Matrices et Structure euclidienne

0.1 Matrice à diagonale dominante

Soit une matrice complexe de taille $n \times n$ $A = ((a_{i,j}))$ telle que pour tout i : $|a_{i,j}| > \sum_{j=1, j \neq i}^{j=n} |a_{i,j}|$. Démontrer que A est inversible.

0.2 norme

0.2.1

Montrer que l'application $\phi : \mathrm{M_n}(\mathrm{R}) \longrightarrow \mathrm{M_n}(\mathrm{R})$, définie par : $\phi(A, B) = Tr(A^t B)$ est un produit scalaire; calculer en particulier $\phi(A, A)$. On note $\|\|$ la norme associée à ϕ. Exprimer $\|A\|$ en fonction de $((a_{i,j}))$.

0.2.2

Montrer que pour toute matrice $A = ((a_{i,j}))$ de $\mathrm{M_n}(\mathrm{R})$ on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{i=n} a_{i,i} \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} a_{i,j}^2$$

. En déduire la norme de l'application $Tr : \mathrm{M_n}(\mathrm{R}) \longrightarrow \mathrm{R}$ norme subordonnée à la norme $\|\|$.

0.2.3

Soit Ω un élément de $\mathrm{O_n}(\mathrm{R})$. Montrer que pour toute matrice A, $\|\Omega A\| = \|A\|$. Prouver que si A est une matrice symétrique, la matrice $B =^t \Omega A \Omega$ est-elle même symétrique et que l'on a, en notant $((b_{i,j}))$ les coefficients de B :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} b_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} a_{i,j}^2$$

0.3

Donner les normes de matrices subordonnées aux trois normes usuelles de $\mathrm{C^n}$.

0.4

Soit A une matrice de $\mathrm{M_n}(\mathrm{K})$ admettant n valeurs propres deux à deux distinctes et B une matrice telle que $B^2 = A$, montrer que B est diagonalisable.

0.4.1

Soit A une matrice réelle inversible, montrer que les valeurs propres de ${}^tAA$ sont strictement positives. Montrer que $\|A\|$ est la racine carrée de la plus grande valeur propre de ${}^tAA$ et $\|{}^tA^{-1}\| = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}$ où λ_n est la plus petite valeur propre de ${}^tAA$. Montrer que $inf\{\|A - M\| : det(M) = 0\} = \sqrt{\lambda_n}$.