Chapitre 14

Séries de Fourier

14.1 introduction

L'histoire des séries trigonométriques remonte à la solution du problème de la corde vibrante donnée par Bernouilli. Mais en 1750 on ne croyait pas pouvoir décomposer une fonction en somme de *cos* et de *sin*. Il a fallu attendre 50 ans pour que Fourier étudiant l'équation de la chaleur donne multes exemples de telles décomposition (1822). Il croyait pour sa part que la série convergeait toujours vers la fonction. Mais il est à la base d'un démarage décisif de l'analyse mathématique. Son intuition a permis quelques années après à Lebesgues d'élaborer sa fameuse intégrale. C'est en fait Dirichlet (1829) qui démontra les principaux résultats et crèa la notion moderne de fonction. Beaucoup de mathématiciens ont suivi les traces de Fourier et encore en 1966 Carleson trouva des résultats non montrés. Enfin signalons bien entendu l'importance de cette théorie dans le traitement du signal et donc l'ouverture au monde du numérique.

14.2 Coefficients de Fourier

Soit n un entier relatif. Notons e_n, $\cos_n$ et $\sin_n$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes, définies par $e_n(x) = \mathrm{e}^{inx}$, $\cos_n(x) = \cos nx$ et $\sin_n(x) = \sin nx$.

Définition 1 *On appelle $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions à valeurs complexes définies sur $\mathbb{R}$, continues par morceaux et 2π-périodiques et $\mathcal{C}_{2\pi}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ constitué des fonctions continues.*

Proposition 1 *Soit $< \cdot, \cdot >$ la forme définie sur $\mathcal{E}$ par:*

$$\forall f, g \in \mathcal{E} \quad < f, g >= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f}(t) g(t) dt.$$

$< \cdot, \cdot >$ est une forme hermitienne positive et sa restriction à $\mathcal{C}_{2\pi}$ est un produit scalaire.

[Ind] Le vérifier.

Notons N_2 l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour $f \in \mathcal{E}$ par $N_2(f) = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t|^2 \, dt}$.On a vu, lors du cours sur les espaces préhilbertiens que l'inégalité de Cauchy-Schwarz était vérifiée par une forme hermitienne positive, on en déduit alors que

$$\forall f, g \in \mathcal{E} \quad N_2(f + g) \leq N_2(f) + N_2(g)$$

Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, on notera $N_2(f) = ||f||_2$, car la restriction de N_2 à $\mathcal{C}_{2\pi}$ est une norme.

Proposition 2 *$(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale de $\mathcal{C}_{2\pi}$, c'est à dire:*

$$\forall n, m \in \mathbb{Z} \quad < e_m, e_n >= \delta_{mn}.$$

[Ind] Calculer les produits scalaires.

14.2.1 Polynômes trigonométriques

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{P}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_{2\pi}$ engendré par la famille $\mathcal{F}_n$:

$$\{1, \cos, \cos_2, \dots, \cos_n, \sin, \dots, \sin_n\}.$$

Un élément P de $\mathcal{P}_n$ s'appelle un polynôme trigonométrique et

$$\exists a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, \dots b_n \in \mathbb{C} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx.$$

On peut alors poser $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ en donnant à b_0 la valeur 0 (ou toute autre valeur).

Proposition 3 *$\mathcal{P}_n$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $2n+1$ et la famille $(e_k)_{k\in[-n,n]}$ en est une base orthonormée.*

[Ind] Utiliser les sous-espaces vectoriels engendrs par des vecteurs et ce qui précède.

Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$ et n et m deux entiers positifs. On a:

$$< e_m + \varepsilon_1 e_{-m}, e_n + \varepsilon_1 e_{-n} >= \delta_{m,n}(1 + \varepsilon_1\varepsilon_2) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\delta_{m,-n},$$

on en déduit donc que la famille $\mathcal{F}_n$ est une famille orthogonale et que, si m et n sont deux entiers non simultanément nuls:

$$\begin{aligned} < \cos_m, \cos_n > &= \frac{1}{2}\delta_{m,n} \\ < \cos_m, \sin_n > &= 0 \\ < \sin_m, \sin_n > &= \frac{1}{2}\delta_{mn}. \end{aligned}$$

Ainsi

Proposition 4 $\{1, \sqrt{2}\cos, \sqrt{2}\cos_2, \dots, \sqrt{2}\cos_n, \sqrt{2}\sin, \dots, \sqrt{2}\sin_n\}$ *est une base orthonormée de $\mathcal{P}_n$.*

[Ind] Utiliser les formules précédentes.

Remarque: Les coefficients d'un polynôme trigonométrique sont donc uniques.**Écriture sur la base** $(e_k)_{k\in[-n,n]}$.k étant un entier strictement positif, a_k et b_k étant des complexes, on a:

$$a_k \cos kx + b_k \sin kx = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)\mathrm{e}^{ikx} + \frac{1}{2}(a_k + ib_k)\mathrm{e}^{-ikx}.$$

Posons $c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$, $c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$ et $c_0 = a_0$. On peut alors écrire:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{p=-n}^{n} c_p \mathrm{e}^{ipx}.$$

Exercice 1 Calculer $\int_0^a \cos mt \cos nt dt$, $\int_0^a \cos mt \sin nt dt$ et $\int_0^a \sin mt \sin nt dt$, a étant un réel et m et n des entiers.

Exercice 2 Montrer qu'un produit de deux polynômes trigonométriques appartenant à $\mathcal{P}_n$ est un élément de $\mathcal{P}_{2n}$. En déduire que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{P}_n$ est une $\mathbb{C}$-algèbre.

Exercice 3 Quel est le nombre maximal de zéros d'un polynôme trigonométrique, situés dans l'intervalle $[0, 2\pi[$.

14.2.2 Séries de Fourier

Soit f une fonction continue par morceaux 2π-périodique. Si on cherche un polynôme trigonométrique qui approche f, on doit d'abord décider le mode d'approximation. Un des moyens parmi les plus simples est l'approximation au sens des moindres carrés: on cherche donc $P_n \in \mathcal{P}_n$ tel $\int_0^{2\pi} |f - P_n|^2$ soit le plus petit possible. Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, nous savons alors que P_n est la projection orthogonale de f sur $\mathcal{P}_n$ et donc:

$$P_n = \sum_{k=-n}^{n} < e_k, f > e_k.$$

Montrons que la propriété est vraie pour $f \in \mathcal{E}$. Notons encore $P_n = \sum_{k=-n}^{n} < e_k, f > e_k$. On vérifie que, pour tout entier $k \in [-n, n]$, $< f - P_n, e_k >= 0$, on en déduit que, pour tout $P \in \mathcal{P}_n$,

$$< f - P, f - P >=< f - P_n, f - P_n > + < P - P_n, P - P_n >$$

ainsi

$$N_2(f - P_n) = \inf_{P\in\mathcal{P}_n} N_2(f - P)$$

On note dans tous les cas $d(f, \mathcal{P}_n) = N_2(f - P_n)$.Les coefficients $< e_k, f >$ sont appelés coefficients de Fourier (exponentiels) de f et souvent notés $c_k(f)$.
Si on cherche la décomposition de la projection orthogonale de la foncton f sur la base orthogonale $\{1, \cos, \ldots, \cos_n, \sin, \ldots, \sin_n\}$, on trouve alors:

$$\begin{aligned} P_n &=< 1, f > + \sum_{k=1}^{n} < \frac{\cos_k}{||\cos_k||_2}, f > \frac{\cos_k}{||\cos_k||_2} + \sum_{k=1}^{n} < \frac{\sin_k}{||\sin_k||_2}, f > \frac{\sin_k}{||\sin_k||_2} \\ &=< 1, f > + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k(f)\cos_k + b_k(f)\sin_k\right), \end{aligned}$$

en posant, pour tout entier naturel non nul n:

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{||\cos_n||_2^2} < \cos_n, f >= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\, dt \\ b_n(f) &= \frac{1}{||\sin_n||_2^2} < \sin_n, f >= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\, dt. \end{aligned}$$

appelés coefficients de Fourier en cosinus et sinus.Le coefficient $< 1, f >$ est égal à $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, dt$; on unifie les formules en posant:

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt.$$

P_n s'écrit alors:

$$P_n = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k(f)\cos_k + b_k(f)\sin_k).$$

Définition 2 *La série de Fourier de f est alors la série de fonctions:*

$$S(f) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f)\cos_n + b_n(f)\sin_n).$$

Elle est égale à la série:

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n.$$

Nous noterons, par la suite, pour tout entier naturel n:

$$S_n(f) = P_n = \sum_{k=-n}^{n} < e_k, f > e_k = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\cos_k + b_k(f)\sin_k,$$

appelée somme partielle de la série de Fourier de f.

Proposition 5 $S_n : \mathcal{C}_{2\pi} \to \mathcal{C}_{2\pi}$ *est la projection orthogonale sur $\mathcal{P}_n$.*

[Ind] Comprendre ce qui précède.

Calcul pratique des coefficients de Fourier Dans certains cas, il est possible de simplifier les calculs des coefficients de Fourier d'une fonction f.f étant une fonction 2π- périodique, pour tout réel a, on a

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{a-\pi}^{a+\pi} f(t) \mathrm{e}^{-int} dt$$

et des formules analogues pour les coefficients $a_n(f)$ et $b_n(f)$.Si f est une fonction réelle, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les coefficients $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont réels et $c_n(f) = \overline{c_{-n}(f)}$; $a_n(f) = 2\Re(c_n(f))$ et $b_n(f) = -2\,\mathrm{Im}(c_n(f)) = 2\,\mathrm{Im}(c_{-n}(f))$.

Si f est paire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$b_n(f) = 0 \text{ et } a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt dt.$$

Si f est impaire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n(f) = 0 \text{ et } b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt dt.$$

Exercice 4 Soit f une fonction de $\mathcal{E}$ vérifiant l'une des propriétés suivantes:
a) $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x + \pi) = f(x)$
b) $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x + \pi) = -f(x)$
c) $\forall x \in \mathbb{R}\ f(\pi - x) = f(x)$
d) $\forall x \in \mathbb{R}\ f(\pi - x) = -f(x)$
Représenter l'allure de f, de ses parties paire et impaire et montrer que certains coefficients de Fourier de f sont alors nuls.

14.3 Convergence de la série de Fourier d'une fonction

14.3.1 Convergence en moyenne quadratique

Pour une fonction continue quelconque f, les sommes partielles $S_n(f)$ ne convergent pas nécessairement vers f au sens usuel (convergence simple ou uniforme). Soit $f \in \mathcal{E}$. On déduit de l'égalité $< f - S_n(f), S_n(f) >= 0$ la relation

$$N_2(f)^2 = N_2(S_n(f))_2^2 + d(f, \mathcal{P}_n)^2$$

ainsi que l'inégalité de Bessel:

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2 \leq N_2(f)^2$$

On en déduit alors que

Proposition 6 *Soit $f \in \mathcal{E}$, la série de terme général $|c_k(f)|^2 + |c_{-k}(f)|^2$ est convergente.*

[Ind] Pourquoi une série à termes positifs converge-t-elle ?

En exploitant le fait que la suite $d(f, \mathcal{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et le théorème de Stone-Weierstrass (version trigonométrique), on montre alors :

Théorème 1 *Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$.*

$$\lim_{n\to+\infty} ||S_n(f) - f||_2 = 0.$$

On dit alors que la suite $(S_n(f))$ converge vers f dans l'espace $\mathcal{C}_{2\pi}$ muni de la norme $||\cdot||_2$ (convergence en moyenne quadratique.

[Ind] Un peu difficile à trouver tout seul. On fait un raisonnement par densité.

De ce théorème, on en déduit:

Théorème 2 *(Formule de Parseval). Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$. La série des carrés des modules des coefficients de Fourier complexes $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ converge ainsi que les séries des carrés des modules des coefficients de Fourier $(a_n(f))$ et $(b_n(f))$ et*

$$||f||_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2)$$
$$= \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2)$$

[Ind] La convergence entrîne la convergence des normes.

Remarque: (Pour les applications en Physique) Les deux théorèmes restent vrais lorsque $f \in \mathcal{E}$ en remplaçant $||\cdot||_2$ par $N_2(\cdot)$.

14.3.2 Convergence simple, convergence uniforme

Soit f une fonction 2π-périodique, continue et C^1 par morceaux, on trouve alors que, pour tout entier relatif n non nul :

$$c_n(f) = \frac{1}{in} c_n(\tilde{f}')$$

La série $\left|c_0(\tilde{f}')\right|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left|c_n(\tilde{f}')\right|^2 + \left|c_{-n}(\tilde{f}')\right|^2\right)$ étant convergente, on en déduit:

Théorème 3 *Si f est une fonction 2π-périodique, continue, C^1 par morceaux alors:*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)| \ \textit{converge}$$

et la série de Fourier de f converge normalement et donc uniformément vers f.

[Ind] Comprendre ce qui précède et majorer le terme général.

Pour une fonction quelconque de $\mathcal{E}$, on n' a pas de théorème particulier sur la convergence simple de la série de Fourier de f, en revanche si elle est de plus de classe C^1 par morceaux, on peut appliquer le théorème de Dirichlet

Théorème 4 *Soit f une fonction 2π-périodique et C^1 par morceaux, la série de Fourier converge simplement vers la fonction g qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $\dfrac{1}{2}\,(f(x+0)+f(x-0))$.*

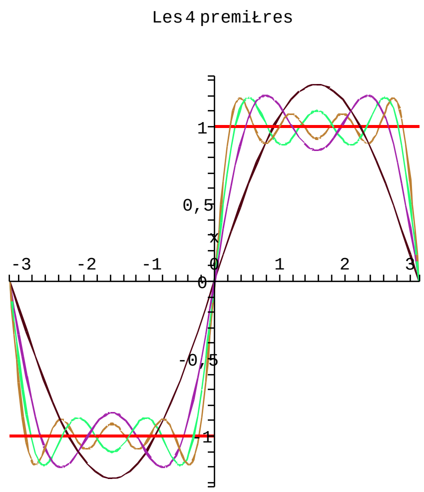
[Ind] Noyau de Poisson.

En particulier, en tout point $x \in \mathbb{R}$ où la fonction f est continue, on a

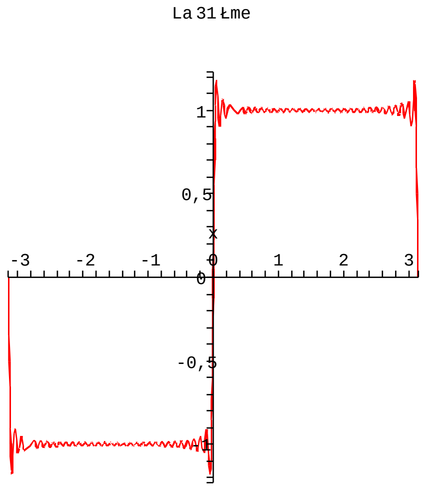
$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\mathrm{e}^{inx}$$

Exemples.1) Soit f la fonction impaire 2π-périodique définie sur $]0, pi[$ par $f(x) = 1$. La fonction étant C^1 par morceaux en un point c de discontinuité de f, on a $f(c) = \frac{1}{2}\,(f(c+0)+f(c-0))$. On en déduit que la série de Fourier de f converge simplement vers f.

Le graphique suivant montre les premières sommes partielles.



Traçons S_{31}:



La convergence ne peut être uniforme sur $[-\pi, \pi]$, puisque les sommes partielles sont continues, alors que la fonction f ne l'est pas.

Les coefficients de Fourier de la fonction sont : $a_n = 0$ car f est impaire et $b_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)sinntdt = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} sin(nt)dt = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n}$ nous posons $U_n(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}sin(2k+1)x$.

Cherchons les extrêmaux de U_n sur $[0,\pi]$: On a $U_n^{'}(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n} cos(2k+1)x = \frac{4}{\pi}Re\left(\sum_{k=0}^{n} e^{i(2k+1)x}\right) = \frac{4}{\pi}Re\left(\frac{e^{ix}-e^{i(2n+1)x}}{1-e^{2ix}}\right) = \frac{4}{\pi}Re\left(\frac{1-e^{i2(n+1)x}}{e^{-ix}-e^{ix}}\right) = \frac{4}{\pi}\frac{sin2(n+1)x}{2sinx} = \frac{2}{\pi}\frac{sin2(n+1)x}{sinx}$. Ainsi les zéros de $u_n'(x)$ sont $2(n+1)x = k\pi$ ou $x = \frac{k\pi}{2(n+1}$. Nous avons donc $\overset{Sup}{[0,\pi]}\ U_n(x) \geq U_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)$ En fait on montre qu'il y a égalité. Calculons :

$U_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}sin\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}$ or

$$U_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}sin\frac{(2k)\pi}{2(n+1)} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k}sin\frac{(k)\pi}{2(n+1)}$$

. Utilisons les sommes de Riemann :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}sin\frac{(2k)\pi}{2(n+1)} = \frac{1}{2(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{k}{n+1}}sin\frac{(k)\pi}{(n+1)}$$

qui tend vers $\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{sin(\pi x}{x}dx$. De même :

$$\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k}sin\frac{(k)\pi}{2(n+1)} = \frac{1}{2(n+1)}\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{\frac{k}{2(n+1)}}sin\frac{(k)\pi}{2(n+1)}$$

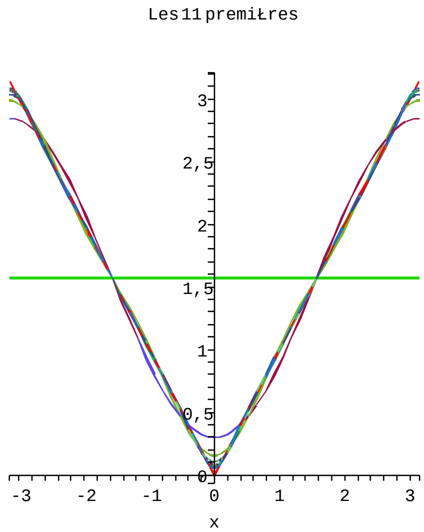
qui tend vers $\int_0^1 \frac{sin(\pi x}{x}dx$. Ainsi $U_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)$ tend vers $\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{sin(\pi x]}{x}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{sinx}{x}dx$ qui vaut à peu près $1,178$ ce qui montre par un calcul que la convergence n'est pas uniforme. C'est le phénomène de Gibbs. 2) Calculons la série de Fourier de la fonction f paire, 2π-périodique, définie par: pour tout $x \in [0, \pi]$, $f(x) = x$.

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \quad \text{si } n \neq 0$$

en effectuant une intégration par parties, alors que $a_0(f) = \dfrac{2}{\pi} \dfrac{\pi^2}{2} = \pi$.
Les sommes partielles sont donc, pour tout $n \geq 1$:

$$S_n(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

Le graphe suivant représente les 11 premières sommes partielles de la fonction$f$.



Exercice 5 Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ et en déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Etude des fonctions de classe C^p, $p \leq 1$ Considérons une fonction de classe C^{p-1} et de classe C^p par morceaux, $p \leq 1$, 2π périodique sur $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{Z}^*$.

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \mathrm{e}^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(t) \frac{\mathrm{e}^{-int}}{n} dt = \frac{1}{in} < e_n, f' >$$

en effectuant une intégration par parties. On obtient donc:

$$c_n(f) = \frac{1}{in} c_n(f').$$

Ce qui signifie que les coefficients de Fourier de la fonction f' s'obtiennent en dérivant terme à terme la série de Fourier de f.
En recommençant l'opération , on en déduit:

$$c_n(f) = \frac{1}{(in)^p} < e_n, f^{(p)} > .$$

On en conclut qu'il existe $K \in \mathbb{R}+$ tel que $|c_n(f)| \leq \dfrac{K}{n^p}$.
On peut alors remarquer que plus f est régulière, plus sa série de Fourier est rapidement convergente.

14.4 Séries trigonométriques, synthèse de Fourier

On distingue en général 2 types de problèmes:Étant donnée une fonction f, trouver sa série de

Fourier et regarder dans quelle mesure elle représente la fonction f: c'est le problème de l'analyse de Fourier.Étant donnée une série trigonométrique, étudier sa convergence et les propriétés de

sa somme; c'est le problème de la synthèse de Fourier.

Définition 3 *Une série de fonctions $\sum u_n$ où $u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$ est appelée série trigonométrique.*

Proposition 7 *Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites complexes et $(u_n)_{n\geq 0}$ la série trigonométrique de terme général $u_n = a_n \cos_n + b_n \sin_n$.*
1) Si pour $x \in \mathbb{R}$, $\sum u_n(x)$ converge, alors $\sum u_n(x + 2\pi)$ converge.
La somme d'une série trigonométrique est donc 2π-périodique.
2) Si les séries $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ convergent, $\sum u_n$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$ et la somme de la série est donc une fonction continue.
3) Si la série trigonométrique converge et si la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-na_n \sin_n + nb_n \cos_n)$$

(obtenue par dérivation terme à terme) est uniformément convergente sur un intervalle, sa somme est la dérivée de la somme de la série, sur l'intervalle considéré.
4) Si $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence strictement supérieur à 1, alors $T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{inx}$ est une fonction C^∞ de la variable réelle x.
$C(x) = \frac{1}{2}(T(x) + T(-x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \cos nx$ et $S(x) = \frac{1}{2i}(T(x) - T(-x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \sin nx$ sont donc des fonctions C^∞ de la variable réelle x, de même que leurs parties réelles et imaginaires.

[Ind] Appliquer les résultats sur les séries de fonctions.

Exemple: Soit α un réel vérifiant $0 < \alpha < 1$. La série entière $\sum \alpha^n z^n$ a un rayon de convergence égal à $1/\alpha$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n \cos nx = \Re\left(\frac{1}{1 - \alpha e^{ix}}\right) = \frac{1 - \alpha \cos x}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos x}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n \sin nx = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{1 - \alpha e^{ix}}\right) = \frac{\alpha \sin x}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos x}$$

Exercice 6 Montrer que:

$$\frac{1 + \alpha z}{1 - \alpha z} = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n z^n - 1,$$

puis que:

$$1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n \cos nx = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos x} = \frac{\cos\theta}{1 - \sin\theta \cos x},$$

en posant $\theta = 2 \arctan \alpha$.

Expression des coefficients en fonction de la somme Supposons $\sum u_n$, où $u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$ pour tout x, uniformément convergente sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ de sorte que l'on puisse intervertir le symbole $\sum$ et $\int_0^{2\pi}$ et notons S sa somme.

$$< \cos_p, S >= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(t)\cos ptdt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_n(t)\cos ptdt,$$

or, si $n \neq 0$

$$< \cos_p, u_n >= \frac{1}{2}\delta_{pn}a_n$$

et

$$< \cos_p, u_0 >= \delta_{pn}a_0.$$

Ainsi

$$< \cos_p, S >= \begin{cases} a_0 & \text{si } p = 0 \\ \frac{1}{2}a_p & \text{si } p \neq 0. \end{cases}$$

De la même façon, on montre que:

$$< \sin_p, S >= \begin{cases} 0 & \text{si } p = 0 \\ \frac{1}{2}b_p & \text{si } p \neq 0. \end{cases}$$

Définition 4 *Soit $(v_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ une suite indexée par $\mathbb{Z}$. On dira que la série $\sum_{p=-\infty}^{+\infty} v_p$ converge (au sens de Cauchy) si $\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=-n}^{n} v_p$ existe. Cette limite est alors appelée somme de la série et elle est égale à $\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=0}^{n}(v_p + v_{-p}) - v_0$.*

En posant $c_0 = a_0$ et pour tout entier naturel n non nul: $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ et $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$, on peut alors écrire:

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{inx},$$

et on a, pour tout entier relatif n:

$$< e_n, S >= c_n.$$

Les coefficients a_n et b_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$ s'en déduisent alors:

$$a_n = \begin{cases} c_0 & \text{si } n = 0 \\ c_n + c_{-n} & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ i(c_n - c_{-n}) & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

On peut donc retrouver les coefficients de la série à l'aide de la somme:

Proposition 8 *La série de Fourier de la somme d'une série trigonométrique uniformément convergente est la série trigonométrique elle-même.*

[Ind] C'est le calcul précédent.

Pour terminer ce paragraphe, on peut se demander si une fonction dont la série de Fourier ne possède pas de bonnes propriétés de convergence ne pourrait pas par un moyen ou un autre se représenter comme la somme d'une série trigonométrique qui elle convergerait et la réponse est non:

Proposition 9 *Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$. Si une série trigonométrique converge vers f au sens de la moyenne quadratique, cette série est la série de Fourier de f.*

[Ind] Penser à la continuité

Proposition 10 Unicité de la série de Fourier. *L'application de $\mathcal{C}_{2\pi}$ dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ qui, à une fonction f associe la suite de terme général $\hat{f}(n) = c_n(f)$ est injective.*

[Ind] C'est un corollaire.

Remarque: Ces deux dernières propositions sont aussi vraies dans $\mathcal{E}$. La série de Fourier d'une fonction f de E détermine de façon unique la fonction f.

Exercice 7 Quelle est la série de Fourier de la fonction $x \mapsto \cos^4 x$? Quelle est la série de Fourier d'un polynôme trigonométrique ?

Exercice 8 Montrer que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-\alpha\cos x}{1+\alpha^2-2\alpha\cos x}\cos nx\,dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\alpha^n & \text{si } n \neq 0 \\ 1 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

14.5 Cas des fonctions T-périodiques

On peut considérer l'espace vectoriel $\mathcal{D}^T$ des fonctions à valeurs complexes, définies sur $\mathbb{R}$ continues par morceaux, T-périodiques, telles que la valeur en tout point est égale à la demi-somme des limites à droite et à gauche en ce point.Sur cet espace, on construit le produit scalaire:

$$\forall f, g \in \mathcal{D}^T \quad < f, g >= \frac{1}{T}\int_0^T \overline{f}(t)g(t)dt.$$

Une famille orthonormée de fonctions dans cette espace est alors la famille e_n^T définies par: pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ $e_n^T(x) = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{T}nx}$.La série de Fourier de $f \in \mathcal{D}^T$ est alors:

$$\begin{aligned} S(f)(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^T(f)\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{T}nx} \\ &= \frac{a_0^T(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^T(f)\cos(k\frac{2\pi}{T}x) + b_k^T(f)\sin(k\frac{2\pi}{T}x)), \end{aligned}$$

où, pour $n \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} c_n^T(f) &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{T}nt}dt \\ a_k^T(f) &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(k\frac{2\pi}{T}t\right)dt \\ b_k^T(f) &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(k\frac{2\pi}{T}t\right)dt. \end{aligned}$$

Les résultats théoriques restent les mêmes (mutatis mutandis).

Exercice 9 Trouver la série de Fourier de la fonction partie fractionnaire d'un réel.

14.6 Exemples et applications

1) Soit f 2π-périodique, définie sur $[0, 2\pi[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{i\alpha x}$ où $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. Pour $p \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} c_p &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(\alpha-p)x}dx \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{\mathrm{e}^{i(\alpha-p)x}}{\alpha-p}\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{-i}{2\pi(\alpha-p)}\left(\mathrm{e}^{i2\pi\alpha}-1\right). \end{aligned}$$

Ainsi, en appliquant le théorème de Dirichlet:

$$\forall x \in]0, 2\pi[\quad \mathrm{e}^{i\alpha x} = \frac{-i(\mathrm{e}^{i2\pi\alpha}-1)}{2\pi}\left(\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{inx}}{\alpha-p}\right).$$

Et donc pour $x = \pi$, on trouve:

$$\frac{\pi}{\sin\alpha\pi} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{\alpha-p}.$$

2) Soit f 2π-périodique, définie sur $]-\pi, \pi]$ par $f(x) = \cos\alpha x$ où $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. La fonction f est paire, continue, C^1 par morceaux et pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\alpha x\,\cos nx\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(\alpha+n)x + \cos(\alpha-n)x\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\alpha+n)\pi}{\alpha+n} + \frac{\sin(\alpha-n)\pi}{\alpha-n}\right] \\ &= (-1)^n\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha+n}+\frac{1}{\alpha-n}\right] \\ &= \frac{2\alpha\sin\pi\alpha}{\pi}\frac{(-1)^n}{(\alpha^2-n^2)}. \end{aligned}$$

Ainsi:

$$\forall x \in [-\pi, \pi] \quad \cos\alpha x = \frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi} + 2\alpha\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{\alpha^2-n^2},$$

et donc

$$\frac{\cos\alpha x}{\sin\alpha\pi} = \frac{1}{\pi\alpha} + \frac{2\alpha}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{\alpha^2-n^2},$$

ce qui donne, pour $x = \pi$:

$$\pi\mathrm{cotan}\,\pi\alpha = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\alpha^2-n^2}.$$

Si $\alpha \in [a, b]$ où $[a, b] \cap \mathbb{Z} = \emptyset$, on a $\dfrac{1}{n^2-\alpha^2} \leq \dfrac{1}{n^2 - \sup(a^2, b^2)}$ pour $n \geq \sqrt{\sup(a^2, b^2)}$ et donc la série (en α) précédente est normalement convergente sur tout intervalle fermé ne rencontrant pas $\mathbb{Z}$. Dérivons la série terme à terme:

$$\left(\frac{1}{\alpha^2-n^2}\right)' = \frac{-2x}{(\alpha^2-n^2)^2},$$

or $\sum \frac{1}{(\alpha^2-n^2)^2}$ est normalement convergente sur $[a,b]$, donc

$$-\frac{\pi^2}{\sin^2\pi\alpha} = \frac{-1}{\alpha^2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\alpha^2-n^2} + 2\alpha\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-2\alpha}{(\alpha^2-n^2)^2},$$

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{\sin^2\pi\alpha} &= \frac{1}{\alpha^2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{-\alpha^2+n^2}{(\alpha^2-n^2)^2} + \frac{2\alpha^2}{(\alpha^2-n^2)^2}\right)\\ &= \frac{1}{\alpha^2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha^2+n^2}{(\alpha^2-n^2)^2},\end{aligned}$$

or

$$\frac{1}{(\alpha-n)^2} + \frac{1}{(\alpha+n)^2} = 2\frac{\alpha^2+n^2}{(\alpha^2-n^2)^2},$$

ainsi

$$\frac{\pi^2}{\sin^2\pi\alpha} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(\alpha-n)^2}.$$

Exercice 10 Montrer que, si $\alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}$, alors

$$\forall x \in]-\pi,\pi[\quad \sin\alpha x = \frac{2\sin\alpha\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{\alpha^2-n^2}\sin nx.$$

Exercice 11 Trouver la série de Fourier de la fonction 2π-périodique, impaire définie sur $[0,\pi]$ par $f(x) = \sin\alpha x$ où $\alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}$

14.7 Complément : fonctions polynomiales par morceaux

Définition 5 *Soit f continue par morceaux définie sur un voisinage du réel x_0. On appelle saut de la fonction f en x_0 le réel $S_{x_0} = f(x_0+0) - f(x_0-0)$.*

Soit f une fonction de $\mathcal{D}$ définie sur $]-\pi,\pi[$ par

$$f(x) = \begin{cases} P_1(x) & \text{si } x \in]\pi, x_1[\\ P_2(x) & \text{si } x \in]-x_1, x_2[\\ \vdots & \\ P_m(x) & \text{si } x \in]x_{m-1}, \pi[\end{cases}$$

où $-\pi < x_1 < \cdots < x_{m-1} < \pi$ et où $P_1,\ldots,P_m$ sont des fonctions polynomiales. On dit que f est polynomiale par morceaux.

La fonction f est dérivable sur $I =]-\pi,\pi[-\{x_1,\ldots,x_{m-1}\}$ et sa dérivée f' est prolongeable sur $\mathbb{R}$ en une fonction $\tilde{f}'$ de $\mathcal{D}$ polynomiale par morceaux. En recommençant l'opération, on peut ainsi construire une suite $\tilde{f}^{(0)} = f, \tilde{f}', \tilde{f}'', \ldots, \tilde{f}^{(p)}, \ldots$ de fonctions de $\mathcal{D}$ polynomiales par morceaux et vérifiant, pour tout $x \in I$ et tout entier p, $\tilde{f}^{(p)}(x) = f^{(p)}(x)$.

Puisque f est périodique et polynomiale par morceaux, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $\tilde{f}^{(q)} = 0$.Pour p variant 0 à $q-1$, les fonctions $\tilde{f}^{(p)}$ possèdent en $x_0 = -\pi, x_1, \ldots, x_{m-1}$ des sauts notés $s^{(p)}_{x_0}, \ldots, s^{(p)}_{x_{m-1}}$.Calculons les coefficients de Fourier de f:

Soit $n \in \mathbb{Z}-\{0\}$ et $c_n(f)$ le coefficient de Fourier exponentiel de la fonction f.

$$\begin{aligned}c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{m-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)e^{-int}dt\end{aligned}$$

où on a posé $x_m = \pi$.
Pour $k \in [0, m-1]$,

$$\begin{aligned}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)e^{-int}dt &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} P_{k+1}(t)e^{-int}dt \\ &= \left[P_{k+1}(t)\frac{ie^{-int}}{n}\right]_{x_k}^{x_{k+1}} - \frac{i}{n}\int_{x_k}^{x_{k+1}} P'_{k+1}(t)e^{-int}dt\end{aligned}$$

ainsi, on trouve

$$c_n(f) = \frac{i}{2\pi n}\sum_{k=0}^{m-1} s_{x_k}^{(0)} e^{-inx_k} - \frac{i}{n}c_n(\tilde{f}^{(1)}).$$

On peut donc ainsi calculer les coefficients de Fourier de f et on trouve

$$a_n(f) = -\frac{1}{n\pi}\sum_{k=0}^{m-1} s_{x_k}^{(0)} \sin nx_k + \frac{1}{n^2\pi}\sum_{k=0}^{m-1} s_{x_k}^{(1)} \cos nx_k - \frac{1}{n^3\pi}\sum_{k=0}^{m-1} s_{x_k}^{(2)} \sin nx_k - \cdots$$

$$b_n(f) = \frac{1}{n\pi}\sum_{k=0}^{m-1} s_{x_k}^{(0)} \cos nx_k - \frac{1}{n^2\pi}\sum_{k=0}^{m-1} s_{x_k}^{(1)} \sin nx_k + \frac{1}{n^3\pi}\sum_{k=0}^{m-1} s_{x_k}^{(2)} \cos nx_k + \cdots$$

Exemples
Soit f la fonction de $\mathcal{D}$ définie pour $|x| < \pi$ par $f(x) = x^2$. La fonction est paire, continue, et, pour $|x| < \pi$

$$\begin{aligned}\tilde{f}^{(1)} &= 2x \\ \tilde{f}^{(2)} &= 2\end{aligned}$$

Le seul saut non nul est $s_{-\pi}^{(1)} = -4\pi$, ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n(f) = \frac{1}{n^2\pi}(-4\pi \cos n\pi) = 4\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

Soit f la fonction impaire de $\mathcal{D}$ définie pour $0 < x < \pi$ par $f(x) = x^2$. Les seuls sauts non nuls sont $s_{-\pi}^{(0)} = -2\pi^2$, $s_{-\pi}^{(2)} = -4$ et $s_0^{(2)} = 4$, ainsi

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^* \quad b_n(f) &= \frac{-\pi^2 \cos n\pi}{n\pi} - \frac{-4\cos n\pi}{n^3\pi} - \frac{4\cos 0}{n^3\pi} \\ &= \pi\frac{(-1)^{n-1}}{n} - 4\frac{1-(-1)^n}{\pi n^3}.\end{aligned}$$

14.8 Complément 2

Proposition 11 *Soit $< \cdot, \cdot >$ la forme définie sur $\mathcal{D}$ par:*

$$\forall f, g \in \mathcal{D} \quad < f, g > = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f}(t)g(t)dt.$$

$< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire sur $\mathcal{D}$.

[Ind]

Théorème 5 *(Formule de Parseval). Soit $f \in D$. La série des carrés des modules des coefficients de Fourier complexes $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ converge et*

$$||f||_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2).$$

[Ind]

14.9 Exercices

Exercice 12 Calculer les séries de Fourier des fonctions de $\mathcal{E}$ vérifiant, pour $|x| < \pi$:

$$\begin{array}{lll} f(x) = |\sin x|, & f(x) = \sin \frac{x}{2}, & f(x) = \pi - x, \\ f(x) = |\cos x|, & f(x) = \cos \frac{x}{2}, & f(x) = x(\pi - x). \end{array}$$

Exercice 13 Calculer la série de Fourier de la fonction f définie pour x réel par $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} a + \cos x}$ où a est un réel non nul.

Exercice 14 Développer en série de Fourier la fonction de période 2π définie par:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ \frac{\pi^2}{2} & \text{si } x = \pi. \end{cases}$$

Expliquez le comportement des coefficients de Fourier de cette fonction.
En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 15 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto |\sin t|^3$.
a) Déterminer la série de Fourier de f; étudier sa convergence.
b) En utilisant la formule de Parseval, montrer que:

$$\pi^2 = \frac{256}{45} + \frac{4608}{5} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2(4n^2-9)^2}.$$

c) Étudier la convergence des séries obtenues à partie de la série de Fourier de f par dérivations successives, terme à terme.

Exercice 16 Développer en série de Fourier des fonctions f et g de $\mathcal{E}$ vérifiant, pour $|x| < \pi$: $f(x) = \operatorname{sh} x$ et $g(x) = \operatorname{ch} x$.

Exercice 17 Soit f une fonction appartenant à $\mathcal{C}_{2\pi}$; (a_n) et (b_n) ses coefficients de Fourier. Montrer que les séries de terme général $\frac{a_n}{n}$, $\frac{b_n}{n}$ et $a_n b_n$ sont absolument convergentes.

Exercice 18 Trouver les valeurs $a_0, a_1, \ldots a_n$ qui minimisent l'expression:

$$\int_0^\pi \left(\sin x - \frac{a_0}{2} - a_1 \cos x - \cdots a_n \cos nx\right)^2 dx.$$

Exercice 19 Calculer la série de Fourier d'une fonction f de $\mathcal{E}$ vérifiant, pour $|x| < \pi$: $f(x) = |x|$.
En déduire que $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$ puis que $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^4} = \frac{\pi^4}{90}$.
Retrouver cette dernière égalité en calculant la série de Fourier de la fonction g de $\mathcal{D}$ définie pour $|x| < \pi$ par $f(x) = x^2$.

Exercice 20 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Développer en série de Fourier une fonction f de $\mathcal{E}$ vérifiant, pour $|x| < \pi$: $f(x) = \operatorname{ch} \alpha x$.
En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2 + \alpha^2}$.

Exercice 21 Soit Q le carré de $\mathbb{R}^2$ défini par les inégalités $0 \leq t \leq \pi$ et $0 \leq x \leq \pi$; et soit K la fonction définie sur Q par:

$$K(t,x) = \begin{cases} t(\pi - x) & \text{si } t \leq x \\ x(\pi - t) & \text{si } t > x. \end{cases}$$

a) Soit φ une fonction continue sur $[0, \pi]$ et soit ψ la fonction définie sur $[0, \pi]$ par

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi K(t, x)\varphi(t)\, dt.$$

Montrer que ψ vérifie l'équation $\psi'' = -\varphi$; montrer que ψ est déterminée de façon unique par l'équation précédente et les conditions $\psi(0) = \psi(\pi)$. Déterminer ψ lorsque $\varphi(x) = \sin nx$ $(n \in \mathbb{N})$.

b) Pour $x \in [0, \pi]$ fixé, on désigne par f_x la fonction impaire de période 2π sur $\mathbb{R}$ définie pour $0 \leq t \leq \pi$ par $f_x(t) = K(t, x)$.

Déterminer les coefficients de Fourier de f_x, et montrer que la série de Fourier de f_x converge simplement vers f_x. En déduire la valeur de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt\, \sin nx}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^2}.$$

c) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^2}$ peut être intégrée terme à terme sur $[0, \pi]$ et en déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

14.10 Travaux Dirigés

14.10.1 Énoncés

Exercice 22 Soit f la fonction impaire, 2π-périodique égale à 1 sur $]0,\pi[$ et telle que $f(\pi)=0$.
a) développer f en série de Fourier.
b) Justifier la convergence de la série de Fourier de f.
(dans tous les cas il est conseillé de faire, si possible un graphe rapide de f pour mettre en évidence la parité et la régularité de la fonction.)

Exercice 23 Soit f 2π-périodique, égale à $|x|$ sur $[-\pi,\pi]$.
a) reprendre les questions de l'exercice 1.
b) en déduire la valeur de $A=\sum\limits_{k\geq 0}\dfrac{1}{(2k+1)^2}$ et $B=\sum\limits_{k\geq 1}\dfrac{1}{k^2}$.

Exercice 24 Soit f π-périodique égale à $x(\pi-x)$ sur $[0,\pi]$, mêmes questions quà l'exercice 1.

Exercice 25 Soit f la fonction 2π-périodique définie pour $|x|\leq\pi$ par $f(x)=|shx|$.
a) Tracer le graphe de f.
b) Montrer sans aucun calcul, que la série de Fourier de f converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$.
c) Déterminer le développement en série de Fourier de f.
d) Calculer $f(\pi)-f(0)$ et en déduire $\left(th\frac{u}{2}=\frac{shu}{1+chu}\right)$ la formule suivante :

$$\frac{\pi}{2}th\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sum_{k\geq 0}\frac{1}{2k^2+2k+1}$$

Exercice 26 Soit f une fonction T-périodique de classe $\mathcal{C}^p$.
a) calculer $a_n(f)$ et $b_n(f)$ en fonction de $a_n(f^{(p)})$ et $b_n(f^{(p)})$ et en déduire que $a_n(f)=O\left(\frac{1}{n^p}\right)$ de même pour les . $b_n(f)$.
b) Que peut-on en conclure quant à la convergence de la série de Fourier d'une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ avec $p\geq 2$.

Exercice 27 Soit $f(x)=\left|\sin^3 x\right|$.
a) Quelle est la parité de f? Quelle est sa période?
b) Calculer les coefficients de Fourier de f.
c) Montrer que la série de Fourier de f converge vers f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 28 Soit f impaire, 2π-périodique définie par $f(x)=(x-2\pi)(3\pi-x)$ pour $x\in[2\pi,3\pi]$.
1°) Calculer les coefficients de Fourier de f.
2°) Etudier la convergence de la série de Fourier de f.
3°) Calculer $S_1=\sum\limits_{k\geq 0}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$ et $S_2=\sum\limits_{k\geq 0}\dfrac{1}{(2k+1)^6}$.
4°) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ de deux façons.
5°) Soit g la primitive de f nulle en zéro. Montrer que g est périodique et la calculer pour $|x|\leq\pi$. Quel est le développement de g en série de Fourier.

Exercice 29 1°) Soit $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ Ecrire le développement en série de Fourier de la fonction f 2π-périodique définie pour $x\in[-\pi,+\pi]$ par $f(x)=\cos\alpha x$.
2°) Etudier la convergence de cette série.
3°) Soit $x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ Montrer que $\cot anx=\dfrac{1}{x}+\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{2x}{x^2-n^2\pi^2}$.
4°) Calculer pour tout $\alpha\notin\mathbb{Z}$: $A(\alpha)=\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2-\alpha^2}$.
5°) Calculer $A=\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2}$.

Exercice 30 Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = x^2$ sur $]0, 2\pi[$.

Exercice 31 Trouver les valeurs $a_0, a_1, \cdots, a_n$ qui minimisent l'expression :

$$\int_0^\pi \left(\sin x - \frac{a_0}{2} - a_1 \cos x - \cdots - a_n \cos nx\right)^2 dx$$

Exercice 32 On donne $f(x) = \max(0, \sin x)$. Etudier la série de Fourier de f : convergence.

Exercice 33 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique telle que : $f(x) = ch\ \alpha x$ sur $[-\pi, +\pi]$. Développer f en série de Fourier, en déduire : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+\alpha}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+\alpha}\ , \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n^2+\alpha)^2}$.

Exercice 34 Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, 2π-périodique, telle que $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$. Montrer que $\int_0^{2\pi} f^2(t)dt \leq \int_0^{2\pi} f'^2(t)dt$. Etudier le cas d'égalité.

14.11 Exercices

14.11.1 Indications

Exercice 1 Mieux vaut transformer les produits en sommes.

Exercice 2 Décomposer les polynômes dans les bases. Que faut-il pour être une algèbre.

Exercice 3

Exercice 4 Faire des changements de variable dans les intégrales de définition des coefficients de Fourier.

Exercice 5 Dans la série de Fourier précédente pour quelle valeur de x vous pouvez trouver la première somme. Pour la seconde, séparer les termes pairs des termes impairs.

Exercice 6 Penser aux séries entières, suivre l'indication.

Exercice 7 Linéarisez et reconnaissez.

Exercice 8 L'intégrale est un coefficient de Fourier, de quelle fonction ? Penser à l'exemple précédent.

Exercice 9 La fonction fractionnaire peut sécrire : $f(x) = x - [x]$, chercher si elle est périodique puis faire les calculs.

Exercice 10 Vous avez trouvé le développement en série de Fourier de $cos\alpha x$ regarder si vous pouvez justifier une dérivation. Sinon il faut adapter tous les claculs précédents.

Exercice 11 C'est la suite de l'exercice précédent.

Exercice 12 C'est un exercice d'entraînement. Calculer les intégrales en divisant le domaine d'intégration et en utilisant les formules trigonométriques.

Exercice 13 Mettre f sous la forme d'une fraction rationnelle que l'on décompose,puis la développer pour trouver directement le développement en série de Fourier.

Exercice 14 Calculer les coefficients de Fourier en séparant le domaine d'intégration. Observer la série de Fourier et la régularité de la fonction.Trouver les valeurs de x qui vous donneront les valeurs des séries.

Exercice 15 Pour calculer les coefficients de Fourier linéariser. Utiliser Parseval. Bien justifier les dérivations termes à termes.

Exercice 16 Passer par la forme exponentiel. Peut-on dériver ?

Exercice 17 Parseval vous donne une convergence de série, utiliser Cauchy-Schwarz.

Exercice 18 Penser projection sur un sous-espace de dimension finie, distance minimale. Bien définir le cdre où vous pourrez appliquer le théorème. Penser à la nécessité d'avoir une base orthonormée.

Exercice 19 C'est du calcul. Penser à Parseval.

Exercice 20 Passer à la forme exponentielle. Justifier la convergence et vers qui ? Trouver la valeur de x ou Parseval.

Exercice 21 Il s'agit de dériver sous le signe intégrale avec dépendance par une borne. Attention. Résoudre l'équation différentielle. V{erifier que vous pouvez calculer les coefficients de Fourier, le faire en séparant l'intervalle d'intégration. Finir l'exercice !

14.12 Démonstrations

Proposition 1 Grâce à la conjugaison elle est hermitienne $< f, g >= \overline{< g, f >}$. La linéarité vient de la linéarité de l'intégrale. La positivité vient du fait que l'intégrale d'une fonction positive est positive. Elle sera définie si on peut utiliser que l'intégrale d'une fonction continue, positive est nulle si et seulement si laa fonction est nulle, donc dans $\mathcal{C}_{2\pi}$

Proposition 2 $< e_m, e_n >= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-imt}e^{int}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t}dt$ ainsi si $n = m$ on trouve l'intégrale de 1 donc le produit scalaire vaut 1 et si $m \neq n$ alors $< e_m, e_n >= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{i(n-m)t}}{i(n-m)}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{i(n-m)}\left(e^{i(n-m)2\pi} - 1\right) = 0$.

Proposition 3 $\mathcal{P}_n$ est un sous espace vectoriel engendré par les e_k pour $k = -n \cdots n$ donc par $2n+1$ vecteurs indépendants.

Proposition 4 On a bien $< \cos_m, \cos_n >= 0$ si $n \neq m$ et $= \dfrac{1}{2}$ si $n = m$ et puis $< \sin_m, \sin_n >= 0$ si $n \neq m$ et $= \dfrac{1}{2}$ si $n = m$ et enfin $< \sin_m, \cos_n >= 0$ pour tout n, m.

Proposition 5 La démonstration est faîte puisque $S_n(f)$ est par définition la projection orthogonale sur $\mathcal{P}_n$ et que $< e_k, f > e_k = c_k(f)e_k$.

Proposition 6 Le série est à termes positifs et les sommes partielles sont bornées par $N_2(f)^2$

Théorème 1 Si P est un polynôme trigonométrique, on a $N_2^2(f - P) \leq \sup\limits_{x\in[0,2\pi]} |f(x) - P(x)|^2$.
Appliquons le théorème de Stone-Weierstrass (version trigonométrique). Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un polynôme trigonométrique P de degré n_0 tel que $\sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x) - P(x)| \leq \varepsilon$. On en déduit que $d(f, \mathcal{P}_{n_0}) \leq \varepsilon$, mais puisque la suite $d(f, \mathcal{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (la suite des sous-espaces $\mathcal{P}_n$ étant croissante), on en déduit que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, $d(f, \mathcal{P}_n) \leq \varepsilon$.

Théorème 2 Le théorème précédent permet d'affirmer que la suite des projections orthogonales de f sur les sous-espaces $\mathcal{P}_n$ converge pour la norme N_2, la norme étant continues, la suite des normes des projections orthogonales converge vers la norme de f.

Théorème 3 Il suffit d'écrire :$|c_n(f)| = \left|\frac{1}{in}c_n(\tilde{f'})\right| \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n^2} + \left|c_n\tilde{f'}\right|^2\right)$. Ces deux dernières séries convergent par Riemann et Parseval.

Théorème 4 Si nous considèrons le noyau de Dirichlet : $D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \cos(kt)$ on a alors $\frac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} D_n = 1$ et $S_n(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)) =$
$\frac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\left(\dfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos(kt)\cos(kx) + \sin(kx)\sin(kt))\,dt\right) = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,D_n(x-t)\,dt$.
Cherchons un autre expression de D_n : on a
$2D_n(t)\sin\left(\frac{t}{2}\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2\left(\cos(kt)\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)t\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right)$
$= \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t$ donc $D_n(t) = \dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$, ce pour $t \notin \pi\mathbb{Z}$

En utilisant le changement de variable $t \longmapsto x-t$ et la 2π périodicité on obtient $S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} D_n(t) f(x-t)\,dt$. De plus en utilisant $t \longmapsto -t$ et la parité de D_n on a : $\int_{-\pi}^{0} D_n(t) f(x-t)\,dt = \int_{0}^{+\pi} D_n(t) f(x+t)\,dt$ d'où finalement avec $k = \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ on a $S_n(x)-k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(t)\left(f(x-t)+f(x+\right.$ $\int_0^{+\pi} \varphi(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) dt$ avec $\varphi(t) = \dfrac{f(x+t)+f(x-t)-2k}{2\pi\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ on a que φ est continue par morceaux sur $]0,\pi[$ mais aussi en 0 et π car $\varphi(t) \overset{0}{\sim} \dfrac{f(x+t)+f(x-t)-2k}{\pi t} \overset{0^+}{\to} \frac{1}{\pi}\lim\limits_{h\to 0^+}(Df(x+h)+Df(x-h)$

Le lemme de Lebesgue donne alors que :

$$S_n(x) - k \overset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Proposition 7 Pour 1 $S(x) = \sum u_n(x+2\pi) = S(x)$
Pour 2 On majore le terme génral par une série numérique convergente il y a donc convergence normale et la somme est continue.
Pour 3 : C'est le théorème de dérivation d'une série de fonctions.
Pour 4 : Ce sont les résultats des séries entières.

Proposition 8 Si la série converge uniformément on peut intervertir $\int$ et $\sum$ ce qui donne les coefficients de Fourier qui sont justement les coefficients de la série trigonométrique. Et la somme est évidement S.

Proposition 9 Le produit scalaire de $\mathcal{C}_{2\pi}$ étant continue, les coefficients de Fourier de f peuvent se calculer à l'aide de la série convergente. On s'apercoit alors que les coefficients de cette série sont bien les coefficients de Fourier de la fonction f.

Proposition 10 On applique la proposition précédente, puisque la série de Fourier de f converge au sens de la moyenne quadratique vers f.

Proposition 11 Nous pouvons remarquer que, pour tout réel a:

$$< f,g >= \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} \overline{f}(t)g(t)dt.$$

On vérifie facilement que cette forme est une forme sesquilinéaire positive. Montrons qu'elle est hermitienne.Il suffit de vérifier que si $f \in \mathcal{D}$ est telle que $< f,f >= 0$, alors $f = 0$. La fonction $|f|^2$ est positive, continue par morceaux et son intégrale sur tout intervalle de longueur $[2\pi$ est nulle.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $\displaystyle\int_{x-\pi}^{x+\pi} |f|^2 = 0$.
Si x est un point de continuité de f, donc de $|f|^2$, on a nécessairement $f(x) = 0$.
Si $x \neq 0$ est un point où f est discontinue, il existe un voisinage V de x, situé dans $]0,2\pi[$, tel que f est continue sur $V - \{x\}$; la valeur $f(x)$ étant égale à la demi-somme des limites à droites et à gauche, est donc nulle.

Théorème 5 Calculons la norme de $S_n(f) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k$. Puisque $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée de $\mathcal{D}$, on a:

$$||S_n(f)||_2^2 = \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2.$$

Or:

$$\big|\,||f||_2 - ||S_n||_2\big| \leq ||f - S_n||_2,$$

et puisque nous savons (théorème 1) que la suite $(||S_n(f) - f||_2)$ converge vers 0, on en déduit que la série des carrés des modules des coefficients de Fourier converge vers $||f||_2^2$.

14.12.1 Corrigés Travaux Dirigés

Exercice 22 f est impaire $f(0)=0$ et les a_n sont nuls. $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\sin ntdt = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin ntdt = \dfrac{2\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n}$ et la série de Fourier de f est $\mathcal{F}(f)(x) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k\geq 0}\dfrac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$. La fonction f est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ par morceaux et d'après le théorème de Dirichlet la série de Fourier converge vers $f(x)$ en tout point de continuité et vers $\frac{1}{2}\left(f(x^+)+f(x^-)\right)$ en un point de discontinuité $\mathcal{F}(f)(x) = f(x) : x \neq k\pi$ et vers $\frac{1}{2}\left(f(0^+)+f(0^-)\right) = \dfrac{1-1}{2} = 0 = f(0)$ si $x = k\pi$.

Exercice 23 La fonction f est paire et les $b_n = 0$, pour les $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\cos ntdt$ si $n \neq 0$ ou $a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} t\cos ntdt = 0 - \dfrac{2}{\pi n}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin ntdt = 2\dfrac{(-1)^n-1}{\pi n^2}$ et $a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \dfrac{\pi}{2}$. La série de Fourier est $\mathcal{F}(f)(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n\geq 0}\dfrac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$. Pour la convergence, f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux et le théorème de Dirichlet donne la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$, ce que l'on peut voir directement par $\sup\limits_{\mathbb{R}}\left|\dfrac{4\cos((2k+1)x)}{\pi(2k+1)^2}\right| \leq \dfrac{K}{k^2}$. En particulier $\mathcal{F}(f)(0) = f(0)$ ce qui donne $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k\geq 0}\dfrac{1}{(2k+1)^2} = 0$ ou $A = \displaystyle\sum_{k\geq 0}\dfrac{1}{(2k+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$. On a l'existence de B car il y a convergence absolue et en séparant les termes $B = \displaystyle\sum_{p\geq 1}\dfrac{1}{(2p)^2} + \sum_{p\geq 0}\dfrac{1}{(2p+1)^2}$ ou $B = \frac{1}{4}B + A$ et $B = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Exercice 24 f est paire, continue, $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Les b_n sont nuls et $a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} t(\pi-t)\cos(2nt)\,dt = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} t(\pi-t)\,d\left(\dfrac{\sin 2nt}{2n}\right) = 0 + \dfrac{1}{\pi n}\displaystyle\int_0^{\pi}(\pi-2t)\,d\left(\dfrac{\cos 2nt}{2n}\right)$ et $a_n = \dfrac{1}{2\pi n^2}\left(-2\pi - 2\displaystyle\int_0^{\pi}\cos 2ntdt\right) = -\dfrac{1}{n^2}$ avec $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\pi t - t^2\right)dt = \dfrac{\pi^2}{6}$ ce qui donne $\mathcal{F}(f)(x) = \dfrac{\pi^2}{6} - \displaystyle\sum_{n\geq 1}\dfrac{\cos 2nx}{n^2}$. La convergence est uniforme et on a $\mathcal{F}(f)(x) = f(x)$ mais l'expression de $f(x) = x(\pi - x)$ ne vaut que sur $[0,\pi]$.

Exercice 25 f est paire, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Les b_n sont nuls et $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \dfrac{2}{\pi}Re\left(\displaystyle\int_0^{\pi}\dfrac{e^t - e^{-t}}{2}e^{int}dt\right) = \dfrac{1}{\pi}Re\left(\left[\dfrac{e^{t(1+in)}}{1+in} - \dfrac{e^{t(in-1)}}{in-1}\right]_0^{\pi}\right)$ soit $a_n = \dfrac{1}{\pi}Re\left(\dfrac{(1-in)\left(e^{\pi}(-1)^n - 1\right) + (1+in)\left(e^{-\pi}(-1)^n - 1\right)}{1+n^2}\right) = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{(-1)^n ch\pi - 1}{1+n^2}$ ce qui donne avec $a_0 = \dfrac{ch\pi - 1}{\pi}$ pour la série $\mathcal{F}(f)(x) = \dfrac{ch\pi-1}{\pi} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^n ch\pi - 1}{1+n^2}\cos(nx)$. Le théorème de Dirichlet donne la convergence simple de la série de Fourier vers f. Il y a convergence normale de la série/

On a $f(\pi) - f(0) = \mathcal{F}(f)(\pi) - \mathcal{F}(f)(0)$ ou $sh\pi = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^n ch\pi - 1}{1+n^2}\left((-1)^n - 1\right)$ ou

$\dfrac{\pi}{2}sh\pi = \displaystyle\sum_{\substack{n\geq 1\\ n\ impair}}\dfrac{(-1)^n ch\pi - 1}{1+n^2}\left((-1)^n - 1\right) = (ch\pi + 1)\sum_{n\geq 0}\dfrac{2}{1+(2n+1)^2}$ d'où la formule $\dfrac{\pi}{2}\dfrac{sh\pi}{1+ch\pi} = \dfrac{\pi}{2}th\dfrac{\pi}{2} = \displaystyle\sum_{n\geq 0}\dfrac{1}{2k^2+2k+1}$. Cette formule donne d'excellentes valeurs approchées.

Exercice 26 En supposant f $\mathcal{C}^p$ avec $p \geq 1$ on peut intégrer par parties $c_n(f) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\, e^{-in\frac{2\pi}{T}t} dt = \left[-\dfrac{1}{2i\pi n} f(t)\, e^{-in\frac{2\pi}{T}t}\right]_0^T + \dfrac{T}{2i\pi n}\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f'(t)\, e^{-in\frac{2\pi}{T}t} dt$. On a $c_n(f) = \dfrac{T}{2i\pi n} c_n(f')$ car la fnction $t \mapsto f(t)\, e^{-in\frac{2\pi}{T}t}$ est T-périodique. Ainsi par récurrence $c_n(f) = \left(\dfrac{T}{2i\pi n}\right)^p c_n\left(f^{(p)}\right)$. Or pour g continue et T-périodique on a $\|g\|_\infty < \infty$ et $|c_n(g)| = \dfrac{1}{T}\left|\displaystyle\int_0^T g(t)\, e^{-i\frac{2\pi}{T}t} dt\right| \leq \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T |g(t)\, dt| \leq \|g\|_\infty$ en particulier avec $g = f^{(p)}$ on a $|c_n(f)| = \left|\left(\dfrac{T}{2i\pi n}\right)^p c_n(f)\right| \leq \left(\dfrac{T}{2\pi}\right)^p \left\|f^{(p)}\right\|_\infty \dfrac{1}{n^p}$ ce qui entraîne bien $c_n(f) = O\left(\dfrac{1}{n^p}\right)$. En outre si $p \geq 2$: $|c_n(f)\, e_n(f)| \leq \dfrac{K}{n^p}$ la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc uniformément. Bien entendu on peut avoir la convergence uniforme de $\mathcal{F}(f)$ avec des hypothèses plus faibles.

Exercice 27 f est paire, π-périodique et l'étude se fait sur $[0, \pi]$ où $f(x) = \sin^3 x$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux, mais les raccordements en $k\pi$ prouvent qu'elle est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
$a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \sin^3 t \cos(2nt)\, dt$ or $\sin^3 t = \dfrac{3\sin t - \sin 3t}{4}$ et $\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$ d'où $\sin^3 t \cos(2nt) = \frac{1}{8}(3\sin(2n+1)t - 3\sin(2n-1)t - \sin(2n+3)t + \sin(2n-3)t)$ et si $n \neq 0$ alors $a_n = \dfrac{1}{4\pi}\left[-3\dfrac{\cos(2n+1)t}{2n+1} + 3\dfrac{\cos(2n-1)t}{2n-1} + \dfrac{\cos(2n+3)t}{2n+3} - \dfrac{\cos(2n-3)t}{2n-3}\right]_0^\pi$ ou $a_n = \dfrac{24}{\pi(4n^2-9)(4n^2-3)}$ et $a_0 = \dfrac{24}{\pi 9}\dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{3\pi}$. Par suite la série de Fourier $\mathcal{F}(f)(x) = \dfrac{4}{3\pi} + \dfrac{24}{\pi}\displaystyle\sum_{n\geq 1}\dfrac{\cos(2nx)}{(4n^2-1)(4n^2-9)}$. Par le théorème de Dirichlet, f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, il y a convergence uniforme, la convergence normale se montre également directement sans problème.

Exercice 28 f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et son expression sur $[0, \pi]$ donne $f(x) = f(x + 2\pi) = ((x + 2\pi) - 2\pi)(3\pi - (x + 2$ $x(\pi - x)$ on retrouve un exercice précédent. Ici f est impaire et $a_n = 0, b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi t(\pi - t)\sin nt dt = 0 + \dfrac{2}{\pi n}\displaystyle\int_0^\pi (\pi - 2t)\, d\left(\dfrac{\sin nt}{n}\right) = 0 + \dfrac{4}{\pi n^2}\displaystyle\int_0^\pi \sin nt dt = \dfrac{4(1-(-1)^n)}{n^3}$ et $\mathcal{F}(f)(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 0}\dfrac{8}{\pi}\dfrac{\sin((2k+1)x)}{(2k+1)^3}$.
Il y a convergence uniforme. En $\frac{\pi}{2}$ on obtient $\dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{n\geq 0}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \dfrac{\pi}{2}\left(\pi - \dfrac{\pi}{2}\right)$ et $S_1 = \dfrac{\pi^3}{32}$.
L'égalité de Parseval donne $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(t)\, dt = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(\dfrac{8}{\pi(2k+1)^3}\right)^2 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi t^2(\pi - t)^2 dt$ et $S_2 = \dfrac{\pi^4}{15}$.
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t(\pi - t)\, dt = \dfrac{\pi^3}{12}$ et d'autre part $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f = \dfrac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{k\geq 0}\dfrac{\sin((2k+1)x)}{(2k+1)^3}dx$. La convergence uniforme sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ nous permet d'intervertir et $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\dfrac{8}{\pi(2k+1)^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2k+1)x dx = \dfrac{8}{\pi}\sum_{k\geq 0}\dfrac{1}{(2k+1)^4}$ ou $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\dfrac{1}{(2k+1)^4} = \dfrac{\pi^4}{96}$.
Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$ on a que g est $\mathcal{C}^2$ et $g(x + 2\pi) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt + \int_x^{x+2\pi} f(t)\, dt =$

$\int_0^x f(t)\,dt = g(x)$ car $\int_x^{x+2\pi} f = \int_{-\pi}^{+\pi} f = 0$ car f est impaire. Il en résulte que g est développable en séries de Fourier, étant $\mathcal{C}^1$ elle est égale à sa série de Fourier. g est paire comme primitive d'une fonction impaire, nulle en 0. Soit $x \in [0,\pi]$ alors $[0,x] \subset [0,\pi]$ et $g(x) = \int_0^x t(\pi - t)\,dt = \pi\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$ et par parité $g(x) = \pi\frac{x^2}{2} - \frac{|x|^3}{3}$ sur $[-\pi,\pi]$. Enfin $\mathcal{F}(g)(x) = g(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \mathcal{F}(f(t))\,dt$. La convergence uniforme de la série de fonctions sur $[0,x]$ à x fixé permet d'intervertir et $\mathcal{F}(g)(x) = \sum_{k\geq 0}\frac{8}{\pi}\frac{1}{(2k+1)^3}\int_0^x \sin((2k+1)t)\,dt = \frac{8}{\pi}\sum_{k\geq 0}\frac{1-\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^4}$ ou $\mathcal{F}(g)(x) = \frac{\pi^3}{12} - \frac{8}{\pi}\sum_{k\geq 0}\frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^4}$. Par unicité du développement de Fourier ceci est bien celui de g.

Exercice 29 f est paire, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos\alpha t\cos nt dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\cos(n+\alpha)t + \cos(n-\alpha)t)\,d$ ou $a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((n+\alpha)t)}{n+\alpha} + \frac{\sin((n-\alpha)t)}{n-\alpha}\right]_0^\pi$ car $\alpha \notin \mathbb{Z}$ Soit $a_n = \frac{(-1)^n\sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{1}{n+\alpha} - \frac{1}{n-\alpha}\right) = \frac{(-1)^n 2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2 - n^2)}$ si $n \neq 0$ et $a_0 = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}$. La série de Fourier est $\mathcal{F}(f)(x) = \frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n\cos nx}{\alpha^2 - n^2} = \cos(\alpha x)$.

La convergence est uniforme par Dirichlet ou directement par la convergence normale une fois que l'on sait que la série converge vers la fonction.

En écrivant $\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n\cos nx}{\alpha^2-n^2} = \cos(\alpha x)$ en $\alpha = \frac{x}{\pi}$ pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$, on obtient $\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\alpha^2-n^2} = \cos(\alpha\pi)$ ou $\cos x = \frac{\sin x}{x} + \frac{2x\sin x}{\pi^2}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\frac{x^2}{\pi^2} - n^2}$ ou $\cot anx = \frac{1}{x} + \sum_{n\geq 1}\frac{2x}{x^2 - \pi^2 n^2}$. Formule donnant une bonne façon de calculer des valeurs approchées de $\cot anx$.

Avec $x = \pi$ on a $\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\alpha^2-n^2} = \cos(\alpha\pi)$ et $\cot an(\alpha\pi) = \frac{1}{\alpha\pi} - \frac{2\alpha}{\pi}A(\alpha)$ soit $A(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi\cot an(\alpha\pi)}{2\alpha}$.

Soit $g_n(\alpha) = \frac{1}{n^2-\alpha^2}$ la série ayant ce terme général est convergente sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}^*$. Soit $\varepsilon \in]0,1[$ montrons qu'elle converge uniformément sur $[-\varepsilon,\varepsilon]$ pour cela soit $\alpha \in [-\varepsilon,\varepsilon]$: $|g_n(\alpha)| \leq \frac{1}{n^2-\varepsilon^2} = a_n$ pour $n \geq 1$. La série $\sum_{n\geq 1} g_n$ converge uniformément vers $A(\alpha)$ sur $[-\varepsilon,\varepsilon]$ donc $A(0) = \lim_{\alpha\to 0} A(\alpha)$. Pour $\alpha \notin \mathbb{Z}$ on a $A(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi\cot an\alpha\pi}{2\alpha}$ d'où $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = A(0) = \lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi\cot an(\alpha\pi)}{2\alpha}\right)$ or $\frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi\cot an(\alpha\pi)}{2\alpha} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi}{2\alpha}\frac{1 - \frac{\alpha^2\pi^2}{2} + o(\alpha^2)}{\pi\alpha - \frac{\alpha^3\pi^3}{6} + o(\alpha^3)} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{1}{2\alpha^2}\left(1 - \alpha^2\frac{\pi^2}{2} + o(\alpha^2)\right)\left(1 + \frac{\alpha^2\pi^2}{6} + o(\alpha^2)\right) = \frac{\pi^2}{6} + o(1)$. D'où le résultat $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{\pi^2}{6} + o(1)\right) = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 30 f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux mais n'est pas continue. $\mathcal{F}(f)(x) = \dfrac{4\pi^2}{3} + \displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx - \frac{4\pi}{n}\sin nx\right)$.
En 0 cela donne $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et Praseval donne $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Exercice 32 f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, continue sur $\mathbb{R}$. Les $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \sin x\cos nx dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (\sin(n+1)x - \sin$
$\dfrac{(-1)^{n-1}-1}{\pi(n^2-1)}$ sauf pour $a_0 = \dfrac{2}{\pi}$ et $a_1 = 0$. Les $b_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^\pi(\cos(n+1)x - \cos(n-1)x)\,dx = 0$
et $f(x) = \max(0,\sin x) = \dfrac{1}{\pi} - \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1} + \frac{1}{2}\sin x$. La convergence est normale, $v_n(x) = u_n'(x) = \dfrac{4n\cos 2nx}{\pi(4n^2-1)}$ est le terme général d'une série simplement convergente mais pas uniforme car f n'est pas dérivable en $\pi\mathbb{Z}$. En posant $g(x) = \cos x$ sur $]0,\pi[$, $g(x) = 0$ sur $]\pi,2\pi[$ et $g(\pi) = -\frac{1}{2}$ on a avec g 2π-périodique, $a_n(g) = nb_n(f), b_n(g) = -na_n(f)$ ce qui donne : $\frac{1}{2}\left(g(x^+)+g(x^-)\right) = \frac{1}{2}\cos x + \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{n\sin 2nx}{4n^2-1}$.

Exercice 33 f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, paire les b_n sont nuls et $a_n = \dfrac{2\alpha sh\alpha\pi}{\pi(n^2+\alpha^2)}(-1)^n$ par intégration par parties. $a_0 = \dfrac{2sh\alpha\pi}{\alpha\pi}$ si$\alpha \neq 0$ et sinon $a_0 = 0$. Pour $x \in [-\pi,\pi]$: $ch\alpha x = \dfrac{sh\alpha\pi}{\alpha\pi} + \dfrac{2\alpha sh\alpha\pi}{\pi}\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2+\alpha^2}$. Parseval donne $\dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{sh2\alpha\pi}{2\alpha}+\pi\right) = \dfrac{sh^2\alpha\pi}{(\alpha\pi)^2} + \dfrac{2\alpha^2}{\pi^2}sh^2\alpha\pi\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n^2+\alpha^2)^2}$. Pour $x = \pi$ cela donne $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2+\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{\alpha\pi ch\alpha\pi - sh\alpha\pi}{sh\alpha\pi}\right)$ et pour $x = 0$ cela donne $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2}\left(1 - \frac{\alpha\pi}{sh\alpha\pi}\right)$ et Parseval donne finalement :
$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n^2+\alpha^2)^2} = \frac{1}{4\alpha^2}\left(\frac{\alpha\pi ch\alpha\pi}{sh\alpha\pi} + \frac{\alpha^2\pi^2}{sh^2\alpha\pi} - 2\right).$$

Exercice 34 En utilisant $a_n(f) = -\frac{1}{n}b_n(f')$ et $b_n(f) = \frac{1}{n}a_n(f')$ et en appliquant Parseval à f et f' on obtient $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f'^2(t)\,dt = \sum_{n\geq 1} n^2\left(a_n^2(f)+b_n^2(f)\right) = \frac{a_0(f')}{2} + \sum_{n\geq 1}\left(a_n^2(f')+b_n^2(f')\right)$ ce qui donne vu que $a_0 = 0$: $\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t)\,dt \leq \int_0^{2\pi} f'^2(t)\,dt$. Le cas d'égalité donne $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(n^2-1)\left(a_n^2(f)+b_n^2(f)\right) =$ 0 et pour $n \geq 2$: $a_n(f) = b_n(f) = 0$ et finalement f est de la forme $\lambda\cos x + \mu\sin x$, fonctions qui conviennent.