Chapitre 11

Intégration sur un segment

11.1 Introduction

Le calcul intégral remonte très loin. Déjà Archimède (-287) calcule des aires et des volumes,Kepler (1571), Fermat (1636) calcule les aires dessous une courbe.
Newton (1650), Leibniz (1660), Bernouilli (1690) découvrent que l'intégration est l'opération inverse de la différentiation. Leibniz en 1686 introduit le signe intégral et le mot intégrale est de Bernouilli (1690). A cette époque l'aire est la somme de petits rectangles et puis petit à petit le passage à la limite est osé. Fourier en 1822 note l'aire entre les bornes a,b : $\int_a^b f(x)dx$ alors que $\int f(x)dx$ représente une primitive quelconque. Jusqu'en 1980 il y avait des tables de primitives comptant des centaines de pages (Gröbner et Hofreiter (1949)) aujourd'hui nous avons les logiciels.
Bernouilli (1694) fait des intégrations par parties et trouve des séries du genre de celle de Taylor. Cauchy (1821) découvre que cette méthode donne précisément la formule de Taylor avec reste intégral.
La décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle apparaît dans la correspondance entre Bernouilli et Leibniz environ en 1700.
Le calcul pratique d'intégrales a toujours intéressé les mathématiciens : Newton (1671), Simpson (1743), Lambert (1772), Liouville (1835). En 1918 Steklov écrit que le problème des quadratures, vieux de 200 ans est loin d'être épuisé.
Après la méthode de décomposition en éléments simples, d'autres intégrales résistaient et résistent encore. C'est ainsi que Legendre (1752), Abel 1802), Jacobi (1804), Weierstrass (1815) découvrent de nouvelles fonctions par le biais des intégrales elliptiques.

11.2 Intégrale d'une fonction en escalier

Soit f une fonction en escalier définie sur le segment $[a,b]$ $(a < b)$ à valeurs dans l'espace vectoriel E de dimension finie. Soit $S : a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ est une subdivision adaptée à f. Pour tout $i \in [0,n-1]$, notons m_i la valeur constante de f sur l'intervalle $]a_i,a_{i+1}[$ et

$$I_S(f) = \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i)m_i$$

Proposition 1 *Soient S et S' deux subdivisions adaptées à une fonction f en escalier définie sur le segment $[a,b]$ $(a < b)$ à valeurs dans l'espace vectoriel E de dimension finie. On a*

$$I_S(f) = I_{S'}(f)$$

La valeur commune de ces sommes est appelée intégrale de f sur le segment $[a,b]$ et notée $\int_{[a,b]} f$.

[Ind] Que se passe-t-il lorque l'on ajoute un point à une subdivion adaptée?

Proposition 2 *Soient* $[a,b]$ $(a < b)$ *un segment de* $\mathbb{R}$ *et* E *un espace vectoriel de dimension finie. L'application de* $\mathcal{E}([a,b],E)$ *dans* F *qui, à une fonction en escalier* f *associe son intégrale* $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ *est linéaire et vérifie, pour toute norme sur* E*:*

$$||\int_{[a,b]} f|| \leq \int_{[a,b]} ||f|| \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} ||f(x)||$$

[Ind] Appliquer les définitions.

11.3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Soit f une fonction continue par morceaux définie sur le segment $[a,b]$ à valeurs dans un espace vectoriel normé E de dimension finie. Il existe une suite (f_n) de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$. Étudions la suite $(\displaystyle\int_{[a,b]} f_n)$. On a, pour tout entiers p et q:

$$||\int_{[a,b]} f_p - \int_{[a,b]} f_q|| \leq (b-a)||f_p - f_q||_\infty$$

On en déduit que la suite $(\displaystyle\int_{[a,b]} f_n)$ est une suite de Cauchy. Puisque E est de dimension finie, cette suite converge vers un vecteur $l \in E$.

Proposition 3 *Soient* f *une fonction continue par morceaux définie sur le segment* $[a,b]$ *à valeurs dans un espace vectoriel normé* E *de dimension finie. Si* (f_n) *et* (g_n) *sont deux suites de fonctions en escalier qui convergent uniformément vers* f *sur* $[a,b]$*, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} f_n = \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} g_n$$

La valeur commune de ces limites est appelée intégrale de f *sur le segment* $[a,b]$ *et notée* $\displaystyle\int_{[a,b]} f$.

[Ind] Construire avec les suites (f_n) et (g_n) une suite qui converge vers f et dont (f_n) et (g_n) sont des suites extraites.

Remarque: Les deux notions d'intégrale coïncident pour une fonction en escalier.

Proposition 4 *Soient* $a < c < b$ *des réels,* E *un espace vectoriel de dimension finie. Soit* $f \in C^0_{pm}([a,b],E)$*, les restrictions de* f *aux segments* $[a,c]$ *et* $[c,b]$ *sont continues par morceaux et*

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,d]} f$$

[Ind] Vérifier d'abord que la propriété est vraie pour une fonction en escalier.

Remarque: On ne modifie pas la valeur d'une intégrale en modifiant la fonction continue par morceaux à intégrer en un nombre fini de points.

Définition 1 *Soient* $[a,b]$ $(a < b)$ *un segment de* $\mathbb{R}$*,* E *un espace vectoriel de dimension finie et* $f \in C^0_{pm}([a,b],E)$*. Si* c,d *sont des points de* $[a,b]$*, on note*

$$\int_c^d f = \begin{cases} \displaystyle\int_{[c,d]} f & si\ c < d \\ \displaystyle -\int_{[c,d]} f & si\ c > d \\ 0 & si\ c = d \end{cases}$$

On note aussi $\int_c^d f = \int_c^d f(t)dt$ *où* t *est dite variable muette d'intégration.*

Remarque: La notation $[a,b]$ pour un segment de $\mathbb{R}$ n'implique pas que $a < b$ et on fera attention aux différentes notations: si $I = [a,b]$ et $f \in C^0_{pm}([a,b],E)$:

$$\int_I f = \int_{\inf I}^{\sup I} f = \text{signe}(b-a) \int_a^b f$$

avec désormais la convention $\int_I f = 0$ si le segment I est réduit à un point.

Proposition 5 *Soient* $[a,b]$ *un segment de* $\mathbb{R}$ *et* E *un espace vectoriel de dimension finie. L'application de* $C^0_{pm}([a,b],E)$ *dans* E *qui, à une fonction continue par morceaux* f *associe son intégrale* $\int_a^b f$ *est linéaire et vérifie, pour toute norme sur* E*:*

$$||\int_a^b f|| \leq \left|\int_a^b ||f||\right| \leq |b-a| \sup_{x\in[a,b]} ||f(x)||$$

[Ind] Appliquer la propriété correspondante pour les fonctions en escalier qui a déjà été démontrée.

Proposition 6 (Relation de Chasles) *Soient* I *un segment de* $\mathbb{R}$*,* a*,* b *et* c *des points de* I*,* E *un espace vectoriel de dimension finie et* $f \in C^0_{pm}(I,E)$*. On a*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

[Ind] Vérifier.

Proposition 7 *Soit* u *une application linéaire entre deux espaces vectoriels* E *et* G *de dimension finie,* I *un segment de* $\mathbb{R}$ *et* $f \in C^0_{pm}(I,E)$*. La fonction* $u(f)$ *est alors un élément de* $C^0_{pm}(I,G)$ *et*

$$\forall a,b \in I \quad u\left(\int_a^b f\right) = \int_a^b u(f)$$

[Ind] La propriété est vraie pour les fonctions en escalier.

Proposition 8 *Soit* $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_p\}$ *une base de l'espace vectoriel* E *de dimension finie. Si* f *appartient à* $C^0_{pm}([a,b],E)$*, les coordonnées* $(f_1, \ldots, f_p)$ *de* f *sur la base* $\mathcal{B}$ *sont des éléments de* $C^0_{pm}([a,b],K)$ *et*

$$\int_a^b f = \sum_{k=1}^{p} \left(\int_a^b f_k\right) e_k$$

[Ind] Passer pr les coordonnées dans la base.

Cas particulier des fonctions continues Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$ $((a < b)$ à valeurs dans l'espace vectoriel E de dimension finie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et, pour tout entier $k \in [0,n]$ notons $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$. Choisissons dans chaque intervalle $[a_k,a_{k+1}]$ un point $\xi_{n,k}$. On peut alors construire une fonction φ_n en escalier sur $[a,b]$ de la façon suivante, pour tout $x \in [a,b[$, il existe un unique entier $k \in [0,n-1]$ tel que $x \in [a_k,a_{k+1}[$, on pose alors $\varphi_n(x) = f(\xi_{n,k})$ et $\varphi_n(b) = f(b)$. En utilisant la continuité uniforme de la fonction f sur $[a,b]$, on montre facilement que la suite (φ_n) converge uniformément vers f. On en déduit que

$$\int_a^b f = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_{n,k})$$

C'est la méthode générale des rectangles, on peut particulariser les points choisis et on trouve:

$$\begin{aligned}\int_a^b f &= \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n}) \quad \text{Méthode des rectangles (point gauche)}\\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n}) \quad \text{Méthode des rectangles (point droit)}\\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+(k+\frac{1}{2})\frac{b-a}{n}) \quad \text{Méthode des rectangles (point milieu)}\end{aligned}$$

Ces méthodes permettent de calculer des approximations numériques de l'intégrale de$f$ sur $[a,b]$, de découvrir la limite de certaines suites en reconnaissant une des formes ci-dessus, parfois même de trouver la valeur de l'intégrale d'une fonction.

Exercice 1 Calculer l'intégrale d'une fonction affine sur un segment.

Remarque: La méthode des rectangles donne l'intégrale d'une fonction continue comme la limite d'une suite d'isobarycentres et est adaptée à des démonstrations utilisant la convexité.

Exercice 2 Soit φ une fonction convexe définie sur $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle continue définie sur $[0,1]$. Montrer que

$$\varphi(\int_0^1 f(t)dt) \leq \int_0^1 \varphi(f(t))dt.$$

En utilisant maintenant des approximations de la fonction f par des fonctions continues et affines par morceaux sur des subdivisions régulières de $[a,b]$, on trouve la méthode des trapèzes:

$$\int_a^b f = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n}) + \frac{f(b)}{2}\right)$$

Cas particulier des fonctions réelles ou complexes

Proposition 9 *Soit $[a,b]$ $(a < b)$ un segment de $\mathbb{R}$.*
a) (Positivité de l'intégrale) Soit $f \in C^0_{pm}([a,b],\mathbb{R})$, on a

$$f \geq 0 \implies \int_{[a,b]} f \geq 0$$

b)(Monotonie de l'intégrale) Soit f et g deux éléments de $C^0_{pm}([a,b],\mathbb{R})$, on a :

$$f \leq g \implies \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$$

[Ind] Utiliser l'inégalité de la moyenne.

On peut affiner la proposition précédente:

Proposition 10 *Soit $[a,b]$ $(a < b)$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f \in C^0_{pm}([a,b],\mathbb{R})$.*
Si $f \geq 0$ et si f est non nulle en un point où elle est continue, on a $\int_{[a,b]} f > 0$.

[Ind] Si une fonction est continue et non nulle en un point elle est non nulle autour du point.

Exercice 3 Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f \in C^0_{pm}([a,b],\mathbb{R}_+)$. Que peut-on dire de f si

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b |f|$$

Proposition 11 *Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ ($a \neq b$) à valeurs dans $\mathbb{R}$. La valeur $\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f$ est appelée valeur moyenne de la fonction f sur $[a,b]$ et on a, en notant $m = \inf_{[a,b]} f$ et $M = \sup_{[a,b]} f$:*

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f \leq M$$

[Ind] Intégrer des inégalités.

Remarque: Si f est continue sur $[a,b]$, il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f$$

Proposition 12 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Soient f et g deux fonctions continues par morceaux définies sur le segment $[a,b]$ ($a < b$) à valeurs dans $\mathbb{C}$.*

$$\left|\int_{[a,b]} fg\right| \leq \int_{[a,b]} |f|\,|g| \leq \sqrt{\int_{[a,b]} |f|^2}\sqrt{\int_{[a,b]} |g|^2}$$

De plus si f et g sont continues sur $[a,b]$ alors il y a égalité si et seulement si (f,g) est liés dans l'espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ à valeurs complexes.

[Ind] Trouver un trinôme du second degré ne s'annulant pas.

Exercice 4 Soit $f \in C^0_{pm}([a,b],\mathbb{C})$. Montrer que

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \sqrt{|b-a|}\sqrt{\int_{[a,b]} |f|^2}$$

Exercice 5 Soient F, G et H des espaces vectoriels normés de dimension finie, B une application bilinéaire de $F \times G$ dans H et deux réels $a < b$. Si $f \in C^0_{pm}([a,b],F)$ et $g \in C^0_{pm}([a,b],G)$, montrer que $(B(f,g) \in C^0_{pm}([a,b],H)$. Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour toute fonction $f \in C^0_{pm}([a,b],F)$ et toute fonction $g \in C^0_{pm}([a,b],G)$, on a

$$||\int_{[a,b]} B(f,g)|| \leq K\sqrt{\int_{[a,b]} ||f||^2}\sqrt{\int_{[a,b]} ||g||^2}$$

et

$$||\int_{[a,b]} B(f,g)|| \leq K \sup_{[a,b]} ||f|| \int_{[a,b]} ||g||$$

11.3.1 Intégration sur un segment d'une suite de fonctions continues

Proposition 13 (Norme de la convergence en moyenne) *Soit I un segment de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel normé de dimension finie. L'application N_1 de $C^0(I,E)$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour $f \in C^0(I,E)$ par*

$$N_1(f) = \int_I ||f(t)||dt$$

est une norme, appelée norme de la convergence en moyenne.

[Ind] Le vérifier.

Proposition 14 *Soit I un segment de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel normé de dimension finie. L'application intégrale qui, à une fonction f de $C^0(I,E)$ associe son intégrale $\int_I f$ est une application linéaire continue lorsqu'on munit $C^0(I,E)$ de la norme de la convergence en moyenne.*

[Ind] Traduire la continuité en termes de suites.

Proposition 15 *Soit I un segment de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel normé de dimension finie. Pour toute fonction pour $f \in C^0(I,E)$, on a*

$$N_1(f) \leq L||f||_\infty$$

où L est la longueur du segment I.

[Ind] Traduire en termes d'intégrales.

Une limite uniforme d'une suite de fonctions continues par morceaux n'est pas forcément continue par morceaux. Cependant si cette limite est continue par morceaux, on a alors:

Théorème 1 *Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux définies sur un intervalle $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie. Si la suite converge uniformément vers une fonction f continue par morceaux alors $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$.*

[Ind] Utiliser les majorations.

Remarque: Sous les hypothèses du théorème précédent, on peut donc écrire :

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Exercice 6 Trouver des exemples de suites (f_n) convergeant simplement vers une fonction f sur $[0,1]$ et telle que la suite $(\int_0^1 f_n)$ ne converge pas vers $\int_0^1 f$.

Exercice 7 I étant un segment de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel de dimension finie, soit (f_n) une suite de fonctions de $C^0(I,E)$. Montrer que la convergence uniforme de la suite (f_n) entraîne la convergence en moyenne de cette suite vers la même fonction et que la réciproque est fausse.

Proposition 16 (Norme de la convergence quadratique) *Soit I un segment de $\mathbb{R}$, E un espace préhilbertien de dimension finie et $(\cdot,\cdot)$ son produit scalaire. L'application de $C^0(I,E) \times C^0(I,E)$ dans $\mathbb{R}$ qui à f et f éléments de $C^0(I,E)$ associe*

$$< f,g >= \int_I (f(t),g(t))dt$$

est un produit scalaire.
La norme associée s'appelle la norme de la convergence quadratique.

[Ind] Le vérifier.

Exercice 8 I étant un segment de $\mathbb{R}$, comparer les différentes normes usuelles sur $C^0(I,\mathbb{C})$: norme de la convergence uniforme, norme de la convergence en moyenne et norme de la convergence quadratique.

11.3.2 Dérivation et intégration

Remarquons tout d'abord qu'une fonction continue par morceaux sur un segment I possède en tout point une limite à droite (si le point n'est pas bord droit de I) et une limite à gauche (si le point n'est pas bord gauche de I). On note souvent, si $x_0 \in I$ n'est pas bord droit de I,

$$f(x_0+) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x)$$

et

$$f(x_0-) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$$

si $x_0 \in I$ n'est pas bord gauche de I

Proposition 17 *Soient f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ $(a < b)$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie et c appartenant à I. L'application E définie sur I par $F(x) = \int_c^x f(t)dt$ est continue sur I, dérivable à gauche et à droite en tout point x de I (lorsque ces notions ont un sens) et*

$$\begin{aligned} \forall x \in]a,b[\quad & F'_d(x) = f(x+) \\ & F'_g(x) = f(x-) \\ & F'_d(a) = f(a+) \\ & F'_g(b) = f(b-) \end{aligned}$$

En particulier F est dérivable en tout point où f est continue.

[Ind] Montrer que F est lipschitzienne, évaluer un développement limité de F.

Proposition 18 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et f une fonction continue sur I à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie. La fonction f admet des primitives sur I, c'est à dire qu'il existe des fonctions dérivables sur I dont la dérivée est f.*
Deux primitives de f ne diffèrent que par une constante et plus précisément si F est une primitive de f sur I, alors, pour tout point c de I, il existe $\ell \in E$ tel que

$$\forall x \in I \quad F(x) = \ell + \int_c^x f(t)dt$$

[Ind] Appliquer la proposition précédente au cas où f est continue.

Proposition 19 *Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non réduit à un point à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie. Si F est une primitive de f sur I, on a*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

On note alors $[F]_a^b = F(b) - F(a)$.

[Ind] Écrire F par la formule précédente.

Remarque: Une primitive d'une fonction continue est de classe C^1.

Exercice 9 Soit K l'application de $[0,1] \times [0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui, a $(x,y) \in [0,1]^2$ associe $x(1-y)$ si $x < y$ et $y(1-x)$ si $x \geq y$. Si f est continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, étudier la fonction

$$x \mapsto \int_0^1 K(x,y)f(y)dy$$

Intégration par parties

Proposition 20 *Soient f et g deux fonctions de classe C^1 définies sur l'intervalle I à valeurs dans $\mathbb{C}$.*

$$\forall a,b \in I \qquad \int_a^b f'(t)g(t)dt = [fg]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt$$

[Ind] Utiliser $(f \times g)'$ puis intgrer.

Exercice 10 Généraliser cette proposition à un " produit " quelconque.

On peut généraliser ce résultat à des fonction C^1 par morceaux de la façon suivante. Si f est de classe C^1 par morceaux sur un segment à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie, sa dérivée est une fonction définie sur ce segment privé d'un nombre fini de points, notons les a_1, ..., a_p. On eut alors prolonger cette fonction dérivée en une fonction définie sur le segment tout entier en se donnant des valeurs arbitraires f_1, ..., f_p comme images des points a_1, ..., a_p. On constate alors que la fonction qui en résulte est continue par morceaux et que son intégrale ne dépend pas des valeurs prises aux points où f n'est pas dérivable. On note $\int_I \tilde{f}$, ou encore, par abus de langage, $\int_I \tilde{f}$ la valeur de cette intégrale.

Exercice 11 Soit f une fonction de classe C^1 par morceaux sur $[a,b]$ $(a < b)$ à valeurs dans E et S une subdivision $a_0 = a < \ldots < a_n = b$ de $[a,b]$ adaptée à f. Montrer que

$$\int_a^b \tilde{D}f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i+1}-) - f(a_i+)$$

Soient f et g deux fonctions de classe C^1 par morceaux définies sur le segment $[a,b]$ $(a < b)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $a = a_0 < \cdots < a_n = b$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f et à g, on a

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\tilde{g}(t)dt &= \sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i+1}-)g(a_{i+1}-) - f(a_i+)g(a_i+) - \int_a^b \tilde{D}f(t)g(t)dt \\ &= f(b-)g(b-) - f(a+)g(a+) - \sum_{i=1}^{n-1} f(a_i+)g(a_i+) - f(a_i-)g(a_i-) - \int_a^b \tilde{D}f(t)g(t)dt\end{aligned}$$

En particulier, si f et g sont continues et C^1 par morceaux

$$\int_a^b f(t)\tilde{D}g(t)dt = [fg]_a^b - \int_a^b \tilde{D}f(t)g(t)dt$$

Changement de variable

Proposition 21 *Soient f une fonction* **continue** *sur le segment $[a,b]$ $(a < b)$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie, φ une fonction* **de classe** C^1 *définie sur l'intervalle $[\alpha,\beta]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[a,b]$. On a*

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)du$$

[Ind] Dérivér.

Proposition 22 *Soient f une fonction* **continue par morceaux** *sur le segment $[a,b]$ $(a < b)$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie, φ une application strictement monotone de $C^1([\alpha,\beta],\mathbb{R})$ définie sur l'intervalle $[\alpha,\beta]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[a,b]$. Alors la fonction $f \circ \varphi$ est continue par morceaux et*

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)du$$

[Ind] Reprendre la démonstration précédente en regardant la régularité d'une fonction compsé par φ.

Exercice 12 Changement de variable affine. Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ $(a < b)$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie et A et B deux réels, montrer que, si α et β sont deux réels tels que $A\alpha + B$ et $A\beta + B$ appartiennent à $[a,b]$, on a:

$$A\int_\alpha^\beta f(At+B)dt = \int_{A\alpha+B}^{A\beta+B} f(t)dt$$

Exercice 13 Soit f une fonction continue par morceaux définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans l'espace vectoriel E de dimension finie et T périodique. Montrer que

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$$

$$\forall a,b \in \mathbb{R} \quad \int_{a+T}^{b+T} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

Exercice 14 Sous quelles conditions une primitive d'une fonction continue périodique est-elle périodique?

11.3.3 Étude globale des fonctions de classe C^1

Théorème 2 (Inégalité des accroissements finis) *Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$ et de classe C^1 sur $]a,b[$ à valeurs dans l'espace vectoriel normé E de dimension finie. Si f' soit borné sur $]a,b[$ alors*

$$||f(b) - f(a)|| \leq |b-a| \sup_{x\in]a,b[} ||f'(x)||$$

[Ind] Écrire f à l'aide de sa dérivée.

Ce théorème permet de caractérisation les fonctions lipschitziennes sur un intervalle parmi les fonctions de classe C^1.

Proposition 23 *Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$ et de classe C^1 sur $]a,b[$ à valeurs dans l'espace vectoriel normé E de dimension finie. La fonction f est lipschitzienne sur $[a,b]$ si et seulement si la fonction f' est bornée sur $]a,b[$.*

[Ind] Partie directe et réciproque.

Pour terminer ce paragraphe, un proposition qui permet de montrer la dérivabilité d'une fonction par passage à la limite.

Proposition 24 *Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ et de classe C^1 sur $]a,b]$ à valeurs dans l'espace vectoriel E de dimension finie et si f' admet une limite en a, alors f est de classe C^1 sur $[a,b]$.*

[Ind] Appliquer les accroissements finis à la fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - \ell x$.

Proposition 25 *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ et de classe C^k sur $]a,b]$ à valeurs dans l'espace vectoriel E de dimension finie et si, pour tout entier $k \in [1,p]$, $f^{(k)}$ admet une limite en a, alors f est de classe C^p sur $[a,b]$.*

[Ind] Par récurrence.

11.3.4 Formules de Taylor

Théorème 3 (Formule de Taylor avec reste intégral) *Soit f une fonction de classe C^{p+1} sur l'intervalle $[a,b]$ à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie. On a*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)dt$$

[Ind] La formule est vraie pour $p = 0$ car alors f est une primitive de f'. On démontre alors la formule par récurrence en utilisant une intégration par parties.

Théorème 4 (Formule de Taylor avec reste intégral) *Soit f une fonction de classe C^p et de classe C^{p+1} par morceaux sur l'intervalle $[a,b]$ à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie. On a*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)dt$$

où $f^{(p+1)}$ désigne la fonction dérivée d'ordre $p+1$(au sens des fonctions de classe C^{p+1} par morceaux de la fonction f.

[Ind] Écrire la formule de Taylor au rang p. puis suivre l'intégration par parties pour les fonctions C^1 par morceaux.

Proposition 26 (Inégalité de Taylor-Lagrange) *Soit f une fonction de classe C^p et de classe C^{p+1} par morceaux sur l'intervalle $[a,b]$ à valeurs dans un espace vectoriel normé E de dimension finie. On a*

$$||f(b) - \sum_{k=0}^{p} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)|| \leq M_{p+1}(f) \frac{|b-a|^{p+1}}{(p+1)!}$$

[Ind] Majorer le reste.

Proposition 27 *Si f est $C([a,b],E)$ et admet en x_0 un développement limité d'ordre n : $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$ alors une primitive $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ admet un développement limité d'ordre $n+1$ en x_0 obtenu par intégration.*

[Ind] Utiliser la formule de la moyenne.

Théorème 5 (Formule de Taylor-Young) *Soit f une fonction de classe C^p sur l'intervalle $[a,b]$ à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie. On a*

$$\forall h \in [0,b-a] \quad f(a+h) = \sum_{k=0}^{p} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + o(h^p)$$

[Ind] Par récurrence.

11.3.5 Suites et séries de fonctions numériques de classe C^k

Théorème 6 *Soit (f_n) une suite de fonctions continues définies sur un intervalle $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie, convergeant uniformément vers une fonction f. Soit (F_n) une suite de primitives (terme à terme) de la suite (f_n). S'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\lim_{n\to\infty} F_n(c) = \ell$ alors la suite (F_n) converge uniformément vers la primitive F de f qui vérifie $F(c) = l$.*

[Ind] Écrire une forme générale de primitive et majorer.

Théorème 7 *Soit (f_n) une suite de fonctions de classe C^1 définies sur un intervalle $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie. Si la suite (f'_n) converge uniformément vers une fonction g et s'il existe $c \in [a,b]$ telle que $\lim_{n\to\infty} f_n(c) = \ell$ existe alors la suite f_n converge uniformément vers une fonction f de classe C^1 telle que $f' = g$.*

[Ind] Utiliser le théorème précédent avec f'_n.

Remarque: Sous les hypothèses du théorème précédent, on peut donc écrire :

$$\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}f_n(x).$$

Remarque: Une limite même uniforme d'une suite de fonctions dérivables n'est pas forcement dérivable et même si elle l'est, il n'est pas certain que la suite des dérivées converge simplement vers la dérivée de la limite.

Exercice 15 Étudier, à ce point de vue, les suites de fonctions définies par:
a) $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$ $(x \in \mathbb{R})$
b) $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\sin nx$ $(x \in \mathbb{R})$.

Un cas usuel d'étude est la recherche de la classe de dérivabilité de la limite d'une suite. On peut alors utiliser le théorème suivant qui se démontre par récurrence.

Théorème 8 *Soit p un entier $(p \geq 1)$ et (f_n) une suite de fonctions de classe C^p définies sur un intervalle $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie. Si la suite $(f_n^{(p)})$ converge uniformément vers une fonction g et si, pour tout entier $k \in [0,p-1]$ il existe $c_k \in [a,b]$ telle que $\lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(c_k)$ existe alors la suite f_n converge uniformément vers une fonction f de classe C^p telle que $f^{(p)} = g$.*

[Ind] Appliquer le thóréme précédent pour une récurrence.

Ces théorèmes s'appliquent bien entendu aux séries de fonctions convergentes, puisque la somme est la limite de la suite des sommes partielles. On peut cependant utiliser la notion de convergence normale, spécifique aux séries de fonctions, ce qui donne un moyen très puissant et rapide de prouver la convergence uniforme.

Théorème 9 *Soit $(\sum u_n)$ une série de fonctions continues définies sur un intervalle $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie, convergeant uniformément vers une fonction s. Soit $\sum U_n$ une série de primitives (terme à terme) de la série $\sum u_n$. S'il existe $c \in [a,b]$ tel que la série $\sum U_n(c)$ converge alors la série $\sum U_n$ converge uniformément vers la primitive S de s qui vérifie $S(c) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} U_n(c)$.*

[Ind] Prendre la suite des somes partielles.

Remarque: Si la série de fonctions continues $\sum u_n$ est uniformément convergente vers la fonction s sur l'intervalle $[a,b]$, on peut, en particulier, appliquer le théorème si les fonctions U_n sont définies par $U_n(x) = \displaystyle\int_c^x u_n(t)dt$ ($c \in [a,b]$ car alors $U_n(c) = 0$. On dit alors que la série $\sum U_n$ est une série intégrée terme à terme de la série $\sum u_n$

Théorème 10 *$\sum u_n$ une série de fonctions de classe C^p définies sur un intervalle $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie. Si la série $\sum u_n^{(p)}$ converge uniformément vers une fonction t et si, pour tout entier $k \in [0,p-1]$ il existe $c_k \in [a,b]$ telle que $c \in [a,b]$ tel que la série $\sum u_n^{(k)}(c_k)$ converge alors la série $\sum u_n$ converge uniformément vers une fonction s de classe C^p telle que $s^{(p)} = t$.*

[Ind] Prendre la suite des somes partielles.

Remarque: Sous les hypothèses du théorème précédent, on peut donc écrire :

$$\frac{d^p}{dx^p}\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^p}{dx^p}u_n(x).$$

Étude de la fonction exponentielle Étudions la fonction $f : t \mapsto e^{tz}$ où $z \in \mathbb{C}$. Cette fonction est la somme de la série de terme général $u_n(t) = \dfrac{z^n t^n}{n!}$. Ces fonctions sont de classe C^∞ et, pour tout entier p,

$$u_n^{(p}(t) = \begin{cases} z^p \dfrac{z^{n-p} t^{n-p}}{(n-p)!} & \text{si} p \leq n \\ 0 & \text{si} p > n \end{cases}$$

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, plaçons nous sur l'intervalle $[-a,a]$ de $\mathbb{R}$. Pour tout entier n supérieur à p, on a

$$\forall t \in [-a,a] \quad \left| u_n^{(p}(t) \right| \leq |z^n| \frac{a^{n-p}}{(n-p)!}$$

Si $z \neq 0$, on peut appliquer la règle de D'Alembert pour prouver que la série $\displaystyle\sum_{n \geq p} |z^n| \frac{a^{n-p}}{(n-p)!}$ converge, ainsi, pour tout entier p, la série $\sum u_n^{(p)}$ converge normalement sur $[-a,a]$, On est donc dans le cadre d'application du théorème donnant la classe de dérivabilité des sommes des séries, on en déduit :
La fonction f est de classe C^∞ sur $[-a,a]$ pour tout réel a, donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad f^{(p)}(t) = z^p \mathrm{e}^{tz}$$

11.3.6 Intégrales dépendant d'un paramètre

Tous ces théorèmes sont maintenent hors programme, il faudra attendre la convergence dominée. Nous ne faisons pas les preuves car elle nécessite l'uniforme continuité qui, elle aussi est hors programme.

Théorème 11 *Soient I et $[a,b]$ des intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $I \times [a,b]$ à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie. Si f est une fonction continue sur $I \times [a,b]$ alors la fonction $x \to \displaystyle\int_a^b f(x,t)dt$ définie sur I à valeurs dans E est continue.*

[Ind] Admis.

Remarque: Sous les hypothèses de ce théorème, on peut donc écrire

$$\forall x_0 \in I \quad \lim_{x \to x_0} \int_a^b f(x,t)dt = \int_a^b \lim_{x \to x_0} f(x,t)dt$$

La continuité de la fonction f par rapport aux deux variables (x,t) est très importante pour avoir la conclusion.

Exercice 16 Soit f définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par

$$f(x,t) = \begin{cases} \frac{xt}{x^2+t^4} & \text{si} (x,t) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} x = t = 0 \end{cases}$$

Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x,t)dt$. Que peut-on en conclure?

Théorème 12 (Formule de Leibnitz) *Soient I et $[a,b]$ des intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $I \times [a,b]$ à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie. Si f est une fonction continue sur $I \times [a,b]$ et si f admet une dérivée partielle par rapport à la première variable qui est continue sur $I \times [a,b]$ alors la fonction $H : x \to \displaystyle\int_a^b f(x,t)dt$ définie sur I à valeurs dans E est de classe C^1 et*

$$\forall x \in I \quad H'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$$

[Ind] Admis.

Exercice 17 Soit $f(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 + x^2 - 2x\cos u)du$.
Montrer que f est dérivable sur $]-1,1[$ et calculer $f'(x)$. En effectuant le changement de variable $t = \tan(u/2)$, calculer $f'(x)$ et en déduire f.

Exercice 18 Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{a^2+t^2}$ $(a > 0)$. En déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^3}$

Proposition 28 *Soient I et $[a,b]$ des intervalles de $\mathbb{R}$, p un entier naturel et f une fonction définie sur $I\times[a,b]$ à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie. Si f est une fonction continue sur $I\times[a,b]$ et si f admet des dérivées partielle par rapport à la première variable jusqu'a l'ordre p qui sont toutes continues sur $I \times [a,b]$ alors la fonction $H : x \to \displaystyle\int_a^b f(x,t)dt$ définie sur I à valeurs dans E est de classe C^p et*

$$\forall k \in [0,p] \quad \forall x \in I \quad H^{(k)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)dt$$

[Ind] Admis.

Théorème 13 (Formule de Fubini) *Soient I et $[a,b]$ des intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $I\times[a,b]$ à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie. Si f est une fonction continue sur $I \times [a,b]$ alors on a:*

$$\forall \alpha,\beta \in I \qquad \int_\alpha^\beta \int_a^b f(x,t)dtdx = \int_a^b \int_\alpha^\beta f(x,t)dxdt$$

[Ind] Admis.

11.4 Exercices

Exercice 19 Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Montrer que:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin ntdt = 0.$$

Exercice 20 Calcul de primitives.
Calculer les intégrales suivantes, où a et b désignent des constantes réelles:

$$\int \mathrm{Arcsin}\, x dx$$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$$

$$\int (x^2 + 5x - 2)\mathrm{e}^{2x}dx$$

$$\int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5}$$

$$\int \frac{x^3 - 2}{x^3 - x^2}dx$$

$$\int \frac{(x+1)^3}{3x^2 + 10x + 3}dx$$

$$\int \frac{xdx}{x^3+x^2+x+1}$$

$$\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x+\sin 2x}$$

$$\int \sin^7 x dx$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^2}dx$$

$$\int x^2\sqrt{x^2-a^2}dx$$

$$\int \frac{2x+3}{\sqrt{9x^2+6x+4}}dx$$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Exercice 21 Intégrales de Wallis.

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n\, dt$, $(n \in \mathbb{N})$.

a) Trouver une relation de récurrence permettant de calculer I_{n+2} en fonction de I_n.

b) Calculer I_n en fonction de n.

c) Montrer que $\dfrac{I_{n+1}}{I_n}$ converge vers 1.

d) En déduire la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!}$ (formule de Wallis).

Exercice 22 Soit f et g deux fonctions croissantes, continues par morceaux et définies sur [0,1]. Montrer que:

$$\int_0^1 f(t)dt \int_0^1 g(t)dt \leq \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Indication: Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1,\ldots,a_n$ et $b_1,\ldots,b_n$ sont deux suites croissantes de réels, alors:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n b_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

Exercice 23 Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 1+}\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$ (On pourra comparer l'intégrale à $\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{dt}{t\ln t}$).

Exercice 24 Soit f une fonction de classe C^k $(k \geq 1)$ définie sur $\mathbb{R}$. On considère la fonction g définie pour $x \neq 0$ par:

$$g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x}$$

Prolonger g par continuité en 0.

Montrer que: $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \displaystyle\int_0^1 f'(xt)dt.$

En déduire que g est de classe C^{k-1} sur $\mathbb{R}$.

Calculer $g^n(0)$ pour tout entier $n < k$.

Exercice 25 Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{dt}{a+b\cos t}$ $(a > 0,\ |b| < a)$.

En déduire $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{dt}{(a+b\cos t)^2}$ et $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\cos t\, dt}{(a+b\cos t)^2}$

Exercice 26 Soit F une fonction de classe C^∞ sur $[0,1[$, à valeurs réelles, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0,1[\quad F^{(n)}(x) \geq 0.$$

Pour $n \geq 0$ on pose

$$r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n F^{(n+1)}(xt)dt.$$

Montrer que, pour $0 \leq x < y < 1$, on a:

$$0 \leq r_n(x) \leq r_n(y) \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}.$$

En déduire que, pour $0 \leq x < 1$, $F(x)$ est somme de sa série de Taylor à l'origine.

11.5 Exercices

11.5.1 Indications

Exercice 1 Une fonction affine est la somme d'une application linéaire et d'une constante. Une application constante est en escalier, en utilisant la proposition 7 il ne reste plus qu'à calculer $\int_a^b x$. Pour cela appliquer les sommes de Riemann.

Exercice 2 En utilisant la propriété des fonctions convexes démontrer la relation pour une somme de Riemann, puis passer à la limite, se souvenir qu'une fonction convexe est continue.

Exercice 3

Exercice 4 Appliquer Cauchy-Schwarz en particularisant une des deux fonctions.

Exercice 5 Quels sont éventuellement les discontinuités de $B(f,g)$? Nous sommes en dimension finie, on peut donc prendre des bases...

Exercice 6 Se souvenir ou dessiner des graes de fonctions affines par morceaux.

Exercice 7 Utiliser la proposition 15. Pour la réciproque, trouver un exemple de suites qui convergent simplement et pourtant les intégrales convergent.

Exercice 8 Il suffit de faire la synthèse des résultats ci-dessus. Mais il faut aussi donner des contre-exemples pour les inégalités qui ne sont pas vérifiées.

Exercice 9 Il suffit de discuter selon la place de x et de y. Par exemple commencer par $x < 0$ et écrire plus simplement l'intégrale.

Exercice 10 Par exemple à un produit bilinéaire.

Exercice 11 Se placer sur chaque sous intervalle où la restriction de f est prolongeable par continuité.

Exercice 12 Faire le changement de variable.

Exercice 13 Faire des changements de variable affines.

Exercice 14 Écrire la condition pour que la primitive soit périodique, puis à l'aide d'un changement de variable trouver une condition portant sur f.

Exercice 15 Appliquer le cours, revoir le chapitre sur les suites de fonctions, étudier la convergence simple et uniforme puis la suite des dérivées.

Exercice 16 L'intégrale se calcule. Étudier ensuite les limites.

Exercice 17 Tout est dit.

Exercice 18 Démontrer que vous pouvez dériver puis le faire.

Exercice 19 Toute fonction continue est limite uniforme sur un segment de fonctions en escalier, démontrer le résultat pour les fonctions constantes, puis en escalier et passer à la limite.

Exercice 20 Calculer sans perdre trop de temps.

Exercice 21 Faire une intégration par parties en isolant un cos. Séparer les cas n pair et n impair. Montrer que I_n est décroissante, majorer et minorer, conclure.

Exercice 22

Exercice 23 Majorer et minorer, l'intégrale de l'indication se calcule, poser $x = 1 + t$

Exercice 24 Penser au taux de variation, appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme.

Exercice 25 Vous pouvez passer par les formules en t. Penser à dériver.

Exercice 26 La majoration ne pose pas de problème. Majorer $r_n(y)$, une fonction continue est bornée sur un compact. Calculer. Montrer que $r_n(x)$ tend vers zéro.

11.6 Démonstrations

Proposition 1 Quand on ajoute un point à une subdivision adaptée S, on obtient une subdivision adaptée S_1 et on montre sans difficulté que $I_S(f) = I_{S_1}(f)$. Puisque toute subdivision adaptée est obtenue à partir de la subdivision minimale S_m en ajoutant un nombre fini de points, on en déduit que pour toute subdivion adaptée S, on a $I_S(f) = I_{S_m}(f)$.

Proposition 2 Soient f et g deux fonctions en escalier défines sur $[a;b]$ à valeurs dans E, prenons une subdivion adaptée S commune à f et à g, on montre alors que, pour tout scalaire λ, $I_S(f+\lambda g) = I_S(f) + \lambda I_S(g)$.
En appliquant la propriété de l'inégalité triangulaire à la définition de l'intégrale d'une fonction f en escalier, on obtient:

$$||\int_{[a,b]} f|| \leq \int_{[a,b]} ||f||$$

puis, en majorant $||f||$ par $||f||_\infty$ qui existe car une fonction en escalier sur un segment est bornée, on a :

$$\int_{[a,b]} ||f|| \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} ||f(x)||$$

Proposition 3 Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $h_{2n} = f_n$ et $h_{2n+1} = g_n$, la suite (h_n) est une suite de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f et donc la suite de terme général $H_n = \displaystyle\int_{[a,b]} h_n$ converge vers un vecteur L. Les suites de termes généraux $H_{2n} = \int_{[a,b]} f_n$ et $H_{2n+1} = \int_{[a,b]} g_n$ étant extraites de la suite (H_b) convergent sonc vers L.

Proposition 4 La propriété est vraie pour une fonction en escalier.
Soit (φ_n) une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f, la suites de fonctions (φ'_n) et (φ''_n) définies par

$$\forall x \in [a,c] \quad \varphi'_n(x) = \varphi_n(x)$$

$$\forall x \in [c,b] \quad \varphi''_n(x) = \varphi_n(x)$$

convergent uniformément vers les restrictions de f à $[a,c]$ et à $[c,b]$, il ne reste plus qu'à passer à la limites dans l'egalité:

$$\int_{[a,b]} \varphi_n = \int_{[a,c]} \varphi'_n + \int_{[c,d]} \varphi''_n$$

Proposition 5 Soient f et g deux fonctions continues par morceaux défines sur le segment $[a,b]$ à valeurs dans E, deux suites (f_n) et (g_n) de fonctions en escalier qui convergent uniformément vers f et g. Pour tout scalaire λ, la suite $(f_n + \lambda g_n)$ converge uniformément vers $f + \lambda g$, on passe alors à la limite dans l'égalité

$$\int_{[a,b]} (f_n + \lambda g_n) = \int_{[a,b]} f_n + \lambda \int_{[a,b]} g_n$$

De plus la suite de fonctions en escalier $(||f_n||)$ converge uniformément vers la fonction continue par morceaux $||f||$ et la suite de réels $(||f_n||_\infty)$ converge vers le réel $||f||_\infty$. On en déduit les inégalités proposées en passant à la limite dans les inégalités :

$$||\int_a^b f_n|| \leq \left|\int_a^b ||f_n||\right| \leq |b-a| \sup_{x\in[a,b]} ||f_n(x)||$$

Proposition 6 On vérifie l'égalité en étudiant tous les cas possibles de positionnement des réels a, b et c entre eux et en appliquant la relation de Chasles valable pour les segments.

Proposition 7 L'intégrale d'une fonction en escalier est une somme finie, la propriété est donc vraie pour ce type de fonctions, l'application linéaire u étant continue, on passe à la limite dans les égalités obtenues en prenant une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers la fonction considérée.

Proposition 8 Écrivons $f=\sum_{i=1}^{p} f_i\overrightarrow{e_i}$, la proposition précédente donne que les composantes f_i sont C^0 par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans K. En effet soit p_i est la projection de E sur $[e_i]$ on a $f_i\overrightarrow{e_i}=p_i(f)$ en prenant l'intégrale on a : $\int_a^b f=\sum_{i=1}^{p}\int_a^b f_i\overrightarrow{e_i}=\sum_{i=1}^{p}\int_a^b p_i(f_i\overrightarrow{e_i})$. Ce qui donne en utilisant la proposition précédente : $\int_a^b f=\sum_i p_i\left(\int_a^b f_i\overrightarrow{e_i}\right)=\sum_i\left(\int_a^b f_i\right)\overrightarrow{e_i}$.

Proposition 9 L'inégalité de la moyenne donne : $\int_a^b |f|\geq\left|\int_a^b f\right|\geq 0$. Pour le b) il suffit d'appliquer le a) à $h=g-f$ et utiliser la linéarité de l'intégrale.

Proposition 10 Écrivons que f est continue en x_0 : $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+,\exists\eta\in\mathbb{R}^+:\forall x\in[a,b]:|x-x_0|\leq\eta\Rightarrow f(x_0)-\varepsilon\leq f(x)\leq f(x)+\varepsilon$. f étant non nulle en x_0 on peut prendre $\varepsilon=\dfrac{f(x_0)}{2}$, ce qui donne pour $|x-x_0|\leq\eta$ que $f(x)\geq\dfrac{f(x_0)}{2}>0$. Maintenant f est positive sur $[a,b]$ donc $\int_a^b f\geq\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} f\geq 2\eta\dfrac{f(x_O)}{2}>0$.

Proposition 11 On a $m\leq f\leq M$ et par intégration (proposition 9-b) on obtient le résultat car $\int_a^b m=(b-a)M$.

Proposition 12 La première inégalité résulte de l'inégalité de la moyenne.
Pour tout α dans $\mathbb{C}$ on a $\int_a^b |f+\alpha g|^2\geq 0$ en développent cela donne $P(\alpha)=\int_a^b (f+\alpha g)(\overline{f}+\overline{\alpha g})=|\alpha|^2\int_a^b |g|^2+2Re\left(\alpha\int_a^b\overline{f}g\right)+\int_a^b |f|^2$. Si $\int_a^b\overline{f}g=0$ le résultat est démontré, sinon posons $\theta=Arg\left(\int_a^b\overline{f}g\right)$ et $\alpha=\lambda e^{-i\theta}$. Maintenant pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$ le trinôme $\lambda^2+2\lambda\left|\int_a^b\overline{f}g\right|+\int_a^b |f|^2$ est toujours positif. Si $\int_a^b |g|^2=0$ alors g est nulle sauf éventuellement en un nombre fini de points mais alors $\int_a^b\overline{f}g$ est aussi nulle et la relation est vraie. Sinon ce trinôme ne s'annulant pas son discriminant est négatif ou nul (il n'a pas de racine réelle) c'est exactement l'inégalité cherchée : $\left(\left|\int_a^b fg\right|\right)^2-\int_a^b |f|^2\int_a^b |g|^2\leq 0$.
Si il y a égalité dans la relation de Cauchy-Schwarz pour des fonctions continues alors ou bien $g=0$ ou bien $\int_a^b |g|^2>0$ ce qui donne que le trinôme a un discriminant nul. Il existe donc un réel λ donc un complexe α tel que $\int_a^b |f+\alpha g|^2=0$ ou $f+\alpha g=0$ ce qui donne dans les deux cas que f et g sont liées dans l'espace vectoriel $C([a,b],\mathbb{C})$.

Proposition 13 On a $N_1(f+g)=\int_I\|f+g\|\leq\int_I\|f\|+\int_I\|g\|$.
Pour tout λ on a $N_1(\lambda f)=|\lambda|N_1(f)$.
Enfin si $N_1(f)=0$ alors $f=0$ car f est continue.

Proposition 14 Que l'intégrale soit linéaire est acquis. La continuité pour la norme de la convergence en moyenne signifie que si (f_n) est une suite tendant vers 0 c'est à dire si $N_1(f_n)$ tend vers 0 alors la suite $\left(\int_I f_n\right)$ tend vers 0. Ce qui est vraie car $\|\int_I f_n\|\leq\int_I\|f_n\|=N_1(f_n)$.

Proposition 15 On a $N_1(f) = \displaystyle\int_I \|f\| \leq \int_I \|f\|_\infty = L\|f\|_\infty$.

Théorème 1 On a $\displaystyle\left\|\int_a^b (f_n - f)\right\| \leq N_1(f_n - f) \leq (b-a)\|f_n - f\|_\infty$. Ainsi si la suite converge uniformément alors $\|f_n - f\|_\infty$ tend vers 0 et par encadrement $\displaystyle\int_a^b f_n$ tend vers $\displaystyle\int_a^b f$.

Proposition 16 Il n'y a pas de difficultés. Le produit scalaire sur E est une forme bilinéaire, l'intégral e est linéaire donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire. La symétrie se transmet directement. Le caractère définie positive se transmet gràce à la positivité de l'intégrale et que l'on a des fonctions continues.

Proposition 17 Appelons $M = \sup_{x\in I}\|f\|$, on a pour tous x,y de I : $\|F(x) - F(y)\| = \|\displaystyle\int_x^y f\|$ et $\|F(x) - F(y)\| \leq M|x-y|$. Ce qui prouve que F est lipschitzienne donc continue sur I.
Supposons par exemple que $f(x_0+)$ existe. On a alors pour tout $x > x_0$ $F(x) - F(x_0) - (x - x_0)f(x_0+) = \displaystyle\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0+))$ mais f admet une limite à droite de x_0 donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta \in I\cap]x_0,+\infty[$ tel que pour tout $t \in]x_0,\eta[$ on a $\|f(t) - f(x_0+)\| \leq \varepsilon$. L'inégalité de la moyenne donne pour tout $x \in]x_0,\eta[$: $\|F(x) - F(x_0) - (x-x_0)f(x_0+)\| \leq \varepsilon(x - x_0)$. Ceci prouve que F est dérivable à droite en x_0 et $F'_d(x_0) = f(x_0+)$. Les autres cas se traitent pereillement.

Proposition 18 Puisque f est continue sur I on a que $F(x) = \displaystyle\int_c^x f$ avec $c \in I$ vérifie en tout point de I : $F'(x) = f(x)$. F est bien une primitive de f. Si G est une autre primitive on aura $(G-F)' = 0$ donc $G - F = \ell$ avec $\ell \in E$ ainsi $F(x) = \ell + \displaystyle\int_c^x f(t)dt$.

Proposition 19 Avec les mêmes notations on a $F(b) - F(a) = \ell + \displaystyle\int_c^b f - \ell - \int_c^a f = \int_a^b f$. En écrivant $\displaystyle\int_c^a = \int_c^b + \int_b^a$.

Proposition 20 Nous avons $(fg)') = f'g + fg'$, intgrons entre a,b. $\displaystyle\int_a^b (fg)' = \int_a^b f'g + \int_a^b fg' = f(b)g(b) - f(a)g(a)$. D'où $\int_a^b f'(t)g(t)dt = [fg]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt$.

Proposition 21 Les intégrales existent comme étant des intégrales de fonctions continues sur des compacts. Considèrons les deux fonctions $F(x) = \displaystyle\int_\alpha^x f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ et $G(x) = \displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(x)} f(u)du$. On a $F'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$ et $G'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$ (pour cette dernière on dérive une fonction composée : $g\circ\varphi(x)$ où $g = \displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^x f(u)du$ et la dérivé est $g'(\varphi(x))\varphi'(x)$). Ainsi $F'(x) = G'(x)$ donc $F = G + \lambda$ mais en α les deux fonctions correspondent donc $\lambda = 0$ et on obtient le résultat.

Proposition 22 F définie par $F(x) = \displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en $\varphi(\alpha)$. Ainsi F est C^1 par morceaux sur $[a,b]$. Ensuite φ est de classe C^1 sur $[\alpha,\beta]$ et strictement monotone donc $F\circ\varphi$ est C^1 par morceaux sur $[\alpha,\beta]$ et en dehors d'un nombre fini de points on a : $(F\circ\varphi)'(t) = (f\circ\varphi)(t)\varphi'(t)$. Ainsi $F\circ\varphi$ est une primitive de $u \mapsto (f\circ\varphi)(u)\varphi'(u)$ sur $[\alpha,\beta]$. Nous pouvons donc conclure comme pour la proposition précédente.

Théorème 2 On a $f(b) - f(a) = \displaystyle\int_a^b f'$ d'où $\|f(b) - f(a)\| \leq |b-a| \sup_{x\in[a,b]} ||f'(x)||$.

Proposition 23 Si la fonction est lipschitzienne pour tout x,y dans $[a,b]$ on a : $\|f(y)-f(x)\| \leq k\,|y-x|$. Or la limite de $\dfrac{||f(y)-f(x)||}{|y-x|}$ existe par hypothèse quand y tend vers x. Ce qui donne pour tout $x \in [a,b]$: $||f'(x)|| \leq k$ et la dérivée est bornée. Réciproquement si la dérivée est bornée, les accroissements finis donnent que la fonction est lipschitzienne.

Proposition 24 Posons $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \ell$ on a pour tout ε il existe $c \in [a,b]$ tel que pour tout $x \in]a,c]$ $||f'(x)-\ell|| \leq \varepsilon$. Considèrons la fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - \ell x$, elle est continue sur $[a,c]$ et de classe C^1 sur $]a,c]$ et sa dérivée $||\varphi'(x)|| \leq \varepsilon$, donc bornée. Nous pouvons appliquer les accroissements finis : pour tout $x \in [a,c]$ $||\varphi(x)-\varphi(a)|| \leq \varepsilon(x-a)$ pour obtenir pour tout ε il existe c tel que pour tout $x \in]a,c]$, $||f(x)-f(a)-(x-a)\ell|| \leq \varepsilon(x-a)$, ce qui donne que f est dérivable de dérivée ℓ. Nous avons prouvé que f' est continue en a en posant $f'(a) = \ell$.

Proposition 25 Il suffit d'appliquer la proposition précédente à chaque k de 1 à p.

Théorème 3 Pour $p = 0$, f étant C^1 sur $[a,b]$ on a $f(b) = f(a) + \displaystyle\int_a^b f'(t)dt$. C'est la formule de Taylor au rang $p = 0$. Supposons la vraie au rang $p-1$ donc : $f(b) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}(t)dt$, faisons une intégration par parties en posant :

$$u' = (b-t)^{p-1} \quad \text{et alors} \quad u = -\frac{(b-t)^p}{p}$$
$$v = f^{(p)}(t) \quad \text{et alors} \quad v' = f^{(p+1)}(t)$$

on obtient pour $R(t) = \displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}(t)dt = \left[-\frac{(b-t)^p}{p!} f^{(p)}(t)\right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)dt$ ou encore $R(t) = \dfrac{(b-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + \displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^p}{p!} f^{(p*1)}(t)dt$. Ce qui est la formule de Taylor à l'ordre $p+1$.

Théorème 4 Si la fonction f est de classe C^p sur I et de classe C^{p+1} par morceaux sur I, on a tout d'abord

$$f(b) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}(t)dt$$

Posons $g = f^{(p)}$, g est continue et de classe C^1 par morceaux. On a alors

$$\int_a^b \frac{(b-t)^{p-1}}{(p-1)!} g(t)dt = \frac{(b-a)^p}{p!} g(a) - \int_a^b \frac{(b-t)^p}{p!} \tilde{D}g(t)dt$$

D'où le résultat.

Proposition 26 Le dernier théorème est faux si on suppose seulement que la fonction est de classe C^{p+1} par morceaux sur $[a,b]$ sans être de classe C^p sur $[a,b]$, c'est à dire si la dérivée d'ordre p n'est pas continue. Une fonction de classe C^{p+1} par morceaux sur $[a,b]$ est telle que sa dérivée d'ordre $p+1$ est une fonction définie sur $[a,b]$ privé d'un ensemble fini T de points, mais puisque qu'elle coïncide sur les intervalles ouverts d'une subdivision avec les dérivées d'ordre $p+1$ de fonctions de classe C^{p+1} sur les intervalles fermés, on en déduit que $f^{(p+1)}$ est bornée et on note

$$M_{p+1}(f) = \sup_{x \in [a,b]/T} ||f^{(p+1)}(x)||$$

Ainsi on a une majoratin du reste de Taylor qui donne la formule.

Proposition 27 Posons $h(x) = \sum_{k=0}^{n} a_0 \frac{(x-x_0)^{k+1}}{k+1}$ du fait que $h' = f$ on en déduit que pour tout ε il existe α tel que pour tout $x \in [a,b]$ si $|x - x_0| \leq \alpha$ alors $|h'(x)| \leq \varepsilon\,|x-x_0|^n$. De l'inégalité de la moyenne on obtient pour tout $x \in [a,b]$ si $|x - x_0| \leq \alpha$ alors $|g(x) - g(x_0| \leq \frac{|x-x_0|^{n+1}}{n+1}$. Comme $g(x_0) = 0$ on a le résultat.

Théorème 5 Pour $p = 1$ c'est la définition d'une fonction dérivable. Supposons la formule démontrée au rang $p-1$. On peut donc l'appliquer à f' : $f'(a+h) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + o(h^{p-1})$. En écrivant pour une fonction de classe C^1 : $g(x) - g(a) = \int_a^x f'(t)dt$, le résultat résulte de la proposition précédente.

Théorème 6 Posons $F_n(x) = F_n(c) + \int_c^x f_n(t)dt$ et $F(x) = \ell + \int_c^x f(t)dt$. Faisons la différence on a : $\forall x \in [a,b] : ||F_n(x) - F(x)|| \leq ||F_n(c)_\ell|| + \left|\int_c^x ||f_n(t) - f(t)||dt\right| \leq ||F_n(c) - \ell|| + \left(\sup_{t\in[a,b]} ||f_n(t) - f(t)||\right)(b-a)$. Puisque $\lim F_n(c) = \ell$ et que f_n converge uniformément vers f on a que F_n converge uniformément vers F.

Théorème 7 On a que les f_n sont C^1 et (f_n') converge uniformément vers g, $(f_n(c))$ converge. Ainsi les f_n sont des primitives des f_n', donc si f est la primitive de g, de la forme $f(x) = \ell + \int_c^x g(t)dt$ le théorème précédent donne que (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$. Enfin g étant continue, comme limite uniforme de fonctions continues, on a bien que f est C^1 et $g' = f$.

Théorème 8 Pour $p = 1$ c'est le théorème précédent. Si il est vrai au rang $p-1$ alors la suite $f_n^{(p-1)}$ est une suite de fonctions C^1 telle que la suite des dérivées $f_n^{(p)}$ converge uniformément vers g. D'autre part il existe c_p tel que $f_n^{(p)}(c_p)$ converge. En appliquant le théorème précédent on a que $f_n^{(p-1)}$ converge uniformément vers une fonction g_{p-1} C^1 telle que $g = g_{p-1}'$. Par hypothèse de récurrence appliquer alors à $f_n^{(p-1)}$ (qui converge bien uniformément) on a que f_n converge uniformément vers une fonction f C^{p-1} et $f^{(p-1)} = g^{p-1}$. Ainsi on a $f^{(p)} = g$ car g_{p-1} est C^1 de dérivée g.

Théorème 9 Soit $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$. Alors S_n est une primitive de s_n. Toutes les hypothèses du théorème 6 sont vérifiées et il donne le résultat.

Théorème 10 Même démonstration.

Théorème 11 Admis.

Théorème 12 Admis.

Proposition 28 Admis.

Théorème 13 Admis.

11.7 Travaux Dirigés : Calcul Intégral

Exercice 27 Soit un entier n non nul. Montrer qu'une fonction f continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que : pour tout k entier de 0 à n on a $\int_a^b f(x)\,x^k dx = 0$ possède au moins $n+1$ zéros sur $]a,b[$.
Si f est nulle c'est vrai, sinon on a par hypothèse que pour tout polynôme P de degré inférieut à n : $\int_a^b f(t)\,P(t)\,dt = 0$. Ainsi en outre $\int_a^b f = 0$ et f a au moins un zéro sur $[a,b]$ car sinon f étant continue et de signe constant on aurait $\int_a^b f \neq 0$.
Soit r le nombre d'annulations par changement de signe de f sur $[a,b]$. Si $r \leq n$ on pose $x_1, \cdots, x_r$ ces points et $P(x) = (x-x_1)\cdots(x-x_r)$ on a que Pf est continue et de signe constant sur $[a,b]$ on ne peut donc pas avoir $\int_a^b Pf = 0$ d'où une contradiction et $r > n$.

Exercice 28 [hors programme]
Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \longmapsto \int_0^1 \frac{e^{-\left(1+t^2\right)x^2}}{1+t^2}dt$. Etudier la continuité de g puis la dérivabilité. Exprimer $g(x)$ en fonction de $h(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$. Déduire de la limite de g en $+\infty$ celle de h.
L'application $f : (x,t) \longmapsto \frac{e^{-\left(1+t^2\right)x^2}}{1+t^2}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $R \times [0,1]$ et donc g est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ de plus $g'(x) = \int_0^1 -2xe^{-\left(1+t^2\right)x^2}dt = -2e^{-x^2}\int_0^1 xe^{-(tx)^2}dt$. En posant $u = tx$ on obtient si $x \neq 0$: $g'(x) = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}du = -2h'(x)\,h(x)$. Ce qui donne pour tout x réel : $g(x) - g(0) = -h^2(x)$. Calculons $g(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$ et donc $g(x) = \frac{\pi}{4} - h^2(x)$. D'autre part pour tout x réel $0 \leq g(x) \leq e^{-x^2}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}e^{-x^2}$ ce qui donne $\lim_{+\infty} g = 0$. La fonction h est croissante positive sur $\mathbb{R}^+$ et admet une limite en $+\infty$ disons ℓ en passant à la limite dans la relation entre g et h on obtient $0 = \frac{\pi}{4} - \ell^2$ soit $\ell = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 29 [calcul de primitives:]
$\diamondsuit$ Trouver $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$ $\diamondsuit$ Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x\cos x}{\tan^2 x + \cot an^2 x}dx$.

$\diamondsuit$ si $b > a > 1$, calculer $\int_a^b \frac{dx}{x\ln x}$ $(t = \ln x)$; de même si $0 < a < b < 1$.
$\diamondsuit$ calculer $\int_0^a \frac{dt}{cht}$ $(u = e^t)$; $\int_a^{\frac{1}{a}} \frac{\ln x}{1+x^2}dx$ avec $0 < a < 1$ $(x = 1/t)$; $\int_a^b \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx$; si f ne s'annule pas sur $[a,b]$.
$\diamondsuit$ $\int \frac{xdx}{x^4+1}$ (faire $u = x^2$, ceci est vraie dès que $\frac{P(x)}{Q(x)}$est impaire $\frac{1P(x)}{xQ(x)}$ est paire $= \frac{P_1}{Q_1}(x^2)$).
$\diamondsuit$ $\int \ln x dx$; $\int \arctan x dx$; $I_n(t) = \int_0^t x^n e^{ax}dx$ $(n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{C}, a \neq 0)$.

Intégrales de Wallis : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$. Montrer que $I_{n+1} = \frac{n}{n+1}I_{n-1}$ avec $I_0 = \frac{\pi}{2}$et $I_1 = 1$.

Ecrire explicitement I_{2p} et I_{2p+1} . Démontrer que (I_n) est une suite décroissante et positive et que la suite $\left(\dfrac{I_{n+1}}{I_n}\right)$ tend vers 1. Montrer que $\lim \sqrt{p}\frac{1.3.5\cdots(2p-1)}{2.4.6\cdots 2p} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

♢ Pour p,q,n des entiers positifs on pose $I_n = \displaystyle\int \frac{x^p}{(x^q+1)^n}dx$. Montrer que l'on a la formule de récurrence : $q(n-1)I_n(x) + (p+1+q-qn)I_{n-1}(x) = \dfrac{x^{p+1}}{(x^q+1)^{n-1}} + C^{ste}$ (évaluer la dérivée de $\dfrac{x^{p+1}}{(x^q+1)^{n-1}}$.).

♢ Evaluer $\int \cos^{2p} x dx$ et $\int \cos^{2p+1} x dx$; $\displaystyle\int \frac{dx}{\alpha + \beta\cos x}$ ($t = tan\frac{x}{2}$) pour $\alpha > 0$ et $|\beta| < \alpha$,

montrer que $\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dx}{\alpha+\beta\cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}$.

♢ par $t = \sqrt{x+1}$ calculer $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x+1}}$; par $x = \cos t$, calculer $\int \sqrt{1-x^2}dx$;

♢ Calculer $\int \frac{dx}{x+\sqrt{2x(x-1)}}$ et $\int \frac{dx}{x+\sqrt{2x(1-x)}}$ par $t = |(x-1)/x|^{1/2}$.

♢ Calculer $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}}$ on posera $t^3 = \frac{x+1}{x}$.

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}Ar\tan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)$$

$\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x\ln x} = \int_{\ln a}^{\ln b}\frac{dt}{t} = \ln\ln b - \ln\ln a$. Si $0 < a < b < 1$ alors $\ln x < 0$ et il faut prendre $\ln|\ln b| - \ln|\ln a|$.

$\displaystyle\int_0^a \frac{dt}{cht} = \int_0^a \frac{2dt}{e^t+e^{-t}} = \int_1^{e^a}\frac{du}{u\left(u+\frac{1}{u}\right)} = \int_1^{e^a}\frac{du}{u^2+1} = 2\left(Arc\tan e^a - \frac{\pi}{4}\right)$; $I = \displaystyle\int_a^{\frac{1}{a}}\frac{\ln x}{1+x^2}dx = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{\ln t}{t^2+1}dt$ on a ainsi $I = -I$ et donc $I = 0.$; $\displaystyle\int_a^b \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx = [Arc\tan f(x)]_a^b$.

$\displaystyle\int_0^1 \frac{xdx}{x^4+1} = \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{d\left(x^2\right)}{1+\left(x^2\right)^2} = \frac{1}{2}\left[\arctan x^2\right]_0^1 = \frac{\pi}{8}$.

$\int \ln x dx = x(\ln x - 1)$; $\int \arctan x dx = x\arctan x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$. ; Une récurrence par intégration par parties donne $I_n(t) = \frac{t^n}{a}e^{at} - \frac{n}{a}I_{n-1}$.

Une intégration par parties en posant $u = \sin^{n-1}x$ et $v' = \sin x$ donne $I_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}I_{n-1}$ ou $I_n = \dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$ ce qui permet de vérifier que : $I_{2p} = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots(2p-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2p)}\dfrac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1} = \dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2p)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2p+1)}$ avec $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$. D'autre part sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ on a $0 \le \sin x \le 1$ et donc $I_n \ge 0$ et I_n est une suite décroissante de plus $\dfrac{I_{n+1}}{I_{n-1}} \le \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \le 1$ ou $\dfrac{n}{n+1} \le \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \le 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$ ce qui donne $I = \displaystyle\lim_{p\to+\infty}\frac{(2\cdot 4\cdot 6\cdots 2p)^2}{(1\cdot 3\cdot 5\cdots 2p-1)^2}\frac{2}{(2p+1)\pi}$ ou encore $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\sqrt{p}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots 2p-1}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2p} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. En fait (I_n) a une limite nulle en $+\infty$.

Il s'agit d'une vérification $\left(\dfrac{x^{p+1}}{(x^q+1)^{n-1}}\right)' = (p+1)\dfrac{x^p}{(x^q+1)^{n-1}} - (n-1)\dfrac{x^{p+q}}{(x^q+1)^n}$ et $q(n-1)I_n + (p+1+q-qn)I_{n-1} = \displaystyle\int \frac{q(n-1)x^p + (p+1+q-qn)(1+x^q)x^p}{(1+x^q)^n}$

$= \int \frac{(p+1)\,x^p}{(1+x^q)^n} - \frac{x^{p+q}\,(q\,(n-1)-(p+1))}{(1+x^q)^n} = \int -\frac{q\,(n-1)\,x^{p+q}}{(1+x^q)^n}dx + \int \frac{(p+1)\,(1+x^q)\,x^p}{(1+x^q)^n}dx$
ce qui donne la formule.

Pour $\int \cos^{2p} x dx$ on peut utiliser $\cos^{2p} x = 2^{-2p}\left(2\sum_{\lambda=0}^{\lambda=p} C_{2p}^{p-\lambda}\cos 2\lambda x\right)$ et pour $\cos^{2p+1} x = \left(1-\sin^2 x\right)\cos x$ et poser $u = \sin x$.
$\int \frac{dx}{\alpha+\beta\cos x} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\,\alpha+\beta\,(1-t^2)}$ en posant $t = \tan\frac{x}{2}$ si $\alpha > 0$ et $|\beta| < \alpha$ la fonction $x \longmapsto \frac{1}{\alpha+\beta\cos x}$ est continue sur $]-\pi, +\pi[$ et $\int \frac{dx}{\alpha+\beta\cos x} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\arctan\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\tan\frac{x}{2} + C^{ste}$. par passage à la limite on obtient $\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{dx}{\alpha+\beta\cos x} = 2\int_0^{\pi}\frac{dx}{\alpha+\beta\cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}$.
$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x+1}} = \int \frac{2\sqrt{x+1}}{x+\sqrt{x+1}}dt = \int \frac{2tdt}{t^2-1+t} = \int \frac{(2t+1)\,dt}{t^2+t-1} - \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}} = \ln\left|t^2+t-1\right| - \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{t+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{t+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right| + C^{ste}$.
Pour la seconde $\int \sqrt{1-x^2}dx = -\int |\sin t|\sin t dt = \int \sin^2 t dt = \int \frac{1-\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}t - \frac{\sin 2t}{4}$
Le changement de variables donne $I = \int \frac{-2t^3+2t}{1+\sqrt{2t}}dt = -\frac{\sqrt{2}}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}t - \frac{1}{2}\ln\left|1+\sqrt{2}t\right|$
et pour l'autre $t^2 = \frac{1-x}{x}$ pour que la fonction soit bien continue.

$I = \int \frac{-3t^8}{1+t}t = -\frac{3}{8}t^8 - \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{6}t^6 - \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - t + \ln|1+t|$.

Exercice 30 Soit $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(a+b-x) = f(x)$.
a) Exprimer $\int_a^b xf(x)dx$ en fonction de $\int_a^b f(x)dx$.
b) Application au calcul de $\int_0^{\pi}\frac{xdx}{1+\sin x}$.
Posonx $x = a+b-u$ ainsi $dx = -du$ et $\int_a^b xf(x)\,dx = \int_a^b (a+b-u)\,f(u)\,du = (a+b)\int_a^b f(u)\,du - \int_a^b xf(x)\,dx$ ce qui donne $\int_a^b xf(x)\,dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx$. Pour l'application on obtient $\int_0^{\pi}\frac{xdx}{1+\sin x} = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\sin x}$ car $f(x) = \frac{1}{1+\sin x}$ vérifie $f(x+\pi) = f(x)$. Pour calculer cette dernière intégrale posons $t = \tan\frac{x}{2}$ et $\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\sin x} = \int_0^{+\infty}\frac{2dt}{(1+t^2)\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)} = \int_0^{+\infty}\frac{2dt}{(1+t)^2} = 2\left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^{+\infty} = 2$.

Exercice 31 Soit f dans $C^k(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $k \geq 1$, telle que $f(0) = 0$. Prouver que $\frac{f(x)}{x}$ est C^{k-1} . Etudier g définie par $g(x) = \frac{e^{x^2}-1}{x}$ en particulier montrer que g est inversible et donner un DL3(0) de g .
En utilisant la formule $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt$ on a $\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x}\int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^1 f'(tx)\,dt$.
D'après les hypothèses et le théorème de régularité des intégrales dépendant d'un paramètre on a que $\frac{f(x)}{x}$ est de classe C^{k-1}.
En étudiant les variations de g on a qu'elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car $g'(x) = \frac{2x^2e^{x^2}-e^{x^2}+1}{x^2}$ et en posant $\varphi(x) = 2x^2e^{x^2}-e^{x^2}+1$ on a $\varphi'(x) = 2x\left(2x^2+1\right)e^{x^2}$ qui

admet un minimum en 0 qui vaut 1 donc φ et $g'(x)$ sont positifs. Posans $h = g^{-1}$ on a $h(0) = 0$ puis $\lim\limits_{0} \dfrac{h(x)}{x} = \lim\limits_{0} \dfrac{y}{g(y)} = \lim \dfrac{y^2}{e^{y^2}-1} = 1$. Ensuite $\lim\limits_{0} \dfrac{h(x)-x}{x^2} = \lim\limits_{0} \dfrac{y-g(y)}{(g(y))^2} =$ $\lim \dfrac{y - \dfrac{e^{y^2}-1}{y}}{\left(\dfrac{e^{y^2}-1}{y}\right)^2} = \lim \dfrac{y^2 - e^{y^2}+1}{\dfrac{\left(e^{y^2}-1\right)^2}{y}} = \lim \dfrac{-\frac{1}{2}y^4}{y^3} = 0$ et enfin $\lim\limits_{0} \dfrac{h(x)-x}{x^3} = \lim \dfrac{-\frac{1}{2}y^3}{y^3} = -\frac{1}{2}$ ainsi $g^{-1}(x) = x - \frac{1}{2}x^3 + o\left(x^3\right)$.

Exercice 32 Soit f dans $C^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ telle que $|f(t)| = 1$ pour tout t . Montrer que $\frac{f'}{f}$ est une fonction numérique continue. Prouver l'existence d'une fonction θ réelle et C^1 telle que $e^{i\theta(t)} = f(t)$ pour tout t.

Comme dans le cours on a par analyse $f(t) = e^{i\theta(t)}$ qui donne $\dfrac{f'(t)}{f(t)} = i\theta'(t)$ et $\theta(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{f'(t)}{if(t)}dt + \alpha$ avec $f(0) = e^{i\alpha}$. En posant $g(t) = e^{i\theta(t)}$ où θ est définie par l'intégrale précédente on a $g'(t) = e^{i\theta(t)} \dfrac{if'(t)}{if(t)}$ et $g'f = gf'$ ce qui donne $\left(\dfrac{g}{f}\right)' = 0$ et $\dfrac{g}{f} = C^{ste} = 1$ soit $g = f$.

Exercice 33 Calculer $I = \int_0^1 e^{(x^2)}dx$ par la méthode des trapèzes, puis de Simpson puis par application de Taylor.

Par la méthode des trapèzes avec $2n = 10$ on a 1,4671 et pour $2n = 100$ on a 1,46269.
Par la méthode de Simpson avec $2n = 10$ on a 1,4626 et pour $n = 7$ on a 1,46265
Par la méthode de Taylor avec $2n = 10$ on a 1,462 et pour $n = 7$ on a 1,46265 et pour $n = 10$ on a 1,46265175.

Exercice 34 Dans chacun des cas suivants étudier la série de fonctions. La somme est-elle continue, dérivable sur $\mathbb{R}$?

1°) $f_n(x) = \dfrac{1}{n^3 + n^4x^2}$ avec $n \geq 1$

2°) $g_n(x) = \dfrac{1}{n^2 + n^4x^2}$ avec $n \geq 1$.

–
- Pour tout x réel on a $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{n^3}$ et donc $\|f_n\|_\infty \leq \dfrac{1}{n^3}$ et donc $\sum f_n$ est normalement convergente donc uniformément et simplement convergente sur $\mathbb{R}$ vers une fonction F continues sur $\mathbb{R}$ car les f_n le sont.
  Pour la dérivabilité on étudie $f_n'(x) = -\dfrac{2x}{(n+n^2x^2)^2}$. Soit $a > 0$ et $I_a = [-a,a]$ pour tout x de I_a on a $|f_n'(x)| \leq \dfrac{2a}{n^2}$ d'où $\sup\limits_{[-a,+a]} |f_n'(x)| \leq \dfrac{2a}{n^2}$ et $\sum f_n'$ converge uniformément sur I_a et le théorème : $\sum f_n'$ converge uniformément sur I_a vers H et il existe t_0 de I_a pour lequel $\sum f_n(t_0)$ converge on a $\sum f_n$ converge sur I_a vers F dérivable sur I_a et $F' = H = \sum f_n'$. la fontion F est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
- On a $\|g_n\|_\infty \leq \dfrac{1}{n^2}$ et $\sum g_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction G continue car les g_n sont continues.
  Dérivabilité sur $\mathbb{R}^*$: pour $a > 0$ travaillons sur $I_a =]-\infty,-a] \cup [a,+\infty[$ on a pour tout x de I_a : $|g_n'(x)| = \left|\dfrac{-2x}{(1+n^2x^2)^2}\right| \leq \dfrac{2|x|}{n^4x^4} \leq \dfrac{2}{n^4a^3}$. et $\sum g_n'$ converge normalement donc G est dérivable sur I_a et $G' = \sum g_n'$ sur $\mathbb{R}^*$.
  Dérivabilité en 0 : Soit $x \neq 0$, G étant continue sur R, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, il existe c_x de $]0,x[$ tel que $\dfrac{G(x)-G(0)}{x} = G'(c_x) = \sum g_n'(x)$. Comme $O < |c_x| < |x|$ on va chercher un équivalent de G' au voisinage de 0. Posonx $h(y) = \sum \dfrac{1}{(1+n^2y^2)^2}$ où y est fixé

non nul. Ainsi $G'(y) = -2yh(y)$. Pour tout z de $[n,n+1]$ on a $0 < 1+n^2y^2 \leq 1 + z^2y^2 \leq 1+(n+1)^2y^2$ et $\dfrac{1}{\left(1+(n+1)^2y^2\right)^2} \leq \dfrac{1}{(1+z^2y^2)^2} \leq \dfrac{1}{(1+n^2y^2)^2}$ et en intégrant $\dfrac{1}{\left(1+(n+1)^2y^2\right)^2} \leq \displaystyle\int_n^{n+1} \dfrac{dz}{(1+z^2y^2)^2} \leq \dfrac{1}{(1+n^2y^2)^2}$ en inversant $\displaystyle\int_1^{N+1} \dfrac{dz}{(1+z^2y^2)^2} \leq \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \dfrac{1}{(1+n^2y^2)^2} \leq \displaystyle\int_0^N \dfrac{dz}{(1+z^2y^2)^2}$ or les intégrales convergent en $+\infty$ et en outre $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\dfrac{1}{(1+n^2y^2)^2}$ existe, c'est $\dfrac{G'(y)}{-2y}$ en passant à la limite on obtient $\displaystyle\int_1^{+\infty}\dfrac{dz}{(1+z^2y^2)^2} \leq h(y) \leq \displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{dz}{(1+z^2y^2)^2}$.
Or $v(z) = \dfrac{\frac{1}{2}z}{1+z^2y^2} + \dfrac{1}{2y}\arctan yz$ est une primitive de $\dfrac{1}{(1+z^2y^2)^2}$ et $\displaystyle\lim_{z\to+\infty} v(z) = \lim_{+\infty}\dfrac{\arctan yz}{2y} = \dfrac{\pi}{4y}(sg(y))$ d'où $\dfrac{\pi}{4y}(sg(y)) - \frac{1}{2}\left[\dfrac{1}{1+y^2} + \dfrac{\arctan y}{y}\right] \leq h(y) \leq \dfrac{\pi}{4y}(sg(y))$ maintenant si $y > 0$ on a $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{y}{2(1+y^2)} - \dfrac{\arctan y}{2} \leq yh(y) \leq \dfrac{\pi}{4}$ et si $y < 0$ on a $-\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{y}{2(1+y^2)} - \dfrac{\arctan y}{2} \leq yh(y) \leq -\dfrac{\pi}{4}$ et donc $\displaystyle\lim_{y\to0^+} yh(y) = \dfrac{\pi}{4}$ et $\displaystyle\lim_{y\to0^-} yh(y) = -\dfrac{\pi}{4}$ or $\dfrac{G(x)-G(0)}{x} = -2C_xh(c_x)$ donne $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\dfrac{G(x)-G(0)}{x} = \lim_{c\to0^+}(-2ch(c)) = -2\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{2}$ et $\displaystyle\lim_{x\to0^-}\dfrac{G(x)-G(0)}{x} = \lim_{c\to0^-}(-2ch(c)) = -2\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ et G admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche en zéro différentes elle n'est pas dérivable.

Exercice 35 Soit $f_n(x) = \frac{x^3}{\sqrt{n}}e^{-x^2\sqrt{n}}$ avec $n \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$.
1°) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction F continue.
2°) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que $F' = \sum f_n'$.

- On a $f_n'(x) = \dfrac{e^{-x^2\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}x^2\left(3-2\sqrt{n}x^2\right)$ et f_n étant impaire on a $\displaystyle\sup_{\mathbb{R}}|f_n(x)| = \sup_{\mathbb{R}^+}|f_n(x)| = f_n\left(\dfrac{c}{n^{\frac{1}{4}}}\right) = \dfrac{K}{n^{\frac{5}{4}}}$ où $K = c^3e^{-c^2}$ ainsi $\|f_n\|_\infty = \dfrac{K}{n^{\frac{5}{4}}}$ et $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction F. Pour tout n, f_n est continue sur $\mathbb{R}$ et donc F est continie sur $\mathbb{R}$.
- Nous allons montrer que F est dérivable et $F' = \sum f_n'$ sur tout ensemble $D(a,A) = [-A,-a] \cup [a,A]$ où $0 < a < A$. Cela prouvera la dérivabilité sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout x de $D(a,A)$ on a $|f_n'(x)| = x^2\dfrac{e^{-x^2\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}\left|3-2\sqrt{n}x^2\right| \leq A^2\left(3+2A^2\sqrt{n}\right)\dfrac{e^{-a^2\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} = \alpha_n$. Or α_n est le terme général d'une série convergente donc $\sum f_n'$ converge normalement sur $D(a,A)$ et par suite F est dérivable sur $D(a,A)$ et $F' = \sum f_n'$.

Exercice 36 Soit $g_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$, $n \geq 1$, $x \in \mathbb{R}^+$.
1°) Montrer que la série de fonctions $\sum g_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction G continue.
2°) Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Que vaut G'?
3°) Montrer que G n'est pas dérivable en zéro.
Exo corrigé dans intgene

Exercice 37 Soit $F(x) = \displaystyle\sum_{n\geq1}\dfrac{1}{n^2}\arctan(nx)$.
1°) Quel est l'ensemble de définition D de F? F est-elle continue sur D?
2°) Montrer que F est dérivable sur $D\backslash\{0\}$, que vaut F'?

3°) Montrer que F n'est pas dérivable en zéro.

Si on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2}\arctan(nx)$ alors pour tout x de $\mathbb{R}$ on a $|f_n(x)| \leq \dfrac{\pi}{2n^2}$ et donc il y a convergence normale sur $\mathbb{R}$ vers une fonction F qui est continue car les f_n le sont.

$f_n'(x) = \dfrac{1}{n(1+n^2x^2)}$ plaçons-nous sur $I_a =]-\infty,-a] \cup [a,+\infty[$ on a pour tout x de I_a : $|f_n'(x)| \leq \dfrac{1}{n^3a^2}$ et il y a donc convergence normale sur I_a et par suite F est dérivable et $F'(x) = \sum f_n'(x)$.

Pour $x > 0$ on a $\dfrac{F(x)-F(0)}{x} = \sum \dfrac{\arctan(nx)}{n^2x} \geq \sum_{n=1}^{N} \dfrac{\arctan(nx)}{n^2x} = h_N(x)$ or $\lim\limits_{x\to 0} h_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan(nx)}{n^2x} = \sum_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n}$. Si F est dérivable en 0 alors $\lim \dfrac{F(x)-F(0)}{x} \geq \lim\limits_{x\to 0} h_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n}$ en faisant tendre N vers $+\infty$ on aurait que $\lim \dfrac{F(x)-F(0)}{x} = +\infty$. Il en résulte que F n'est pas dérivable en 0.

Exercice 38 [De deux variables]

Etudier l'existence de la limite en (0,0) pour les fonctions suivantes :

$$f(x,y) = \frac{1+x^2+y^2}{y}\sin y;\, f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2};\, f(x,y) = \frac{xy}{x+y};\, f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

Exercice 39 [De la continuité de deux variables]

Soit $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2\backslash\{0,0\} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \left(x^2+2y^2\right)^{-(x^2+y^2)} \end{array}$

Montrer que f peut être prolongée par continuité au point (0,0).
(Extrait des Arts 88)

Exercice 40 [Intégrale dépendant d'un paramètre, hors programme]

Etudier la continuité et la dérivabilité de : $\varphi(x) = \int_a^b t^{x-1}e^{-t}dt, 0 < a < b$.

Exercice 41 [Et à la main]

Soit g une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$, montrer par une intégration par parties que : $\int_a^b g(t)\sin(At)dt \to 0$ quand $A \to +\infty$.
Ensi 87

Dans le cas où g est de classe 1 cela ne pose pas de problème on a $\left|\int_a^b g(t)\sin(At)dt\right| \leq M\left|\int_a^b \sin(At)dt\right| = M\left|\dfrac{\cos Aa - \cos Ab}{A}\right| \leq \dfrac{2M}{|A|}$ et cette dernière quantité tend vers 0 avec $M = \sup\limits_{[a,b]}|f(t)|$. Dans le cas où g estseulement continue c'est le lemme de Lebesgue et on approche la fonction par des fonctions en escalier.

Exercice 42 [Classique]

Soit f et φ des fonctions continues sur $[a,b]$ et nulles en dehors de $[a,b]$, montrer que :
$(f*\varphi)(x) = \int_a^b f(t)\varphi(x-t)dt$ est continue sur $[a,b]$.
Etudier la dérivabilité si f est dérivable et φ continue.

Exercice 43 Calculer $I = \displaystyle\int_1^2 \left(\int_{\sqrt{x}}^{x} \sin\frac{\pi x}{2y}dy\right)dx + \int_2^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^{2} \sin\frac{\pi x}{2y}dy\right)dx$

Exercice 44 Soit $F(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{e^{xt}}{t}dt$. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

directement, puis en intégrant $\displaystyle\int\int_D e^{xy}dxdy$, $D = [a,b]\times[\alpha,\beta]$.

Exercice 45 Etudier $f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2} dt$ (variations, courbe représentative)

Exercice 46 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue.
1) Montrer que $x \longmapsto \int_a^b f(x-t)(1+t^2+\sin t)dt = \varphi(x)$ est continue pour $x \in \mathbb{R}$.
2) On ne peut ici appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme, montrer pourquoi. A l'aide d'un changement de variable convenable, montrer cependant que φ est dérivable et calculer $\varphi'(x)$.
3) On suppose maintenant que f est de classe C^1. Etablir que φ est dérivable par une méthode plus rapide, calculer φ' et retrouver le résultat de 2).
La fonction φ est continue par le théorème de continuité sous le signe somme. Mais f n'étant pas dérivable on ne peut pas appliquer le même résultat pour la dérivation. En changeant de variaable : $u = x - t$ on a $\varphi(x) = -\displaystyle\int_{x-a}^{x-b} f(u)\left(1 + (x-u)^2 + \sin(x-u)\right) du$ considèrons la fonction : $(u,v,x) \overset{\Phi(u,v,x)}{\longmapsto} \displaystyle\int_u^v g(x,t)\, dt \longmapsto \int_{x-a}^{x-b} g(x,t)\, dt$ on a $\Phi'(x-b,x-a,x) = -\displaystyle\int_{x-a}^{x-b} f(u)\left(2(x-u) + \cos(x-u)\right) du +$
$-f(x-b)\left(1+b^2+\sin b\right) + f(x-a)\left(1+a^2+\sin a\right)$, par dérivation des fonctions de plusieures variables.
Maintenant si f est $\mathcal{C}^1$ alors on peut dériver sous le signe somme : $\varphi'(x) = \displaystyle\int_a^b f'(x-t)\left(1+t^2+\sin t\right) dt$
et en intégrant par parties $\varphi'(x) = \left[-f(x-t)\left(1+t^2+\sin t\right)\right]_a^b + \displaystyle\int_a^b f(x-t)(2t+\cos t)\, dt$.