Matrices magiques

On appelle matrice $M = ((m_{i,j}))$ pseudo-magique une matrice dont les $2n$ sommes des lignes ou des colonnes sont égales, cette valeur commune est notée $s(M)$. Elle est dîte quasi-magique si de plus la somme des éléments diagonaux est égale à $s(M)$. Elle est magique si la somme de l'anti-diagonale $\sum_{i=1}^{i=n} m_{i,n-i+1}$ vaut $s(M)$.

0.1 Structures

0.1.1

Montrer que l'ensemble des matrices pseudo-magiques forme un espace vectoriel sur R dont on donnera la dimension. (on remarquera que l'on définit une telle matrice en choisissant arbitrairement les coefficients $m_{i,j}$ pour tout i et tout j entre 1 et $n-1$ ainsi que les coefficients $m_{1,n}$).

0.1.2

Donner un exemple de matrice pseudo magique qui ne soit pas quasi-magique.

0.1.3

Montre que l'ensemble des matrices quasi-magiques forme un espace vectoriel sur R dont on déterminera la dimension. (on pourra remarquer que l'apllication qui, à une matrice M, associe $\sum_{i=1}^{i=n} m_{i,1} - \sum_{i=1}^{i=n} m_{i,i}$ est une forme linéaire sur $M_n(\mathrm{R})$).

0.1.4

Exhiber de même une matrice quasi-magique qui ne soit pas magique et montrer que l'ensemble des matrices magiques forme un espace vectoriel sur R dont on déterminera la dimension.

0.2 Matrices magiques d'ordre 3

0.2.1

Montrer que les matrices magiques d'ordre 3 sont de la forme $\begin{pmatrix} x+z & -x+y+z & -y+z \\ -x-y+z & z & x+y+z \\ y+z & x-y+z & -x+z \end{pmatrix}$.

0.2.2

Montrer que le vecteur $v = (1,1,1)$ est un vecteur propre de M Préciser la valeur propre associée λ_1. Montrer que les deux autres valeurs propres sont opposées (examiner le polynôme caractéristique et écrire la somme des valeurs propres).

0.2.3

Montrer que f est une symétrie orthogonale si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée est symétrique et orthogonale. Donner les valeurs propres d'une symétrie orthogonale. Montrer que la symétrie orthogonale est un retournement si et seulement si sa trace est -1. Même question avec les rotations. (on pourra prendre une base adaptée)

0.2.4

Trouver toutes les matrices magiques représentant des rotations. Puis les matrices magiques orthogonales.