Matrices irréductibles

0.1 Matrices de permutations

On note S_n l'ensemble des permutations de $1, 2, \cdots, n$. E est un R espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ muni d'une base B $= e_1, e_2, \cdots, e_n$. Pour σ élément de S_n on appelle u_σ l'endomorphisme de E défini par, pour tous i, j de $1, 2, \cdots, n$ $u_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$, on note $P_\sigma = ((p_{i,j}))$ la matrice de cet endomorphisme dans la base B.

0.1.1

Pour σ de S_n expliciter les $p_{i,j}$; donner en particulier P_{Id} ; pour σ, σ' de S_n déterminer $P_{\sigma\sigma'}$

0.1.2

Déduire de ce qui précède que l'application φ de S_n dans $GL_n(\mathrm{R})$ qui à σ associe P_σ est bien définie et que c'est un morphisme de groupes. Que vaut $(P_\sigma)^{-1}$?

0.1.3

Calculer ${}^tP_\sigma$ et en déduire que P_σ est orthogonale.

0.1.4

Pour une matrice $A = ((a_{i,j}))$ représentant l'endomorphisme v et σ de S_n calculer $u_\sigma^{-1} \circ v \circ u_\sigma(e_j)$. En déduire les termes de la matrice ${}^tP_\sigma A P_\sigma$.

0.2 Matrices réductibles

On dit que l'élément $A = ((a_{i,j}))$ de $M_n(\mathrm{R})$ est réductible s'il existe σ de S_n telle que ${}^tP_\sigma A P_\sigma$ soit de la forme $A' = \begin{pmatrix} U & V \\ 0 & W \end{pmatrix}$ (Ecriture par blocs).

0.2.1

Donner un exemple non trivial de matrice réductible. Montrer que si, pour tout couple (i, j) $a_{i,j} \neq 0$, alors A est irréductible.

0.2.2

On se place dans le cas $n = 2$. Montrer que A est irréductible si et seulement si $a_{1,2}a_{2,1} \neq 0$.(On pourra examiner les éléments de S_2). La réciproque de la question précédente est-elle vraie ?

0.2.3

Dans le cas général, montrer que si A est irréductible, alors pour tout p entier naturel non nul, A^p est réductible. En déduire que s'il existe p entier naturel non nul tel que tous les coefficients de A^p soient non nuls, alors A est irréductible. Appliquer ce qui précéde pour déterminer si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est irréductible. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle irréductible ? Que peut-on en conclure ?