôme est de degré $n-1$ et que son coefficient dominant est $(-1)^{n+1}V(x_2,\ldots,x_n)$. Ainsi

$$V(X,x_2,\ldots,x_n) = (-1)^{n+1}V(x_2,\ldots,x_n)(X-x_2)\cdots(X-x_n)$$

et donc

$$V(x_1,x_2,\ldots,x_n) = V(x_2,\ldots,x_n)(x_2-x_1)\cdots(x_n-x_1)$$

On montre alors facilement par récurrence que

$$V(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j-x_i)$$

Exercice 26 P_1 étant de degré 1 et unitaire est de la forme : $X+a$.En remplaçant la colonne C_2 par $C_2 - aC_1$ on trouve la deuxième colonne du déterminant de Van der Monde. En supposant avoir transformer les p premières colonnes on remplacera la $p^{\text{ème}}$ par $C_p - a_{p-2}C_{p-1} - \cdots - a_0C_1$ si dans la colonne p on a $P_{p-1} = a_0 + a_1X + \cdots + a_{p-2}X^{p-2} + X^{p-1}$ pour obtenir la bonne colonne du déterminant de Van der Monde. $\cos n\alpha$ se transforme en un polynôme en $\cos\alpha$. L'écriture est : $\cos n\alpha = \sum_{p=0}^{E(\frac{n}{2}}) \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p+k} C_n^p C_p^k \cos^{n-2p+2k}\alpha$. Seule le coefficient en $\cos^n\alpha$ nous interesse et il vaut $\sum_{p=0}^{E(\frac{n}{2}}) C_n^p \cos^n\alpha$. On devrait trouver :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{p=0}^{E(\frac{k}{2}}) C_k^p \cos^k\alpha\right) \prod_{1\leq i<j\leq n}(\cos^j\alpha - cos^i\alpha)$$

.

Exercice 27 La formule de taylor pour un ploynôme peut s'écrire avec un reste nul et donne les coordonnées dans la base canonique. En effet $P(\alpha+X)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}P^{(k)}(\alpha)X^k$. D'où la matrice des $(P(X+a_i)$ dans la base canonique :

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ P(a_0) & P(a_1) & \cdots & P(a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P^{(n)}(a_0) & P^{(n)}(a_1) & \cdots & P^{(n)}(a_n) \end{vmatrix}$$

. La famille est libre si et seulement si le déterminant est non nul. Il est donc nécessaire que $deg(P)\geq n$. En retranchant à la première ligne une combinaison des suivantes on seramène au déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

qui par Van der Mond est non nul si et seulement si les a_i sont disticts 2 à 2. Cette condition avec P de degré supérieur à n.

Exercice 28 $\begin{vmatrix} \frac{1}{x_1+y_1} & \frac{1}{x_1+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1+y_n} \\ \frac{1}{x_2+y_1} & \ddots & \ddots & \frac{1}{x_2+y_n} \\ \vdots & \ddots & \frac{1}{x_i+y_j} & \vdots \\ \frac{1}{x_n+y_1} & \frac{1}{x_n+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_n+y_n} \end{vmatrix}$ que l'on transforme comme l'indication l'indique :

$$=\begin{vmatrix} \frac{1}{x_1+y_1} & \frac{1}{x_1+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1+y_n} \\ \frac{x_1-x_2}{(x_1+y_1)(x_2+y_1)} & \ddots & \ddots & \frac{x_1-x_2}{(x_1+y_n)(x_2+y_n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{x_1-x_n}{(x_1+y_1)(x_n+y_1)} & \cdots & \cdots & \frac{x_1-x_n}{(x_1+y_n)(x_n+y_n)} \end{vmatrix} \text{ puis} = \prod_{j=2}^{n}\frac{x_1-x_j}{x_1+y_j}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{x_2+y_1} & \frac{1}{x_2+y_2} & \ddots & \frac{1}{x_2+y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{x_n+y_1} & \frac{1}{x_n+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_n+y_n} \end{vmatrix}$$

en faisant apparaître des zéros sur la première ligne : $=\prod_{j=2}^{n}\frac{x_1-x_j}{x_1+y_j}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{x_2+y_1} & \frac{y_1-y_2}{(x_2+y_1)(x_2+y_2)} & \ddots & \frac{y_1-y_2}{(x_2+y_1)(x_2+y_n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{x_n+y_1} & \frac{y_1-y_2}{(x_n+y_1)(x_n+y_2)} & \cdots & \frac{y_1-y_n}{(x_n+y_1)(x_n+y_n)} \end{vmatrix}$

en mettant en facteur : $\prod_{j=2}^{n}\frac{x_1-x_j}{x_1+y_j}\prod_{j=2}^{n}\frac{y_1-y_j}{y_1+x_j}\begin{vmatrix} \frac{1}{x_2+y_2} & \cdots & \cdots & \frac{1}{x_2+y_n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{x_n+y_2} & \frac{1}{x_n+y_3} & \cdots & \frac{1}{x_n+y_n} \end{vmatrix}$ soit $\mathcal{H}(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)=$ $\prod_{j=2}^{n}\frac{x_1-x_j}{x_1+y_j}\prod_{j=2}^{n}\frac{y_1-y_j}{y_1+x_j}\mathcal{H}(x_2,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)$.

Exercice 29 En développant par exemple par rapport à la première colonne : $\Delta_n=a\Delta_{n-1}-b\begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & b & 0 & \vdots \\ 0 & b & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & 0 & b & a \end{vmatrix}$ puis en développant par rapport à la première ligne : $\Delta_n=a\Delta_{n-1}-b^2\Delta_{n-2}$. Ou bien on résoud à l'aide de l'équation caractéristique cette relation de récurrence linéaire d'ordre 2 ou bien on devine et on vérifie :

Exercice 30 En retranchant à toutes les colonnes la première et en gardant la première on obtient : $\begin{vmatrix} a_{11}+X & a_{12}-a_{11} & \cdots & a_{1n}-a_{11} \\ a_{21}+X & a_{22}-a_{21} & \ddots & a_{2n}-a_{21} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+X & a_{n2}-a_{n1} & \cdots & a_{nn}-a_{n1} \end{vmatrix}$ en développant par rapport à la première colonne on a : $\sum_{k=1}^{n}(-1)_k(a_{nk}+X)\Delta_k$ qui est un polynôme du premier degré c'est à dire de la forme $\alpha X+\beta$. Pour le déterminant de M on a $|M(X)| = \alpha X+\beta$ et vaut en $-a\prod(r_i-a)$ et en $-b\prod(r_i-b)$. D'où le système $\begin{cases} -\alpha a+\beta = \prod(r_i-a) \\ -\alpha b+\beta = \prod(r_i-b) \end{cases}$ ce qui donne $\alpha = \dfrac{\prod(r_i-b)-\prod(r_i-a)}{a-b}$ et $\beta = \dfrac{a\prod(r_i-b)-b\prod(r_i-a)}{a-b}$ et le déterminant pour $X=0$ soit $|M| = \dfrac{a\prod(r_i-b)-b\prod(r_i-a)}{a-b}$ on suppose $a\neq b$.

Exercice 31 Le développement du déterminant donne $\Delta = e^x(y-z)-e^y(x-z)+e^z(x-y)$. En écrivant que $y = \frac{y-z}{x-z}x+\frac{x-y}{x-z}z$ la convexité de la fonction exponentielle donne que $\Delta < 0$.

Exercice 32 Il s'agit de développer : $\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = (x+(a+b+c))\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & x & c & b \\ 1 & c & x & a \\ 1 & b & a & x \end{vmatrix} = (x+a+b+c)\begin{vmatrix} x-a & c-b & b-c \\ c-a & x-b & a-c \\ c-a & 0 & a-c \end{vmatrix} = (x+a+b+c)\begin{vmatrix} x-a & c-b & b-c \\ c-a & x-b & a-c \\ 0 & b-x & 0 \end{vmatrix} = (x+a+b+c)(x-b)\begin{vmatrix} x-a & b-c \\ c-a & a-c \end{vmatrix} = (x+a+b+c)(x-b)\begin{vmatrix} x-a+b-c & b-c \\ 0 & a-c \end{vmatrix} = (x+a+b+c)(x-b)(x-a+b-c)$.

Exercice 33 Prenons comme base $(x^ke^x)_{0\leq k\leq n}$ ainsi $(x^ke^x)' = kx^{k-1}e^x+X^ke^x$ et la matrice de l'endomorphisme dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & n \\ 0 & \cdots & \cdots & \ddots & 1 \end{pmatrix}$$

. Le déterminant est 1.

Exercice 34 Il s'agit de matrice à diagonale strictement dominante. Si nous savons qu'il existe $X\neq 0$ tel que $AX=0$ posons $X=(x_i)_{1\leq i\leq n}$ on a : $\forall i\ :\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j = 0$ posons j_0 l'indice pour lequel $|x_{j_0}| = \sup_{1\leq j\leq n}|x_j|$ on a $a_{ij_0}x_{j_0} = \sum_{j\neq j_0}a_{ij}x_j$ et $|a_{ij_0}x_{j_0}| = \sum_{j\neq j_0}|a_{ij}x_j|$. Si $X\neq 0$ alors $x_{j_0}\neq 0$ et en divisant $|a_{ij_0}| \leq \sum_{j\neq j_0}\dfrac{|a_{ij}|}{|x_{j_0}|}|x_j| \leq \sum_{j\neq j_0}|a_{ij}|$. Ce qui contredit l'hypothèse et donc A est inversible.

Exercice 35

Exercice 36 Pour $n=0$ il suffit de prendre $a_0=0$ et $b_0=1$, pour $n=1$ on prend $a_1=1$ et $b_1=0$. La propriété est donc vrai pour $n=0$ et 1. Si on la suppose vraie au rang n alors $M^{n+1} = a_nM^2+b_nM$ or $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = M+2I$ d'où $M^{n+1} = (a_n+b_n)M+2a_n$. La propriété est donc vraie avec $a_{n+1} = a_n + b_n$ et $b_{n+1} = 2a_n$. Les coefficients a_n vérifient la relation de récurrence $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$. L'équation donnant les solutions géométriques est $r^2 - r - 2 = 0$ dont les solutions sont 2 et -1 et $a_n = \lambda\,(2)^n + \mu\,(-1)^n$ où λ,μ sont déterminées par les conditions initiales, ce qui donne $\lambda = \frac{1}{3}$ et $\mu = -\frac{1}{3}$. Ainsi $M^n = \left(\frac{2^n}{3} - \frac{(-1)^n}{3}\right) M + 2\left(\frac{2^{n-1}}{3} - \frac{(-1)^{n-1}}{3}\right) I$ pour $n \geq 1$.

Exercice 37 La formule du rang donne $\dim E = \dim\ker u + \dim \operatorname{Im m} u = 2p$. Prenons une base du noyau $(e_1,e_2,\cdots,e_p)$ comme $\ker u = imu$ on peut relever ces vecteurs et donc trouver $e_{p+1},\cdots,e_n$ tel que $u\,(e_{p+i}) = e_i$. Vérifions que cette famille (e_i) forme une base, il suffit de vérifier qu'elle est libre. $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p + \lambda_{p+1} e_{p+1} + \cdots \lambda_n e_n = 0$ donne en compasant par u: $\lambda_{p+1} e_1 + \cdots + \lambda_n e_p = 0$ soit $\lambda_{p+1} = \lambda_{p+2} = \cdots = \lambda_n = 0$ puis en reportant on obtient $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$. Dans cette base la matrice de u a bien la forme voulue.

Exercice 38 En développant Δ_{2n} suivant la première ligne on obtient $\Delta_{2n} = a \begin{vmatrix} a & \cdot 0 \cdot & \cdots & 0 \\ \dot{0} & \iddots & b & \dot{0} \\ b & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdot 0 \cdot & & \dot{a} \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} 0 & \cdot 0 \cdot & \cdots & b \\ a & \iddots & b & \dot{0} \\ b & & a & \vdots \\ 0 & \cdot 0 \cdot & & 0 \end{vmatrix} = a^2 \Delta_{2(n-1)} - b^2 \Delta_{2(n-1)}$ on trouve donc $\Delta_{2n} = \left(a^2 - b^2\right)^n$. Pour le second on développe par rapport à la dernière colonne pour trouver la relation $C_n = 2\cos\theta C_{n-1} - C_{n-2}$ avec $C_1 = \cos\theta$ et $C_2 = \cos 2\theta$ et finalemant $C_n = \cos n\theta$.

Exercice 39 Pour le second on considère dans $\mathbb{R}_n\,[X]$ muni de sa base canonique l'endomorphisme ayant cette matrice ainsi $u\left(X^k\right) = C_k^0 + C_k^1 X + \cdots + C_k^k X^k = (X+1)^k$. L'endomorphisme est donc défini par $u\,(P) = P\,(X+1)$ et à pour inverse $u^{-1}\,(P)\,(X) = P\,(X-1)$. Ce qui permet d'écrire la matrice inverse dont une colonne générique est $\left((-1)^k C_k^0, (-1)^{k-1} C_k^1, \cdots, C_k^k\right)$.

Exercice 40 En développant par rapport à la première colonne $\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - 3\Delta_{n-2}$ pour $n \geq 3$ avec $\Delta_1 = 2$ et $\Delta_2 = 1$. Par compatibilité de la relation on pose $\Delta_0 = 1$. La résoltion de l'équation caractéristique donne $x_1 = 1 + i\sqrt{2}$ et $x_2 = 1 - i\sqrt{2}$ et $\Delta_n = \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n$. Les conditions initiales donnent $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ et $(\lambda_1 + \lambda_2) + i\sqrt{2}\,(\lambda_1 - \lambda_2) = 2$ soit $\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{i\sqrt{2}}\right) = \frac{x_1}{2i\sqrt{2}}$ et $\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{i\sqrt{2}}\right) = -\frac{x_2}{2i\sqrt{2}}$ et finalement $\Delta_n = \frac{1}{2i\sqrt{2}}\left(x_1^{n+1} - x_2^{n+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} im\left(1 + i\sqrt{2}\right)^{n+1}$.

Exercice 41 En faisant la transformation $l_i \to l_i - l_{i-1}$ et en développant par rapport à la dernière colonne on obtient $D_n = aD_{n-1} + b^n$ avec $D_1 = a^2 + ab + b^2$ et $D_2 = a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3$. Soit $D_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$ et si $a \neq b$ $D_n = \dfrac{a^n - b^n}{a - b}$.

Exercice 42 Si $n = 1$ alors $M = \left(p^2\right)$ et $rg\,(M) = 1$ en supposant $p \neq 0$.
Si $n \geq 2$ alors $rg\,(M) = Rg\,(l_1, l_2 - l_1, \cdots, l_n - l_{n-1})$
$= rg \begin{pmatrix} p^2 & (p+1)^2 & \cdots & (p+n-1)^2 \\ 2p+1 & 2p+3 & \cdots & 2p+2n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2p+2n-3 & 2p+2n-1 & \cdots & 2p+4n-5 \end{pmatrix}$. Ainsi si $n = 2$ le déterminant de $M' = \begin{pmatrix} p^2 & (p+1)^2 \\ 2p+1 & 2p+3 \end{pmatrix}$ est $-2p^2 - 4p - 1 \neq 0$ et le rang est 2. Si $n \geq 3$ alors on remarque que $l_3 - l_2 = l_4 - l_3 = \cdots l_n - l_{n-1} = (2,2,\cdots,2)$ et $Rg\,(M) = Rg \begin{pmatrix} p^2 & (p+1)^2 & (p+n-1)^2 \\ 2p+1 & 2p+3 & 2p+2n-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= Rg\begin{pmatrix} p^2 & 2p+1 & 2p+3 \\ 2p+1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dont la matrice a -4 pour déterminant et donc le rang est 3.

Exercice 43 Le système a pour déterminant $\left(1-|\alpha|^2\right)^2$ et s'il n'est pas nul, le système n'a que la solution triviale, si $|\alpha|=1$ le système est de rang 1.

Exercice 44 Le déterminant est $A_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+(-1)^n$. Si n est impair le système est de cramer et $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\alpha_k = \left(1+(-1)^{n-1}\right)x_1 = 2x_1$ et pour $i \geq 2$ on a $x_i = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=i}^{n}(-1)^{k-i}\alpha_k - \sum_{k=1}^{i-1}(-1)^{k-i}\alpha_k\right)$. Par contre si n est pair le carctéristique est $C_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\alpha_k$. Si $C_n \neq 0$ alors il n'y a pas de solution et si $C_n = 0$ alors l'ensemble des solutions est une droite affine et $x_p = \sum_{k=p}^{n-1}(-1)^{n-k}\alpha_k + (-1)^{n-p}x_n$ pour $1 \leq p \leq n-1$.

Exercice 45 Si $Rg\,(A) = n$ alors A est inversible et $A^{-1} = (\det A)^{-1}\tilde{A}$ donc $Rg\left(\tilde{A}\right) = n$. D'autre part $A\tilde{A} = \det A$ et si $Rg\,(A) \leq n-1$ on a $A\tilde{A} = 0$ ce qui donne $im\tilde{A} \subset \ker A$ en prenant les dimensions avec la formule du rang on obtient $Rg\tilde{A} + RgA \leq n$. Si $Rg\left(\tilde{A}\right) \geq 1$ l'un des cofacteurs est non nul et donc $RgA = n-1$ et par suite $Rg\tilde{A} \leq n - RgA$ ce qui donne $Rg\tilde{A} = 1$. Si $Rg\tilde{A} = 0$ alors $\tilde{A} = 0$ et tous les cofacteurs sont nuls et $RgA \leq n-2$. Résumons

$$\begin{cases} RgA = n \Longleftrightarrow Rg\tilde{A} = n \\ RgA = n-1 \Longleftrightarrow Rg\tilde{A} = 1 \\ 0 \leq RgA \leq n-2 \Longleftrightarrow Rg\tilde{A} = 0 \end{cases}$$

Exercice 46 Pour la première question on particularise X de la même façon que pour déterminer le centre de $M_n(K)$. Pour la seconde on considère l'application de $M_n(K)$ dans son dual $(M_n(K))^*$ qui à une matrice A associe la forme linéaire $X \longmapsto Tr\,(AX)$ cette application étant injective est bijective d'où l'existence de F. Pour la troisième d'aprs ce qui précède on a $f\,(AB) = Tr\,(ABF) = Tr\,(FAB)$ et $f\,(BA) = Tr\,(BAF) = Tr\,(AFB)$ ceci étant vrai pour toute matrice B on en déduit que pour toute matrice A on a $FA = FB$ et donc F est la matrice d'une homothétie, d'où le résultat.

Exercice 47 Considèrons l'application h de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $h\,(X) = Tr\,(X)\,A$. En supposant $\alpha = 1$ on a ainsi à résoudre $f\,(X) = B$ avec $f = Id + h$. On a $h^2 = Tr\,(A)\,h$ et $(f-Id)^2 = Tr\,(A)\,(f-Id)$ soit $f^2 - (2+Tr\,(A))\,f + (1+Tr\,(A))\,Id = 0$. Si $Tr\,(A) \neq 1$ alors f est inversible d(inverse $f^{-1} = \dfrac{(2+Tr\,(A))\,Id - f}{1+Tr\,(A)}$ ou $f = Id - \dfrac{h}{1+Tr\,(A)}$; L'équation $f\,(X) = B$ admet une unique solution $X = B - \dfrac{Tr\,(B)}{1+Tr\,(A)}A$. Si $Tr\,(A) = -1$ alors $f^2 = f$ et f est un projecteur de noyau $\ker f = \{X; Tr\,(X)\,A = -X\} = \mathbb{R}A$ et $imf = \ker(f-Id) = \ker h = \ker Tr$. Ainsi si $Tr\,(B) \neq 0$ l'équation $f\,(X) = B$ n'a pas de solution, si $Tr\,(B) = 0$ alors $f\,(X) = B = f\,(B)$ a pour solution les matrices de la droite $\mathcal{D} = B + \ker f = B + \mathbb{R}A$.

Exercice 48

Exercice 49 Faisons une démonstration par récurrence sur n. Le résultat est vrai pour $n = 1$. Le supposant vrai pour les matrices de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ on a A_{n-1} qui s'écrit de façon unique $L_{n-1}U_{n-1}$ où L_{n-1} est triangulaire inférieure avec sur la diagonale $\left(\Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \cdots, \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}}\right)$ et U_{n-1} est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. On cherche L,U où écrites par blocs $L = \begin{pmatrix} T & 0 \\ \ell & b \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} T' & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec T triangulaire inférieure et T' triangulaire supérieure avec des 1 en diagonale, $\ell \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\})$ et $c \in \mathcal{M}_{n_1,1}(\mathbb{R})$. Ainsi $LU = \begin{pmatrix} TT' & Tc \\ \ell T' & \ell c + b \end{pmatrix} = A = a_{ij}$ ce qui est équivalent à $\begin{cases} TT' = A_{n-1} \\ \ell T' = (a_{n,1}, \cdots, a_{n,n-1}) \\ Tc = {}^t(a_{1,n}, \cdots, a_{n-1,n}) \\ \ell c + b = a_{n,n} \end{cases}$. D'où l'existence et l'unicité de TT', de plus T' est inversible car $\det(T') = 1$ et T est inversible car $\det(T) = \Delta_1 \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1} \cdots \dfrac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}} = \Delta_{n-1} \neq 0$. Le système précédent donne ℓ,c,b de façon unique. $\Delta_n = \det(A) = \det(L)\det(U) = 1\Delta_1 \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1} \cdots \dfrac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}} b = \Delta_{n-1} b$. D'où b et la fin de la démonstration. Pour les systèmes de Cramer on a $AX = b \Longleftrightarrow LUX = b \Longleftrightarrow \begin{cases} UX = Y \\ LY = b \end{cases}$ on est donc ramené à la résolution de deux systèmes triangulaires.