Matrices classiques

0.1 Matrice diagonalisable

0.1.1

Diagonaliser la matrice $n \times n$ suivante : $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ élément de $\mathrm{M_{2n}(R)}$ étudier la diagonalisabilité de A. Effectuer la diagonalisation quand elle est possible.

0.1.2

Soient la matrice $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, diagonaliser J_n puis en déduire le déterminant de la matrice circulaire : $J_n = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & 0\cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$.

0.2 matrices stochastiques

On considère les matrices de la forme : $A = ((a_{i,j}))$ vérifiant pour tout i, j : $a_{i,j} \in [0;1]$ et pour tout i : $\sum_{j=1}^{j=n} a_{i,j} = 1$.

0.2.1

Montrer que 1 est valeur propre. Soit λ une valeur prore de A dans C, montrer que $|\lambda| \leq 1$ et qu'il existe $\omega \in [0;1]$: $|\lambda - \omega| \leq 1 - \omega$.

0.2.2

On suppose ici que pour tout i : $a_{i,i} > 0$. Démontrer que les images dans le plan complexe des valeurs propres de A dans C sont toutes situées dans un disque fermé de rayon < 1, tangent intérieurement en 1 au cercle trigonométrique.

0.3 déterminants

Calculer le détermenant de Cauchy $det\left(\left(\dfrac{1}{a_i + b_j}\right)\right)$. Démonter que le déterminant $det\,(a_{i,j} + x)$ est un polynôme en x de degré inférieur à 1 , puis calculer le déterminant de la matrice : $\begin{pmatrix} \lambda_1 & a & \cdots & a \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & \lambda_n \end{pmatrix}$