Chapitre 16

FONCTIONS de PLUSIEURS VARIABLES

16.1 introduction

Les fonctions de plusieurs variables tirent leur origine de la géométrie (courbes dépendant d'un paramètre Leibniz 1694) et de la physique (mouvement d'une corde vibrante dont la position est $u(x,t)$.

C'est au milieu du $19^{ème}$ siècle que l'étude fait un grand bon en notant d'une seule lettre x le n-uplet $(x_1,\cdots,x_n)$. Grasmann (1844), Peano (1888) et Hamilton (1853).

La formulation moderne, naissance de la topologie, est due à des mathématiciens comme Hausdorff, Weierstrass (1914) pour la notion d'ouverts, Fréchet (1906) pour la notion de compact. Néanmoins beaucoup de travaux aboutissent au $18^{ème}$ siècle en se ramenant au cas d'une variable.

Cauchy (1821) pensait que la continuité en chaque variable donnait la continuité de la fonction, Peano (1884) trouve un contre-exemple.

Les dérivées partielles sont déjà utilisées par Euler (1734) puis plus tard par Jacobi et Weierstrass pour aboutir à la notion de fonctions différentiables en 1920 par Stolz et Klein. Euler en 1734 affirmait que $\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2}{\partial y\partial x}$, mais Schwarz (1873) trouve le premier contre-exemple suivi par Peano (1884).

La série de Taylor à 2 variables est montrée en 1829 par Cauchy en se ramenant au cas d'une variable mais Lagrange (1759) avait déjà énoncé le théorème sur les extréma.

Les intégrales multiples préoccupent Dirichlet (1839). Stolz (1886) donne le principe de clacul d'une intégrale double en intégrant une fonction définie par une intégrale dépendant d'un paramètre.

16.2 Continuité :

16.2.1 rappel

Nous considèrons des fonctions de E vers F où $E=\mathbb{R}^n$ et $F=\mathbb{R}^p$. Nous avons étudié, pour les intégrales dépendant d'un paramètre, le cas des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ avec $n=2$. Après avoir défini sur $\mathbb{R}^n$, les normes usuelles dont la norme euclidienne, les boules, les ouverts, les fermés, les bornés, les compacts, les limites de suites de points dans le premier chapitre, nous

avons défini les limites d'une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ en un point x_0 ; pour les fonctions f d'un ouvert A de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ cela se généralise par :
Pour tout ϵ de $\mathbb{R}^+$ il existe η de $\mathbb{R}^+$ tel que pour tout x de A si $\|x - x_0\|_n < \eta$ alors $\|f(x) - l\| < \epsilon$.
Ceci nous permet de définir la continuité en un point, puis sur A. A est un ouvert par exemple une boule contenant le point x_0, voir centrée en ce point. En jouant sur n et p et donc sur les normes de l'ensemble de départ et d'arrivée nous avons tous les cas. Néanmoins si $n = 1$ par le biais des coordonnées nous nous ramenons au cas d'une variable.
Nous rapellons ici le cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$ que nous avons vu dans le chapitre sur les arcs.

16.2.2 Cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$.

L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (écrire les opérations). On dit qu'une fonction f est bornée sur un ensemble A de $\mathbb{R}$ s' il existe α tel que : pour tout x de A: $\|f(x)\| < \alpha$. (Pour la norme revoir le chapitre 1)
$\lim\limits_{t_0} f = \ell$ signifie que : Pour tout ϵ de $\mathbb{R}^+$ il existe η de $\mathbb{R}^+$ tel que pour tout x de A si $|x - x_0| < \eta$ alors $\|f(x) - \ell\| < \epsilon$. Ou encore $\lim\limits_{x_0} f = l$ est équivalent à $\lim\limits_{x_0} \|f(x) - \ell\| = 0$ cette dernière limite est prise dans $\mathbb{R}$.
Une fonction f est ainsi continue en x_0 signifie que $\lim\limits_{x_0} f = f(x_0)$.
Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ f associe à un réel x un p-uplet $(y_1,y_2, \cdots ,y_p)$ tel que : pour tout i de 1 à p: $y_i = f_i(x)$. Ainsi chaque f_i est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et on a :

Proposition 1 *$f = (f_1, \cdots ,f_p)$ admet en x_0 une limite $y^0 = \left(y_1^0, \cdots ,y_p^0\right)$ si et seulement si pour tout i de 1 à p on a $\lim\limits_{x \to x_0} f_i = y_i^0$.*

<u>Preuve</u> : elle se fait en remarquant simplement que $\left|y_i - y_i^0\right| < \|y - y_0\|$ si $y = (y_i)$et $y^0 = \left(y_i^0\right)$;

Propriétés de la limite d'une somme, du produit d'une fonction par un scalaire, et la traduction en terme de continuité.

Par exemple pour la somme $\|(f + g)(x) - (f + g)(x_0)\| = \|(f(x) - f(x_0)) + (g(x) - g(x_0))\|$
$\leq \|(f(x) - f(x_0))\| + \|(g(x) - g(x_0))\|$
et le théorème de comparaison dans $\mathbb{R}$ permet de conclure.

16.2.3 Généralisation aux fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

Dans le cas de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ f associe à un n-uplet $(x_1,x_2, \cdots ,x_n)$ un p-uplet $(y_1,y_2, \cdots ,y_p)$ tel que : pour tout i de 1 à p: $y_i = f_i(x_1,x_2, \cdots ,x_n)$. Ainsi chaque f_i est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et on a :

Définition 1 *La fonction f est continue en x_0 voir sur A si et seulement si pour tout i de 1 à p les f_i sont continues en x_0 voir sur A.*

Théorème 2 *Une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est continue en x_0 si et seulement si pour toutes suites de points (x_n) convergeant vers x_0 la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(x_0)$.*

Preuve : Il suffit de l'écrire.

Théorème 3 *(Composée de fonctions).*
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ des fonctions avec f définie sur un ouvert A et g définie sur un ouvert B contenant $f(A)$. Si f est continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est continue en x_0.

- <u>Preuve</u> : Prenons une suite (x_n) tendant vers x_0, alors la suite $(f(x_n))$ tend vers $f(x_0)$ puisque f est continue en $f(x_0)$ et nous avons une suite de B donc $(g(f(x_n)))$ tend vers $g(f(x_0))$ et $g \circ f$ est continue en x_0.

16.3 Calcul différentiel

16.3.1 Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

Plus génaralement on considère une fonction de $E \to F$ où E,F sont des evn de dimensions finies.

fonctions différentiables

Définition 2 *Soit f de E dans F, a un élément de l'ouvert U. On dit que f est différentiable en a si il existe une fonction φ de $\mathrm{L}(E,F)$ tel que pour tout h dans un voisinage de 0 avec $a+h \in U$ on a : $f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + o(h)$. On appelle alors différentielle de f en a notée $df(a)$ l'unique application φ.*

Remarque 1 $o(h) = \|h\| \epsilon(h)$ *avec* $\lim\limits_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$.

Remarque 2 *l'unicité de l'application φ est à démontrer : en effet si φ,ψ sont des fonctions vérifiant la propriété on a : Pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que la condition $\|h\| \leq \alpha$ donne $\|(\varphi - \psi)(h)\| \leq \epsilon \|h\|$ ainsi pour tout h de norme α le vecteur $\dfrac{h}{\|h\|}$ décrit la sphère unité et $\left\|(\varphi - \psi)\left(\frac{h}{\|h\|}\right)\right\| \leq \epsilon$ ceci donne $|||\varphi - \psi||| \leq \epsilon$ pour tout ϵ on en déduit que la norme de $\varphi - \psi$ est nulle donc l'application est nulle et $\varphi = \psi$.*

Remarque 3 *L'application linéaire apparaissant dans la définition est continue car nous sommes en dimension finie ce ne sera plus vraie en dimension quelconque et il faudra imposer la continuité. D'autre part la différentielle au point a : $df(a)$ peut-être représentée par sa matrice $n \times m$. Dans le cas où l'ensemble de départ est $\mathbb{R}$ on a $n = 1$ et $df(a)$ n'est autre qu'un vecteur de F, en repassant par les coordonnées nous retrouvons le nombre dérivée : l'application linéaire s'identifiant à une multiplication ou à une homothétie. Dans le cas où nous avons qu'une seule variable on dit que f est dérivable et la dérivée est le vecteur dérivée.*

Remarque 4 *Nous obtenons un développement limité de f à l'ordre 1 si f est différentiable et nous approchons la fonction f par une application linéaire.*

Dérivée suivant un vecteur

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$.Considèrons un vecteur $\vec{u}$ normé et un point M_0 de U. Il existe $\eta > 0$ tel que pour tout réel t : $|t| < \eta$ les points $M_0 + t\vec{u}$ sont dans U. En effet il suffit de faire un dessin et prendre une boule centrée en M_0 contenue dans U de rayon η.
Nous avons ainsi la possibilité de considérer la fonction réelle à valeurs dans E : $f_u :]-\eta, +\eta[\to \mathbb{R}^p$ définie par $t \longmapsto f(M_0 + t\vec{u})$

Définition 3 *La fonction $f : U \to \mathbb{R}^p$ est dérivable dans la direction $\vec{u}$ en M_0 signifie que la fonction $f_u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ est dérivable en $t = 0$.*

Cela signifie que $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(M_0 + t\vec{u}) - f(M_0)}{t}$ existe et on notera ce nombre $f'_u(M_0)$ ou $\partial_u f(M_0)$. On regarde la fonction de plusieurs variables sur la droite de direction $\vec{u}$ et donc d'une seule variable.

Remarque 5 *Dans $\mathbb{R}^3$ si $\vec{n}$ est un vecteur unitaire normal à une surface S en un point M la dérivée suivant $\vec{n}$ est appelée dérivée normale à la surface en M_0 (attention à orienter la normale) notée $\partial_{\vec{n}}(M_0)$.*

Exemple 1 *Prenons $f : (x,y) \to xy$ et pour point $(0,0)$, pour direction $v = (1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ la fonction f_v s'écrit $f_v(t) = t^2$ et la dérivée $\partial f_v(0,0) = 0$. De la même façon on calcule $\partial f_{(0,1)}(2,1) = 2$ et $\partial f_{(1,0)}(1,1) = 1$. Que reconnait-on ?*

Théorème 4 *Si f est différentiable en a, alors f admet en a des dérivées selon toute direction $\vec{u}$ et de plus $df(a)(\vec{u}) = \partial_{\vec{u}}(a)$.*

Preuve.en effet $f(a+th)-f(a)=df(a)(th)+o(th)=tdf(a)(h)+o(t)$ et $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(a+th)-f(a)}{t}=df(a)(h)$

Dérivées partielles d'ordre un

Définition 4 *On considère la base canonique de $\mathbb{R}^n$: $(e_1,\cdots,e_n)$ où*

$e_i=(0,0,\cdots,0,\overset{\overset{i}{\downarrow}}{1},0,\cdots,0)$ *et* $f:U\to\mathbb{R}^p$ *. La $i^{\text{ème}}$ dérivée partielle de f en M_0 est $\partial_{e_i}f(M_0)$ notée aussi $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(M_0)$ si cette dérivée existe.*

Pour le calcul : on peut considérer avec les notations qui s'imposent $x_i\longmapsto f(m_1,\cdots,x_i,\cdots,m_n)$ que l'on dérive puis on fait $x_i=m_i$. Ou bien les théorèmes généraux permettent de dire que cette fonction est dérivable ou bien on regarde la limite du taux de variation :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(m_1,\cdots,m_i+h,\cdots,m_n)-f(m_1,\cdots,m_n)}{h}\left(=\frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0)\right).$$

Si les dérivées partielles existent en tout point on définira les dérivées partielles sur U fonctions elles-mêmes de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

Exemple 2 *:* $f(x,y)=\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$

Définition 5 *On dit qu'une fonction $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ est de classe $\mathrm{C}^1(U)$ si et seulement si les n dérivées partielles existent et sont continues sur U.*

Théorème 5 *: Si f est une fonction de classe C^1 sur U en supposant que le segment $[a,a+h]\subset U$ on a : $f(a+h)=f(a)+\sum\limits_{i=1}^{n}h_i\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)+o(h)$ où $o(h)=\|h\|\,\epsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0}\epsilon(h)=0$, $h=(h_1,h_2,\cdots,h_n)$. Il faut remarquer que ϵ est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. En d'autre terme on a $df(a):h\longmapsto\sum\limits_{i=1}^{n}h_i\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. Et par conséquent si f admet des dérivées partielles continues sur U alors f est différentiable sur U.*

preuve : Il suffit de faire la preuve pour $n=2$ et en se ramenant au cas où $a=0$, $f(a)=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)=0$ quitte à remplacer la fonction f par la fonction g : $g(x,y)=f(a_1+x,a_2+y)-f(a_1,a_2)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)\cdot x-\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)\cdot y$. Soit $\epsilon>0$ la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en 0 donne $\left\|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right\|<\epsilon$ si $\|(x,y)\|<\eta$. On a alors pour $\|(x,y)\|<\eta$: $\|g(x,y)-g(0,y)\|<\epsilon\,|x|$ ceci par application du théorème des accroissements finis pour $g(\cdot,y)$ fonction d'une variable. Maintenant comme $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0)=0$ et $g(0,0)=0$, on peut trouver $\beta>0$ tel que $|y|<\beta$ entraîne $\|g(0,y)\|<\epsilon\,|y|$. On en déduit que pour $\|(x,y)\|<\inf(\eta,\beta)$ on a $\|g(x,y)\|<\epsilon\,\|(x,y)\|$. Il faut remarquer le rôle de la continuité en (x,y) de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ au point $(0,0)$.

Remarque 6 *Soit une fonction f définie sur U ouvert de $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, la différentielle de f est $df(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)dx_i$*

Ainsi $df(x)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ qui à l'élément $h=(h_1,\cdots,h_n)$ associe $df(x)\cdot h=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)h_i$ on par exemple $df(x)\cdot e_i=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ et pour la dérivée selon un vecteur : si $\vec{v}=(v_1,\cdots,v_n)$ on a $\partial_v f(M_0)=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(M_0)v_i$. Les dx_i peuvent s'interpréter comme étant *les formes linéaires projections de* $\mathbb{R}^n$: $dx_i : (h_1, \cdots, h_n) \longmapsto h_i$. *Les* dx_i *forment la base duale des* e_i *base de* $\mathbb{R}^n$.

Exemple 3 $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ *en* $(x_0,y_0) = (6,2)$ *on obtient* $\dfrac{x}{y} = 3 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y + o(x,y)$ *ceci donne le plan tangent à la surface* $z = \dfrac{x}{y}$ *au point* $(6,2,3)$. *(explication)*

Remarque 7 *Bien entendu toute fonction de classse* $\mathcal{C}^1$ *est continue.*

Théorème 6 *L'ensemble des fonctions de classe* $\mathcal{C}^1(U,F)$ *est un espace vectoriel pour les lois usuelles. Pour tout* a *de* U : $f \longmapsto df\,(a)$ *est une application linéaire entre* $\mathcal{C}^1(U,F)$ *et* $\mathcal{L}(E,F)$.

Dans le cas de $\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ on a une algèbre où la multiplication revient à multiplier des scalaires : $(f \times g)\,(x) = f(x) \times g(x)$. Pour la somme, la multiplication externe, la multiplication la preuve peut se faire sans difficulté à l'aide des dérivées partielles.

Composition :

Théorème 7 *Si* f *est une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* U *ouvert de* E *vers* F *et* g *une fonction* $\mathcal{C}^1$ *d'un ouvert* V *de* F *vers* G, *en supposant que* $f\,(U)$ *soit contenu dans* V *on peut alors composer et considérer* $g \circ f$. *On a que* $g \circ f$ *est* $\mathcal{C}^1$ *sur* U *et pour tout* a *de* U : $d\,(g \circ f)\,(a) = (dg\,(f\,(a))) \circ (df\,(a))$.

Preuve. Posons $\varphi = (dg\,(f\,(a))) \circ (df\,(a))$ on a bien φ est linéaire de E dans G. Si (a,h) sont dans E on a $f\,(a+h) = f\,(a) + df\,(a)\,(h) + \|h\|\,\epsilon\,(h)$
$(g \circ f)\,(a+h) = g\,(f\,(a) + df\,(a)\,(h) + \|h\|\,\epsilon\,(h))$
$= g\,(f\,(a)) + dg\,(f\,(a))\,.\,(df\,(a)\,(h) + \|h\|\,\epsilon\,(h)) + \|k\|\,\zeta\,(k)$ avec $k = df\,(a)\,(h) + \|h\|\,\epsilon\,(h)$et $\lim\limits_{k\to 0} \zeta\,(k) = 0$.
$= g\,(f\,(a)) + dg\,(f\,(a))\,.\,(df\,(a)\,h) + \epsilon'\,(h)$ avec
$\epsilon'\,(h) = \|h\|\,dg\,(f\,(a))\,.\epsilon\,(h) + \|k\|\,\zeta\,(k)$. or $\|k\|\,\zeta\,(k) = \|df\,(a)\,(h) + \|h\|\,\epsilon\,(h)\|\,\zeta\,(h)$ et $\|k\|\,\zeta\,(k) = \|h\|\,\zeta\,(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \zeta\,(h) = 0$. Car $\|df\,(a)\,(h)\| \leq |||df\,(a)|||\,\|h\|$. Nous pouvons composer de deux façons : pour deux variables

$$\begin{cases} x \xrightarrow{g} f(u(x),v(x)) \\ (x,y) \rightarrow f(u(x,y),v(x,,y)) \end{cases}$$

Exemple 4 *Dans le* <u>*premier cas*</u> *on obtient une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *en posant* $\phi : x \rightarrow (u(x),v(x))$ *on a* $f \circ \phi$ *et nous allons montrer que* $(f \circ \phi)'\,(x) = df\,(\phi(x))\,\big(\phi'(x)\big)$, *nous supposons* f *définie sur un ouvert contenant* $\phi(I)$.
$f(\phi(x+h)) = f\,\big(\phi(x) + \phi'(x).h + \|h\|\,\epsilon(h)\big) = f\,(\phi(x)) + df\,(\phi(x))\,.\,\big(\phi'(x).h + \|h\|\,\epsilon(h)\big) + \|h\|\,\epsilon'(h)$
$= f\,(\phi(x)) + hdf\,(\phi(x))\,.\phi'(x) + \|h\|\,(df\,(\phi(x))\,.\epsilon(h) + \epsilon'(h))$ *cette dernière parenthèse est un* $\epsilon''(h)$ *car si* h *tend vers* 0 *elle tend vers* 0 *par contuité de* $df\,(\phi(x))$.
On peut retenir cette formule en écrivant : $dg(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(u(x),v(x))u'(x) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(u(x),v(x))v'(x)$.

Exemple 5 *Dans le* <u>*second cas*</u> *: il s'agit de la composée de* $\Phi : (x,y) \rightarrow (u(x;y),v(x,y))$ *avec* f.*Calculons les dérivées partielles, pour la première il s'agit de dériver* $x \rightarrow f(u(x,y),v(x,y))$ *qui est une fonction du cadre précédent donc* $\dfrac{\partial f \circ \Phi}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(u(x,y),v(x,y))\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(u(x,y),v(x,y))\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)$ *et pour l'autre :* $\dfrac{\partial f \circ \Phi}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(u(x,y),v(x,y))\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(u(x,y),v(x,y))\dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y)$ *toutes ces fonctions sont de classe* $\mathcal{C}^1$ *dès que* f *et* Φ *le sont.*

- Composition :
  Considèrons une $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ et une fonction $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on peut alors considérer le produit défini sur l'intersection des ensembles de définition de f et de λ : $\lambda(x)f(x)$. Le produit λf va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ On a $(\lambda f)^{(p)} = \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i \lambda^{(i)} f^{(n-i)}$ cela se montre coordonnées par coordonnées puisque $\lambda f(x) = (\lambda f_1,\lambda f_2,\cdots,\lambda f_n)$.

- Cas du produit scalaire : si nous considèrons des applications de $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ nous pouvons effectuer le produit scalaire$(f \cdot g)(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i(x) \cdot g_i(x)$ on a alors $(f \cdot g)' = (f' \cdot g + f \cdot g')$. La formule de Leibniz s'applique. Cette fonction est très pratique et permet de dériver les normes $\|f\| = \sqrt{f \cdot f}$. (Comme application on peut montrer la propriétés des tangentes des coniques avec les deux foyers.
- cas du produit vectoriel de deux fonctions f,g de classe $\mathcal{C}^k\left(I,\mathbb{R}^3\right)$ nous définissons une nouvelle fonction de I dans $\mathbb{R}^3$ par $x \to f(x) \wedge g(x)$ ainsi la dérivée première est $(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'$

Exemple 6 *Soit $f \in \mathrm{C}^1\left(\mathbb{R}^2,K\right)$ et $F : x \longmapsto \int_0^x f(t,x)\,dt$. Considèrons $\Phi : (x,y) \longmapsto \int_0^x f(t,y)\,dt$ sur $\mathbb{R}^2$. on $\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,y) = f(x,y)$ et $\frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,y) = \int_0^x \frac{\partial}{\partial y} f(t,y)\,dt$ comme ces dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$ on a que Φ est C^1. Soit maintenant $\Psi : x \longmapsto (x,x)$ fonction C^1sur $\mathbb{R}$. Comme $F = \Phi \circ \Psi$ la fonction F est de classe C^1sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = (d\Phi(\Psi(x)))(\Psi'(x)) = \int_0^x \frac{\partial}{\partial y} f(t,x)\,dt + f(x,x)$.*

Jacobien

En reprenant une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ et en passant par les coordonnées on a : $(x_1,x_2,\cdots,x_n) \overset{f}{\longmapsto} (f_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_p(x_1,\cdots,x_n))$définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Nous pouvons en fixant toutes les variables sauf une x_i considérer la fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$. Si cette fonction est dérivable en x_0 sa dérivée est la <u>dérivée partielle de f par rapport à x_i</u> en x_0. $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i},\cdots,\dfrac{\partial f_p}{\partial x_i}\right)$. On dit que<u>$f$ est $\mathcal{C}^1$ sur U</u> si toutes ses dérivées partielles existent et sont continues sur U.

La différentielle de f en un point x_0 est $df(x_0) = (df_1(x_0),\cdots,df_p(x_0))$ où $df_i(x_0) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)dx_j$
nous avons que $df(x_0)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ c'est à dire $df(x_0)\cdot(h_1,\cdots,h_n) = \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x_0)h_j,\cdots,\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_p}{\partial x_j}(x_0)h_j\right)$ ce que l'on peut encore écrire : $df(x_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$
matrice de taille $p - n$. Cette matrice s'appelle <u>la matrice jacobienne de f en x_0</u>

Dans le cas où $n = p$ pour une fonction f $\mathcal{C}^1(U)$ il est intéressant de définir le jacobien de f en x_0 comme le déterminant de cette matrice :

$$J(f) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0) \end{vmatrix}$$

- composée :
  Soit une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ et une fonction g de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^m$ cette dernière définie sur V ouvert contenant $f(U)$ où f est définie sur U.on peut alors définir $g \circ f$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. On a alors $\dfrac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g_i}{\partial x_k}(f(x))\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x)$ En regardant $x_i \longmapsto (g \circ f)_j(x)$ on est ramené au cas précédent démontré pour $p = 2$.

Ceci correspond au produit des matrices jacobiennes :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial (g\circ f)_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial (g\circ f)_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial (g\circ f)_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial (g\circ f)_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_p}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_p}(x_0) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Sur les formules précédentes on a que la composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ est $\mathcal{C}^1$ et que la matrice jacobienne de la composée est le produit des matrices jacobiennes, en outre on en déduit que la matrice jacobienne, de la réciproque d'une fonction si celle-ci existe, est l'inverse de la matrice jacobienne.

Exemple 7 *Si* $\Phi : (\rho,\theta) \longmapsto (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$ *alors* Φ *est* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$ *et sa jacobienne est* $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$ *et son jacobien est* ρ *ainsi* $d\Phi(\rho,\theta) \in GL_2$ *si et seulement si* $\rho \neq 0$.

$\mathcal{C}^1$ difféomorphisme

Définition 6 *Si* f *est une application d'un ouvert* U *de* E *vers un ouvert* V *de* F *on dit que* f *est un difféomorphisme de classe* C^1 *si et seulement si* f *est bijective de* U *sur* V *et* f, f^{-1} *sont* C^1 *sur* U*, sur* V *respectivement.*

Théorème 8 *Pour que une application* f *de classe* C^1 *sur un ouvert* U *de* E *soit un* C^1*-difféomorphisme il faut et il suffit que pour tout point* a *de* U*, l'application linéaire* $df(a)$ *soit bijective, donc un isomorphisme de* E *dans* F.

Preuve. admise.
Ceci s'applique en outre au courbes. En effet soit (I,φ)un parmétrage C^1 régulier d'une courbe Γ, f un C^1-difféomorphisme entre U et V avec $\varphi(I) \subset U$. Alors $(I, f\circ\varphi)$ est un paramétrage C^1 régulier de $f(\Gamma)$ car $f\circ\varphi$ est de classe C^1 sur I par composition et, pour tout t de I $(f\circ\varphi)'(t) = df(\varphi(t))(\varphi'(t)) \neq 0$ car $\varphi'(t) \neq 0$ et $df(\varphi(t))$ est injective.

16.3.2 Cas de l'algèbre $\mathcal{C}^1(U,\mathbb{K})$

Pour le cas $p = 1$ on a que $C^1(U,\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}-$algèbre sur laquelle $f \longmapsto df$ est une application linéaire vérifiant de plus $d(fg) = fdg + gdf$. Si $f \in C^1(U,\mathbb{K}^*)$ alors $\frac{1}{f}$ est de classe C^1 et $d\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{1}{f^2}df$. Enfin si $f \in C^1(U,\mathbb{K})$ et $g \in C^1(U,\mathbb{K}^*)$ alors $\frac{f}{g}$ est de classe C^1 et $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}$.
En effet nous pouvons considérer les fonctions $C^1 : F : a \longmapsto (f(a), g(a))$ et $G : (\lambda,\mu) \longmapsto \lambda\mu$ qui est bilinéaire par composition alors fg est C^1 et $d(fg)(a) = (dG(F(a)))\circ dF(a) = f(a)dg(a) + g(a)df(a)$, car $dg(\lambda,\mu)(h,k) = \lambda h + \mu k$.

Gradient

Définition 7 *Si* f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* U *ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *alors pour tout* a *de* U *il existe un unique vecteur de* E*, noté* $gard_a f$ *tel que por tout* h *on ait* $df(a).h = (grad_a f, h)$*. L'application* $gradf$ *est une application continue de* U *dans* $\mathbb{R}^n$ *appelé gradient de* f*. Si on considère une base orthonormée* $gradf$ *a pour composantes* $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$.

En effet $df\,(a)$ est une forme linéaire et d'après le théorème de Riesz on a l'existence et l'unicité d'un vecteur ici appelé $grad_a f$ tel que $df\,(a) = (grad_a f,\cdot)$. Ainsi si h est un vecteur de E on a $D_h f\,(a) = df\,(a)\,.h = (grad_a f,h)$.

Exercice 1 *Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U ne contenant pas $(0,0)$ et en notant g : $(\rho,\theta) \longmapsto f\,(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$ alors pour tout réel θ les coordonnées de $grad_{(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)} f$ sont dans une base orthonormée : $\left(\dfrac{\partial g}{\partial\rho}\,(\rho,\theta)\,,\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial g}{\partial\theta}\,(\rho,\theta)\right)$.*

En effet $G : (\rho,\theta) \longmapsto (\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$ est C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et sa matrice jacobienne est : $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\cos\theta \\ \sin\theta & \rho\sin\theta \end{pmatrix}$ ainsi $dG\,(\rho,\theta)\,e_1 = u\,(\theta)$ et $dG\,(\rho,\theta)\,(e_2) = \rho v\,(\theta)$. Si $a = G\,(b)$ on a $df\,(a)\,(u\,(\theta)) = (df\,(G\,(b)) \circ dG)\,(e_1) = dg\,(b)\,(e_1)$. D'où $df\,(a)\,(u\,(\theta)) = D_1 g\,(b)$. De même $df\,(a)\,(v\,(\theta)) = \frac{1}{\rho}\,(df\,(G\,(b)) \circ dG)\,(e_2) = \frac{1}{\rho} dg\,(b)\,(e_2) = \frac{1}{\rho} D_2 g\,(b)$ et comme $\left(D_{u(\theta)} f\,(a)\,,D_{v(\theta)} f\,(a)\right)$ sont les coordonées de $grad_a f$ dans la base canonique on obtient le résultat.

Accroissements finis

Théorème 9 *Si U est un ouvert, convexe de E et $f \in \mathrm{C}^1\,(U,\mathbb{K})$ alors si pour tout a de U l'application $df\,(a)$ est lipchitzienne de rapport k on a pour tout points a,b de U : $|f\,(b) - f\,(a)| \leq kN\,(b-a)$.*

Preuve. On a $[a,b] \subset U$ et en posant $x = tb + (1-t)\,a$ on a $F : t \longmapsto f\,(x)$ de classe C^1 sur $[0,1]$ avec $F'\,(t) = df\,(x)\,(b-a)$. Ainsi $|F'| \leq kN\,(b-a)$ par hypothèse et $|f\,(b) - f\,(a)| = \left|\displaystyle\int_0^1 F'\right| \leq kN\,(b-a)$.

corollaire 1 *Si U est un ouvert convexe de E pour qu'une application de classe C^1 sur U à valeurs numériques soit constante il faut et il suffit que sa différentielle soit nulle sur U.*

La réciporoque découle des accroissements finis.

16.3.3 Dérivées d'ordre supérieur :

Définition

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ elle peut donc être à son tour dérivable et on obtient $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, on les appelle les dérivées partielles d'ordre 2.

Remarque 8 *Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ sinon. Pour $(x,y) \neq (0,0)$ on calcule les dérivées partielles, en $(0,0)$ on les calcule aussi mais par la définition des limites puis encore par les limites $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$*

Théorème 10 (de Schwarz) *: Soit f une fonction de U ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Si les deux dérivées partielles d'ordre 2, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existent sur un voisinage de a point de U et sont continues en a elles sont alors égales en a. (admis)*

En outre si elles sont continues sur U elles sont égales.

- Maintenant nous pouvons récidiver : et définir $\dfrac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_p}}(a) = \dfrac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\dfrac{\partial^{p-1} f}{\partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_p}}\right)(x)$ nous avons que si des dérivées d'ordre p faisant intervenir le même nombre de dérivations par rapport à chaque variable x_i existent dans un voisinage de a et sont continues sur ce voisinage alors elles sont égales.

Définition 8 *Une fonction numérique f de U ouvert de $\mathbb{R}^n$ est dites de classe $\mathcal{C}^p$ sur U si toutes les dérivées d'ordre p existent et sont continues sur U.*

Proposition 11 *L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^p(U)$ forment une algèbre pour les lois usuelles.*

Retour au cas des fonctions numériques

Théorème 12 *Soit une fonction numérique de classe C^2 sur U ouvert de $\mathbb{R}^2$ on a la formule de Taylor-young à l'ordre 2 : $f(a+h) = f(a)+h_1\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)+h_2\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)+\frac{1}{2}\left(h^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)+2hk\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a)+k^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y}(a)\right)+ o(h^2+k^2)$*
(admis)

Extrêma de fonctions

Définition 9 *On dit qu'une fonction f de l'ouvert U de $\mathbb{R}^n$ présente un maximum en a si il existe une boule ouverte $\mathcal{B}$ de centre a contenue dans U tel que : pour tout x de $\mathcal{B}$: $f(x) \leq f(a)$. On définit de même les minima, les extrema stricts ou non.*

Proposition 13 *Soit f une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1(U)$ et a un point de l'ouvert U. Si f présente un extremum en a alors $df(a) = 0$. (c'est à dire pour tout i $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$)*

On considère la fonction $\theta : t \to a+tu$ qui est définie sur une petite boule autour de a on a alors que la fonction numérique d'une variable $f \circ \theta$ présente un extremum en $t = 0$ donc sa dérivée est nulle ou $df(a)\cdot u$ ceci étant vrai pour tout vecteur u on aque $df(a) = 0$.

Définition 10 *On appelle points critiques d'une fonction les points où la différentielle s'annule.*

Remarque 9 *Les extrema d'une fonction sont à chercher parmi les points de la frontière de son ensemble de définition si celui-ci n'est pas ouvert, parmi les points où f n'est pas C^1, enfin parmi les points critiques. Il faut regarder le signe de la différence $f(a+u) - f(a)$.*

<u>**Cas des fonctions de deux variables.**</u>
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$et $a = (\alpha,\beta)$ un point critique on a alors:
$$f(x,y) - f(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a)+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y}(a)\right)+o(h^2+k^2)$$
Nous posons $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a)$, $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$ et pour connaître le signe de cette différence il suffit d'étudier la forme quadratique $rh^2 + 2shk + tk^2$ dont la matrice est $\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ de déterminant $rt - s^2$ qui donne le produit des valeurs propres ainsi :

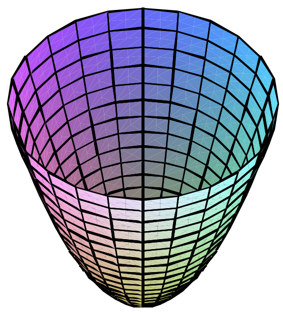
- si $rt - s^2 > 0$ alors on a deux valeurs propres de même signe si
  - $r > 0$ il y a un minimum local strict.
  - $r < 0$ il y a un maximum local strict.
- si $rt - s^2 < 0$ on a alors deux valeurs propres de signe contraire et on a ni maximum ni minimum.
- si $rt - s^2 = 0$ on ne peut pas conclure au regard de l'ordre 2 il faut poursuivre le développement ou regarder autrement.

Applications aux surfaces :

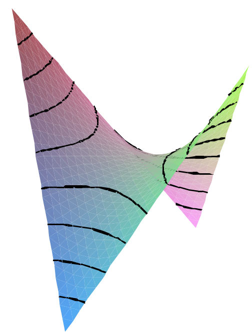
Surface définie par une équation cartésienne : Soit une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geq 1$, si on considère l'ensemble des points $M(x,y,z)$ vérifiant la relation $z = f(x,y)$ on dit que l'on a une surface d'équation cartésienne $z = f(x,y)$.

Une surface admet une paramétrisation cartésienne si l'une des coordonnées dans $\mathbb{R}^3$ s'exprime à l'aide d'une fonction des deux autres.
Le plan tangent d'une surface définie par $z = f(x,y)$ en un point M_0 est le plan passant par M_0 et d'équation $(X - X_0)\dfrac{\partial f}{\partial x}(M_0) + (Y - Y_0)\dfrac{\partial f}{\partial y}(M_0) - (Z - Z_0)$. Dans le cadre du théorème ci-dessus on en déduit pour $rt - s^2 \neq 0$ la position de la surface par rapport au plan tangent. Situation en col ou en selle de cheval (voir dessin)

paraboloïde elliptique



paraboloïde hyperbolique



Surface définie par une équation $F(x,y,z) = 0$

On suppose que la fonction F est une application de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$, sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. En supposant que le gradient de F est non nul en M_0 on a le plan tangent qui est le plan passant par M_0 et normal au gradient : $(X-X_0)\dfrac{\partial F}{\partial x}(M_0)+(Y-Y_0)\dfrac{\partial F}{\partial y}(M_0)+(Z-Z_0)\dfrac{\partial F}{\partial z}(M_0) = 0$

Remarque 10 *Soit maintenant une fonction numérique F définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ On appelle ligne de niveau de F l'ensemble des points $M(x,y,z)$ vérifiant $F(x,y,z) = \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. La normale à cette surface en M_0 est la droite affine passant par M_0 et dirigée par $Grad_{M_0}F$.*

Proposition 14 *Soit des surfaces d'équation $F(x,y,z) = 0$ et $G(x,y,z) = 0$, on considère, si elle existe, la courbe intersection des deux surfaces. En un point M_0 où les plans tangents sont distincts la tangente à la courbe intersection est l'intersection des plans tangents aux surfaces au point M_0.*

L'exemple ci-dessus correspond à la fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2/\{(0,0)\}$ $z = f(x,y) = (x^2+2y^2)^{-(x^2+y^2)}$ les points critiques sont $x = 0,y = -.4288819425,y = 0,x = -.6065306597$ pour lesquelles la quantité $rt - s^2$ est respectivement négative et positive.
L'exemple suivant est la fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ $z = f(x,y) = x^2y^3(1-\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y)$, les points critiques sont $y = y,x = 0,x = x,y = 0,x = 1,y = 1$, pour lesquels $rt - s^2$ est respectivement nuls puis pour le dernier négatif. L'étude à la main des deux premières donnent un maximum en $(0,y_0)$ pour $y_0 \in \left]-\infty,0\right[\cup \left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ et en $(1,1)$ et un minimum en $(0,y_0)$ pour $y_0 \in \left]0,\frac{1}{2}\right[$.

16.4 Calcul intégral

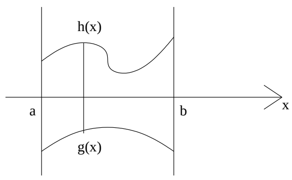
Une intégrale multiple peut se définir de la façon suivante : définition des pavés de $\mathbb{R}^n$, définition des fonctions en escalier sur un pavé, définition de la mesure d'un pavé (produit des arêtes) ce qui permet alors de définir l'intégrale des fonctions en escalier sur un pavé. On approche alors toute fonction continue sur un pavé uniformément par des fonctions en escalier et on montre que les intégrales convergent vers ... l'intégrale de la fonction continue. On étend alors la définition aux fonctions bornées limite uniforme de fonctions en escalier. Il reste alors le cas des ensembles bornés de $\mathbb{R}^n$, pour cela on enferme le borné dans un pavé et on montre que l'intégrale de f_P en posant $f_P(x) = 0$ si $x \in P\backslash X$, où X est un ensemble borné et P un pavé contenant X ne dépend pas du pavé P choisi.
Pour nous nous supposons connu $\int\int_\Delta f = \int\int_\Delta f(x,y)\,dxdy$. Pour f fonction réelle ou complexe définie et continue sur un compact de $\mathbb{R}^2$.

16.4.1 Propriétés

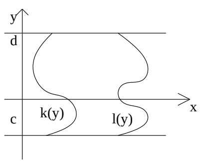
Il y a la linéarité : Soient f et g des fonctions continues sur l'ensemble Δ on a pour tous scalaires λ,μ : $\int\int_\Delta(\lambda f + \mu g) = \lambda\int\int_\Delta f + \int\int_\Delta g$.
Il y a la positivité : Si f est une fonction numérique positive sur Δ alors son intégrale est positive, ceci permet de comparer les intégrales de deux fonctions telles que $\forall x \in \Delta : f(x) \geq g(x)$.
Il y a l'additivité par rapport à un ensemble : soit f une fonction continue sur $X \cup Y$ où X et Y sont des ensembles bornés de $\mathbb{R}^2$ si $X \cap Y$ est négligeable (ie $\int\int_{X\cap Y} dxdy = 0$) alors $\int\int_{X\cup Y} f dxdy = \int\int_X f dxdy + \int\int_Y f dxdy$.

16.4.2 Calcul

- Par balayage vertical : On suppose D défini par les conditions : $a \leq x \leq b$ et $g(x) \leq y \leq h(x)$ où g,h sont continues sur $[a,b]$. Alors $\int\int_D f = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\right) dx$.



- Par balayage horizontal : On suppose Ddéfini par les conditions : $c \leq y \leq d$ et $k(y) \leq x \leq l(y)$ avec k,l continues sur $[c,d]$. Alors $\int\int_D f = \int_c^d \left(\int_{k(y)}^{l(y)} f(x,y)\,dx\right) dy$.

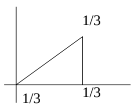


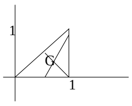
- Dans le cas de $D = [a,b] \times [c,d]$ on a le théorème de Fubini : $\int_a^b\int_c^d f = \int_c^d\int_a^b f$.

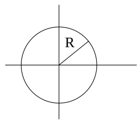
Exemple 8 *Soit P le pavé de $\mathbb{R}^2$ défini par :* $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, $\displaystyle\int\int_P \frac{dxdy}{(x+y+1)^2} = \int_0^1 \left[\frac{-1}{(x+y+1)}\right]_0^1 dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) dx = \ln\frac{4}{3}$.

Soit $D = \{0 \leq y \leq x \leq a\}$ *et* $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1+(y-a)^4}}$ *on a* $\displaystyle\int\int_D f = \int_0^a \left(\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{1+(y-a)^4}}\right) dx = \int_0^a \left(\int_y^a \frac{dx}{\sqrt{1+(y-a)^4}}\right) dy = \int_0^a \frac{a-y}{\sqrt{1+(y-a)^4}} dy = \frac{1}{2}\arg sha^2$ *en posant* $u = (y-a)^2$.

Soit T le triangle défini par $0 \leq x \leq 1{,}0 \leq y \leq x$. Le moment d'inertie de ce triangle par rapport à l'origine est ($I_A = \int\int_\Sigma AM^2 \mu(M)\, dxdy$) $I_o = \int\int_T \left(x^2+y^2\right) dxdy = \int_0^1 dx \int_0^x \left(x^2+y^2\right) dy = \frac{4}{3}\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{3}$.
Soit D le disque défini par $x^2+y^2 \leq R^2$. Son moment d'inertie par rapport à l'axe $x'x$ est ($I_D = \int\int_\Sigma d(M,D)^2\, dxdy$): $I_x = \int\int_D y^2 dxdy = \int_{-R}^{+R}\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{+\sqrt{R^2-y^2}} dx = 2\int_{-R}^{+R} y^2\sqrt{R^2-y^2}dy = \pi\frac{R^4}{4}$.







Dans le premier cas $OG = \frac{2}{3}\sqrt{1+\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$,
Exemple 9 *Soit $p > 0$, on veut calculer l'aire de D défini par $0 \leq x \leq \frac{p}{2}$ et $0 \leq y \leq \sqrt{2px}$. On a $\mathcal{A}(D) = \int\int_D dxdy = \int_0^{\frac{p}{2}}\left(\int_0^{\sqrt{2px}} dy\right) dx = \sqrt{2p}\int_0^{\frac{p}{2}}\sqrt{x}dx = \frac{p^2}{3}$. Si on décrit maintenant l'ensemble par $0 \leq y \leq p$ et $\frac{y^2}{2p} \leq x \leq \frac{p}{2}$ on a $\mathcal{A}(D) = \int\int_D dxdy = \int_0^p\left(\int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}} dx\right) dy = \frac{p^2}{2} - \frac{1}{2p}\int_0^p y^2 dy = \frac{p^2}{3}$.*

Exemple 10 *Si $f(x,y) = g(x)\times h(y)$ et $D = I\times J$ alors $\int\int_D f = \int_I g\int_J h$.*

- Changement de variables
  Soit ϕ un C^1-difféomorpphisme de U sur V ouverts de $\mathbb{R}^2$. Soit D un compact de U et $\phi(D) = \Delta$ on a : $\int\int_\Delta f(u,v)\, dudv = \int\int_D f\circ\phi(x,y)\left|J(\phi)\right| dxdy$ où $J(\phi)$ est le jacobien de ϕ.

On remplace $dudv$ par $\left|J(\phi)\right| dxdy$.
Comme application il y a le changement de variables des coordonnées polaires :
$\int\int_\Delta f(x,y)\, dxdy = \int\int_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\left|\rho\right| d\rho d\theta$.

Exemple 11 *$\int\int_\Delta x^2 dxdy$ si $\Delta : x^2+y^2 \leq 1$ on a $I = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\left(\int_0^1 \rho^3 d\rho\right) d\theta = 2\left(\int_0^1 \rho^3 d\rho\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\, d\theta\right) = \frac{\pi}{4}$.*

Exemple 12 *Aire de l'ellipse $E : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ est $A = \int\int_E dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 ab\rho d\rho d\theta = \pi ab$ avec le changement de variables $x = a\rho\cos\theta, y = b\rho\sin\theta$.*

Exemple 13 *Soit $F : x\geq 0, y\geq 0, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leq 1$ et $A = \int\int_F xydxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \rho^2\sin\theta\cos\theta a^2b^2\rho d\rho d\theta = \frac{a^2b^2}{8}$*

Exemple 14 *Calcul de l'intégrale de Poisson : $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$. On pose $I = \lim\limits_{a\to+\infty} I_a$ avec $I_a = \int_0^a e^{-x^2}dx$. On a $I_a^2 = \int_0^a e^{-x^2}dx\int_0^a e^{-y^2}dy = \int\int e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy$. L'intégrale est prise sur le carré, en écrivant que ce carré de côté a contient le disque de rayon a et est contenu* *dans le disque de rayon* $a\sqrt{2}$ *on a :* $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a e^{-\rho^2}\rho d\rho d\theta \leq I_a^2 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\sqrt{2}} e^{-\rho^2}\rho d\rho d\theta$ *ce qui donne* $\left[\frac{\pi}{2}\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right]_0^a \leq I_a^2 \leq \left[\frac{\pi}{4}e^{-\rho^2}\right]_0^{a\sqrt{2}}$ *et en faisant tendre a vers l'infini on a* $I_a = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Remarque 11 *Les intégrales triples se calculent de la même façon par piles ou par couches.*

Exercice 2 *L'aire d'une surface de révolution* Σ *engendrée par la révolution d'une courbe* γ *autour d'une droite* D *est* $\displaystyle\int\int_\Sigma dxdy = \int_0^{2\pi}\left(\int_\gamma rdr\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_\gamma xdx\right)d\theta = \int_0^{2\pi} d\left(G_\gamma,D\right)\ell\left(\gamma\right)d\theta =$ $2\pi d\left(G_\gamma,D\right)\ell\left(\gamma\right)$
C'est un héorème de Guldin.

- Formule de Green-Riemann
  On suppose D une compact du plan de frontière Γ courbe $\mathcal{C}^1$ par morceaux orientée dans le sens direct, P et Q fonctions de classe C^1 sur un ouvert U contenant Γ. La formule est :
  $\displaystyle\int\int_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right](x,y)\,dxdy = \int_\Gamma [Pdx + Qdy]$.
  Nous pouvons en donner une preuve pour K compact défini par $a \leq x \leq b,\phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)$ avec ϕ_1,ϕ_2 continues sur $[a,b]$.
  dessin
  Pour une fonction $\mathcal{C}^1$ sur K on a $\displaystyle\int\int_K \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} P'_y dy = \int_a^b P\left(x,\phi_2(x)\right)dx -$ $\displaystyle\int_a^b P\left(x,\phi_2(x)\right)dx =$
  $-\int_{C_1} P(x,y)\,dx - \int_{C_2} P(x,y)\,dx$. Or $\partial K = C_1 \cup C_2 \cup S_1 \cup S_2$ mais $\int_{S_1} P(x,y)\,dx = \int_{S_2} P(x,y)\,dx = 0$ et donc $\int_{\partial K} P(x,y)\,dx = \int_{C_1} P(x,y)\,dx + \int_{C_2} P(x,y)\,dx = -\displaystyle\int\int_K \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dxdy$
  De la même façon en définissant K par $c \leq y \leq d,\psi(y) \leq x \leq \psi(y)$ on obtient
  $\displaystyle\int\int_{\partial K} Q(x,y)\,dxdy = \int\int_K \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,dxdy$. D'où $\displaystyle\int\int_K\left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right](x,y)\,dxdy = \int_{\partial K}(P(x,y)\,dx + Q(x,y$
  $\displaystyle\int_{\partial K}\alpha$ ceci est valable pour les compacts pouvant être décrit comme ci-dessus c'est par exemple le cas d'un disque.

Exemple 15 $\int_{\partial K} xdy = \displaystyle\int\int_K dxdy$ *et* $\int_{\partial K} ydx = -\displaystyle\int\int_K dxdy$ *ce qui donne* $\mathcal{A}(K) = \int_{\partial K} xdy = -\int_{\partial K} ydx = \frac{1}{2}\int_{\partial K} xdy - ydx$.

Exemple 16 *Calculons l'aire limitée par la courbe d'équation polaire* $\rho = 2+\cos\theta$. *Représentons la courbe. La formule ci dessus donne en polaire* $\mathcal{A}(D) = \frac{1}{2}\int_\Gamma \rho^2 d\theta = \int_0^\pi \rho^2 d\theta = \int_0^\pi [2+\cos\theta]^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi [9 + 8\cos\theta + \cos 2\theta]\,d\theta = \frac{9\pi}{2}$.

16.4.3 Analyse vectorielle

Nous commençons par donner un certain nombre de définitions utilisées en physique à propos des champs de vecteurs. Un champ de vecteurs asocie à tout point M un vecteur, il s'agit donc d'une application d'un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension finie dans son espace vectoriel E associé. Ce champ de vecteurs est dit affine s'il existe un endomorphisme Φ de E tel que pour tout M de $\mathcal{E}$: $F(M) = F(O) + \Phi\left(\overrightarrow{OM}\right)$, où O est n'importe quel point choisi de l'espace affine et Φ est linéaire. Ce champ sera dit C^k si l'application F l'est. Plus généralement on considère un champ de vecteurs comme une application d'un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

Divergence

Soit une application $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ différentiable, nous pouvons écrire

$$F : (x,y,z) \longmapsto \left(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\right)$$

. On appelle divergence de F l'application $div : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ qui à tout point $M(x,y,z)$ associe le réel $\frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)$. On note $F = (P_1,P_2,P_3)$ et $div(F) = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial P_i}{\partial x_i}$ et $div_M(F) = \displaystyle\sum_i \frac{\partial P_i}{\partial x_i}(M)$.

- Soit un champ de vecteurs défini par F. En supposant F différentiable, l'application $DF(M)$ est un endomorphisme de E. Par définition $div_M(F)$ est la trace de cet endomorphisme. Comme $DF_M = \left(\left(\frac{\partial P_i}{\partial x_i}\right)\right)$ on a $div(F) = \displaystyle\sum_i \frac{\partial P_i}{\partial x_i}$.
- Par exemple dans $\mathcal{E}_n$ rapporté à une base (e_i) si $F(M) = \frac{\overrightarrow{OM}}{\overrightarrow{OM}^n}$ si $O \neq M$ on a $P_i(x_1,\cdots,x_n) = \frac{x_i}{\sum x_i^2{}^{\frac{n}{2}}}$ et $div_M(F) = 0$. Un tel champ est dit newtonien.

Gradient

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique on considère une fonction numérique différentiable $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et on définit $\mathrm{grad}_M(f)$ comme étant le vecteur de coordonnées $grad_M(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(M), \frac{\partial f}{\partial y}(M), \frac{\partial f}{\partial z}(M)\right)$ ou encore $grad(f) = \displaystyle\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\overrightarrow{e_i}$.

- Si $\mathcal{E}$ est un espace affine de dimension n muni d'une base, Ω un ouvert de $\mathcal{E}$, f une application numérique différentiable, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, alors l'application Df_M est une forme linéaire et par suite peut s'exprimer à l'aide d'un produit scalaire, par le théorème de Riesz. Ainsi il existe pour tout point M un unique vecteur $grad_M(f)$ tel que : pour tout vecteur x : $D_M f(x) = (grad_M f,x)$. $grad(f)$ est l'application de $\mathcal{E}$ dans E qui au point M associe $grad_M(f)$. Dans une base orthnormale (e_i) on a $grad_M(f) = \displaystyle\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\cdots,x_n)\overrightarrow{e}_i$.
- Par exemple si $f(M) = \Phi(r)$ avec $r = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$ avec Φ fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}^+$, $r = \left(\displaystyle\sum_i x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ on a $gradf = \displaystyle\sum_i \Phi'(r)\frac{\partial r}{\partial x_i}e_i = \Phi'(r)\frac{\overrightarrow{OM}}{r}$.

Potentiel

Soit f une fonction numérique différentiable sur $\mathbb{R}^3$, grad(f) est alors une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Si on pose $F = grad(f)$ on dit que F est un champ de vecteurs et que f est un potentiel scalaire de F (ce potentiel est défini à une constante près)

Théorème 15 *Soit F un champ de vecteurs, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ défini par ses composantes (P_1,P_2,P_3) dans une base orthonormée. Une condition nécessaire et suffisante pour que F soit localement un champ de gradients est pour tout i,j : $\frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}$.*

- Ce théorème n'est autre qu'une nouvelle formulation du théorème de Schwarz. Le mot localement signifie par exemple dans un petit voisinage de chaque point, dans la pratique il suffit de prendre une petite boule ouverte centrée au point, et en général le potentiel f n'est pas défini sur $\mathbb{R}^3$ tout entier.

Laplacien

Nous prenons une application numérique f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^3$, dans la base canonique on définit le Laplacien de f : $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$. On définit ainsi une application Δ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.
On peut remarque que $\Delta f = div(grad(f))$.

Rotationnel

Pour une application F de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ on pose $rot(F) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$ les composantes de $rot(F)$ sont les cofacteurs de la première ligne de la marice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix}$.

- Si $\mathcal{E}$ est un espace affine de dimension 3 euclidien orienté attaché à l'espace vectoriel E et F un champ de vecteurs différentiable sur l'ouvert Ω de $\mathcal{E}$ on considère l'endomorphisme $u_M = DF_M -^t (DF_M)$ qui est un endomorphisme antisymétrique. Ainsi il existe un vecteur unique $rot_M(f)$ tel que : pour tout vecteur x on ait $DF_M(x) -^t (DF_M)(x) = rot_M(f) \wedge x$
- par exemple en hydrodynamique le rotationnel est aussi appelé vecteur tourbillon du champ F. Si F est le champs des vitesses des particules d'un fluide en mouvement, $\frac{1}{2} rot(F)$ s'interprète comme le vecteur rotation d'une particule infiniment petite du fluide, supposée solide à l'instant considéré.

Définition 11 *Si deux champs F et V sont liés par une relation $V = rot(F)$ on dit que V est un champ de rotationnel et que F est un potentiel vecteur de V.*

Théorème 16 *Dans $\mathbb{R}^3$ on a les propriétés :*
1 la composée d'applications $rot \circ grad = 0$.
2 Si F est un champ de vecteurs de classe C^1 vérifiant $rot(F) = 0$ alors à chaque point M de $\mathbb{R}^3$ est attaché une petite boule centrée en M dans laquelle F est un champ de gradients.

Exemple 17 *En électrostatique dans le vide le champ électromagnétique vérifie $rot(E) = 0$ ainsi pour tout point de l'espace vide on a $E = -grad(V)$ où V est le potentiel (le signe moins provient du sens historique du courant)*

Théorème 17 *Dans $\mathbb{R}^3$ on a :*
1 L'application composée définie sur les champs deux fois différentiables $div \circ rot = 0$
2 Si V est un champ de vecteurs de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ vérifiant $div(V) = 0$ alors localement il existe un potentiel vecteur F de classe C^1 de V c'est à dire $V = rotF$

Exemple 18 *En magnétisme le champ magnétique est un champ de vecteurs vérifiant en tout point $div(B) = 0$ ainsi en tout point on peut écrire $B = rot(A)$ où A est le potentiel vecteur.*

Exercice 3 *Formules d'analyse vectorielle*
Si F est une fonction numérique deux fois dérivables on a : $rot(grad(f)) = 0$ et $div(grad(f)) = \Delta f$.
Si F est un champ de vecteurs deux fois dérivables on a $div(rot(F)) = 0$.
Pour les opérations on a : pour f,g des fonctions nmériques différentiables sur $\mathbb{R}^3$: $grad(fg) = fgrad(g) + ggrad(f)$. Si nous pouvons différencier deux fois on a : $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2gradf \cdot gradg$.
Pour les champs de vecteurs différentiables et λ une fonction numérique différentiable : $div(\lambda f) = \lambda divF + grad\lambda \cdot F$ et $rot(\lambda F) = \lambda rotF + grad\lambda \wedge F$.
Enfin on définit le Laplacien du champ de vecteurs $\Delta F = grad(div(F)) - rot(rot(F))$.

Exercice 4 *Les équations de Maxwell :*
E est le champ électrique, B le champ magnétique on a $\begin{cases} div(E) = 0 \\ div(B) = 0 \\ rot(E) = -\frac{\partial B}{\partial t} \\ rot(B) = \epsilon_o \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} \end{cases}$ les expressions de B et E sont données par la divergence de B nulle d'où $B = rotA$ ce qui montre que E et $-\frac{\partial A}{\partial t}$ ont même rotationnel d'où $E = -gradV - \frac{\partial A}{\partial t}$.
En combinant les deux relations sur les rotationnels on trouve en utilisant la formule précédente : $rot(rot(F)) = grad(div(F)) - \Delta F$.
Les équations : $DE - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$ et $\Delta B - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0$ sont les équations dans le vide des ondes électromagnétiques et aussi dans le domaine du visible des ondes lumineuses.

16.4.4 Forme différentielles

Définition 12 *On appelle **forme différentielle** de degré un sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ toute application α de U dans $\mathcal{L}(U,\mathbb{R})$. On note $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$, où P,Q,R sont des fonctions de $U \subset \mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}$., ainsi $F = (P,Q,R)$ est un champ de vecteurs. On dit que la forme différentielle α est **exacte** si il existe une fonction f telle que $\alpha = df$.*

En effet pour tout (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ $\alpha(x,y,z)$ est un élément du dual de $\mathbb{R}^3$ dont une base est $(dx; dy,dz)$. Ainsi $\alpha(x,y,z) \cdot (h,k,l) = P(x,y,z)\,h + Q(x,y,z)\,k + R(x,y,z)\,l$.

Théorème 18 *Pour qu'une forme différentielle $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$ de classe C^1 sur U ouvert de $\mathbb{R}^3$ soit exacte il est nécessaire que ses coefficients P,Q,R vérifient les relations : $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$. Si la forme différentielle vérifie ces conditions ($rot\alpha = 0$) on dit que α **est fermée**.*
*Réciproquement si U est un **ouvert étoilé**, c'est à dire un ouvert U tel qu'il existe un point a pour lequel tout segment reliant a à un autre point de U soit contenu dans U. Si $\alpha = (P,Q,R)$ est fermée, il existe alors une fonction f de classe C^2 telle que f soit exacte : $\frac{\partial f}{\partial x} = P, \frac{\partial f}{\partial y} = Q, \frac{\partial f}{\partial z} = R$.*

Circulation

Soit γ un arc orienté de classe C^1 défini par un paramétrge $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}^3$. Soit α une forme différentielle : $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$. On appelle circulation ou travail de la forme différentielle α sur γ l'intégrale curviligne : $\int_\gamma Pdx+Qdy+Rdz = \int_a^b \left(P(\phi(t))\,\phi_1'(t) + Q(\phi(t))\,\phi_2'(t) + R(\phi(t))\,\phi_3'(t)\right) dt$.
Où $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t))$ cette intégrale ne dépend pas du mode de parcours de γ.
Dans le cas où la forme différentielle est exacte on a $\alpha = df$ et $\int_\gamma \alpha = f(B) - f(A)$ où $A = \phi(a)$ et $B = \phi(b)$ et donc si l'arc est fermé nous trouvons 0.
La circulation d'un champ de vecteurs $F = (P,Q,R)$ est la circulation de la forme différentielle $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$.

Exemple 19 *Dans le plan $\mathbb{R}^2$ soit C^+ une circonférence de centre (a,b) et de rayon r ne passant pas par l'origine parcourue dans le sens directe. Soit α la forme différentielle sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ définie par $\alpha(x,y) = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$. On paramètre C^+ par $x = a + r\cos t, y = b + r\sin t$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$. on obtient $\int_{C^+} \alpha = \int_0^{2\pi} \frac{r^2 + r(a\cos t + b\sin t)}{a^2+b^2+r^2+2r(a\cos t + b\sin t)} dt$, en posant $c = \sqrt{a^2+b^2}$ il existe une constante t_0 vérifiant pour tout t de $\mathbb{R}$: $a\cos t + b\sin t = c\cos(t - t_0)$. Le changement de variable $t \longmapsto t_0$ donne alors : $\int_{C^+} \alpha = \int_{-t_0}^{2\pi - t_0} \frac{r^2 + r\cos t}{c^2+r^2+2r\cos t} dt = \pi\left[1 + \frac{r^2 - c^2}{|r^2 - c^2|}\right]$ soit $\int_{C^+} \alpha = 0$ si $a^2 + b^2 > r^2$ et $\int_{C^+} \alpha = 2\pi$ si $a^2 + b^2 < r^2$. Cet exemple montre en outre que la forme α n'est pas exacte sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.*

16.5 Surfaces

16.5.1 Modes de définition des surfaces

k est un entier tel que $1 \leq k \leq \infty$

Surfaces paramétrées

Définition 13 *On appelle nappe paramétrée de classe C^k la donnée $S = (\Omega, f)$ où Ω est une boule de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction C^k de Ω dans $\mathbb{R}^3$.*

Ainsi un point M de la surface S est repéré par les paramètres (u,v) c'est à dire $x = f_1(u,v)$, $y = f_2(u,v)$, $z = f_3(u,v)$.

Définition 14 *Un point $M(u,v)$ est régulier signifie que $df(u,v)$ est injective ou encore $\left(\frac{\partial f}{\partial u}(u,v), \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right)$ est libre. Dans ce cas le plan tangent en $M(u,v)$ est le plan $\mathrm{P}\left(M(u,v), \frac{\partial f}{\partial u}(u,v), \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right)$ et la normale en ce point est dirigée par $\vec{n} = \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)$*

Surfaces admettant une paramétrisation cartésienne.

Définition 15 *On dit qu'une surface S admet une paramétrisation cartésienne ssi une des coordonnées est une fonction de classe* C^k *des deux autres. Par exemple $z = f(x,y)$ avec f de classe* C^k *sur une boule de* $\mathbb{R}^2$..

C'est donc bien un cas particulier des nappes paramétrées ou les paramètres sont x,y. Une surface définie par une paramètrisation cartésienne est régulière. Le plan tangent en un point $M(x_0,y_0,z_0)$ a pour équation : $(X-x_0)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+(Y-y_0)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)-(Z-z_0)=0$.
Dans ce cas nous allons appliquer les résultats des fonctions numériques de deux variables. Soit un point $M_0(x_0,y_0,z_0)$ un point de la surface, la différence de côte z entre le point de la surface M_0 et le point du plan tangent ayant même projection sur (xOy) est $g(x,y)=f(x,y)-z$ où $z = z_0 + (x-x_0)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+(y-y_0)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$. En supposant f de classe au moins C^2 on a $g(x_0,y_0)=0$ et $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)=0$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)=0$, posons $r=\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x_0,y_0)$, $s=\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)$, et $t=\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x_0,y_0)$ on a ainsi $g(x,y)=\frac{1}{2}\left(r(x-x_0)^2+2s(x-x_0)(y-y_0)+t(y-y_0)^2\right)+o\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)$.
Les résultats sur les extrêma donnent :

Théorème 19 *: Soit une surface Σ définie par $z=f(x,y)$ avec f de classe* C^k *avec les notations qui précèdent :*
si $rt-s^2>0$ au voisinage du point considéré la surface reste du même côté de son plan tangent, si $r>0$ la surface est au-dessus, si $r<0$ alors la surface est en dessous.
si $rt-s^2<0$ la surface traverse son plan tangent au voisinage du point on a une situation dîtes de col. voir figure 1, 2 et 3.

Surfaces définies par une équation implicite.

Définition 16 *Une surface est dite définie implicitement si les coordonnées de ces points vérifient une relation du type $F(x,y,z)=0$ avec F définie sur une boule B de $\mathbb{R}^3$ et de classe $\mathcal{C}^k$ à valeurs réelles.*

Dans ce cas un point est régulier si le vecteur $gradF_M=\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0),\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\right)$ est non nul et dans ce cas le plan tangent en ce point M est le plan pasant par M et orthogonal au vecteur $gradF_M$.
De plus si l'on considère une fonction F d'une boule de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ alors les lignes de niveau de F c'est à dire l'ensemble des points vérifiant $F(x,y,z)=\lambda$ est une surface et la normale en un point régulier est dirigée par $gradF_{(x,y,z)}$.
Nous admettrons :

Théorème 20 *Si F est une fonction $\mathrm{C}^k(U,\mathbb{R})$ où U est une partie ouverte de $\mathbb{R}^3$, $k\geq 1$, Σ la surface d'équations $F(M)=0$, M_0 un point de Σ tel que $\frac{\partial F}{\partial z}(M_0)\neq 0$, alors il existe $r>0,\epsilon>0,\varphi\in\mathcal{C}^k(B,V)$ où B est la boule de centre (x_0,y_0) et de rayon r et $V=]z_0-\epsilon,z_0+\epsilon[$ tels que : $M(x,y,z)\in\Sigma\cap(B\times V)\Longleftrightarrow m(x,y)\in B$ et $z=\varphi(m)$.*

Proposition 21 *courbe intersection de deux surfaces.*
Soit Σ_1 et Σ_2 des surfaces si M_0 est un point régulier de l'intersection des surfaces on a que $\Sigma_1\cap\Sigma_2$ est localement une courbe. De plus si les plans tangents en ce point aux deux surfaces sont distincts alors la tangente à la courbe est l'intersection des plans tangents.

Quitte à changer la base on pourra localement écrire avec les notations qui s'imposent : $M\in\Sigma_1\cap\Sigma_2\Longleftrightarrow\begin{cases}z=\varphi_1(x,y)\\z=\varphi_2(x,y)\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}z=\varphi_1(x,y)\\(\varphi_1-\varphi_2)(x,y)=0\end{cases}$. Comme les plans tangents sont supposés distincts on a $grad(\varphi_1-\varphi_2)(M_0)\neq 0$. Ainsi la seconde équation peut s'écrire $y=\psi(x)$ où ψ est C^1. Alors localement on a $M\in\Sigma_1\cap\Sigma_2\Longleftrightarrow\begin{cases}y=\psi(x)\\z=\theta(x)\end{cases}$ Ainsi l'intersection est localement une courbe et $grad_{M_0}(F_1)\wedge grad_{M_0}(F_2)$ est tangent en M_0.

16.5.2 Etudes de quelques surfaces

Cylindres

révision bien revoir l'équation d'un plan.

Définition 17 (et théorème) *une nappe Σ de $\mathbb{R}^3$ est dite cylindrique de génératrices parallèles à une droite affine* D *si pour tout M_0 de Σ la droite* $\mathrm{D}(\mathrm{M}_0)$ *parallèle à* D *contenant M_0 est contenue dans la nappe.*

Une nappe cylindrique admet une paramétrisation du type $M : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ qui à (t,λ) associe $M(t,\lambda) = m(t) + \lambda\vec{u}$ où $\vec{u}$ est un vecteur non nul direction des génératrices, la courbe décrite par $m(t)$ est la directrice. La nappe est $\mathcal{C}^k$ si les fonctions le sont.

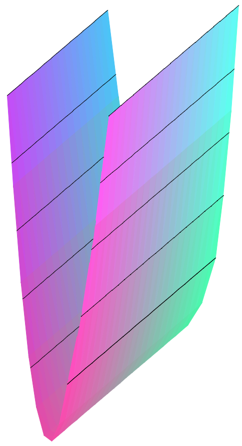
Une nappe est cylindrique si et seulement si elle admet une équation implicite de la forme $f(P,Q) = 0$ avec $P(x,y,z) = ax + by + cz + d$ et $Q(x,y,z) = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta$ formes affines indépendantes. De plus l'intersection des deux plans $P = 0$ et $Q = 0$ a pour direction celle des génératrices.

Remarque 12 (importante) *: De la définition 1 on en déduit la définition 3. Si on suppose la définition 3 avec une courbe $\mathcal{C}^1$ et régulière on a la définition 1. Si on suppose la courbe $\mathcal{C}^1$ on a l'équivalence locale entre les définitions 2 et 3. (ceci nessécite le théorème des fonctions implicites).*

- Plan tangent : Soit $M(u,v) = f(u) + v\vec{k}$ une nappe cylindrique, on a $\dfrac{\partial M}{\partial u}(u,v) = f'(u)$ et $\dfrac{\partial M}{\partial v}(u,v) = \vec{k}$,pour que le point $M(t,\lambda)$ soit régulier il faut et il suffit que le vecteur $f'(u)$ soit non colinéaire à $\vec{k}$ et le plan tangent est alors l'unique plan contenant la génératrice Δ de M parallèle au vecteur $\vec{k}$ et la tangente à la directrice au point M . En tout point d'une génératrice on a donc le même plan. En un point de la génératrice un vecteur tangent est $f'(u)$, ainsi un point de la génératrice est donc régulier si la génératrice n'est pas tangente à la directrice en ce point.
- Toute section droite c'est à dire l'intersection de la nappe avec un plan orthogonal à la direction de la génératrice donne une directrice.

Exemple 20 $(x + y + 1)^2 = z$ *définit un cylindre dont les génératices sont parallèles à* $\left\{ \begin{array}{l} x + y + 1 = 0 \\ z = 0 \end{array} \right.$

ou $\mathcal{D}(1,-1,0)$ *la base du cylindre est donnée par* $\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ z=(y+1)^2 \end{array}\right.$.



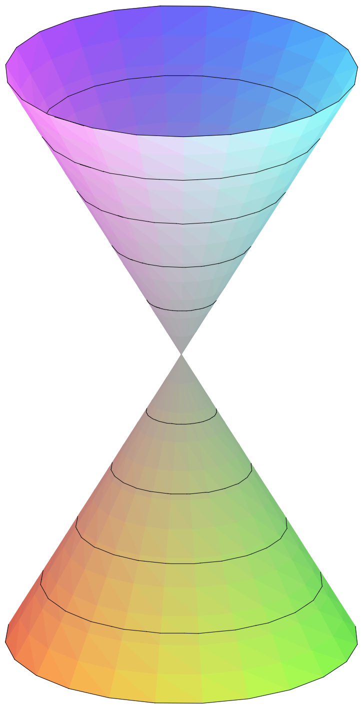
Cônes

Définition 18 (et théorème) *Une nappe* Σ *de* $\mathbb{R}^3$ *est un dite conique de sommet* $A \in \Sigma$ *si et seulement pour tout point* M *de* Σ *différent de* A *la droite affine* $\mathcal{D}(\ A,M)$ *est contenue dans* Σ.
Une nappe est conique si et seulement si elle admet une paramétrisation $M : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *où* $M(t,\lambda) = A + \lambda\vec{u}(t)$ *avec* I *intervalle de* $\mathbb{R}$.
Une nappe est conique si et seulement si elle admet une équation du type $f(P,Q,R) = 0$ *où* f *est une fonction homogène et* P,Q,R *sont trois formes affines indépendantes, le sommet est alors le point intersection des trois plans* $P = 0, Q = 0, R = 0$.

La fonction f est homogène signifie qu'il existe un nombre r tel que pour tout x,y,z et λ on a $f(\lambda x,\lambda y,\lambda z) = \lambda^r f(x,y,z)$.
La courbe obtenu en fixant λ: $m(t) = A + \lambda\vec{u}(t)$ s'appelle une directrice et les droites passant par A et de direction $\vec{u}(t)$ sont les génératrices.

Remarque 13 *De la définition 1 on en déduit la définition 3. Si on suppose la définition 3 avec une courbe* $\mathcal{C}^1$ *et régulière on a la définition 1. Si on suppose la courbe* $\mathcal{C}^1$ *on a l'équivalence locale entre les définitions 2 et 3. (ceci nessécite le théorème des fonctions implicites).*

– Plan tangent : Soit $M(u,v) = A + v\vec{k}(u)$ une nappe conique,on a $\dfrac{\partial M}{\partial u}(u,v) = v\vec{k}'(u)$ et $\dfrac{\partial M}{\partial v}(u,v) = \vec{k}(u)$. Le point $M(u,v)$ sera donc régulier dès que $\left(\vec{k}'(u),\vec{k}(u)\right)$ est libre et $v \neq 0$ ($M \neq A$), on aura alors le plan tangent qui contiendra la génératrice passant par ce point. Le plan tangent est le même en tout point de la génératrice différent de A. Le vecteur $\vec{k}'(u)$ est tangent à la directrice $u \to A + \vec{k}(u)$ au point $A + \vec{k}(u)$.



Exemple 21

Surfaces de révolution.

révision la donnée d'un cercle dans $\mathbb{R}^3$ peut être l'intersection d'un cercle avec un plan. exemple

Définition 19 *Une nappe Σ est dite de révolution d'axe Δ si et seulement si pour tout M_0 de Σ le cercle $\Gamma(M_0)$ d'axe Δ, passant par M_0 est sur la nappe Σ.*

Théorème 22 *Si une nappe Σ admet une équation implicite du type $f(u,v) = 0$ avec $u = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$ et $v = \alpha x + \beta y + \gamma z + h$ avec $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$ elle est de révolution d'axe Δ passant par ω de coordonnées (a,b,c) de vecteur directeur $\vec{V} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$. Le repère étant orthonormé.*

Théorème 23 *Si une nappe, $\mathcal{C}^1$ et régulière, est de révolution alors une équation implicite locale est du type précédent.*

preuve Si $m_0(x_0,y_0,z_0)$ est un point de Σ le cercle d'axe Δ passant pa m_0 est l'intersection de la sphère S de centre ω passant par m_0 et du plan P orthogonal à $\vec{V}$ passant par m_0. Une équation de S est donc $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0-c)^2$ et celle de P est $\alpha x+\beta y+\gamma z+h=\alpha x_0+\beta y_0+\gamma z_0+h$ et comme sur ce cercle on a $f(u(m),v(m))=f(u(m_0),v(m_0)=0$ on a $m\in\Sigma$.

La réciproque est admise.

– Les intersections d'une nappe de révolution avec des plans contenant l'axe sont appelées les méridiennes. les cercles intersection de la nappe avec des plans orthogonaux à l'axe sont les parallèles.

Théorème 24 *Soit une nappe de révolution d'axe Oz elle admet une paramétrisation de la forme $x=f(u)\cos v,y=f(u)\sin v,z=g(u)$. $u\in I,v\in\mathbb{R}$.*

Plan tangent les vecteurs $\dfrac{\partial M}{\partial u}(u,v)=(f'(u)\cos v,f'(u)\sin v,g'(u))$ et $\dfrac{\partial M}{\partial v}(u,v)=(-f(u)\sin v,f(u)\cos v,0))$ sont indépendants si $\dfrac{\partial M}{\partial u}(u,v)\neq 0$ et $f(u)\neq 0$

Dans le cas où la surface est simple le plan tangent est déterminé par la tangente Δ_M au parallèle de M et par la tangente D_M au méridien de M (qui sont orhogonales).

Si on a $f(u)=0$ le point M appartient à l'axe Oz le plan tangent si il esiste sera le plan orthogonal en M à Oz.

Exercice 5 *Dans le premier cas : si D_M est parallèle à Oz le cylindre de révolution d'axe Oz passant par M est tangent à Σ le long du parallèle de M il est dit circonscrit à Σ le long de ce parallèle. Les nappes de révolution d'axe Oz sont caractérisées par le fait que leur normale en chaque point est coplanaire à Oz.*

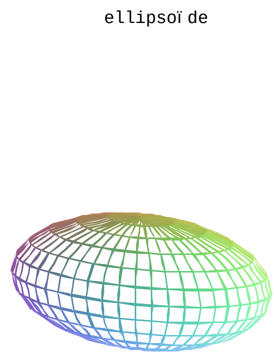
Si D_M coupe l'axe Oz en un point I le cône de révolution d'axe Oz et de sommet I passant par M est tangent à Σ le long du parallèle de M il est dir circonscrit à Σ le long de ce parallèle.

Exemple 22

Les quadriques

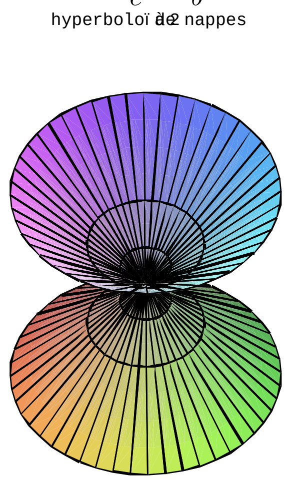
Nous allons décrire les quadriques par leur équations réduites c'est à dire leurs équations types dans un repère bien choisi. On suppose dans ce qui suit que $a>0,b>0,c>0$.

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ **L'Ellipsoïde** Le repère est tel que l'origine est centre de symétrie et les axes sont des axes de symétries orthogonales. L'equation impose $|x|\leq a$, $|y|\leq b$, $|z|\leq c$ et donc l'ellipsoïde est un fermé borné donc un compact. Les sections par des plans $z=h$ sont définies dans ce plan par $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2}$ et sont des ellipses, l'intersection étant vide pour $|h|>c$. De même on obtient des ellipses par des sections par les autres plans de coordonnées. Voir figure



Une paramétrisation de l'ellipsoïde est $\begin{cases} x = a\sin\theta\cos\varphi \\ y = b\sin\theta\sin\varphi \\ z = c\cos\theta \end{cases}$

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ **l'Hyperboloïde a deux nappes.** Les sections par un plan $z=h$ sont vides si $|h|<c$, et ce sont des ellipses si $|h|\geq c$ il y a deux parties de l'hyperboloïde de part et d'autre de la bande définie par $-c<z<c$. La section par un plan $x=k$ est l'hyperbole d'axe focal parallèle à Oz et d'équation dans ce plan $\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{k^2}{a^2}$. Il en est de même des sections

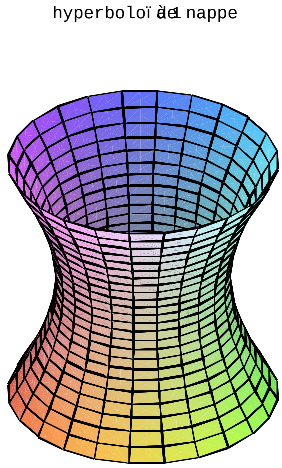


par $y=\ell$. Voir la figure :

Une paramétrisation est donnée par : $\begin{cases} x = ashu\cos v \\ y = bshu\sin v \\ z = \epsilon cchu \end{cases}$ avec $\epsilon=\pm1$.

Pour $a=b$ nous avons une surface de révolution d'axe Oz et l'hyperboloïde est obtenu en faisant tourner une hyperbole autour de son axe focal.

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ **l'Hyperboloïde à une nappe.** Les sections par des plans $z=h$ existent toujours e sont des ellipses d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2}$. Les sections par des plans $y=k$ ou



$x = \ell$ sont des hyperboles Voir figure :

Si $a = b$ alors la nappe est de révolution d'axe Oz obtenue en faisant tourner l'hyperbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ autour de son axe non focal. Cette forme est utilisée dans des applications de résistance car dans des construction en béton car les fers peuvent être droits et se chevaucher. Comme nous allons le voir il s'agit de surfaces réglées car elle est engendrée par des droites.

L'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ s'écrit $\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right)\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = \left(1 - \dfrac{y}{b}\right)\left(1 + \dfrac{y}{b}\right)$ Considèrons les deux plans $\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right) = \lambda\left(1 - \dfrac{y}{b}\right)$ et $\lambda\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = 1 + \dfrac{y}{b}$ ces deux plans ne sont jamais parallèles et se coupent suivant une droite D_λ cette droite est dans l'hyperboloïde si on ajoute à cette famille la droite D_∞ d'équation $\left(1 - \dfrac{y}{b}\right) = 0$ et $\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = 0$ on obtient :

Par tout point m_0 de l'hyperboloïde passe une droite de la famille et cette droite est contenue dans la surface.

Compléments : Soit un hyperboloïde à une nappe $\mathcal{H}$ il existe sue cette surface deux familles de droites $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ telles que :

1°) par chaque point m de $\mathcal{H}$ il passe une unique droite de chaque famille.

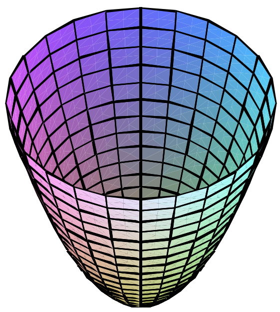
2°) deux droites de la même famille ne ont jamais coplanaires.

3°) deux droites prises chacune dans une famille différentes sont toujours coplanaires.

Remarque 14 *Ce sont les seules quadriques à centre*

$z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ **le paraboloïde elliptique** Les sections par des plans $z = h$ sont des ellipses si $h \geq 0$ et sont vides si $h < 0$. Les sections par des plans contenant Oz par exemple $y = \lambda x$ sont des paraboles $z = \left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{\lambda^2}{b^2}\right)x^2$. Enfin si $a = b$ la nappe est de révolution en faisant tourner la parabole $z = \dfrac{x^2}{a^2}$ dans le plan $y = 0$ autour de son axe. Voir figure :

paraboloïde elliptique



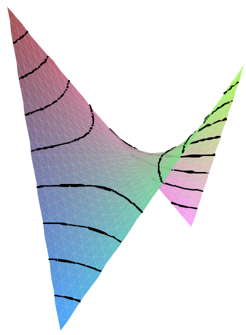
Un paramétrage est donné par $\begin{cases} x = au\cos v \\ y = bu\sin v \\ z = u^2 \end{cases}$ avec $0 \leq u$ et $0 \leq v \leq 2\pi$

$z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ **le paraboloïde hyperbolique** Les sections par des plans $z = h$ sont des hyperboles, les sections par des plans $x = h$ sont des paraboles se déduisant les unes des autres par des translations : $x = h$ et $z = -\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{h^2}{a^2}$ les sommets de ces paraboles sont sur une même parabole d'équation $y = 0$ et $z = \dfrac{x^2}{a^2}$. Les sections par les plans $y = \ell$ sont des paraboles d'équation $y = \ell$ et $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{\ell^2}{b^2}$ elles se déduisent par translation (de vecteur $\ell\vec{j} - \dfrac{\ell^2}{b^2}\vec{k}$) et les sommets de ces paraboles sont sur la parabole $x = 0$ et $z = -\dfrac{y^2}{b^2}$.

Voir figure

Cette surface est réglée c'est à dire peut être engendrée par des droites. On écrit $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right)\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right)$ posons $u = \left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right)$ et $v = \left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right)$ ce qui donne $x = \dfrac{a}{2}(u+v)$ et $y = \dfrac{b}{2}(v-u)$. On obtient un paramétrage de la surface par $\begin{cases} x = \dfrac{a}{2}(u+v) \\ y = \dfrac{b}{2}(-u+v) \\ z = uv \end{cases}$ avec u,v réels.

On a alors $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{f(u)} + v\overrightarrow{g(u)}$ avec $\overrightarrow{f(u)} = \dfrac{a}{2}u\vec{i} - \dfrac{b}{2}u\vec{j}$ et $\overrightarrow{g(u)} = \dfrac{a}{2}\vec{i} + \dfrac{b}{2}\vec{j} + u\vec{k}$. Ainsi pour u fixé on obtient une droite $\mathcal{D}_u$ de vecteur directeur $\overrightarrow{g(u)}$ parallèle au plan $\mathcal{P}$ d'équation $bX - aY = 0$ passant par $\left(\dfrac{au}{2}, -\dfrac{bu}{2}, 0\right)$ point qui appartient à la droite Δ d'équation $z = 0$ et $bx + ay = 0$ cette droite passe aussi par $\left(\dfrac{a}{2}(u+1), \dfrac{b}{2}(-u+1), u\right)$ point qui est sur la droite $\mathcal{D}$ d'équation paraboloïde hyperbolique



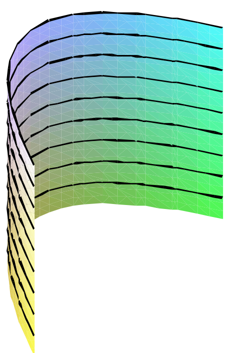
$x = \frac{a}{2}(z+1), y = \frac{b}{2}(-z+1).$

Ainsi le paraboloïde est engendrée par les droites $\mathcal{D}_u$ droites parallèles à un plan fixe $\mathcal{P}$ rencontrant une droite Δ non contenue dans $\mathcal{P}$ et rencontrant $\mathcal{D}$. (c'est un conoïde) On remarque ausi que Δ et $\mathcal{D}$ ne sont pas coplanaires.

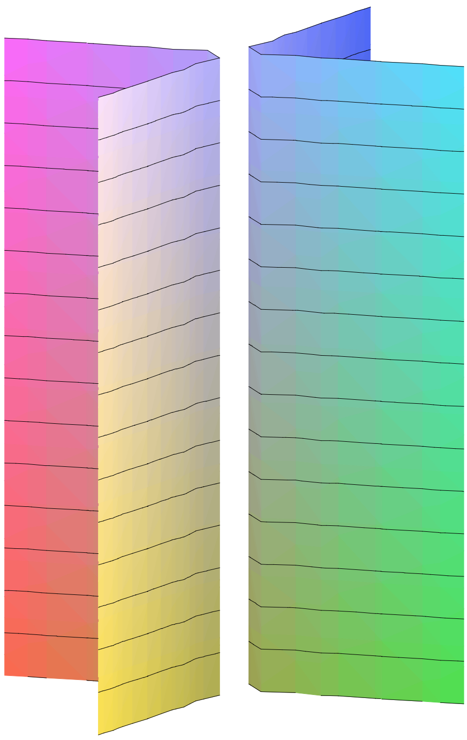
Autres quadriques Partant d'une équation quelconque, polynôme du second degré en (x,y,z) : $f(x,y,z) = h$ où $f(x,y,z) = q(x,y,z) + a(x,y,z)$ on montre qu'il existe un repère dans lequel la surface admettant cette équation s'écrit d'une des cinq manières ci-dessus ou bien :

$x^2 - 2py = 0$ **le cylindre parabolique** voir figure :

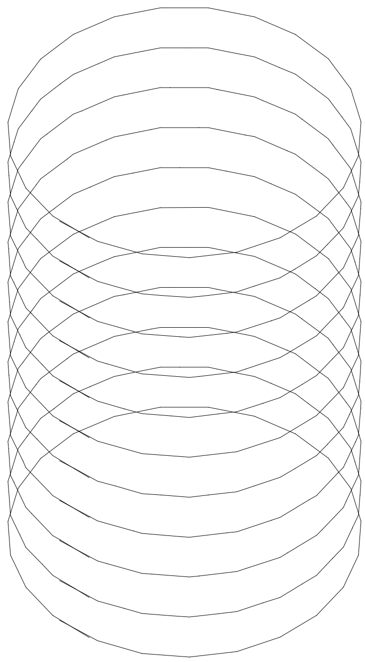
cylindre parabolique



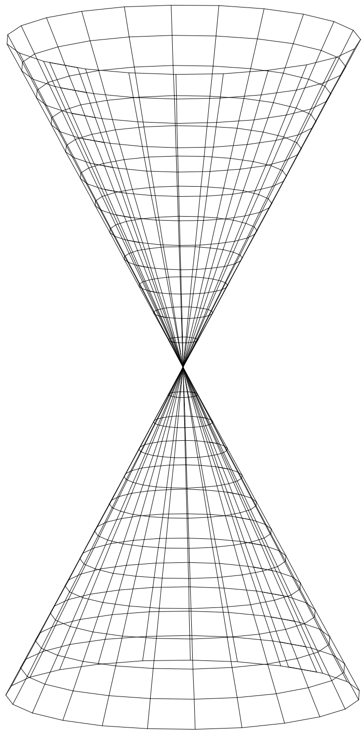
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ **le cylindre hyperbolique** voir figure



$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ **le cylindre elliptique** il est de révolution si $a = b$ voir figure



$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ **le cône du second degré** il a pour sommet O ces sections par un plan ne passant pas par O horizontal est une ellipse, vertical est une hyperbole, parallèle à une génératrice est une parabole. Une paramétrisation est : $\begin{cases} x = au\cos v \\ y = bu\sin v \\ z = cu \end{cases}$ u réel et $0 \leq v \leq 2\pi$.
Il est de révolution si $a = b$ en faisant tourner une droite faisant un angle α avec l'axe Oz on a



$\tan \alpha = \dfrac{a}{c}.$

16.6 Travaux dirigés :Fonctions de plusieurs variables, champs de vecteurs, intégrales multiples :

16.6.1 Fonctions de plusieurs variables.

Exercice 1 1°) Soit F l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $F(x,y) = (x+y,xy)$. F est-elle injective, surjective ?
2°) On considère la partie Δ de $\mathbb{R}^2$ définie par : $\Delta = \{(x,y); x \in I, y \in I, x \leq y\}$ où $I = [-1,+1]$. Soit G la restriction de F à Δ, on appelle Ω l'image de Δ par G.

a) Montrer que G est une bijection de Δ sur Ω et déterminer G^{-1}.

b) Représenter géométriquement Ω.
3°) On considère l'application H définie sur Ω par :

$$\forall (s,p) \in \Omega, H(s,p) = Sup\left\{1 - s + p, 1 + s + p, \frac{1}{4}(s^2 - 4p)\right\}$$

On se propose de déterminer le minimum de cette fonction sur Ω.

a) Pour tout α de l'intervalle $[-2,2]$, on considère le segment $S_\alpha = \{(s,p) \in \Omega; s = \alpha\}$, déterminer le minimum de H sur S_α.

b) Déterminer le minimum de H sur Ω et préciser le point M de Ω où il est atteint. Calculer $G^{-1}(M)$.
4°) a) Soit (a,b) un élément de Δ et soit $K(a,b) = \sup\limits_{t \in I}\{|(t-a)(t-b)|\}$. Exprimer $K(a,b)$ à l'aide de la fonction H.

b) Comment doit-on choisir (a,b) pour que $K(a,b)$ soit minimum ?

Exercice 2 On pose $\begin{cases} z = f(x,y) = \dfrac{x^3 y}{x^2 + y^2} \text{ si } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \\ 0 = f(0,0) \end{cases}$
a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
b) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
c) Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$;

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ telle que : $(x,y) \longmapsto f(x,y) = \left(x^2 + 2y^2\right)^{-\left(x^2+y^2\right)}$.
1°) Montrer que la fonction f peut être prolongée par continuité au point $(0,0)$. Soit g le prolongement obtenu.
2°) Vérifier que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Donner la différentielle de g au point $(0,0)$.
3°) La fonction g est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?
4°) Rechercher les extrémums locaux de g, restreinte au domaine de $\mathbb{R}^2$ sur lequel elle est de classe $\mathcal{C}^2$.

Exercice 4 On pose $\begin{cases} z = f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} \text{ si } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \\ 0 = f(0,0) \end{cases}$
a) f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$ par rapport à x ? à y ?
b) f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
c) On impose à (x,y) d'appartenir à une courbe donnée (C), étudier la continuité à l'origine de f "le long de (C)" dans les cas sivants :
C est la parabole $y = \sqrt{x}$, C est le cercle $\rho = 2\cos\theta$, C est la droite $y = mx, m \in \mathbb{R}$.
d) décrire quelques courbes tracées sur la surface $z = f(x,y)$.

Exercice 5 Soit u une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, supposée dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose $f(x,y) = u(x^2 - y^2 - 2xy)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Démontrer que : $(x+y)\frac{\partial f}{\partial x} + (x-y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, pour tout x et tout y.

Exercice 6 Soit l'équation aux dérivées partielles (E), de fonction inconnue f :

$$xy^3\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - yx^3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - y^3\frac{\partial f}{\partial x} + x^3\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

en utilisant le changement de variables $u = x^2 + y^2$ et $v = x^2 - y^2$, déterminer $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ solution générale de (E) sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 7 Appliquer la formule des accroissements finis en (0,0) aux fonctions $f(x,y) = x\sqrt{y}$ et $g(x,y) = xe^y$ en vérifiant que θ est bien compris entre 0 et 1.

Exercice 8 Construire une caisse en bois parallèlépipèdique rectangle de volume V donné, sans couvercle, avec le moins de bois possible.

Exercice 9 Retrouver la matrice jacobienne, que vous avez perdue, des changements de variables suivants :
a) dans $\mathbb{R}^2$ $(x,y) \longmapsto (\rho,\theta)$.
b) dans $\mathbb{R}^3$ $(x,y,z) \longmapsto (\rho,\theta,z)$ (cylindriques).
c) Montrer que le passage en coordonnées sphériques transforme la sphère de $\mathbb{R}^3$ en un parallèlépipède rectangle et calculer le jacobien.

Exercice 10 Pour une fonction $z = f(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, on note $z = g(u,v)$ sa transformée par le changement de variables $u = \dfrac{y}{x}$, $v = x^2 + y^2$.
a) On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2\backslash\{Oy\}$, exprimer les dérivées partielles premières de f en fonction de celles de g, et expliciter la matrice jacobienne.
b) On suppose f de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2\backslash\{Oy\}$, exprimer les relations entre les dérivées secondes.

Exercice 11 Soit $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0; x+y+z \leq 1\}$, et soit l'application φ qui à (x,y,z) associe (u,v,w) tel que : $u = x+y+z$, $uv = y+z$, $uvw = z$. Montrer que φ est un changement de coordonnées. Trouver $\varphi^{-1}(P)$ et $J\left(\frac{x,y,z}{u,v,w}\right)$.

Exercice 12 Déterminer les domaines où les trois normes usuelles de $\mathbb{R}^2$ sont de classe $\mathcal{C}^1$. Même question dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 13 Soit n un entier relatif. Une fonction de trois variables est dîte homogène de degré n si :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}^{+*} : f(tx,ty,tz) = t^n f(x,y,z)$$

Montrer qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est homogène de degré n si et seulement si : $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} + z\dfrac{\partial f}{\partial z} = nf$. (On pourra considérer la fonction $g(t) = f(tx,ty,tz)$)

Exercice 14 Trouver toutes les fonctions homogènes de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant : $\frac{1}{x}f'_x = \frac{1}{y}f'_y$ où f'_x désigne la dérivée première de f par rapport à x.

Exercice 15 Trouver toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ telles que $f''_{x^2} = f''_{y^2}$ où f''_{x^2} désigne la dérivée seconde de f par rapport à x. (On pourra utiliser le changement de variables $u = x+y$, $v = x-y$)

Exercice 16 Trouver les extrémums des fonctions suivantes :
a) $z = x^2y^3(1+3x+2y)$.
b) $z = \frac{x^2}{\alpha^2-1} + \frac{2xy}{\alpha\beta-1} + \frac{y^2}{\beta^2-1}$ $\alpha,\beta > 1$.
c) $z = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

Exercice 17 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue.
1) Montrer que $x \longmapsto \int_a^b f(x-t)(1+t^2+\sin t)dt = \varphi(x)$ est continue pour $x \in \mathbb{R}$.
2) On ne peut ici appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme, montrer pourquoi. A l'aide d'un changement de variable convenable, montrer cependant que φ est dérivable et calculer $\varphi'(x)$.
3) On suppose maintenent que f est de classe C^1. Etablir que φ est dérivable par une méthode plus rapide, calculer φ' et retrouver le résultat de 2).

Exercice 18 Soit J une fonction de $\Omega \to \mathbb{R}$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
1°) On suppose J dérivable, montrer qu'en un point u de Ω où J admet un extremum relatif, sa dérivée en ce point est nulle.
2°) On rappelle qu'un ensemble U de $\mathbb{R}^n$ est convexe si quels que soient les points u,v de U le segment $[u,v] = \ \{w = (1-t)u + tv, t \in [0,1]\}$ est contenu dans U.

a) Montrer qu'un sous-espace vectoriel, une boule sont des ensembles convexesde $\mathbb{R}^n$.

b) On suppose J de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω ; soit $U \subset \Omega$ une partie convexe de $\mathbb{R}^n$ montrer que : si J admet un extremum relatif en un point u de U alors : $\forall v \in U : J'(u) \cdot (v-u) \geq 0$.
3°) On rappelle que $J : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si U est convexe et $\forall (u,v) \in U^2, \forall \theta \in [0,1] : f(\theta u + (1-\theta)v) \leq \theta f(u) + (1-\theta) f(v)$, on dit qu'elle est strictement convexe si on a l'inégalité stricte pour $u \neq v$.

a) Montrer qu'une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ est convexe mais pas strictement convexe.

b) Soit $J : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un ensemble U convexe, montrer que J est convexe si et seulement si $\forall (u,v) \in U^2 : J(v) \geq J(u) + J'(u) \cdot (v-u)$, de même pour strictement convexe avec les modifications nécessaires.

c) interpréter géométriquement cette inégalité dans le cas $n = 1$.
4°) Soit $J : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivables sur U ensemble convexe.

a) J est convexe si et seulement si la dérivée seconde est semi définie positive en tout point de U (i.e. $\forall (v,w) \in U^2 : J''(v) \cdot (w,w) \geq 0$).

b) Si la dérivée seconde est définie positive en tout point de U ($\forall (v,w) \in U^2 ; w \neq 0 : J''(v) \cdot (w,w) > 0$) alors J est strictement convexe. (réciproque fausse)
5°) Exemples : Sur $\mathbb{R}^n$ prenons J définie par $J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - f(v)$ où a est une forme bilinéaire symétrique et f une forme linéaire, ainsi J est une fonctionnelle convexe deux fois dérivables, du reste on peut écrire : $J(v) = \frac{1}{2}{}^t vAv -{}^t bv$, où A est une matrice $n \times n$, b un vecteur de $\mathbb{R}^n$, il faut alors que A soit semi définie positive symétrique et c'est une condition suffisante.
6°) Démontrer que pour $J : U \subset \mathbb{R}^n \to \ R$ convexe :

a) Tout minimum relatif est un minimum absolu.

b) Si J est strictement convexe, elle admet au plus un minimum et c'est un minimum strict.
7°) Soit $J : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, dérivable en tout poiny u de U, montrer que : si $\forall v \in U, J'(u) \cdot (v-u) \geq 0$, alors la fonction J admet un minimum sur U.

16.6.2 CHAMPS DE VECTEURS

Exercice 19 Transformer l'équation $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y}$ en passant aux coordonnées polaires.

Exercice 20 Transformer l'équation $x^2 \dfrac{\partial f}{\partial x} + y^2 \dfrac{\partial f}{\partial y} = f^2$ en prenant comme nouvelle fonction inconnue : $u = x, v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}, g = \frac{1}{f} - \frac{1}{u}$.

Exercice 21 Montrer que la forme différentielle suivante est exacte puis l'intégrer :
$\omega = (2x+y)dx + (x+2y)dy$

Exercice 22 Construire le champ de vecteurs du gradient de :
a) $z = x + y$
b) $z = x^2 + y^2$
c) $z = x^2 + xy$

Exercice 23 On considère le champ de vecteur $\vec{V}$ de composantes :
$X = yz, Y = zf(x) + h(x), Z = yg(x) + h(x)$ où f,g,h sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
a) Comment choisir ces fonctions pour que $\vec{V}$ soit un champ de gradient ? Déterminer alors un potentiel scalaire de $\vec{V}$.
b) Calculer la circulation de $\vec{V}$ le long de l'arc : $x = \cos t, y = \sin t, z = t$ où $t \in [0,\pi]$.

Exercice 24 Déterminer des fonctions numériques Φ et Ψ de classe $\mathcal{C}^1$sur $\mathbb{R}$ telles que le champ vectoriel :

$$\vec{v} = \left(z^2 - y^2\right)\Phi(x)\vec{i} + y\left(\Psi(x) - z^2\right)\vec{j} + z\left(y^2 - x\Phi(x)\right)\vec{k}$$

dérive d'un potentiel vecteur que l'on déterminera.

Exercice 25 Résoudre, en utilisant les coordonnées polaires, les équations aux dérivées partielles :
a) $-yf'_x + xf'_y = xy$
b) $xf'_x + yf'_y = 2f$
c) $x^2 f''_{x^2} + y^2 f''_{y^2} + 2xyf''_{xy} = 1$

Exercice 26 Calculer l'intégrale de $x^2dx - y^2dy$ le long du chemin défini par $x = 2\cos t$ et $y = \sin t$ avec $t \in [0,2\pi]$.

Exercice 27 Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto u(x,y) = \dfrac{\cos x}{chy}$. Trouver $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour que $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto f\left(u(x,y)\right)$ ait un laplacien nul.

Exercice 28 Déterminer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que : $\omega = f\left(x^2 - y^2\right)\left(\left(x^2 + y^2 + 1\right)dx - 2xydy\right)$ soit une différentielle exacte sur des ouverts convenables.

Exercice 29 Déterminer $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ pour que la forme différentielle $\omega(x,y) = \left(\dfrac{y}{1+x^2}dx + \dfrac{x}{1+y^2}dy\right)\varphi\left(x^2+y^2\right)$ soit exacte. Trouver alors une primitive de ω.

Exercice 30 Déterminer les extremums locaux des applications f suivantes, pour lesquelles on donne l'ensemble de départ et l'image de f :
a) $\mathbb{R}^{+*2}$ $\dfrac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$
b) $\mathbb{R}^2$ $(x-y)^2 + (x+y)^3$

Exercice 31 Etudier les formes différentielles ω suivantes, à deux variables : ω est-elle fermée ? exacte ? Si oui calculer les primitives de ω; si ω n'est pas fermée, chercher une fonction φ : $(x,y) \longmapsto \varphi(x,y) \neq 0$ telle que la forme différentielle $\omega_1 : (x,y) \longmapsto \varphi(x,y)\omega(x,y)$ soit fermée ; $\omega_1$est-elle exacte ? si oui calculer les primitives de ω_1.
a) $\dfrac{xdy - ydx}{(x-y)^2}$
b) $\dfrac{1}{\left(1-x^2\right)^2 + y^4}(2xy^2dx + 2(1-x^2)ydy)$
c) $y^2dx + x^2dy$, $\varphi(x,y)$ ne dépendant que de $x+y$

16.6.3 Intégrales multiples

Exercice 32 Calculer $I = \int_1^2 \left(\int_{\sqrt{x}}^{x} \sin \frac{\pi x}{2y} dy \right) dx + \int_2^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^{2} \sin \frac{\pi x}{2y} dy \right) dx$

Exercice 33 Calculer les intégrales :
$I_1 = \int\int_D \left(\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dxdy \right)$ où $\mathcal{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$
$I_2 = \int\int_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy$ où $\mathcal{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 \leq 2ax \text{ et } x^2 + y^2 \leq 2ay \right\}$
$I_3 = \int\int_D 2x \left(x^2 + y^2\right) dxdy$ où $\mathcal{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 , x^4 + y^4 + x^2 - y^2 \leq 1 \right\}$

Exercice 34 Calculer $I = \int\int_D \frac{dxdy}{\left(1 + x^2 + y^2\right)^2}$ avec $\mathcal{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \left| x \leq x^2 + y^2 \leq 1 \right| \right\}$

Exercice 35 Soit $E \subset \mathbb{R}^2$ défini par : $\begin{cases} \left(x^2 + y^2\right)^2 + y^2 - x^2 \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$, reconnaître cette partie de $\mathbb{R}^2$. Déterminer le centre de gravité de E.

Exercice 36 Calculer le volume de la partie $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ limitée par le paraboloïde $\mathcal{P} : x^2 + y^2 = 2pz$ $(p > 0)$ et par le cône $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = \lambda^2 z^2$ $(\lambda > 0)$.

Exercice 37 Exprimer à l'aide d'intégrales doubles :
a) l'aire d'un carré de côté 1.
b) l'aire d'un triangle de sommets $(0,0); (0,1); (1,0)$.
c) l'aire d'un cercle de rayon 1 centré en $(0,0)$, pour ce dernier faire le calcul en coordonnées cartésiennes et polaires.

Exercice 38 Après avoir justifié l'existence de chacune des intégrales doubles suivantes et dessiné les domaines d'intégration, calculer :
a) $I = \int\int_{\mathcal{D}} x dxdy$ où $\mathcal{D} = [0,1] \times [0,1]$.
b) $J = \int\int_{\Delta} (x + y) dxdy$ avec $\Delta = [0,1] \times [0,2]$.
c) $K = \int\int_{\mathcal{D}} (x + y) dxdy$ avec $\mathcal{D}$.
d) $L = \int\int_{\mathcal{T}} x^2 dxdy$ où $\mathcal{T}$ est le triangle de m'exercice 1.
e) $M = \int\int_{\mathcal{C}} \frac{dxdy}{x + y + 1}$ où $\mathcal{C} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x \in [0,1] , y \in [0,x] \right\}$

Exercice 39 a) Calculer $I_k = \int\int_{D_k} x^2 dxdy$ où $D_k = \left\{ (x,y) \in R^2 ; x^2 + y^2 \leq k^2 \right\}$ en remarquant que $I_k = \int\int_{D_k} y^2 dxdy$.
b) En déduire le calcul de $J = \int\int_{\Omega} \left(x^2 + y^2\right) dxdy$ où $\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$ avec $a > 0, b > 0$.

Exercice 40 a) Tracer la courbe $\mathcal{C}$, cardoïde, dont l'équation en coordonnées polaires est $\rho = a(1 + \cos\theta)$ $(a > 0)$.
b) Calculer $I = \int\int_D y dxdy$ et $J = \int\int_D x dxdy$ où D est l'intérieur de la cardoïde.

Exercice 41 On pose $I = \int_0^2 dy \int_{2y}^4 e^{-x^2} dx$.
a) Mettre I sous forme d'une intégrale double dont on dessinera le domaine d'intégration.
b) calculer I.

Exercice 42 a) $J = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ set-elle convergente?
b) Pour $a > 0$, on note: $D_a = [0,a] \times [0,a]$ et $\Delta_a = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq a^2\right\}$ et $Q(a) = \int\int_{D_a} f(x)f(y)dxdy$ et $C(a) = \int\int_{\Delta_a} f(x)f(y)dxdy$ où $f(x) = e^{-x^2}$. Encadrer $Q(a)$ à l'aide de la fonction C. En deduire la valeur de J.

Exercice 43 Calcul d'intégrales doubles à l'aide de lignes de niveau.
a) Soit $F : \Delta \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur Δ ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit Ω un compact de $\mathbb{R}^2$ inclus dans Δ pour lequel $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; a \leq F(x,y) \leq b\right\}$ où a,b sont des constantes données. On note $\Omega_k = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; a \leq F(x,y) \leq k\right\}$ pour $k \in [a,b]$ et $A_k = \int\int_{\Omega_k} dxdy$. En supposant la fonction A dérivable sur $[a,b]$, montrer que $I(k) = \int\int_{\Omega_k} F(x,y)dxdy$ est dérivable de dérivée $I'(k) = kA'(k)$. En déduire la valeur de $I = \int\int_{\Omega_k} F(x,y)dxdy = \int_a^b I'(k)dk$.
b) application : calculer :
$\int\int_{\Omega} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dxdy$ où $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$
$\int\int_{D} \frac{dxdy}{(1+x+y)^3}$ où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\right\}$.

Exercice 44 Soit $J = \int_0^1 te^t \ln t dt$.
a) Montrer que J est convergente et que $J = e - 1 - \int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt$;
b) Soit $I = \int\int_{D} xye^{xy}dxdy$, où $D = [0,1] \times [0;1]$. Montrer que $I = J$.
c) Exprimer I, donc J à l'aide d'une série entière.

16.6.4 Surfaces

Exercice 45 Pour chacun des exemples suivants, donner un paramétrage.
1°) Sphère de centre l'origine et de rayon 1.
2°) Cylindre de directrice γ à génératrices parallèles au vecteur $\vec{v} = (a,b,c)$. On prendre pour γ la représentation paramétrique suivante: $(x = f(u), y = g(u), z = h(u), u \in \Delta)$.
Trouver une équation :
3°) du cylindre de révolution d'axe $D(A(a,b,c), \vec{V}(\alpha,\beta,\gamma))$.
4°) quelle est une équation du cylindre de génératrices parallèles à $\vec{V}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et de directrice $(\gamma) : x = \frac{u}{u-1}, y = \frac{u^2}{u-1}, z = \frac{u^3}{u-1}$?

b) Montrer que la surface définie par la représentation paramétrique : $x = \frac{u^2+v^2}{u^2-v^2}, y = \frac{uv}{u^2-v^2}, z = \frac{1}{u^2-v^2}, (u,v) \in \mathbb{R}^2$ est un cylindre hyperboloique, d'axe Oz.
5°)Trouver l'équation cartésienne du cylindre de directrice $\mathcal{C} : (x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y = 0)$ de direction $\vec{u}(1,0,1)$.

Exercice 46 Pour chacun des exemples suivants, donner un paramétrage.
1°) du cône de révolution de sommet A et de demi-angle θ, même axe qu'en 1.
2°) Cônes a) Quelle est une équation du cône de sommet $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ d'axe la droite OS, et de demi-angle au sommet 30 degrés.

b) Donner une représentation paramétrique du cône de sommet $S\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ de directrice (γ) : $z=0$ et $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-1=0$.
3°) Cône de sommet $S(a,b,c)$ s'appuyant sur une courbe γ dont une représentation est de la même forme qu'en 2.

Exercice 47 1°) Surface de révolution obtenue par la rotation autour de l'axe Oz d'une méridienne γ d'équation $f(y,z)=0$ dans le plan $x=0$.
2°) soit $\mathcal{D}(O,\vec{V}(\alpha,\beta,\gamma))$, Δ une droite non coplanaire avec $\mathcal{D}$ et non orthogonale à $\mathcal{D}$, d'équation $\begin{cases} x=az+p \\ y=bz+q \end{cases}$. Equation de l'hyperboloïde à une nappe engendré par rotation de Δ autour de $\mathcal{D}$.
3°)Surface de révolution :
a) Montrer que la surface de révolution représentée paramétriquement par $x=\dfrac{u}{u^2-v^2}$,$y=\dfrac{v}{u^2-v^2}$,$z=\dfrac{1}{u^2-v^2}$,$(u,v)\in\mathbb{R}^2$ est un paraboloïde de révolution.
b) représentation paramétrique du tore et équation cartésienne. (la méridienne du tore est supposée circulaire).
4°) L'hélicoïde $x=v\cos u$,$y=v\sin u$,$z=u$ est une surface réglée (engendrée par des droites) : la décrire, cette surface est un conoïde.

Exercice 48 Equation de la surface de révolution d'axe $\begin{cases} x=y \\ z=0 \end{cases}$ et de directrice $\begin{cases} xy=1 \\ z=0 \end{cases}$.

Exercice 49 Dans l'espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on considère la surface (S) d'équation :

$$(x^2-yz)^2+(y^2-zx)^2+(z^2-xy)^2=a^4,a>0$$

Montrer que (S) est une surface de révolution, déterminer son axe et une méridienne.

Exercice 50 Le repère est orthonormé. Former une équation de la surface (réglée) S engendrée par les droites s'appuyant sur $D\begin{cases} x=0 \\ z=b \end{cases}$ sur $D'\begin{cases} y=0 \\ z=-b \end{cases}$ et sur la parabole P,$z=0$,$y^2=2ax$,$a>0$,$b>0$.

Exercice 51 (Repère orthonormé)
Soit $(\mathcal{D})$ la droite d'équation $x+y=1$,$z=0$.
1°) Chercher la surface (S) lieu des points équidistants de $(\mathcal{D})$ et de la droite Oz. Quelle est la nature de (S).
2°) Déterminer les droites tracées sur (S).

Exercice 52 Déterminer une équation cartésienne du cône (C) de sommet $A(0,0,a)$, $a\in\mathbb{R}^*$ circonscrit à (S) d'équation : $z^3+4x^2+2y^2=0$.
Montrer que la courbe de contact de (S) avec le cône est plane.

Exercice 53 L'espace affine euclidien de dimension 3 est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Déterminer la nature de la surface (S) admettant pour équation dans ce repère :

$$(b^2+c^2)x^2+(c^2+a^2)y^2+(a^2+b^2)z^2-2abxy-2bcyz-2cazx=h$$

où $(a,b,c,h)\in\mathbb{R}^4$.

Exercice 54 L'espace affine $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est muni d'un repère erthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ ou $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ respectivement.
1°) On pose dans $\mathbb{R}^2$ $f(x,y)=3x^2-3y^2+8xy-14x-2y-12$. Montrer que l'équation $f(x,y)=0$ définit une hyperbole équilatère.

2°) Dans $\mathbb{R}^3$ nature de la quadrique d'équation : $f(x,y,z) = 0$ où $f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 - 3z^2 - 8yz + 2xz - 4xy - 1$.
3°) Même question avec : $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 - 4xy + 2x + 2y - 4z + 2 = 0$, déterminer le centre, l'équation réduite et la nature.
4°) On pose dans $\mathbb{R}^3$ l'équation $P(x,y,z) = -4 - \lambda^2$ $(*)$ avec :

$$P(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + (\lambda + 1)z^2 - 2yz + 2xy - 2x + 2y - 4z$$

a) Montrer que $(*)$ s'écrit $(x + (y - 1))^2 + (y + (2 - z))^2 + \lambda z^2 = 1 - \lambda^2$.
b) En déduire la nature de la quadrique (S) définie par l'équation $P(x,y,z) = -4 - \lambda^2$.
5°) Dessiner.

Exercice 55 Equation de la surface de révolution engendrée par rotation de la courbe $\mathcal{C} : (z = 0, x^3 + y^3 = 3axy)$ autour de la droite $\mathcal{D} : (x = y = z)$.

Exercice 56 Déterminer la surface engendrée par les droites coplanaires avec les droites $\mathcal{D}(x = 0, z = h)$ et $\mathcal{D}'(y = 0, z = -h)$ qui s'appuient sur l'hyperbole définie par $\mathcal{H}(xy = a^2, z = 0)$.

Exercice 57 Perpendiculaire commune à $\mathcal{D} \left\{ \begin{array}{l} x = a \\ y = b \end{array} \right.$ et $\mathcal{D}' \left\{ \begin{array}{l} x + cy + z = 0 \\ cx - y + z = 0 \end{array} \right.$.

16.6.5 Corrigés

Exercice 1 L'injectivité et la surjectivité revient à se poser la question : étant donné (s,p) existe-t-il et combien de (x,y) tel que la somme est s et le produit p? On sait que x,y sont donnés par l'équation $X^2 - sX + p = 0$. Il n'y a pas toujours de solution puisqu'il faut que $s^2 - 4p \geq 0$, F n'est pas surjective, ni injective puisque (x,y) et (y,x) sont deux éléments ayant la même image.

- Puisqu'on considère G de Δ vers $\Omega = F(\Delta)$ il en résulte que G est surjective, l'injectivité est du à Δ qui impose $x \leq y$ ce qui ne donne plus qu'un seul couple possible (x,y) d'image (s,p). L'application inverse est : $(s,p) \mapsto (x,y)$ où $\begin{cases} x = \dfrac{s - \sqrt{s^2 - 4p}}{2} \\ y = \dfrac{s + \sqrt{s^2 - 4p}}{2} \end{cases}$ $(*)$.
- Pour la représentation graphique voir dessin : Ω est l'ensemble des couples (s,p) tel que $s^2 - 4p \geq 0$ et x,y éléments de I, vérifiant les relations $(*)$. Donc $-2 \leq s \leq 2$ et $-1 \leq p \leq 1$.
- Pour le minimum de H sur S_α on a $H(\alpha,p) = \sup\left(1 - \alpha + p, 1 + \alpha + p, \frac{1}{4}\left(\alpha^2 - 4p\right)\right)$. Vu la symétrie en s (parité) on peut supposer $\alpha \in [0,2]$ et dans ce cas, $1 - \alpha + p \leq 1 + \alpha + p$ ce qui donne $H(\alpha,p) = \sup\left(1 + \alpha + p, \frac{1}{4}\left(\alpha^2 - 4p\right)\right)$. La condition $1 + \alpha + p \leq \frac{1}{4}\left(\alpha^2 - 4p\right)$ est équivalente à $\alpha^2 - 4\alpha - 8p - 4 \geq 0$ ou $p \leq \dfrac{\alpha^2 - 4\alpha - 4}{8}$. Or il faut vérifier que cette valeur $\dfrac{\alpha^2 - 4\alpha - 4}{8} \in [-2, +2]$, ce qui donne $-2 \leq \dfrac{\alpha^2 - 4\alpha - 4}{8} \leq 2$ ou $0 \leq \alpha^2 - 4\alpha + 12$ de discriminant $\Delta' = 4 - 12 < 0$, ceci est toujours vraie et $\left(\alpha - \left(2 - 2\sqrt{6}\right)\right)\left(\alpha - \left(2 + 2\sqrt{6}\right)\right) \leq 0$, ce qui est toujours vraie car $2 + 2\sqrt{6} > 2$ et $2 - 2\sqrt{6} < -2$. Finalement $H(\alpha,p) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(\alpha^2 - 4p\right) \text{ si } -2 \leq p \leq \dfrac{\alpha^2 - 4\alpha - 4}{8} \\ 1 + \alpha + p \text{ sinon} \end{cases}$. Or la valeur de séparation $\dfrac{\alpha^2 - 4\alpha - 4}{8}$ est négative pour $\alpha \in [0,2]$ et donc le minimum est $\min\left\{\frac{1}{4}\left(\alpha^2 - \dfrac{\alpha^2 - 4\alpha - 4}{2}\right), 1 + \alpha + \dfrac{\alpha^2 - 4\alpha - 4}{8}\right\} = \min\left\{\frac{1}{4}\left(\dfrac{\alpha^2 + 4\alpha + 4}{2}\right), \dfrac{\alpha^2 + 4\alpha + 4}{8}\right\} = \dfrac{\alpha^2 + 4\alpha + 4}{8} = \dfrac{(\alpha + 2)^2}{8}$.
- Pour trouver le minimum de H sur Ω il suffit de prendre le minimum des minima de H sur S_α pour $\alpha \in [0,2]$. Ainsi $\min H = \frac{1}{2}$ et il est atteint en $M = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$. Une vérification consiste à calculer $H\left(0, -\frac{1}{2}\right) = \sup\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$. Puis $G^{-1}(M) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ car $x + y = 0, xy = -\frac{1}{2}$ soit $-x^2 = -\frac{1}{2}, x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ pour avoir $x \leq y$.
- Le polynôme $P(t) = (t - a)(t - b) = t^2 - (a + b)t + ab$ admet un extrêmum en $\frac{a+b}{2}$ qui vaut en valeur absolue $\frac{1}{4}\left((a + b)^2 - 4ab\right)$. Le maximum de cette expression en valeur absolue sur $I = [-1, +1]$ est donc $\sup\left(P(1), P(-1), P\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$. $\sup\limits_{(a,b)\in\Delta} \left\{1 - (a + b) + ab, 1 + (a + b) + ab, \frac{1}{4}\left((a + b)^2 -\right.\right.$ Et donc $K(a,b) = H(G(a,b))$. D'après ce qui précède $K(a,b)$ sera minimum pour $a = 0$ et $b = -\frac{1}{2}$.

Exercice 2

- On a $\left|\dfrac{x^3y}{x^2 + y^2}\right| \leq |xy| \leq \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) = \frac{1}{2}\|(x,y)\|^2$, ces inégalités prouvent que $f(x,y)$ tend vers $0 = f(0,0)$ quand (x,y) tend vers $(0,0)$. Ainsi f qui est continue sue $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, par les théorèmes généraux, l'est aussi en $(0,0)$ et donc sur $\mathbb{R}^2$.
- Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{3x^2y\left(x^2 + y^2\right) - 2x^4y}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \dfrac{x^4y + 3x^2y^3}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x^3\left(x^2 + y^2\right) - 2x^3y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \dfrac{x^5 - x^3y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$. En $(0,0)$ nous revenons au taux de variation : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 0}{x^2 + 0} = 0$. Et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{0^3}{0^2 + y^2} =$

0. Pour le caractère $\mathcal{C}^1$ il faut vérifier que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0{,}0) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x{,}y)$ ce qui est vrai par exemple par $\left|\dfrac{x^4y+3x^2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right| \leq \left|\dfrac{x^4y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right| + \left|\dfrac{3x^2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right| \leq |y| + \frac{3}{2}|y|$ et pour l'autre $\left|\dfrac{x^5-x^3y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right| \leq \left|\dfrac{x^5}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right| + \left|\dfrac{x^3y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right| \leq |x| + \frac{1}{2}|x|$. Ces deux inégalités prouvent que les limites sont celles espérées.

– Il est clair par les théorèmes généraux que f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0{,}0)\}$.

Exercice 3 – En écrivant $x^2+y^2 \leq \left(x^2+2y^2\right) \leq 2\left(x^2+y^2\right)$ puis $\ln\left(x^2+y^2\right) \leq \ln\left(x^2+2y^2\right) \leq \ln 2\left(x^2+y^2\right)$ puis $-\left(x^2+y^2\right)\ln 2\left(x^2+y^2\right) \leq -\left(x^2+y^2\right)\ln\left(x^2+2y^2\right) \leq -\left(x^2+y^2\right)\ln\left(x^2+y^2\right)$ et enfin $e^{-\left(x^2+y^2\right)\ln 2\left(x^2+y^2\right)} \leq f(x{,}y) \leq e^{-\left(x^2+y^2\right)\ln\left(x^2+y^2\right)}$ ces inégalités donnent que nous pouvons prolonger f par continuité en $(0{,}0)$ en posant $f(0{,}0)=1$, en remarquant que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)\ln\left(x^2+y^2\right) = 0$.

– g est clairement $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0{,}0)\}$. En $(0{,}0)$ on a d'une part : $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0{,}0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x{,}0)-g(0{,}0)}{x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-x^2\ln x^2}-1}{x} = \lim\limits_{x\to0} -x\ln x^2 = 0$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0{,}0) = \lim\limits_{y\to0}\dfrac{g(y{,}0)-g(0{,}0)}{y} = \lim\limits_{y\to0}\dfrac{e^{-y^2\ln 2y^2}-1}{y} = \lim\limits_{y\to0} -y\ln 2y^2 = 0$. Pour voir si les dérivées sont continues il nous faut les dérivées partielles en dehors de 0 soit $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x{,}y) = g(x{,}y)\left(-2x\ln\left(x^2+2y^2\right) - \left(x^2+y^2\right)\dfrac{2x}{x^2+2y^2}\right)$, expression qui tend vers 0 quand $(x{,}y)\to(0{,}0)$. Et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x{,}y) = g(x{,}y)\left(-2y\ln\left(x^2+2y^2\right) - \left(x^2+y^2\right)\dfrac{4y}{x^2+2y^2}\right)$, expression qui tend bien vers 0 quand $(x{,}y)\to(0{,}0)$. La différentielle en $(0{,}0)$ est $dg(0{,}0) = 0$.

– Pour le caractère $\mathcal{C}^2$ que l'on a en dehors de $(0{,}0)$ il faut dériver

– $$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x{,}y) = g(x{,}y)\left(-2xln(x^2+2y^2) - \frac{2x\left(x^2+y^2\right)}{x^2+2y^2}\right)^2 + g(x{,}y)\left(-2ln(x^2+2y^2) - 8\frac{x^2}{x^2+2y^2} - 2\frac{x^2+y^2}{x^2+2y^2} + \right.$$

– $$.\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x{,}y) = g(x{,}y)\left(-2y\ln(x^2+2y^2) - \frac{4y\left(x^2+y^2\right)}{x^2+2y^2}\right)^2 + g(x{,}y)\left(-2ln(x^2+2y^2) - 16\frac{y^2}{x^2+2y^2} - 4\frac{x^2+y^2}{x^2+2y^2}\right.$$

– $$.\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x{,}y) = g(x{,}y)\left(-2y\ln(x^2+2y^2) - \frac{4y\left(x^2+y^2\right)}{x^2+2y^2}\right)\left(-2x\ln\left(x^2+2y^2\right) - 2\left(x^2+y^2\right)\frac{x}{x^2+2y^2}\right) + g(x{,}y)\left(-12\frac{xy}{x^2+2y^2} + 8\frac{x\left(x^2+y^2\right)}{y\left(x^2+2y^2\right)^2}\right)$$

Le Théorème de Schwarz donne que $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}$ au moins en dehors de $(0{,}0)$.

– $\dfrac{\partial^2 g}{\partial^2 x}(0{,}0)$ or $\dfrac{\frac{\partial g}{\partial x}(x{,}0)}{x} = g(x{,}0)\left(-2\ln\left(x^2\right)-2\right)$ n'admet pas de limite finie en 0 donc g n'est pas $\mathcal{C}^2$sur $\mathbb{R}^2$.

– Cherchons les points critiques en résolvant : $\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x{,}y) = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x{,}y) = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} -2x\ln\left(x^2+2y^2\right) - \left(x^2+y^2\right)\dfrac{2x}{x^2+2y^2} = 0 \\ -2y\ln\left(x^2+2y^2\right) - \left(x^2+y^2\right)\dfrac{4y}{x^2+2y^2} = 0 \end{cases}$

ce qui donne 4 solutions : $\left(0,\frac{1}{\sqrt{2e}}\right), \left(0,-\frac{1}{\sqrt{2e}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{e}},0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{e}},0\right)$. La théorie, avec des calculs sous-traitées donne $rt-s^2$ négatif en $\left(0,\frac{1}{\sqrt{2e}}\right), \left(0,-\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ donc une situattion de "col" et $rt-s^2$ positifs dans les deux autres avec r négatif il s'agit donc de minima.

Exercice 4 – f est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ comme composée de fonctions continues. En $(0,0)$ on a $f(x,0)=0$ pour tout $x\neq 0$ et $f(x,0)\overset{x\to 0}{\to} 0=f(0,0)$, et $f(0,y)=0$ pour tout $y\neq 0$ ainsi $f(0,y)\overset{y\to 0}{\to} 0=f(0,0)$. Il y a donc continuité en $(0,0)$, donc sur $\mathbb{R}^2$ tout entier, par rapport à chacune des variables x et y.

- Cependant f n'est pas continue en $(0,0)$ en effet pour $y=x$ on a $f(x,x)=1$ pour tout $x\neq 0$ et donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x)=1\neq f(0,0)$.
- Lorsque $(x,y)\in\mathcal{C}$, par composition, f devient une fonction d'une variable. Pour $y=\sqrt{x},x>0$: $f(x,\sqrt{x})=\dfrac{2x\sqrt{x}}{x^2+x}$ et donc $f(x,\sqrt{x})\sim 2\sqrt{x}$ et $f(x,\sqrt{x})\overset{x\to 0}{\to} f(0,0)$ et la fonction $x\longmapsto f(x,\sqrt{x})$ est continue en 0 et donc sur $]0,+\infty[$ par composition de fonctions.
- Sur $\rho=2\cos\theta$ c'est à dire sur le cercle de diamètre 2, tangent en O on a $x=\rho\cos\theta$ et $y=\rho\sin\theta$ d'où $f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=2\rho^2\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}=2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta$ pour tout $\rho\neq 0$. On remarque donc, en coordonnées polaires que $f(x,y)$ est indépendant de ρ. Le long du cercle quand ρ tend vers 0 avec $\theta\to\pm\frac{\pi}{2}$ on a $f(x,y)\to 0=f(0,0)$. La fonction $\theta\mapsto f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=\sin 2\theta$ est continue à l'origine, c'est à dire quand $\theta\to\pm\frac{\pi}{2}$ d'où $\rho\to 0$. Cette fonction est donc continue sur tout $\mathcal{C}$.
- Sur $y=mx$ on a $f(x,mx)=\dfrac{2m}{1+m^2}$ et donc $f(x,mx)\neq 0$ pour tout $m\neq 0$. La fonction $x\mapsto f(x,mx)$ pour $x\in\mathbb{R}$, n'est pas continue en 0, sauf sur l'axe Ox i.e.$m=0$. et d'après une question précédente sur Oy i.e. $y=+\infty$.
- Dans les plans horizontaux $z=z_0$, la surface d'équation $z=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ admet pour courbes planes les coniques décomposées d'équation $z_0\left(x^2+y^2\right)=2xy$, ou encore $y^2-\dfrac{2}{z_0}xy+x^2=0$ si $z_0\neq 0$ et $xy=0$ si $z_0=0$. que l'on peut résumer par $(y-ax)(y-bx)=0$ avec $ab=1,a+b=\dfrac{2}{z_0}$ et donc a et b sont solutions de $t^2-\dfrac{2}{z_0}t+1=0$. Ces coniques décomposées en deux droites sont réelles ou imaginaires, selon le signe de $1-z_0^2$. Dans les plans verticaux passant par Oz $(y=mx)$ la section de la surface est une droites horizontale (parallèle à Oy) d'équations $y=mx$ et $z=\dfrac{2m}{1+m^2}$, recontrant Oz. On verra qu'il s'agit d'une surface appelée conoïde.

Exercice 5 Par composition on a $f:(x,y)\mapsto z=x^2-y^2-2xy\mapsto u(z)$ d'où $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=u'(z)\times 2(x-y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=u'(z)\times(-2(x+y))$, d'où le résultat.

Exercice 6 On a $du=2xdx+2ydy,dv=2xdx-2ydy$ et pour les dérivées en posant $f\left(x^2+y^2,x^2-y^2\right)=g(u,v)$: $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=2x\dfrac{\partial g}{\partial u}+2x\dfrac{\partial g}{\partial v}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}=2y\dfrac{\partial g}{\partial u}-2y\dfrac{\partial g}{\partial v}$ et

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(2x\dfrac{\partial g}{\partial u}+2x\dfrac{\partial g}{\partial v}\right)=2\dfrac{\partial g}{\partial u}+2x\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial u}+2\dfrac{\partial g}{\partial v}+2x\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial v}=2\dfrac{\partial g}{\partial u}+2x\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}2x+4x^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+2\dfrac{\partial g}{\partial v}+2x\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}2x+4x^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$.

Soit $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2\dfrac{\partial g}{\partial u}+2\dfrac{\partial g}{\partial v}+4x^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}+8x^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+4x^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$. De même :

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(2y\dfrac{\partial g}{\partial u}-2y\dfrac{\partial g}{\partial v}\right)=2\dfrac{\partial g}{\partial u}+2y\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial u}-2\dfrac{\partial g}{\partial v}-2y\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial v}=2\dfrac{\partial g}{\partial u}+2y\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}2y-4y^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}-2\dfrac{\partial g}{\partial v}-4y^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+4y^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$.

Soit $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2\dfrac{\partial g}{\partial u}-2\dfrac{\partial g}{\partial v}+4y^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}-8y^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+4y^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$ et en remplaçant dans l'équation :

$\left(2xy^3-2yx^3-2xy^3+2x^3y\right)\dfrac{\partial g}{\partial u}+\left(2xy^3+2yx^3-2xy^3-2x^3y\right)\dfrac{\partial g}{\partial v}+\left(4x^3y^3-4x^3y^3\right)\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}+$
$\left(8x^3y^3+8x^3y^3\right)\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+\left(4x^3y^3-4x^3y^3\right)\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}.$

Soit $16x^3y^3\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}=0$ ce qui donne en dehors des axes $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}=0$ qui s'intègre par $\dfrac{\partial g}{\partial v}=\phi(v)$ puis $g(u,v)=F(v)+G(u)$. Les fonctions répondant à l'équation sont de la forme $f(x,y)=F\left(x^2+y^2\right)+G\left(x^2-y^2\right)$ avec F,G des fonctions $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}^{+*}$ quelconques.

Exercice 7 – On a $x\sqrt{y}-0=x\sqrt{\theta y}+y\dfrac{\theta x}{2\sqrt{\theta y}}$ ceci pour tout $x,y>0$. La fonction étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\setminus\{Ox\}$ on en déduit que $x\sqrt{y}=x\sqrt{y}\left(\sqrt{\theta}+\dfrac{\sqrt{\theta}}{2}\right)$ ce qui donne $\sqrt{\theta}=\frac{2}{3}$ et $\theta=\frac{4}{9}$.

– Pour $(x,y)\mapsto g(x,y)$ où g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On a l'existence de θ tel que $xe^y=xe^{\theta y}+y\theta xe^{\theta y}=xe^{\theta y}=xe^{\theta y}(1+\theta y)$. Ou encore $e^{y(1-\theta)}-\theta y-1=0$ en posant $\varphi(\theta)=e^{y(1-\theta)}-\theta y-1$ on a $\varphi'(\theta)=-y\left(e^{y(1-\theta)}-1\right)$ qui est du signe de $-y$ sur l'intervalle $[0,1]$. D'où dans les eux cas, il existe θ solution de $\varphi(\theta)=0$ dans l'intervalle $]0,1[$.

θ	0		1
$y>0$	$e^y-1>0$	$\overset{0}{\searrow}$	$-y<0$
$y<0$	$e^y-1<0$	$\overset{0}{\nearrow}$	$-y>0$

Exercice 8 Posons la quantité de bois $S(x,y,z)=xy+2xz+2yz$ et le volume $V=xyz$. D'où $S(x,y,z(x,y))=xy+\dfrac{2V}{y}+\dfrac{2V}{x}$. Il s'agit de trouver le minimum de la fonction $(x,y)\mapsto S$.

Une condition nécessaire est $\dfrac{\partial f}{\partial x}(M_0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(M_0)=0$. Sachons bien que ce n'est pas une condition suffisante comme le montre le contre-exemple $f(x,y)=x^2-y^2$ qui n'a pas un signe constant au voisinage du point critique $(0,0)$.

Ceci donne $\dfrac{\partial S}{\partial x}(x,y)=x-\dfrac{2V}{y^2}=0$ et $\dfrac{\partial S}{\partial y}(x,y)=y-\dfrac{2V}{x}=0$ soit $2V=xy^2=yx^2$ et $x=y$ puis $x-\dfrac{2V}{y^2}=0$ et $x^3=2V$ d'où $x_0=y_0=\sqrt[3]{2V}$. Ce qui entraîne $z_0=\dfrac{V}{\sqrt[3]{4V^2}}=\dfrac{\sqrt[3]{2V}}{2}=\dfrac{x_0}{2}$.

Ce qui est bien le cas ! en effet $\dfrac{\partial^2 S}{\partial x^2}(x_0,y_0)=\dfrac{4V}{x_0^3}=2,\dfrac{\partial^2 S}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=1,\dfrac{\partial^2 S}{\partial y^2}(x_0,y_0)=2$ et $S(x,y)-S(x_0,y_0)=\frac{1}{2}\left(2h^2+2hk+2k^2\right)+(|h|+|k|)\,\theta(1)$. Or la forme quadratique $\varphi(h,k)=(h,k)\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix}=h^2+hk+k^2$ est positive (il suffit d'écrire $\varphi(h,k)=(h+k)^2+h^2+k^2$) ou bien dire que la matrice est semblable à $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\ 0&\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ ce qui donne pour signature de la forme quadratque $(+,+)$.

Exercice 9 – $\varphi:\begin{array}{l}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\ (\rho,\theta)\mapsto(x,y)\end{array}$ avec $\left\{\begin{array}{l}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{array}\right.$ on a φ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{D}=\varphi(\Delta)$ avec $\mathcal{D}$, le cercle de centre O et de rayon 1, Δ le pavé $[0,1]\times[0,2\pi]$. Les dérivées partielles odnnent $\begin{array}{l}dx=\cos\theta d\rho-\rho\sin\theta d\theta\\ dy=\sin\theta d\rho+\rho\cos\theta d\theta\end{array}$ d'où $J\left(\dfrac{x,y}{\rho,\theta}\right)=\begin{vmatrix}\cos\theta&-\rho\sin\theta\\ \sin\theta&\rho\cos\theta\end{vmatrix}=\rho.$

– Soit ψ l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta,z=z$. On a $J\left(\dfrac{x,y,z}{\rho,\theta,z}\right)=J\left(\dfrac{x,y}{\rho,\theta}\right)\times 1=\rho.$

Exercice 10 Le changement $(x,y)\mapsto(u,v)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, sur tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ ne contenant pas $\{(x,y),x=0\}$ et on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial g}{\partial u}\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)+\dfrac{\partial g}{\partial v}2x$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{1}{x}+\dfrac{\partial g}{\partial v}2y$. D'où $J\left(\dfrac{u,v}{x,y}\right)=\begin{vmatrix}-\dfrac{y}{x^2}&2x\\ \dfrac{1}{x}&2y\end{vmatrix}=-2\dfrac{x^2+y^2}{x^2}.$

On utilise la dérivation des fonctions composées : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\dfrac{\partial v}{\partial x}$ soit $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x}=\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{2y}{x^3}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}\dfrac{y^2}{x^4}-4\dfrac{y}{x}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+4x^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}+2\dfrac{\partial g}{\partial v}$ de même $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial g}{\partial u}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)+\left(\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}+2y\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\right)\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)+0+2x\left(\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+2y\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)$, on peut calculer l'autre.

Exercice 11 P est un tétraèdre à représenter. $\left\{\begin{array}{l} u=x+y+z\\ uv=y+z\\ uvw=z\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u(1-v)=x\\ uv(1-w)=y\\ uvw=z\end{array}\right.$ or $x\geq 0,y\geq 0,z\geq 0$ donne $u\geq 0,v\geq 0,w\geq 0$ et $x\geq 0,u\geq 0$ donne $v\leq 1$, puis $y\geq 0,uv\geq 0$ donne $w\leq 1$. Puisque $u\leq 1$ on a fnalement $0\leq u\leq 1,0\leq v\leq 1,0\leq w\leq 1$. De plus $x+y+z\neq 0$ et $y+z\neq 0$ donne $u=x+y+z,v=\dfrac{y+z}{x+y+z},w=\dfrac{z}{y+z}$. Notons $\Pi=[0,1]^3$ dans le repère $(0,u,v,w)$ on a $P=\varphi(\Pi)$ et $J\left(\dfrac{x,y,z}{u,v,w}\right)=\left|\begin{array}{ccc} 1-v & -u & 0\\ v(1-w) & u(1-w) & -uv\\ vw & uw & uv\end{array}\right|=u^2v\left|\begin{array}{ccc} 1-v & -1 & 0\\ v(1-w) & 1-w & -1\\ vw & w & 1\end{array}\right|=u^2v.$

Exercice 12

- Etude de N_2 : $N_2(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$. On a que $u\mapsto\sqrt{u}$ est dérivable sauf en 0. et $x\mapsto\sqrt{x^2+y^2}$ est dérivable en x_0 si et seulement si $(x_0,y)\neq(0,0)$ c'est à dire $(x,y)\neq(0,0)$, il en est de même de $y\mapsto\sqrt{x^2+y^2}$. De plus $(x,y)\mapsto\dfrac{\partial N_2}{\partial x}=\dfrac{x}{N_2(x,y)}$ est le quotient de deux fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas et donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. On a $(dN_2)(a,b)(h,k)=h\dfrac{a}{N_2(a,b)}+k\dfrac{b}{N_2(a,b)}$. En 0, f n'est pas différentiable car les dérivées partieles n'existent pas.
- Etude de N_1 : $N_1(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$. L'application $\Phi_1 : u\mapsto|u|+\lambda$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\Phi_1'(u)=sgn(u)=\dfrac{u}{|u|}$. D'autre part $x_i\mapsto|x_i|+\lambda$ avec $\lambda=\sum_{j\neq i}|a_j|$ est dérivable en $a_i\neq 0$ et ce pour tout i. Ainsi N_1 admet des dérivées partielles en tout a tel que $a_i\neq 0$ pour tout i. C'est à dire dans le complémentaire Ω de la réunion des hyperplans de coordonnées. Ω est un ouvert et $a\mapsto\dfrac{a_i}{|a_i|}$ est continue. N_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et $(dN_1)(a).h=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{a_ih_i}{|a_i|}$.
- Etude de N_∞ : $N_\infty(u)=\sup|u_i|$. Soit $\Phi_i(u)=|u_i|-\sup_{i\neq j}|u_j|$ et $\theta_i=\Phi_i^{-1}(\mathbb{R}^*)$, la norme N_∞ est $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega=\bigcap_{1\leq i\leq n}\theta_i$. Si $a\in\Omega$ il existe un unique indice i tel que $N_\infty(a)=|a_i|$ et $(dN_\infty)(a)(h)=\dfrac{a_ih_i}{|a_i|}$. Pour le cas $n=2$, la norme N_∞ est dérivable sauf en $x=\pm y$ soit les deux bissectrices.

Exercice 13 Si f est $\mathcal{C}^1$ homogène de degré n alors $g(t)=t^ng(1)$ et $g'(t)=nt^{n-1}g(1)$ ce qui donne $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(tx,ty,tz)+y\dfrac{\partial f}{\partial y}(tx,ty,tz)+z\dfrac{\partial f}{\partial z}(tx,ty,tz)=nf(tx,ty,tz)$ puis on fait $t=1$. Réciproquement on suppose $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}+z\dfrac{\partial f}{\partial z}=nf$ ou $tg'(t)=nf(tx)$ ou $g'(t)=\dfrac{n}{t}g(t)$ ou $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{g(t)}{t^n}\right)=0$ pour $t\neq 0$. Ainsi $\dfrac{g(t)}{t^n}=g(1)=f(x)$ d'où le résultat pour $t>0$.

Exercice 14 Posons $f(x,y)=x^n\Phi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ où Φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ on a $f(x,y)=x^nf\left(1,\dfrac{y}{x}\right)$ et on cherche Φ. En posant $u=\dfrac{y}{x}$ et en dérivant $\dfrac{\partial f}{\partial x}=nx^{n-1}\Phi(u)+x^n\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)\Phi'(u)=$

$nx^{n-1}\Phi(u)-x^{n-2}y\Phi'(u)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x^{n-1}\Phi'(u)$ d'où $nx^{n-1}\Phi(u)-yx^{n-2}\Phi'(u)=\dfrac{x^n}{y}\Phi'(u)$. Ce qui donne $\dfrac{n}{u^{n-1}}\Phi(u)-\dfrac{\Phi'(u)}{u^{n-2}}=\dfrac{\Phi'(u)}{u^n}$ ou $\dfrac{\Phi'(u)}{\Phi(u)}=\dfrac{nu}{1+u^2}$ ou $\Phi(u)=k\left(1+u^2\right)^{\frac{n}{2}}$ en revenant à nos variables : $f(x,y)=k\left(x^2+y^2\right)^{\frac{n}{2}}$.

Exercice 15 On a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}+2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}+2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$. Ainsi l'équation donne $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}=0$ soit $g(u,v)=R(u)+S(v)$ ou $f(x,y)=R(x+y)+S(x-y)$.

Exercice 16 – Commençons à chercher les points critiques soit à résoudre $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xy^3+9x^2y^3+4xy^4=xy^3(2+9 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=3x^2y^2+9x^3y^2+8x^2y^3=x^2y^2(3\end{cases}$

ce qui donne comme points $(0,y),(x,0)$ et si $x\neq 0,y\neq 0$: $\begin{cases}2+9x+4y=0\\3+9x+8y=0\end{cases}$ ou $x=-\frac{1}{9},y=-\frac{1}{4}$. Des calculs donnent $r=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2y^3+18xy^3+4y^4,s=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=6xy^2+27x^2y^2+16xy^3=xy^2(6+27x+16y)$,
$t=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6x^2y+18x^3y+24x^2y^2=6x^2y(1+3x+4y)$.
Appliquons ces quantités en nos points : en $(0,y)$: $r=2y^3(1+2y)$ et $s=t=0$. En $(x,0)$, $r=s=t=0$ et en $\left(-\frac{1}{9},-\frac{1}{4}\right)$ on a $r=\frac{1}{64},s=\frac{1}{144},t=\frac{1}{162}$ par suite $s^2-rt<0$ avec $r>0$ et il s'agit d'un minimum. Revenons aux points où cette méthode n'a pas permis de conclure : en $(0,y_0)$ nous pouvons écrire $z\sim\frac{1}{2}x^2\left(2y_0^3(1+2y_0)\right)$ ainsi si $y_0\in\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[\cup]0,+\infty[$ on a $f(x,y)\geq f(0,y_0)=0$ pour $y\neq 0$ de même que pour $y=0$ on a un minimum, sinon $y_0\in\left]-\frac{1}{2},0\right[$ et $f(x,y)\leq f(0,y_0)$ il s'agit d'un maximum.
Si $y_0=0$ alors $z\sim x^5$ et le changement de signe nous dit que nous n'avons pas d'extrêmum.
Si $y_0=-\frac{1}{2}$ alors $z\sim-\frac{3}{8}x^3$ il en est de même.
En $(x_0,0)$ on a $z\sim y^3\left(x_0^2+3x_0^3\right)$ si $x_0\neq-\frac{1}{3}$ il y a un changement de signe donc rien du tout et si $x_0=-\frac{1}{3}$ alors $z\sim\frac{2}{9}y^4$ il s'agit d'un minimum. Il est interresant de représenter la surface.

– b) $z=\dfrac{x^2}{\alpha^2-1}+\dfrac{2xy}{\alpha\beta-1}+\dfrac{y^2}{\beta^2-1}$ $\alpha,\beta>1$. On a $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2}{\alpha^2-1}x+\dfrac{2}{\alpha\beta-1}y$ et $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2}{\beta^2-1}y+\dfrac{2}{\alpha\beta-1}x$ et les points critiques sont donnés par $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2}{\alpha^2-1}x+\dfrac{2}{\alpha\beta-1}y=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2}{\beta^2-1}y+\dfrac{2}{\alpha\beta-1}x=0\end{cases}$

ce qui donne $\left(\dfrac{\alpha\beta-1}{\alpha^2-1}-\dfrac{\beta^2-1}{\alpha\beta-1}\right)x=0$ ou $\dfrac{(\alpha-\beta)^2}{(\alpha^2-1)(\alpha\beta-1)}x=0$. Ainsi si $\alpha\neq\beta$ il n'y a que le point $(0,0)$ et si $\alpha=\beta$ alors il y a les points tels que $x+y=0$ c'est à dire $(x,-x)$.
Calculons $r=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{2}{\alpha^2-1},s=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{2}{\alpha\beta-1},t=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{2}{\beta^2-1}$ et la quantité $s^2-rt=4\left(\dfrac{1}{(\alpha\beta-1)^2}-\dfrac{1}{(\alpha^2-1)\left(\beta^2-1\right)}\right)$ du signe $-(\alpha-\beta)^2$ et donc en $(0,0)$ on a un minimum. En $(x,-x)$ on a $s^2-rt=0$ et cette méthode ne permet pas de conclure, mais $z=\dfrac{1}{\alpha^2-1}(x+y)^2$ et il s'agit encore de minimum.

– $z=x^4+y^4-2(x-y)^2$. Pour les points critiques $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=4x^3-4(x-y)=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=4y^3+4(x-y)=0\end{cases}$ ou $x^3+y^3=0=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)$ si $x+y=0$ alors on a $x\left(x^2-2\right)=y\left(y^2-2\right)=0$ ce qui donne $(0,0),\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$. Sinon $x^2+y^2=xy\geq 0$ et $x^2+y^2-xy=(x-y)^2+xy$ ne peut s'annuler que si $x=y=0$.

En (0,0) on a $z \sim -2\left(x-y\right)^2$ si $x \neq y$ et $z \sim x^4+y^4$ si $x=y$ on a aucun extrêmum. En les autres points la quantité $\delta = s^2 - rt$ donne avec $r = 12x^2 - 4$,$s = 4$,$t = 12y^2 - 4$: en $\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ ou $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ $\delta < 0$ avec $r > 0$ il s'agit de minimum.

Exercice 17 – La fonction $(x,t) \mapsto f\left(x-t\right)\left(1+t^2+\sin t\right)$ est continue sur $\mathbb{R} \times [a,b]$ il en résulte que φ est continue sur $\mathbb{R}$.

– On ne peut pas appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme car la fonction f n'est pas dérivable mais en posant $x-t = t'$ on a $\varphi\left(x\right) = -\displaystyle\int_{x-a}^{x-b} f\left(t\right)\left(1+\left(x-t\right)^2+\sin\left(x-t\right)\right)dt$.

Pour dériver on considère la fonction de trois variables $\Phi\left(x,y,z\right) = -\displaystyle\int_{y}^{z} f\left(t\right)\left(1+\left(x-t\right)^2+\sin\left(x-t\right)\right)dt$ on a $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = -\displaystyle\int_y^z f\left(t\right)\left(2\left(x-t\right)-\cos\left(x-t\right)\right)dt$ et $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = f\left(y\right)\left(1+\left(x-y\right)^2+\sin\left(x-y\right)\right)$ et $\dfrac{\partial\Phi}{\partial z} = -f\left(z\right)\left(1+\left(x-z\right)^2+\sin\left(x-z\right)\right)$ d'où $\varphi'\left(x\right) = \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\left(x,x-a,x-b\right)+\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\left(x,x-a,x-b\right)\times 1+\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\left(x,x-a,x-b\right)\times 1$. Ce qui donne $\varphi'\left(x\right) = \displaystyle\int_{x-a}^{x-b} f\left(t\right)\left(-2\left(x-t\right)-\cos\left(x-t\right)\right)dt +$ $f\left(x-a\right)\left(1+a^2+\sin a\right) - f\left(x-b\right)\left(1+b^2+\sin b\right)$.

– Dans ce cas on peut dériver sous le signe somme : $\varphi'\left(x\right) = \displaystyle\int_a^b f'\left(x-t\right)\left(1+t^2+\sin t\right)dt =$ $-\displaystyle\int_{x-a}^{x-b} f'\left(t\right)\left(1+\left(x-t\right)^2+\sin\left(x-t\right)\right)dt$ puis en intégrant par parties $\varphi'\left(x\right) = -\Big[f\left(t\right)\Big(1+\left(x-t\right)^2+\mathrm{si}$ $\displaystyle\int_{x-a}^{x-b} f\left(t\right)\left(-2\left(x-t\right)-\cos\left(x-t\right)\right)dt$. Ce qui donne bien $\varphi'\left(x\right) = -f\left(x-b\right)\left(1+b^2+\sin b\right)+$ $f\left(x-a\right)\left(1+a^2+\sin a\right) + \displaystyle\int_{x-a}^{x-b} f\left(t\right)\left(-2\left(x-t\right)-\cos\left(x-t\right)\right)dt$.

Exercice 18 – Soit $\mathcal{B}\left(u,r\right) = \{v \in \mathbb{R}^n : \|v-u\| < r\}$ une boule ouverte contenue dans Ω et soit w un vecteur non nul. La fonction $\phi : t \in \left]-\dfrac{r}{\|w\|},\dfrac{r}{\|w\|}\right[\mapsto \phi\left(t\right) = J\left(u+tw\right)$ admet un extremum relatif au point $t=0$ et par suite $\phi'\left(0\right) = 0$ or $\phi'\left(t\right) = J'\left(u+tw\right)\cdot w$ et donc pour tout vecteur w on a $J'\left(u\right)\cdot w = 0$ soit $J'\left(u\right) = 0$.

Remarquons que dans $\mathbb{R}^n$ cela corresond à n relations : $\dfrac{\partial J}{\partial x_i} = 0$. Pour démentrer sur $\mathbb{R}$ que $\phi'\left(0\right) = 0$ on écrit : $0 \leq \displaystyle\lim_{t\to 0^-}\dfrac{\phi\left(t\right)-\phi\left(0\right)}{t} = \phi'\left(0\right) = \lim_{t\to 0^+}\dfrac{\phi\left(t\right)-\phi\left(0\right)}{t} \leq 0$

- Un sous-espace vectoriel est convexe puisqu'il est stable par toute combinaison linéaire. Pour une boule si nous avons $\|u-x_0\| < r$, $\|v-x_0\| < r$ alors on a $\|\left(1-t\right)u+tv-x_0\| = \|\left(1-t\right)\left(u-x_0\right)+t\left(v-x_0\right)\| \leq \left(1-t\right)\|u-x_0\|+t\|v-x_0\| \leq \left(1-t\right)r+r = r$ et ce pour tout $t \in [0,1]$.
- L'hypothèse donne il existe un voisinage V de u tel que pour tout $v \in V \cap U$: $J'\left(u\right)\cdot\left(v-u\right) \geq 0$. Soit $v = u+w$ un point quelconque de l'ensemble U, l'ensemble U étant convexe les points $\left(u+\theta w\right)$ appartiennent à U pour $\theta \in [0,1]$. Ainsi $J\left(u+\theta w\right) - J\left(u\right) = \theta J'\left(u\right)\cdot w+\theta\|w\|\varepsilon\left(\theta\right)$ avec $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\varepsilon\left(\theta\right) = 0$. Donc, nécessairement $J'\left(u\right)\cdot w \geq 0$ sinon la différence $J\left(u+\theta w\right)-J\left(u\right)$ serait négative pour θ assez petit.
- Pour une forme linéaire on a l'égalité, la norme est convexe.
- Montrons que : J convexe $\Longleftrightarrow \forall\left(u,v\right) \in U^2 : J\left(v\right) \geq J\left(u\right)+J'\left(u\right)\cdot\left(v-u\right)$. On suppose J convexe donc $\forall\left(u,v\right) \in U^2$,$u \neq v$ pour $0 < \mu < \lambda \leq 1$ en écrivant $u+\mu\left(v-u\right) = \dfrac{\lambda-\mu}{\lambda}u+\dfrac{\mu}{\lambda}\left(u+\lambda\left(v-u\right)\right)$ on a $J\left(u+\mu\left(v-u\right)\right) \leq \dfrac{\lambda-\mu}{\lambda}J\left(u\right)+\dfrac{\mu}{\lambda}J\left(u+\lambda\left(v-u\right)\right)$ ce qui donne $\dfrac{J\left(u+\mu\left(v-u\right)\right)-J\left(u\right)}{\mu} \leq \dfrac{J\left(u+\lambda\left(v-u\right)\right)-J\left(u\right)}{\lambda}$. Si la fonction J est

convexe on fait $\lambda = 1$ et on remarque que $J'(u)\cdot(v-u) = \lim\limits_{\mu\to 0} \dfrac{J(u+\mu(v-u)) - J(u)}{\mu} \leq J(v) - J(u)$. Par contre si J est strictement convexe, les inégalités précédentes sont strictes et on choisit une valeur $\mu_0 \in]0,1[$ et on écrit $J'(u)\cdot(v-u) = \lim\limits_{\mu\to 0} \dfrac{J(u+\mu(v-u)) - J(u)}{\mu} \leq \dfrac{J(u+\mu_0(v-u)) - J(u)}{\mu_0} \leq J(v) - J(u)$.
Réciproquement supposons que $\forall (u,v) \in U^2, J(v) \geq J(u) + J'(u)\cdot(v-u)$. Soient u et v deux points distincts de U et $\lambda \in]0,1[$ on a par hypothèse $J(u) \geq J(u+\lambda(v-u)) - \lambda J'(u+\lambda(v-u))\cdot(v-u)$ et $J(v) \geq J(u+\lambda(v-u)) + (1-\lambda) J'(u+\lambda(v-u))\cdot(v-u)$ en additionnant et en multipliant par $(1-\lambda)$ et λ on obtient le résultat.
- Nous faisons une interprétation pour $n = 1$ il s'agit de la tangente au point u regarder en v ou $J(u) \leq J(u) + J'(u)\cdot(v-u) \leq J(v)$

- On suppose : $\forall v \in U, \forall w \in V, w \neq 0, J''(v)\cdot(w,w) \geq 0$ (resp.> 0) on en déduit que si u et $u+w$ sont deux points distincts de U alors $J(u+w) - J(u) - J'(u)\cdot w = \frac{1}{2} J''(v)\cdot(w,w) \geq 0$ (resp.> 0) ainsi le résultat précédent donne que J est convexe, resp. strictement convexe. Réciproquement soit J convexe et $u \in U$ considèrons la fonction convexe $G : v \in U \mapsto G(v) = J(v) - J'(u)\cdot v$ on a donc $G'(u) = 0$ et $G''(u) = J''(u)$. Pour montrer que G admet en u un minimm (ce qui prouvera que $J''(u) = G''(u)$ est semi définie positive en appliquant la première partie) on montre que $\forall v \in U : G(v) - G(u) \geq 0$ or $G(v) - G(u) = J(v) - J(u) - J'(u)\cdot(v-u)$, soit $v = u + w \in U$ pour tout $\lambda \in [0,1]$ on a $u + \lambda w = (1-\lambda)u + \lambda v$ d'où $G(u+\lambda w) \leq (1-\lambda)G(u) + \lambda G(v)$ car G est convexe, comme somme de deux fonctions convexes par suite $\dfrac{G(u+\lambda w) - G(u)}{\lambda} \leq G(v) - G(u)$ et $0 = G'(u)\cdot w = \lim\limits_{\lambda\to 0} \dfrac{G(u+\lambda w) - G(u)}{\lambda} \leq G(v) - G(u)$.
La réciproque du deuxième point est fausse comme le montre $v \mapsto v^4$ de $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$.
- Exemples
- Montrons que tout minimum relatif est un minimum absolu : Soit $u \in U$ un minimum relatif de J soit $v = u + w$ un point quelconque de U et $\theta \in]0,1[$ donné, la convexité de J donne $J(u+\theta w) \leq (1-\theta)J(u) + \theta J(v)$ d'où $J(u+\theta w) - J(u) \leq \theta(J(v) - J(u))$ et il suffit d'observer qu'il existe $\theta_0 \in]0,1[$ tel que $0 \leq J(u+\theta_0 w) - J(u)$.
Montrons que si J est strictement convexe elle admet au plus un minimum et c'est un minimum strict : Si J est convexe tout minimum est xtrict et en reprenent la démonstration avec $v = u+w, w \neq 0$ suffisament près de u on raisonne comme précédement avec $v = u+w$ point de U avec $w \neq 0$ et l'unicité en découle.
- En effet on a vu que : $\forall v \in U, J(v) \geq J(u) + J'(u)\cdot(v-u)$.

Exercice 19 En posant $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ on a $r^2 = x^2 + y^2$ ce qui permet d'obtenir les dérivées par $rdr = xdx + ydy$, la relation $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ donne $xdy - ydx = r^2 d\theta$. L'équation ici est $(x-y)\,dy = (x+y)\,dx$ ou $xdy - ydx - ydy - xdx = 0$ soit $r^2 d\theta - rdr = 0$ ou $rd\theta - dr = 0$ et $\dfrac{dr}{r} = d\theta$ soit les courbes $r = ke^{\theta}$.

Exercice 20 On a $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 1, dv - \frac{1}{y^2}dy + \frac{1}{x^2}dx$ ce qui donne $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{x^2}$ et $\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}$. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{u^2}\dfrac{\partial f}{\partial v}$ pour $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u}0 + \dfrac{\partial f}{\partial v}\left(-\frac{1}{y^2}\right)$ en remplaçant dans l'équation on obtient $u^2\left(\dfrac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{u^2}\dfrac{\partial f}{\partial v}\right) + y^2\dfrac{\partial f}{\partial v}\left(-\frac{1}{y^2}\right) = u^2\dfrac{\partial f}{\partial u} = f^2$. En posant maintenant $g = \frac{1}{f} - \frac{1}{u}$ on a $\dfrac{\partial g}{\partial u} = -\frac{1}{f^2}\dfrac{\partial f}{\partial u} - \frac{1}{u^2}$ ce qui donne $u^2 f\dfrac{\partial g}{\partial u} = f^2 - \dfrac{\partial f}{\partial u}u^2$ et pour l'équation $\dfrac{\partial g}{\partial u} = 0$ si $u \neq 0$. Soit $g = \varphi(v)$ et en revenant à nos moutons : $f = \dfrac{x}{x\varphi\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) + 1}$ et la solution $f = 0$.

Exercice 21 Nous avons $\dfrac{\partial\left(x+2y\right)}{\partial x}=\dfrac{\partial\left(2x+y\right)}{\partial y}=1$ cette formr est donc exacte et on cherche $f\left(x,y\right)$ telle que $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(x,y\right)=2x+y$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(x,y\right)=x+2y$ on trouve $f\left(x,y\right)=x^2+xy+\varphi\left(y\right)$ par intégration de la première équation à y constant puis en redérivant et en égalant : $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(x,y\right)=x+\varphi'\left(y\right)$ d'où $\varphi'\left(y\right)=2y$ et finalement $\varphi\left(y\right)=y^2+k$ ce qui donne $f\left(x,y\right)=x^2+xy+y^2+k$, $k\in\mathbb{R}$.

Exercice 22
- On cherche F telle que $F=grad\left(f\right)$ ou $F\left(M\right)=\left(1,1\right)$.
- $F\left(M\right)=\left(2x,2y\right)$.
- $F\left(M\right)=\left(2x+y,x\right)$.

Exercice 23
- Les conditions nécessaores et suffisantes localement sont : $rot\left(V\right)=0$ ou
$$\begin{cases}\dfrac{\partial X}{\partial y}=\dfrac{\partial Y}{\partial x}\\ \dfrac{\partial X}{\partial z}=\dfrac{\partial Z}{\partial x}\\ \dfrac{\partial Y}{\partial z}=\dfrac{\partial Z}{\partial y}\end{cases}\text{ ou }\begin{cases}z=zf'\left(x\right)+h'\left(x\right)\\ y=yg'\left(x\right)+h'\left(x\right)\\ f\left(x\right)=g\left(x\right)\end{cases}\text{ ou }\begin{cases}f\left(x\right)=g\left(x\right)\\ z=zf'\left(x\right)+h'\left(x\right)\\ y=yf'\left(x\right)+h'\left(x\right)\end{cases}\text{ en supposant } z\neq y$$
on obtient $f'\left(x\right)=1$ ou $f\left(x\right)=x+k=g\left(x\right)$ puis $h'\left(x\right)=z-z=0$ et $h\left(x\right)=h$. Voici les conditions, maintenant cherchons un potentiel scalaire de V. On cherche f tel que $V=grad\left(f\right)$ ou $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=yz\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=xz+kz+h\\ \dfrac{\partial f}{\partial z}=xy+ky+h\end{cases}$ par intégration de lapremière $f\left(x,y,z\right)=xyz+g\left(y,z\right)$ et en dérivant $\dfrac{\partial f}{\partial y}=xz+\dfrac{\partial g}{\partial y}=xz+kz+h$ soit $g\left(y,z\right)=kyz+hy+h\left(z\right)$ et en dérivant par rapport à z on a : $\dfrac{\partial f}{\partial z}=xy+ky+h'\left(z\right)$ et $h\left(z\right)=hz+\ell$ finalement : $f\left(x,y,z\right)=xyz+kyz+hy+hz+\ell$.
- Pour la circulation $\displaystyle\int_\gamma Xdx+Ydy+Zdz=\int_\gamma df=0$ car $\gamma\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\\ z=t\end{cases}$ hélice circulaire avec $t\in\left[0,\pi\right]$ et $\gamma\left(0\right)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\gamma\left(\pi\right)=\begin{pmatrix}-1\\0\\\pi\end{pmatrix}$ et en prenant $f\left(x,y,z\right)=xyz$ nous vérifions : $\displaystyle\int_\gamma yzdz+xzdy+xydz=\int_0^\pi\left(t\sin t\left(-\sin t\right)+t\cos^2 t+\sin t\cos t\right)dt$ ou $\displaystyle\int_0^\pi\left(t\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)dt=\int_0^\pi t\cos 2tdt+\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^\pi=-\frac{1}{2}\int_0^\pi\sin 2tdt=0.$

Exercice 24 Si on écrit $div\left(V\right)=0$ on a $\left(z^2-y^2\right)\Phi'\left(x\right)+\Psi\left(x\right)-z^2+y^2-x\Phi\left(x\right)=0$ si on prend $\Phi\left(x\right)=x$ et $\Psi\left(x\right)=x^2$ cette condition est vérifiée. Il s'agit alors de résoudre $V=rotF$. C'est à dire on cherche une application F de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $F\left(x,y,z\right)=\left(P\left(x,y,z\right),Q\left(x,y,z\right),R\left(x,y,z\right)\right)$ on pose $rot\left(F\right)=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ soit $\begin{cases}\dfrac{\partial R}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial z}=\left(z^2-y^2\right)x\\ \dfrac{\partial P}{\partial z}-\dfrac{\partial R}{\partial x}=\left(x^2-z^2\right)y\\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=\left(y^2-x^2\right)z\end{cases}$

Si nous prenons vue la symétrie $R\left(x,y,z\right)=z^2xy,Q\left(x,y,z\right)=y^2xz,P\left(x,y,z\right)=x^2yz$, les trois conditions sont vérifiées mais ce n'est pas la seule solution.

Exercice 25 En posant $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$ on a $\dfrac{\partial}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x}+\dfrac{\partial}{\partial\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial x}=\cos\theta\dfrac{\partial}{\partial r}-\dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}$

et $\dfrac{\partial}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial y}+\dfrac{\partial}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial y}=\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}$.

– Ainsi pour la première ce changement donne $-r\sin\theta\left(\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial r}-\dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial f}{\partial\theta}\right)+r\cos\theta\left(\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial r}+\dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial f}{\partial\theta}\right)=$ $r^2\sin\theta\cos\theta$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial\theta}=r^2\frac{1}{2}\sin 2\theta$ soit $f(r,\theta)=-\frac{1}{2}r^2\cos 2\theta+g(r)$.

– Pour la seconde la transformation donne $r\cos\theta\left(\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial r}-\dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial f}{\partial\theta}\right)+r\sin\theta\left(\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial r}+\dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial f}{\partial\theta}\right)=$ $2f$ ou encore $r\dfrac{\partial f}{\partial\theta}=2f$ ce qui donne $f(r,\theta)=g(\theta)\,r^2$.

Pour les autres il faut les dérivées secondes : $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}=\left(\cos\theta\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{\sin\theta}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial\theta}-\dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\right)\cos\theta+$ $\left(-\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial r}+\cos\theta\dfrac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}-\dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}-\dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(-\dfrac{\sin\theta}{r}\right)$
$=\cos^2\theta\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{\sin 2\theta}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial\theta}$

Pour les suivantes il faur les dérivées secondes : $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}=\left(\cos\theta\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{\sin\theta}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial\theta}-\dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\right)\cos\theta+$ $\left(-\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial r}+\cos\theta\dfrac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}-\dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}-\dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(-\dfrac{\sin\theta}{r}\right)$ soit $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}=\cos^2\theta\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{\sin 2\theta}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial\theta}-$ $\dfrac{\sin 2\theta}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}+\dfrac{\sin^2\theta}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\dfrac{\sin^2\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}$ et pour $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}=\left(\sin\theta\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}-\dfrac{\cos\theta}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial\theta}+\dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\right)\sin\theta+$ $\left(\cos\theta\dfrac{\partial}{\partial r}+\sin\theta\dfrac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}-\dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}+\dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\dfrac{\cos\theta}{r}$ soit $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}=\sin^2\theta\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}-\dfrac{\sin 2\theta}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial\theta}+\dfrac{\sin 2\theta}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}+$ $\dfrac{\cos^2\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{\cos^2\theta}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}$ et pour la dernière : $\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}=\left(\cos\theta\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{\sin\theta}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial\theta}-\dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\right)\sin\theta+$ $\left(-\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial r}+\cos\theta\dfrac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}-\dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}-\dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\dfrac{\cos\theta}{r}$ soit $\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}=\frac{1}{2}\sin 2\theta\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}-\dfrac{\cos\theta}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial\theta}+$ $\dfrac{\cos 2\theta}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}-\frac{1}{2}\dfrac{\sin 2\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{2}\dfrac{\sin 2\theta}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}$.

– $x^2f''_{x^2}+y^2f''_{y^2}+2xyf''_{xy}=1$ donne $\left(r^2\cos^4\theta+r^2\sin^4\theta\right)\dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\left(\sin 2\theta\cos^2\theta-\sin 2\theta\sin^2\theta-\cos 2\theta\sin 2\theta\right)\dfrac{\partial f}{\partial\theta}+$ $\left(-r\sin 2\theta\cos^2\theta+r\sin 2\theta\sin^2\theta+r\cos 2\theta\sin 2\theta\right)\dfrac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}$
$+\left(2\sin^2\theta\cos^2\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\dfrac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\left(r\sin^2\theta\cos^2\theta+r\sin^2\theta\cos^2\theta-r\sin 2\theta\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\dfrac{\partial f}{\partial r}=1$
ou après simplification : $r^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2}=1$ ou $\dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2}=\dfrac{1}{r^2}$ par intégration $\dfrac{\partial f}{\partial r}=-\dfrac{1}{r}+\varphi(\theta)$ et $f(r,\theta)=-\ln r+\varphi(\theta)\,r+\psi(\theta)$.

Exercice 26 $\mathcal{C}=\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(4\cos^2 t\,(-2\sin t)-\sin^2 t\cos t\right)dt=\int_0^{2\pi}8\cos^2 t\,(d(\cos t))-\int_0^{2\pi}\sin^2 t d(\sin t)=$ $8\left[\dfrac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^{2\pi}-\left[\dfrac{1}{3}\sin^3 t\right]_0^{2\pi}=0$

Exercice 27 En posant $g=f\circ u$ on a $\dfrac{\partial g}{\partial x}=-\dfrac{\sin x}{xchy}f'\circ u$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}=-\dfrac{\cos x}{chy}f'\circ u+\dfrac{\sin^2 x}{ch^2y}f''\circ u$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}=-\dfrac{\cos xshy}{ch^2y}f'\circ u$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\left(2\dfrac{\cos xsh^2y}{ch^3y}-\dfrac{\cos x}{chy}\right)f'\circ u+\dfrac{\cos^2 xsh^2y}{ch^4y}f''\circ u$. Ainsi $\Delta g=\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+$ $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\dfrac{2\cos x}{ch^3y}\left[sh^2y-ch^2y\right]f'\circ u+\dfrac{1}{ch^4y}\left(\sin^2 xch^2y+\cos^2 xsh^2y\right)f''\circ u$ ou $\Delta g=-\dfrac{2u}{ch^2y}f'\circ$ $u+\dfrac{1-u^2}{ch^2y}f''\circ u$. Si $\Delta g=0$ alors f' est solution de $\left(1-u^2\right)z'-2uz=0$ ou $\left(\left(1-u^2\right)z\right)'=0$

il existe donc $a \in \mathbb{R}$ tel que $\left(1-u^2\right) f'(u) = a$ si $a \neq 0$ alors $u^2 < 1$ et $f'(u) = \dfrac{a}{1-u^2}$ ce qui donne $f(u) = a \arg thu + b$ avec $b \in \mathbb{R}$.

Exercice 28 La condition d'exactitude de ω donne pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$: $2f\left(x^2-y^2\right) - \left(y^2-x^2+1\right) f'\left(x^2-y^2\right) = 0$ et f est solution de $(u-1) f([u]+2f(u) = 0$ ce qui donne $f(u) = \dfrac{\lambda}{(u-1)^2}$. Réciproquement si $f(u) = \dfrac{1}{(u-1)^2}$ alors $\omega = \dfrac{x^2+y^2+1}{x^2-y^2-1}dx - \dfrac{2xy}{\left(x^2-y^2-1\right)^2}dy = Pdx+Qdy$. Les fonctions P,Q sont continues sur $U_1 = \left\{(x,y) : x^2-y^2<1\right\}, U_2 = \left\{(x,y) : x^2-y^2>1, x>0\right\}, U_3$ $\left\{(x,y) : x^2-y^2>1, x<0\right\}$. Or U_1 est étoilé pat rapport à O et U_2,U_3 sont convexes donc aussi étoilés par rapport à chacun de leurs points, ω est exacte sur chacun. Posons $\omega = df_k$ avec $k = 1,2,3$. $\dfrac{\partial f_k}{\partial y} = Q = -\dfrac{2xy}{\left(x^2-y^2-1\right)^2}$ et $f_k(x,y) = -\dfrac{x}{x^2-y^2-1} + \lambda(x)$ avec λ une fonction $\mathcal{C}^1$. D'autre part $\dfrac{\partial f_k}{\partial x} = -\dfrac{1}{x^2-y^2-1} + \dfrac{2x^2}{\left(x^2-y^2-1\right)^2} + \lambda'(x) = \dfrac{x^2+y^2+1}{\left(x^2-y^2-1\right)^2} + \lambda'(x)$ et nous avons $\lambda'(x) = 0$ d'où $f_k(x,y) = \lambda_k - \dfrac{x}{x^2-y^2-1}$ avec $\lambda_k \in \mathbb{R}$.

Exercice 29 En écrivant $\omega = Pdx + Qdy$ les conditions pour que ω soit fermée sont : $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\varphi + 2y^2\varphi'}{1+x^2} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\varphi + 2x^2\varphi'}{1+y^2}$ ou $\left(y^2-x^2\right)\left(\varphi + 2\left(1+x^2+y^2\right)\varphi'\right) = 0$ en dehors de $y = \pm x$ on a φ solution de l'équation linéaire $2(1+t)z' + z = 0$ soit sur $[0,+\infty[$: $\varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$. En remplaçant il faut alors trouver une primitive de $\displaystyle\int \frac{ydx}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2+y^2}}$ en posant $x = \tan\theta$ cela donne $\displaystyle\int \frac{yd\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta+y^2}} = \int \frac{y\cos\theta d\theta}{\sqrt{1+y^2-y^2\sin^2\theta}} = Arc\sin\left(\frac{y\sin\theta}{\sqrt{1+y^2}}\right)$. Ainsi f : $(x,y) \mapsto Arc\sin\dfrac{xy}{\sqrt{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}}$ est $\mathcal{C}^1$sur tout $\mathbb{R}^2$ par continuité et $df = \omega$.

Exercice 32 Par une représentation du domaine $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 2, y \leq x \leq y^2\right\} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$, on a $\displaystyle I = \int_1^2 dy \int_y^{y^2} \sin\frac{\pi x}{2y}dx = \frac{-2}{\pi}\int_1^2 y\cos\frac{\pi y}{2}dy = -\frac{8}{\pi^3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t\cos t dt$ avec $t = \dfrac{\pi y}{2}$ et $\displaystyle I = -\frac{8}{\pi^3}\left([t\sin t]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin t dt\right) = \frac{8}{\pi^3}\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$.

Exercice 33
- I_1 faisons le changement de variables $x = ar\cos\theta, y = br\sin\theta$ le jacobien $J\left(\dfrac{x,y}{r,\theta}\right) = abr$ et $\Delta = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}$ ce qui donne $\displaystyle I_1 = \int_\Delta \left(1-r^2\right) abrdrd\theta = ab\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left(1-r^2\right) rdr = \frac{\pi}{2}ab.$
- $\mathcal{D}$ est l'intersection des deux disques et est symétrique par rapport à $y = x$ et on a $f(x,y) = f(y,x)$. Ainsi $\displaystyle I_2 = 2\int_{\mathcal{D}_1}\left(x^2+y^2\right)dxdy = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2a\sin\theta} r^3dr = 8a^4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^4\theta d\theta = 2a^4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{3}{2} - 2\cos 2\theta + \frac{1}{2}\cos 4\theta\right)d\theta = 2a^4\left(\frac{3\pi}{8}-1\right).$
- On a $(x,y) \in \mathcal{D} \Longrightarrow (-x,y) \in \mathcal{D}$ et $f(-x,y) = -f(x,y)$ posons $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D} \cap \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\right\}$ et $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D} \cap \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\right\}$ on a $\displaystyle I_3 = \int_{\mathcal{D}_1} f + \int_{\mathcal{D}_2} f$ et $\displaystyle\int_{\mathcal{D}_1} f = -\int_{\mathcal{D}_2} f$ d'où<$I_3 = 0$.

Exercice 34 $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ où $\mathcal{D}_1 : x^2+y^2-x \geq 0$ c'est le disque de diamètre OA avec $A(1,0)$ et $\mathcal{D}_2 : x^2+y^2+x \geq 0$ le disque de diamètre OB avec $B(-1,0)$. Les deux disques sont symétriques par rapport à Oy et $f(-x,y) = f(x,y)$ ainsi $\displaystyle\int_{\mathcal{D}_1} f = \int_{\mathcal{D}_2} f$ et $\displaystyle I = 2\int_{\mathcal{D}_1} f$. En utilisant $f(x,y) =$

$f(x,-y)$ on a $\displaystyle\int_{\mathcal{D}_1} f = 2\int_{\mathcal{D}'_1} f$ où $\mathcal{D}'_1$ est le demi-disque $\mathcal{D}_1 \cap \{(x,y) : y \geq 0\}$. En coordonnées polaires $\displaystyle\int_{\mathcal{D}'_1} f = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} \frac{rdr}{(1+r^2)^2} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{1+\cos^2\theta}\right) d\theta$ et $\displaystyle I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta} d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2\theta}\left(1+\frac{1}{\cos^2\theta}\right)} \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$ avec $t = \tan\theta$ on a $\displaystyle I = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(2+t^2)} = 2\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{2+t^2}\right) dt = \pi\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Exercice 35 Il s'agit du centre de gravité de la lemniscate de Bernouilli qui admet pour équation en polaire $\rho^2 - \cos 2\theta = 0$. L'ensemble E est défini par $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ et $0 \leq \rho \leq \sqrt{\cos 2\theta}$ eyt le centre de gravité est donné par $\displaystyle X_G = \frac{1}{M}\int_F (\rho\cos\theta)\,\rho d\rho d\theta$, $Y_G = 0$ où $\displaystyle M = \tfrac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 d\theta = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle X = 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3}(\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}} \cos\theta d\theta = \frac{2}{3}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(1-2s^2\right)^{\frac{3}{2}} ds$ avec $s = \sin\theta$ soit $\displaystyle X = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{3\pi}{16}$ avec $s = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi$ on trouve $I = \frac{\sqrt{2}\pi}{8} \approx 0{,}556$ à $5 \cdot 10^{-4}$ près.

Exercice 36 $\mathcal{B}$ est définie par $\displaystyle\frac{x^2+y^2}{2p} \leq z \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\lambda}$ et $\displaystyle V = \int\int\int_{\mathcal{B}} dxdydz$. Par piles puis par polaire cela donne $\displaystyle V = \int\int_{\Delta}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\lambda} - \frac{x^2+y^2}{2p}\right) dxdy$ avec $\Delta : x^2+y^2 \leq \frac{4p^2}{\lambda^2}$ puis $\displaystyle V = \int\int_D \left(\frac{r}{\lambda} - \frac{r^2}{2p}\right) rdrd\theta$ où $D : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \frac{2p}{\lambda}$ soit $\displaystyle V = 2\pi\int_0^{\frac{2p}{\lambda}} \left(\frac{r^2}{\lambda} - \frac{r^3}{2p}\right) dr = 2\pi\left[\frac{r^3}{3\lambda} - \frac{r^4}{8p}\right]_0^{\frac{2p}{\lambda}} = \frac{4\pi p^3}{3\lambda^4}$. On peut aussi calculer par couches ou appliquer Guldin.

Exercice 37
- $\mathcal{D} = [0,1] \times [0,1]$ et $\displaystyle\int_{\mathcal{D}} dxdy = \int_0^1\int_0^1 dxdy = \left(\int_0^1 dx\right)\left(\int_0^1 dy\right) = 1$
- $\displaystyle\int_{\mathcal{D}} dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy = \int_0^1 (1-x)\,dx = \frac{1}{2}$
- En coordonnées polaires $\left\{\begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{array}\right.$ le jacobien vaut ρ et $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} dxdy = \int\int_{.}\rho d\rho d\theta$ où $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\right\}$ et $\Delta = \left\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho \leq 1, \theta \in [0,2\pi]\right\}$. $\displaystyle\int_{\mathcal{D}} dxdy = \left(\int_0^1 \rho d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) = \pi$. En coordonnées cartésiennes cela donne $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} dxdy = \int_{-1}^{+1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} dy = 2\int_{-1}^{+1}\sqrt{1-x^2}dx = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta = \pi$ avec $x = \sin\theta$.

Exercice 38
- $\displaystyle I = \left(\int_0^1 xdx\right)\left(\int_0^1 dy\right) = \tfrac{1}{2}$
- $\displaystyle J = \int\int_{.}(x+y)\,dxdy = \int_0^1 dx \int_0^2 (x+y)\,dy = \int_0^1 \left(\left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^2\right) dx = \int\int_0^1 2(x+1)\,dx = \left[x^2+2x\right]_0^1 = 3$.
- $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} xdxdy$ et $\displaystyle\int_{\mathcal{D}} ydxdy$ existent car $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$ sont continues donc bornées sur le compact $\mathcal{D}$. $\displaystyle K = \int\int_{\mathcal{D}} xdxdy + \int\int_{\mathcal{D}} ydxdy = 2\int\int_{\mathcal{D}} xdxdy = 2I = 1$.

– $L = \int\int_{\mathcal{T}} x^2 y dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^2 y dy = \int_0^1 x^2 \frac{(1-x)^2}{2} dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - 2\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{60}$.

– la fonction à intégrer est bien continue car $x+y+1$ ne s'annule pas. $M = \int\int_{\mathcal{C}} \frac{dxdy}{x+y+1} = \int_0^1 dx \int_0^x \frac{dy}{x+y+1} = \int_0^1 dx \left[\ln(y+x+1)\right]_{y=0}^x$ soit $M = \int_0^1 \ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) dx = \frac{3}{2}\ln 3 - 2\ln 2$ car pour $a \neq 0$ on a $\int_0^1 \ln(ax+1)\, dx = \left[\left(x + \frac{1}{a}\right)\ln(ax+1) - x\right]_0^1$.

Exercice 39 – $\int\int_{\mathcal{D}_k} x^2 dx dy = \int\int_{\mathcal{D}_k} y^2 dx dy = \int\int_{\mathcal{D}_k} (x^2+y^2)\, dx dy = \frac{1}{2}\int\int_{\cdot_k} \rho^2 \rho d\rho d\theta$ où $\Delta_k = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2, \rho \in [0,k], \theta \in [0,2\pi]\}$ et $I_k = \frac{1}{2}\left(\int_0^k \rho^3 d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) = \frac{\pi k^4}{4}$.

– Posonx $X = \frac{x}{a}$ et $Y = \frac{y}{b}$ le jacobien est alors ab et $J = \int\int_{\otimes} (x^2+y^2)\, dx = \int\int_{\mathcal{D}} (a^2X^2 + b^2Y^2)\, abdXdY$ où $\mathcal{D} = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$. $J = ab(a^2+b^2)\, I_1 = \frac{\pi}{4} ab (a^2+b^2)$.

Exercice 40 Voir graphe
$I = \int_{\mathcal{D}} y dx dy$ si $\mathcal{D}^+ = \{(x,y) \in \mathcal{D} : y \geq 0\prime\}$ et $\mathcal{D}^- = \{(x,y) \in \mathcal{D} : y \leq 0\}$ par symétrie on a $\int\int_{\mathcal{D}^+} y dx dy = -\int\int_{\mathcal{D}^-} y dx dy$ d'où $I = 0$. Pour $J = \int\int_{\cdot} \rho\cos\theta \rho d\rho d\theta$ avec $\Delta = \{(\rho,\theta) : \theta \in [0,2\pi], 0 \leq \rho \leq a(1$ et $J = \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta \int_0^{a(1+\cos\theta)} \rho^2 d\rho = \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi} \cos\theta(1+\cos\theta)^3 d\theta$ or $\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta = 0$ et $\int_0^{2\pi}\cos^3\theta d\theta = \int_0^{2\pi}(1-\sin^2\theta)\, d(\sin\theta) = 0$ d'où $J = \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}(\cos^4\theta + 3\cos^2\theta)\, d\theta$ mais $\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2}2\pi = \pi$ et $\int_0^{2\pi}\cos^4\theta d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{4}\cos^2 2\theta\right) d\theta = \frac{1}{4}2\pi + 0 + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 4\theta}{2} d\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{8}2\pi = \frac{3\pi}{4}$. D'où $J = \frac{a^3}{3}\left(\frac{3\pi}{4} + 3\pi\right) = \frac{5a^3\pi}{4}$.

Exercice 41 $I = \int\int_{\cdot} e^{-x^2} dy dx$ avec $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2, 2y \leq x \leq 4\}$. La fonction à intégrer est continue sur Δ et $I = \int_0^4 dx \int_0^{\frac{x}{2}} e^{-x^2} dy = \int_0^4 \frac{x}{2} e^{-x^2} dx = \left[-\frac{1}{4}e^{-x^2}\right]_0^4 = \frac{1-e^{-16}}{4}$.

Exercice 42 $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc localement intégrable sur $\mathbb{R}^+$ où elle est positive d'autre part $\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x^2} = 0$ et $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ existe, par comparaison J existe. Notons $T_a = \{(x,y) \in \Delta_a : x \geq 0, y \geq 0\}$ et $R(a) = \int\int_{T_a} f(x) f(y)\, dx dy$. Par symétrie $R(a) = \frac{1}{4}C(a)$. On a les inclusions suivantes $T_a \subset D_a \subset T_{a\sqrt{2}}$ et la positivité de f entraîne alors $R(a) \leq Q(a) \leq R(a\sqrt{2})$ soit $C(a) \leq 4Q(a) \leq C(a\sqrt{2})$. Or $C(a) = \int\int_{\cdot_a} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int\int_{\otimes_a} e^{-\rho^2}\rho d\rho d\theta$ où $\Omega_a = \{(\rho,\theta) : \rho \in [0,a], \theta \in [0,2\pi]\}$. Le calcul donne $C(a) = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^a \rho e^{-\rho^2} d\rho\right) = 2\pi\frac{1-e^{-a^2}}{2}$ et donc $\pi\left(1-e^{-a^2}\right) \leq 4Q(a) \leq \pi\left(1-e^{-2a^2}\right)$. Il nous suffit de faire tendre a vers $+\infty$ et les deuextrémités tendent vers π. On en déduit que $\lim_{a\to+\infty} Q(a)$ existe et vaut $\frac{\pi}{4}$ et donc $\frac{\pi}{4} = \int\int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-x^2}e^{-y^2} dx dy = J^2$. On en déduit que $J = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 43 Montrons que I est dérivable à gauche de dérivée $I_g'(k) = kA'(k)$. Soit $u > 0$ et notons $\Delta_{k,u} = \{(x,y) : k-u \leq F(x,y) \leq k\}$. Ω_k est alors réunion disjointe de Ω_{k-u} et de $\Delta_{k,u}$ si bien que $\int\int_{\otimes_k} dxdy = \int\int_{\otimes_{k-u}} dxdy + \int\int_{\cdot_{k,u}} dxdy$ et $\int\int_{\otimes_k} f(x,y)\,dxdy = \int\int_{\otimes_{k-u}} F(x,y)\,dxdy + \int\int_{\cdot_{k,u}} F(x,y)\,dxdy$ d'où $I(k) - I(k-u) = \int\int_{\cdot_{k,u}} F(x,y)\,dxdy$ ce qui donne $\int\int_{\cdot_{k,u}} (k-u)\,dxdy \leq I(k) - I(k-u) \leq \int\int_{\cdot_{k,u}} kdxdy$ soit $(k-u)(A(k) - A(k-u)) \leq I(k) - I(k-u) \leq k(A(k) - A(k-u))$ ou $(k-u)\dfrac{A(k)-A(k-u)}{u} \leq \dfrac{I(k)-I(k-u)}{u} \leq k\dfrac{A(k)-A(k-u)}{u}$. Comme A est dérivable les mebres aux extrémités tendent vers $kA'(k)$ lorsque u décroit vers 0. On en déduit le résultat cherché. On montrerait de même que I est dérivable à droite et que $I'_d(k) = kA'(k)$.

– $\int_{\otimes}\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)dxdy$ avec $F(x,y) = \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ et $\Omega = \{(x,y) : 0 \leq F(x,y) \leq 1\}$, $\Omega_k = \left\{(x,y) : \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{k}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{k}\right)^2} \leq 1\right\}$. $A(k)$ est l'aire de l'ellipse $\Omega_k = \pi a\sqrt{k}b\sqrt{k} = \pi abk$.

D'autre part $A(k)$ est dérivable et $I(k) = \int\int_{\Omega_k} F(x,y)\,dxdy$ l'est aussi et $I'(k) = \pi abk$.

D'où $\int\int_{\Omega}\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)dxdy = \int_0^1 I'(k)\,dk = \pi ab\int_0^1 kdk = \dfrac{\pi ab}{2}$.

– $\int\int_D \dfrac{dxdy}{(1+x+y)^3}$ avec $D_\lambda = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq \lambda\right\}$ et $0 \leq \lambda \leq 1$ considèrons $u > 0$ suffisament petit et $\Delta_{\lambda,u} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, \lambda - u \leq x+y \leq \lambda\right\}$ on a $I_\lambda = \int\int_{D_\lambda} \dfrac{dxdy}{(1+x+y)^3}$. Ainsi $I(\lambda) - I(\lambda-u) = \int\int_{\Delta_{\lambda,u}} \dfrac{dxdy}{(1+x+y)^3}$ et de plus $A(\lambda) = \int\int_{\Delta_{\lambda,u}} dxdy = \dfrac{\lambda^2}{2}$. On a $\dfrac{A(\lambda)-A(\lambda-u)}{(1+\lambda)^3} \leq I(\lambda) - I(\lambda-u) \leq \dfrac{1}{(1+\lambda-u)^3}(A(\lambda) - A(\lambda-u))$ on trouve que I est dérivable car A l'est et $I'_g(\lambda) = \dfrac{1}{(1+\lambda)^3}A'(\lambda)$ et comme I est dérivable à droite on a $I'(\lambda) = \dfrac{\lambda}{(1+\lambda)^3}$ et $I = \int_0^1 I'(\lambda)\,d\lambda = \int_0^1 \dfrac{d\lambda}{(1+\lambda)^2} - \int_0^1 \dfrac{d\lambda}{(1+\lambda)^3} = \left[-\dfrac{1}{1+\lambda}+\dfrac{1}{2(1+\lambda)^2}\right]_0^1 = \dfrac{1}{8}$.