Chapitre 9

Dérivation d'une fonction d'une variable réelle

9.1 Introduction

Le calcul différentiel est postérieur au clacul intégral. Il a été source de beaucoup de polémiques et est étroitement lié au problèmes de limites donc d'infiniment petits.
Voyons d'où provient le calcul différentiel. Dès 1637 Descartes en s'intéressant au calcul de l'angle d'intersection de deux courbes, Galilé pour la construction de lunettes astronomiques, Huygens (1673), pour les horloges, Galilé et Newton (1686), pour le calcul de la vitesse et l'accélération d'un mouvement, enfin Képler et Newton, pour la vérification des lois de la gravitation en astronomie.
Tout se passe par petit accroissement : $y = ax + b$ et $y + \Delta y = ax + a\Delta x + b$ d'où $\Delta y = a\Delta x$ et enfin $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = a$. Le même raisonement vaut pour $x^2 = y$.
Leibniz (1684) énonce que Δx et Δy deviennent infiniment petits et sont notés dx et dy. Pour Newton (1671) les notations sont $\dot{x}$ et $\dot{y}$. Les avis sont divergents : Pour Bernouilli (1691) maître de Euler et du marquis de l'Hospital ce sont des "quantités infiniment petites qui, additionnées à des quantités finis ne changent pas leur valeur. Berkeley (1734) est contre l'infiniment petit. Euler (1755) après 6 pages adopte la notation dx. Lagrange (1797) rejette les infiniment petits et fonde l'analyse sur les séries de Taylor mais introduit le nom de dérivée et note $f'(x)$. Cauchy (1823) réintroduit les infiniment petits mais comme limite. Bolzano (1817) et Weierstrass (1861) perfectionnent la définition avec les ε et les δ. Klein (1908) défend la valeur pédagogique des infiniment petits.
Enfin l'étude des mouvements et des courbes a beaucoup contribuée à la notion moderne de dérivée.

9.2 Dérivation

Dans tous le chapitre, l'intervalle I sans autre précision désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, ouvert, fermé ou semi-ouvert mais non réduit à un point

Définition 1 *Soit F un espace vectoriel normé et f définie sur l'intervalle I à valeurs dans F. Soit $x_0 \in I$, on dit que f est dérivable en x_0 de dérivée $l \in F$ si*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{1}{x - x_0}(f(x) - f(x_0) = l$$

On dit que f est dérivable à droite en x_0 de dérivée à droite $l_d \in F$ si x_0 n'est pas le bord droit de I et que

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{1}{x - x_0}(f(x) - f(x_0) = l_d$$

On dit que f est dérivable à gauche en x_0 de dérivée à droite $l_g \in F$ si x_0 n'est pas le bord gauche de I et que

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{1}{x - x_0}(f(x) - f(x_0) = l_g$$

On note aussi, lorsque la fonction est dérivable, $f'(x)$ la dérivée de f en x et $f'_d(x)$ ou $f'_g(x)$ les dérivées à droite ou à gauche de f en x.

Remarque: L'écriture du symbole $f'(x)$ ne peut se faire que si la fonction est dérivable: on ne présente pas le symbole $f'(x)$ sans s'être assuré que la fonction est dérivable en x.
Remarque: interprétation géométrique Si une fonction est dérivable en un point a, la droite affine passant par le point $(a, f(a))$ et de vecteur directeur $(1, f'(a))$ est la tangente en ce point au graphe de f.
Remarque: interprétation cinématique Si la fonction f représente la position d'un mobile, le vecteur $(1, f'(a))$ est le vecteur vitesse du mobile en $(a, f(a))$.

Proposition 1 *Une fonction dérivable (resp à droite) (resp à gauche) en un point x_0 est continue (resp à droite) (resp à gauche) en ce point.*

[Ind] Traduire la définition de la limite.

Proposition 2 *Une fonction définie sur un intervalle ouvert I est dérivable en un point $x \in I$ si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en x et que les vecteurs dérivés à gauche et à droite sont égaux.*

[Ind] C'est une propriété des limites.

Proposition 3 Dérivation et développement limité d'ordre 1. *Soit f une fonction définie sur l'intervalle I à valeurs dans l'espace vectoriel F de dimension finie. La fonction f est dérivable en $x_0 \in I$ de dérivée $l \in F$ si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)l + o_{x_0}(x - x_0)$.*

[Ind] C'est la démonstration de la proposition 1.

Définition 2 *Soit f une fonction définie sur l'intervalle I à valeurs dans l'espace vectoriel F de dimension finie. Si f est dérivable en tout point $x \in I$, on dit que f est dérivable et la fonction f' (notée aussi Df) définie sur I , qui à un réel x de I associe la dérivée de f en x est appelée fonction dérivée. On note $D^1(I, F)$ l'ensemble des fonctions dérivables définies sur I à valeurs dans F.*

Définition 3 *Soit $f \in D^1(I, F)$, si f' est continue, on dit que f est de classe C^1 et on note $C^1(I, F)$ l'ensemble des fonctions ainsi définies.*

Remarque: $C^1(I, F) \subset D^1(I, F)$

9.3 Propriétés des fonctions dérivables

Proposition 4 *Soit $\lambda \in K$ et f et g de fonctions définies sur l'intervalle I à valeurs dans l'espace vectoriel F de dimension finie. Si f et g sont dérivables en un point $x \in I$, la somme $f + g$, le produit par un scalaire λf sont dérivables en x et on a $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$, $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$.*

[Ind] Passer aux limites où aux D.L.

Remarque: $D^1(I, F)$ et $C^1(I, F)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(I, F)$.

Exercice 1 Que peut-on dire de l'opérateur D qui à une fonction dérivable f associe sa dérivée Df ?

Proposition 5 *Soit u une application linéaire de F dans G, F et G étant des espaces de dimension finie et f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans F. Si f est dérivable en $x \in I$, $u(f)$ est dérivable en x de dérivée $u(f'(x))$.*

[Ind] Utiliser les D.L. d'ordre 1.

Exercice 2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ (matrice ¡¡constante¿¿) et X une fonction dérivable, définie d'un intervalle I à valeurs dans K^n dérivable. Montrer que la fonction AX est dérivable et calculer sa dérivée.

Proposition 6 *Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de F et f une fonction définie sur l'intervalle I à valeurs dans F. La fonction f est dérivable en $x \in I$ si et seulement si les fonctions coordonnées $(f_1, \ldots, f_n)$ de f dans la base $\mathcal{B}$ sont dérivables en x et on a alors*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} f'_k(x) e_k$$

[Ind] *Utiliser la proposition précédente avec les apllication linéaires coordonnées.*

Exercice 3 Soit f une fonction complexe d'une variable réelle définie sur l'intervalle I. Montrer que f est dérivable en un point x de I si et seulement si $\overline{f}$ est dérivable en x et si et seulement si $\Re(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables en ce point.

Exercice 4 Soit A une application d'un intervalle I dans $\mathcal{M}_n(K)$. On écrit, pour tout $x \in I$, $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j \in [1,n]}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que A soit dérivable et calculer sa dérivée.

Proposition 7 Dérivée d'un " produit". *Soient f et g des fonctions définies sur l'intervalle I à valeurs dans F et G des espaces de dimension finie et B une application bilinéaire de $F \times G$ dans H espace vectoriel de dimension finie. Si les fonctions f et g sont dérivables en $x \in I$, la fonction $B(f, g)$ est alors dérivable en x de dérivée $B(f'(x), g(x)) + B(f(x), g'(x))$.*

[Ind] Utiliser la bilinéarité.

Exercice 5 Quelles sont les situations usuelles couvertes par cette proposition ?

Proposition 8 (Dérivée d'une composée) *Soit φ une fonction réelle définie sur l'intervalle I et f une fonction définie sur un intervalle J non réduit à un point. Si $\varphi(I) \subset J$, si φ est dérivable en un point x de I et si f est dérivable en $\varphi(x)$, alors $f \circ \varphi$ est dérivable en x de dérivée $(f \circ \varphi)'(x) = \varphi'(x) f'(\varphi(x))$.*

[Ind] Ou bien suivre la composée des D.L. ou bien se ramener au cas d'une variable par les coordonnées.

Exercice 6 La fonction $x \mapsto \cos \sqrt{x}$ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}_+$?

9.4 Rappel sur la dérivation des fonctions réelles

Il existe des propriétés très importantes spécifiques aux fonctions réelles qui ne s'étendent pas aux fonctions vectorielles ou simplement complexes

Théorème 1 (Théorème de Rolle) *Soit f une fonction réelle définie sur l'intervalle $[a, b]$ ($a \neq b$) continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

[Ind] Utiliser la proposition suivante et que toute fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.

La démonstration repose sur la

Proposition 9 *Soit f une fonction réelle dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$. Si la fonction f présente un extremum local en un point $x \in]a,b[$, alors $f'(x) = 0$.*

[Ind] Puisque l'on sait que la fonction est dérivable en x suivre le signe du taux de variations.

Exercice 7 Donner une interprétation cinématique du théorème de Rolle (mouvement d'un point sur une droite) et indiquer les raisons pour lesquelles il ne peut se généraliser aux fonctions vectorielles.

Du théorème de Rolle, on déduit le

Théorème 2 Accroissement finis. *Soit f une fonction réelle définie sur l'intervalle $[a,b]$ ($a \neq b$) continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.*

[Ind] Appliquer Rolle à une fonction bien choisie.

Exercice 8 Interpréter géométriquement le théorème des accroissements finis et indiquer les raisons pour lesquelles il ne peut se généraliser tel quel aux fonctions vectorielles.

Une conséquence du théorème des accroissements finis qui, en revanche est généralisable aux fonctions vectorielles:

Proposition 10 *Soit f une fonction réelle définie sur l'intervalle $[a,b]$ ($a \neq b$) continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. La fonction f est constante si et seulement si, pour tout $x \in]a,b[$, $f'(x) = 0$.*

[Ind] Por la réciproque utiliser les accroissements finis.

Si F est un espace vectoriel de dimension finie, en appliquant coordonnées par coordonnées dans une base de F, cette proposition aux fonctions à valeurs dans F, on trouve:

Proposition 11 *Soit f une fonction à valeurs dans un espace vectoriel F de dimension finie, définie sur l'intervalle $[a,b]$ ($a \neq b$) continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. La fonction f est constante si et seulement si, pour tout $x \in]a,b[$, $f'(x) = 0$.*

[Ind] Passer par les coordonnés.

9.5 Fonctions de classe C^k

I étant un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et F un espace vectoriel de dimension finie, on construit par récurrence la notion de fonction n fois dérivable et de dérivée $n^{ième}$ à partir de la définition d'une fonction dérivable.

Définition 4 *Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $k = 0$, par convention, on dit qu'une fonction f de I dans F est 0 fois dérivable si elle est simplement définie et on note $f^{(0)} = f = D^0 f$. Pour $k > 0$, on dit qu'une fonction f de I est k fois dérivable si et seulement s'il existe des fonctions $f_0, f_1, \ldots, f_k$ définies sur I à valeurs dans F telles que: $f_0 = f$, pour tout $i \in [0, k-1]$, f_i est dérivable et $f_i' = f_{i+1}$. La suite (f_i) étant unique, on note $f^{(i)} = f_i$ ou en utilisant l'opérateur D, $D^i f = f_i$.*

Proposition 12 *Soit p un entier naturel. Si une fonction f est p fois dérivable:*
elle est q fois dérivable pour tout entier naturel $q \leq p$,
$f^{(q)}$ est $p-q$ dérivable et on a $(f^{(q)})^{(p-q)} = f^{(p)}$.
Réciproquement, si une fonction est q fois dérivable pour un entier $q \leq p$ et que $f^{(q)}$ est $p-q$ fois dérivable alors f est p fois dérivable.

[Ind] C'est amusant.

On construit par récurrence les ensembles de fonctions de classe C^k à partir de la notion de fonction k fois dérivable:

Définition 5 *Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $k = 0$, on dit qu'une fonction f de I dans F est de classe C^0 si et seulement f est continue et si $k > 0$, on dit qu'une fonction f de I dans F est de classe C^k si et seulement f est k fois dérivable et que $f^{(k)}$ est continue. On note $C^k(I,F)$ l'ensemble constitué de telles fonctions.*

Proposition 13 *Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 1.*

$$f \in C^k(I,F) \Longleftrightarrow f \text{ est dérivable} \quad \text{et} \quad f' \in C^{k-1}(I,F)$$

[Ind] C'est amusant.

Proposition 14 *Soit p un entier naturel. Pour tout entier naturel $q \leq p$, on a $C^p(I,F) \subset C^q(I,F)$*

[Ind] Qui peut le plus peut le moins.

On appelle $C^\infty(I,F) = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} C^p(I,F)$ et on a

Proposition 15 *La fonction f appartient à $C^\infty(I,F)$ si et seulement si f est n fois dérivable pour tout entier n.*

[Ind] Que signifie qu'une fonction est $C^\infty(I,F)$.

Proposition 16 *Soient f et g des fonctions définies sur l'intervalle I à valeurs dans F et G des espaces de dimension finie et B une application bilinéaire de $F \times G$ dans H espace vectoriel de dimension finie. Si les fonctions f et g de classe C^k, la fonction $B(f,g)$ est de classe C^k et on a la formule de Leibniz:*

$$B(f,g)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B(f^{(i)}, g^{(k-i)})$$

[Ind] Démontrer la formule de Leibniz par récurrence.

Exercice 9 La fonction $x \mapsto x^2 e^x$ est classe C^∞. Calculer sa dérivée $n^{ième}$ pour tout entier n.

Proposition 17 Classe d'une composée. *Soit φ une fonction réelle définie sur l'intervalle I de classe C^k et f une fonction définie sur un intervalle J non réduit à un point de classe C^k. Si $\varphi(I) \subset J$ alors la composée $f \circ \varphi$ existe et est de classe C^k.*

[Ind] Par récurrence.

Exercice 10 Soit f une fonction réelle ou complexe de classe C^k qui ne s'annule pas. Montrer que $\frac{1}{f}$ est de classe C^k.

9.6 Fonctions réelles de classe C^k

On va particulariser ici le fait qu'une fonction réelle définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ peut être inversible.

9.6.1 Rappel sur les fonctions bijectives continues ou dérivables

Soit φ une fonction réelle définie d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

Proposition 18 *Si φ est continue, il est alors équivalent de dire "φ est injective" et "φ est strictement monotone".*

[Ind] Écrire les définitions. Penser à un raisonnement par l'absurde.

Proposition 19 *Si φ est injective et continue , la fonction réelle φ^{-1} définie sur l'intervalle $\varphi(I)$ est alors strictement monotone (de même sens que φ) et continue. Les intervalles I et $\varphi(I)$ sont deux intervalles simultanément ouverts, fermés, semi-ouverts ou fermés bornés.*

[Ind] Que reste-t-il à démontrer ?

Proposition 20 *Si φ est dérivable.*
a) La fonction φ est croissante si et seulement si φ' est positive.
b) La fonction φ est strictement croissante si et seulement si φ' est positive et qu'il n'existe pas d'intervalle non vide et non réduit à un point contenu dans I constitué de zéros de φ'.

[Ind] Reprendre la démonstration de la proposition pour f constante.

Proposition 21 *Si φ est strictement monotone, continue et dérivable en un point $x \in I$, la fonction φ^{-1} définie sur l'intervalle $\varphi(I)$ est dérivable en $y = \varphi(x)$ si et seulement si $\varphi'(x) \neq 0$. On a alors*

$$\left(\varphi^{(-1)}\right)'(y) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{(-1)}(y))}$$

[Ind] Regarder les taux de variations.

9.6.2 C^k-difféomorphismes

Définition 6 *Soit $k \in \mathbb{N}$, I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et φ une application de I dans J. Si φ est de classe C^k, si φ est bijective et si φ^{-1} est de classe C^k, on dit que φ est un C^k-difféomorphisme de I sur J.*

Théorème 3 *Soit $k \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et φ une fonction de classe C^k de I dans $\mathbb{R}$. La fonction φ est un C^k-difféomorphisme de I sur l'intervalle $\varphi(I)$ si et seulement si, pour tout réel x appartenant à I, $\varphi'(x) \neq 0$.*

[Ind] Rassembler ce que l'on sait.

Exercice 11 Soient a et b deux réels. Construire un difféomorphisme de classe C^∞ de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 12 Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable telle que les limites $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ existent, sont réelles et égales . Montrer que la fonction $f \circ \tan$ définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est prolongeable par continuité sur les bords de l'intervalle. En déduire qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

9.6.3 Fonctions de classe C^1 par morceaux

Définition 7 *Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$ à valeurs dans F . La fonction f est dite de classe C^1 par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision S: $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que, pour tout $i \in [0, n-1]$, la restriction de f à l'intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ soit prolongeable en une fonction $\tilde{f}_i$ de classe C^1 sur $[a_i, a_{i+1}]$. La subdivision S est dite adaptée ou subordonnée à la fonction f.*

Définition 8 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. une fonction f définie sur I est de classe C^1 par morceaux sur I si sa restriction à tout segment inclus dans I est de classe C^1 par morceaux sur ce segment.*

Proposition 22 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et. L'ensemble des fonctions de classe C^1 par morceaux définies sur I à valeurs dans un espace vectoriel normé F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,F)$ noté $C^1_{pm}(I,F)$.*

[Ind] Le vérifier en prenant une subdivision commune.

Proposition 23 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, F, G et H trois espaces vectoriels normés, B une application bilinéaire continue de $F\times G$ dans H. Si $f\in C^1_{pm}(I,F)$ et $g\in C^1_{pm}(I,G)$ alors $B(f,g)\in C^1_{pm}(I,H)$.*

[Ind] Prendre encore une subdivision commune et utiliser ce que vous savez.

Soit f une fonction f de classe C^1 par morceaux définie sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et S_1 l'ensemble des points de $[a,b]$ où f n'est pas dérivable. S_1 est un ensemble fini et la fonction $\tilde{D}f$ définie sur $[a,b]/S_1$ par $\tilde{D}f(x)=f'(x)$ pour tout $x\in[a,b]/S_1$ s'appelle encore dérivée de la fonction f.
Exemple: La fonction f définie sur $[-1,1]$ par $f(x)=x\,|x|$ est de classe C^1 $[-1,1]$. La fonction f' est définie sur $[-1,1]$ par

$$f'(x)=\begin{cases}-2x & \text{si } x\leq 0\\ 2x & \text{si } x>0\end{cases}$$

Proposition 24 *Soit f une fonction de classe C^1 par morceaux définie sur un intervalle $[a,b]$ à valeurs dans F. f est une fonction en escalier si et seulement si $\tilde{D}f$ est nulle sur son ensemble de définition.*

[Ind] Que signifie être en escalier ?

Remarque: Une fonction continue et de classe C^1 par morceaux dont la dérivée est nulle est donc constante.

9.7 Exercices

Exercice 13 Soit f une fonction réelle ou complexe définie et dérivable sur un intervalle I. Déterminer la dérivabilité de $|f|$.
Plus généralement, soit X une fonction dérivable définie sur un intervalle I à valeurs dans K^n. N désignant l'une des normes usuelles sur K^n, déterminer la dérivabilité de la fonction $N(X)$.

Exercice 14 Soit f une fonction dérivable en a, calculer $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h^2)-f(a+h)}{h}$.

Exercice 15 Soit f une fonction réelle dérivable sur $\mathbb{R}_+$ telle que les limites de f et f' existent en $+\infty$ et valent l et l'. Montrer que $l'=0$.
Si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0$, f possède-t-elle une limite en $+\infty$?
Si f possède une limite en $+\infty$, f' possède-t-elle une limite en $+\infty$?

Exercice 16 Montrer que la famille de fonctions réelles $(x\mapsto(|x-\alpha|)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est libre.

Exercice 17 Soit M une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable de l'intervalle $]a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que $M'(c)$ soit colinéaire au vecteur $\overrightarrow{M(a)M(b)}$. En déduire une généralisation du théorème des accroissements finis mettant en jeu deux fonctions réelles.

Exercice 18 Soit f une fonction complexe d'une variable réelle dérivable ne s'annulant pas. Montrer que $\frac{1}{f}$ est dérivable et calculer sa dérivée. Soit A une application dérivable définie d'un intervalle I à valeurs dans $GL_n(C)$. Montrer que A^{-1} est dérivable et calculer sa dérivée.

Exercice 19 Soit f une fonction dérivable sur $[a,b]$ $(a<b)$ à valeurs dans l'espace vectoriel normé F.
a) Montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) d'éléments de $[a,b]$ vérifiant:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$
$$||f(b)-f(a)|| \leq 2^n ||f(b_n)-f(a_n)||$$

Indication : si α et β sont deux réels: $\alpha+\beta \leq 2\text{Max}(\alpha,\beta)$
b) Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n} = f'(c)$$

c) En déduire que

$$\exists c \in [a,b] \quad ||f(b)-f(a)|| \leq ||f'(c)||(b-a)$$

Exercice 20 Soit f une fonction dérivable sur $[a,b]$ $(a<b)$ à valeurs dans l'espace vectoriel normé F et g une fonction réelle dérivable définie sur ce même intervalle et telle que, pour tout $x \in [a,b]$, $||f'(x)|| \leq g'(x)$. Montrer en utilisant une technique similaire à l'exercice précédent que

$$||f(b)-f(a)|| \leq g(b)-g(a)$$

Peut-on affirmer que cette conclusion est encore vérifiée si l'on suppose seulement f et g continues, dérivables sur $]a,b[$ et telles que, pour tout $x \in]a,b[$, $||f'(x)|| \leq g'(x)$?

Exercice 21 Que peut-on dire d'une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans un espace vectoriel normé F telle qu'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ et $\alpha \in]1,+\infty[$ vérifiant

$$\forall x_1, x_2 \in I \quad ||f(x_1)-f(x_2)|| \leq K\left|x_1-x_2\right|^{\alpha}$$

Exercice 22 Soit E l'espace vectoriel des fonctions de la forme $x \mapsto P(x)\mathrm{e}^x$ où P est un polynôme à coefficients réels. Montrer que la restriction à E de la dérivation est un endomorphisme de E dont on déterminera le noyau et l'image. Déterminer les valeurs propres de cet endomorphisme.

Exercice 23 Soient $X_1,\ldots,X_n$ des fonctions dérivables définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\det(X_1,\ldots,X_n)$ est dérivable et calculer sa dérivée.

Exercice 24 Soient e_1, e_2 et e_3 des fonctions de classe C^1 définies sur un intervalle I à valeurs dans un espace euclidien E orienté de dimension 3 telles que, pour tout $t \in I$, la famille $(e_1(t), e_2(t), e_3(t))$ soit une base orthonormée de E.
a) Montrer que, pour tout $t \in I$, la base $(e_1(t), e_2(t), e_3(t))$ conserve la même orientation.
b) Montrer qu'il existe une fonction $\Omega : I \to E$ continue telle que, pour tout $t \in I$ et pour tout $i \in [1,3]$, $e_i'(t) = \Omega(t) \wedge e_i(t)$.
En déduire qu'il existe une application continue $A : I \to \mathcal{L}(E)$ telle que, pour tout $t \in I$, $A(t)$ est un endomorphisme antisymétrique et que, pour tout $i \in [1,3]$, $e_i'(t) = A(t)(e_i(t))$.
c) Généraliser à un espace euclidien de dimension quelconque.

9.8 Travaux Dirigés : Calcul différentiel

Exercice 25 [calculer les limites suivantes]
$\lim\limits_{0}(\cos x)^{\cot an2x}$; $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{2x-\pi}}$; $\lim\limits_{0} |\sin x|^{\tan x}$. $\lim\limits_{\infty} (x+1)exp(\frac{1}{x+1})-xexp(\frac{1}{x})$; $\lim\limits_{+\infty} x\left(\frac{1}{e}-\left(\frac{x}{x+1}\right)^x\right)$; $\lim\limits_{0} \frac{\cos x-\sqrt{\cos 2x}}{\sin^2 x}$ $\lim\limits_{0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{(x-\sin x)}}$; $\lim\limits_{0}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$;$\lim\limits_{a} \frac{x^a-a^x}{x^x-a^a}$.

Exercice 26 $\Diamond$DL3(-1) de $\dfrac{x+1}{x^2+3x+3}$; DL6(0) de $\cos^n x$; Donner des équivalents simples de $y_1, y_2, y_3, y_1 - y_2, y_1 - y_3$ en $+\infty$ avec $y_1 = \sqrt[3]{x^3+x+1}; y_2 = \sqrt{x+1}; y_3 = \sqrt{x^2+1}$.
$\Diamond$DL2(0) de $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$; DL3(0) de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$; DL5(0) de $e^x - \sqrt{1+2x}$; DL3$(+\infty)$ de $\arctan\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$; DL2$(\frac{\pi}{4})$de $(1+\tan x)^{\frac{1}{3}}$; DL$(+\infty)$ de $\frac{x^3+2}{x-2}$à la précision $(\frac{1}{x})^2$. ; D.L. d'ordre 4 de $\frac{\ln x}{x^2}$ en 1 .
$\Diamond$DL4$\left(\frac{\pi}{4}\right)$ de $(\tan x)^{\tan 2x}$.

Exercice 27 [Etudier les fonctions suivantes:]
$f(t) = \frac{t\ln t}{t^2-1}$ et $g(t) = \frac{t^2-2t-1}{t}\exp(-\frac{1}{t})$ (On utilisera dans la mesure du possible les DL)

Exercice 28 Soit $f(x) = (chx)^{\frac{1}{x}}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Prolonger f par continuité en 0, étudier les variations de f et construire son graphe.

Exercice 29 Etudier la fonction f définie par $f(x) = x|1+\frac{1}{x}|^{x+1}$. On utilsera des D.L.

Exercice 30 La fonction définie par $E[x\sin\frac{1}{x}]$ est-elle C^0 par morceaux sur $[0,1]$? Soit f C^0 par morceaux sur $[a,b]$ et φ C^0 , la composée $fo\varphi$ est-elle C^0 par morceaux ? Régularité de $x^2\sin\frac{1}{x}$.

Exercice 31 Soit f dans $C^k(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $k \geq 1$, telle que $f(0) = 0$. Prouver que $\frac{f(x)}{x}$ est C^{k-1} . Etudier g définie par $g(x) = \dfrac{e^{x^2}-1}{x}$ en particulier montrer que g est inversible et donner un DL3(0) de g .

Exercice 32 Un marcheur parcourt 12 km en 1 heure. Montrer qu'il existe un intervalle d'une demi-heure pendant lequel il parcourt 6 km. (Considérer $g(t) = f(t+\frac{1}{2}) - f(t)$ et appliquer les valeurs intermédiaires).

Exercice 33 Calculer $a = \arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8$. Résoudre: $\arctan(x-3) + \arctan x + \arctan(x+3) = \frac{3\pi}{4}$.

Exercice 34 Soit E un evn de dimension finie et $f \in \mathcal{C}^2([a,b], E)$. On suppose qu'il existe des constantes telles que $\|f\|_\infty \leq \alpha$ et $\|f''\|_\infty \leq \beta$ avec $2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \leq b-a$. Montrer que $\|f'\|_\infty \leq 2\sqrt{\alpha\beta}$.

9.9 Exercices

9.9.1 Indications

Exercice 1 penser l'algèbre linaire

Exercice 2 Traduire la proposition ci-dessus en termes de matrices

Exercice 3 $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, passer par les coordonnées.

Exercice 4 $\mathcal{M}_n(K)$ peut être vu comme un K-espace vectoriel de dimension finie.

Exercice 5 A vous de trouver, le produit et le produit ...

Exercice 6 Écrire cette fonction comme la composée de plusieurs fonctions et appliquer la proposition ci-dessus.

Exercice 7 D'abord, $f'(x)$ reprsente la v.....e. Comment revenir au même point pour un mouvement sur une droite ? Mais dans le plan il y a plus de place !

Exercice 8 Il suffit de faire un dessin d'une courbe, puis d'une surface

Exercice 9 Appliquer la formule de Leibniz, un polynôme de degré 2 n'a pas beaucoup de dérivées non nulles.

Exercice 10

Exercice 11 Penser la fonction tan, puis comment envoyer $]a, b[$ dans $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$

Exercice 12 Pour le prolongement il suffit d'appliquer la définition de la continuit, puis appliquer Rolle à $f \circ \tan$ et conclure.

Exercice 13 Se souvenir d'un exo précédent, pour trouver le domaine de dérivabilité de la norme ou du module.

Exercice 14 Utiliser les D.L. d'ordre 1.

Exercice 15 Pour démontrer que $l' = 0$ utiliser $g(x) = f(x) - l'x$, écrire la définition de la limite avec les epsilons et trouver $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 0$.

Exercice 16 Écrire une combinaison linéaire et penser que la fonction nulle est dérivable.

Exercice 17 Écrire la condition de colinéarité par le déterminant. Appliquer Rolle à la fonction $h(t) = f(t) - f(a) - \dfrac{g(t) - g'a)}{g(b) - g(a)}(f(b) - f(a))$.

Exercice 18 Passer par les parties réelles et imaginaires et utiliser $\dfrac{1}{f} = \dfrac{\overline{f}}{|f|^2}$. Pour A^{-1} il faut savoir dériver le déterminant, c'est une forme multilinéaire. Puis savoir dériver le produit AB et enfin utiliser $AA^{-1} = I$.

Exercice 19 Dmontrer le a) pour $n = 1$, il suffit après de récidiver. Pour cela considérer le milieu c de $[a, b]$ et selon la plus grande distance (cf l'indication) $||f(b) - f(c)||$ ou $||f(c) - f(a)||$ définir vos premiers points. Pour le b) écrire l'inégalité des accroissements finis sur chaque intervalle $[a_n, b_n]$ puis suivre ce qui se passe quant n tend vers l'infinie. Conclure sans difficulté.

Exercice 20 Reprendre la méthode précédente en introduisant g au bon moment. Penser à la continuité.

Exercice 21 A propos de la régularité. Continuité, lip..

Exercice 22 Vérification, définition du noyau et de l'image, relation chic et choc des éléments propres.

Exercice 23 Le déterminant est une forme n-linéaire, l'écrire et le dériver, essayer d'arranger le résultat.

Exercice 24 Penser au déterminant, si il change de signe il doit s'annuler. Calculer la dérivée, en déduire, puis généraliser.

9.10 Démonstrations

Proposition 1 f est dérivable en x_0 de dérivée $f'(x_0)$ si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{1}{x - x_0}(f(x) - f(x_0) = f'(x_0)$.

C'est à dire en posant $\varepsilon(x) = \frac{1}{x - x_0}(f(x) - f(x_0) - f'(x_0))$ on obtient pour tout $x \in I$: $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$ avec ε continue en x_0 de limite nulle en ce point. C'est un développement limité d'ordre 1. Ceci prouve que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, donc que f est continue en x_0.

Proposition 2 La partie directe est évidente. La réciproque si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{1}{x - x_0}(f(x) - f(x_0) = l$ et $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{1}{x - x_0}(f(x) - f(x_0) = l$ alors on a $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0}(f(x) - f(x_0) = l$. (au besoin l'écrire avec les ε)

Proposition 3 f est dérivable en x_0 de dérivée $f'(x_0)$ si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{1}{x - x_0}(f(x) - f(x_0) = f'(x_0)$.

C'est à dire en posant $\varepsilon(x) = \frac{1}{x - x_0}(f(x) - f(x_0) - f'(x_0))$ on obtient pour tout $x \in I$: $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$ avec ε continue en x_0 de limite nulle en ce point. R'eciproquement si nous avons un développement limité d'ordre 1 alors la limite $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{1}{x - x_0}(f(x) - f(x_0)$ existe et vaut $f'(x_0)$

Proposition 4 Par exemple si f, g sont dérivables en x_0 on peut écrire : $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x - x_0)$ et $g(x) = g(x_0) + (x - x_0)g'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon'(x - x_0)$ d'où $(f + g)(x) = (f + g)(x_0) + (f'(x_0) + g'(x_0))(x - x_0) + (x - x_0)(\varepsilon(x - x_0) + \varepsilon'(x - x_0))$. Or si on pose $\eta(x - x_0) = \varepsilon(x - x_0) + \varepsilon'(x - x_0)$ on a $\lim\limits_{x \to x_O} \eta(x - x_0) = 0$ ce qui prouve que $f + g$ est dérivable en x_0 de dérivée $f'(x_0) + g'(x_0)$. De même pour l'opération externe.

Proposition 5 Si f est dérivable en x_0 alors on peut écrire $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x - x_0)$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$ en composant par l'application linéaire u on obtient $u(f(x)) = u(f(x_0)) + (x - x_0)u(f'(x_0)) + (x - x_0)u(\varepsilon(x - x_0))$. Or $\lim\limits_{x \to x_0} u(\varepsilon(x - x_0)) = 0$ car u est linéaire entre des espaces vectoriels de dimension finie, donc continue. Donc $u \circ f$ est dérivable en x_0 et sa dérivée est $u(f'(x_0))$.

Proposition 6 Si f est dérivable en x alors considèrons les applications $p_i : F \to F$ qui au vecteur $x \in F$ associe $x_i e_i$ si $x = \sum\limits_{i=1}^{i=n} x_i e_i$. Ainsi les p_i sont linéaires et donc les $p_i \circ f$ sont continues en x. Maintenant l'application $t \mapsto tv$ où $v \in F$ est linéaire donc aussi continue. Ce ci prouve que les f_i sont continues en x. Réciproquement si les f_i sont continues en x alors les $f_i e_i$ aussi (en écrivant $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x - x_0)$ on a $f(x)e_i = f(x_0)e_i + (x - x_0)f'(x_0)e_i + (x - x_0)\varepsilon(x - x_0)e_i)$. Et donc $f = \sum\limits_{i=1}^{i=n} f_i e_i$ aussi.

Proposition 7 En traduisant la dérivabilité de f, g par l'existence d'un D.L. on a $B(f(x), g(x)) = B(f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x - x_0), g(x_0) + (x - x_0)g'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon'(x - x_0))$ ce qui donne $B(f(x), g(x)) = B(f(x_0), g(x_0)) + (x - x_0)(B(f'(x_0), g(x_0)) + B(f(x_0), g'(x_0)) + (x - x_0)\eta(x - x_0)$ avec $\eta(x - x_0) = B(f'(x_0), (x - x_0)\varepsilon'(x - x_0)) + B(\varepsilon(x - x_0), (x - x_0)\varepsilon'(x - x_0)) + B(f'(x_0), (x - x_0)g'(x_0)) + B(\varepsilon(x - x_0), g(x_0)) + B(\varepsilon(x - x_0), (x - x_0)g'(x_0)) + B(\varepsilon(x - x_0), (x - x_0)\varepsilon'(x - x_0)) + B(f'x_0), \varepsilon'(x - x_0))$. Il est facile en utilisant la bilinéarité donc la continuité de montrer que $\lim\limits_{x \to x_0} \eta(x - x_0) = 0$. ceci prouve le résultat.

Proposition 8 Si on pose avec les notations de la proposition 6 : $f = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i$ on a alors $f \circ \varphi = \sum_{i=1}^{n} f_i \circ \varphi$. Les $f_i \circ \varphi$, fonctions de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont dérivables en x de dérivées $(f_i \circ \varphi)'(x) = \varphi'(x) f_i'(\varphi(x))$. En reportant dans la somme on obtient le résultat.

Théorème 1 f est continue sur le compact $[a,b]$, elle présente un maximum et un minimum absolus. Si ces extrema sont égaux alors la fonction est constante et on a $f'(x) = 0$ sur tout $]a,b[$. Sinon l'un des extrema disons M est distinct de $f(a) = f(b)$ et il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = M$. f étant dérivable en ce point on a $f'(c) = 0$.

Proposition 9 Par exemple s'il s'agit d'un maximum on a $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est positif pour $x \leq x_0$ et négatif si $x \geq x_0$. La limite du taux de variations $f'(x_0)$ doit donc être positif et négatif, elle est donc nulle.

Théorème 2 On considère les points $A = (a, f(a)$, $B = (b, f(b)$ et, pour $x \in I$, $M(x) = (x, f(x)$ de $\mathbb{R}^2$, la fonction $x \mapsto \det(\overrightarrow{AM(x)}, \overrightarrow{AB})$ vérifie les hypothèses du théorème de Rolle et, pour $x \in I$, $\varphi'(x) = \begin{vmatrix} 1 & b-a \\ f'(x) & f(b) - f(a) \end{vmatrix}$.

Proposition 10 Si la fonction est constante et dérivable alors $f'(x) = \lim_{y \to x_0} \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} = 0$. Pour la réciproque soit x, y des points de $[a,b]$. La fonction f étant continue sur $[x,y]$ et dérivable sur $]x,y[$ il existe un point $x \in]x,y[$ tel que $f(y) - f(x) = (y-x)f'(c)$. Ainsi si $f' = 0$ on a $f'(c) = 0$ et $f(y) = f(x)$, f est bien constante.

Proposition 11 Avec les notations de la proposition 6 on a que f est constante si et seulement si les f_i sont constantes donc ssi $f_i' = 0$ c'est à dire ssi $f' = 0$.

Proposition 12 Qui peut le plus peut le moins. Et si $f^{(q)}$ est $p-q$ fois dérivable il existe alors $p-q$ fonctions telles que $f^{(q)(i)} = f^{(q+i)}$.

Proposition 13 f est $C^k(I,F)$ ssi f est k fois dérivable et $f^{(k)}$ continue ssi f est dérivable et f' est $k-1$ fois dérivable et $f'^{(k-1)}$ est continue ssi f est dérivable et f' est $C^{k-1}(I,F)$. On vérifie bien que chaque ssi correspont à une équivalence, dans un sens et la réciproque.

Proposition 14 Si f est $C^p(I,F)$ alors f est p fois dérivable donc f est q fois dérivable et $f^{(q)}$ est continue comme fonction dérivable.

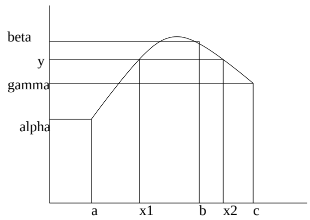
Proposition 15 f est $C^\infty(I,F)$ ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, $f \in C^n(I,F)$ donc ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, f est n fois dérivable et $f^{(n)}$ est continue ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, f est n fois dérivable.

Proposition 16 Il suffit de montrer la formule pour $p \leq k$ $\mathcal{P}_{\surd}$: $B(f,g)$ est C^p et $B(f,g)^{(p)} = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} B(f^{(i)}, g^{(k-i)})$. Elle est vraie au rang 1, nous l'avons montrée. Supposons la vraie au rang $p-1$ alors $B(f,g)^{(p)} = B(f,g)^{(p-1)'} = \left(\sum_{i=0}^{p} -1 \binom{p-1}{i} B(f^{(i)}, g^{(p-1-i)}) \right)'$. Ce qui donne $B(f,g)^{(p)} = \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p-1}{i} \left(B(f^{(i+1)}, g^{(p-1-i)}) + B(f^{(i)}, g^{(p-i)} \right)$. Faisons un changement d'indice dans la première somme : $B(f,g)^{(p)} = \sum_{i=1}^{p} \binom{p-1}{i-1} B(f^{(i)}, g^{(p-i)}) + \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p-1}{i} B(f^{(i)}, g^{(p-i)}$ et en regroupant : $B(f,g)^{(p)} = B(f, g^{(p)}) + \sum_{i=1}^{p-1} \left(\binom{p-1}{i-1} + \binom{p-1}{i} \right) B(f^{(i)}, g^{(p-i)}) + B(f^{(p)}, g)$.

En utilisant $\binom{p-1}{i-1} + \binom{p-1}{i} = \binom{p}{i}$ et en regroupant les termes pour $i = 0$ et $i = p$ on trouve la formule au rang p : $B(f,g)^{(p)} = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} B(f^{(i)}, g^{(p-i)})$ qui prouve que $B(f,g)$ est C^p.

Proposition 17 On a déjà montré le résultat pour $k = 0$. En la supposant vraie pour $k \geq 1$, si φ, f sont C^{k+1} alors $(f \circ \varphi)' = (f' \circ \varphi)\varphi'$ et l'application de la formule de Leibniz et l'hypothèse de récurrence donnent que $(f \circ \varphi)'$ est C^k donc $f \circ \varphi$ est $C^{k+1}(I, E)$.

Proposition 18 La réciproque est vraie. Car si $x < y$ donne $f(x) < f(y)$ par exemple alors f est injective.
Supposons f injective et non stristement monotone sur un intervalle I. Il existe trois points a, b, c de I vérifiant $a < b < c$ et tels que $f(b)$ ne soit pas entre $f(a)$ et $f(c)$. En effet sinon pour trois points quelconques tels que $x < y < z$ les rapports $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}, \frac{f(z)-f(x)}{z-x}, \frac{f(x)-f(z)}{x-z}$ seraient de même signe ce qui entraînerait que ce signe est indépendant de z, x, y et donc f serait monotone.
Les points a, b, c étant donnés posons $f(a) = \alpha, f(b) = \beta, f(c) = \gamma$. Du fait que β n'est pas entre α et γ, on en déduit qu'il existe au moins un point y compris la fois entre α et β et entre β et γ. D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe au moins un point x_1 de $]a, b[$ et un point x_2 de $]b, c[$ vérifiant $f(x_1) = f(x_2) = y$. La fonction f ne serait pas injective, d'où la contradiction.



Proposition 19 φ étant injective et continue elle est bijective de I dans $\varphi(I) = J$. Elle est aussi strictement monotone et φ^{-1} étant elle aussi injective est strictement monotone. $y = \varphi(x) < y' = \varphi(x') \Rightarrow \varphi^{-1}(y) = x < \varphi^{-1}(y') = x'$, en supposant φ croissante et en regardant la contraposée. $J = \varphi(I)$ est un intervalle par le théorème des valeurs intermédiaires. Il reste à montrer que φ^{-1} est continue.
Supposons φ croissante. Soit $y_0 = f(x_0) \in J$. Il faut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que $\forall y \in J : |y - y_0| < \eta \Rightarrow x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon$. Or l'inégalité $f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon$ est automatiquement vérifiée pour tout $y \in J$ si $x_0 + \varepsilon$ n'appartient pas à I (car $x_0 + \varepsilon$ n'est plus dans I). Si $x_0 + \varepsilon \in I$ ceci équivaut à $y < f(x_0 + \varepsilon)$ car f est croissante. De même l'inégalité $f^{-1}(y) > x_0 - \varepsilon$ est automatiquement vérifiée si $x_0 - \varepsilon$ n'est pas dans I et équivaut à $y < f(x_0 - \varepsilon)$ si $x_0 \in I$. Posons $\alpha = f(x_0 - \varepsilon)$ si $x_0 - \varepsilon \in I$, $\alpha = -\infty$ si $x_0 - \varepsilon$ n'appartient pas à I et $\beta = f(x_0 + \varepsilon)$ si $x_0 + \varepsilon \in I$, $\beta = +\infty$ si $x_0 + \varepsilon$ n'appartient pas à I et enfin $\eta = inf(\beta - y_0, y_0 - \alpha)$ avec les conventions habituelles, η est bien strictement positif. Et par construction pour tout y vérifiant $|y - y_0| < \eta$ on a $\alpha < y_0 < \beta$ ou $\left|f^{-1}(y) - x_0\right| < \varepsilon$. Enfin si $m = \inf_I f$ et $M = \sup_I f$ alors $J = f(I) = |m, M|$. De plus $m \in f(I)$ si et seulement si $a \in I$, $(I = |a, b|)$ de même pour β et donc les deux intervalles sont de même nature.

Proposition 20 Si la fonction est croissante et dérivable alors $\varphi'(x) = \lim_{y \to x_0} \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x} \geq 0$.
Pour la réciproque soit x, y des points de $[a, b]$. La fonction f étant continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$ il existe un point $c \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = (y - x)f'(c)$. Ainsi si $f' \geq 0$ on a $f'(c) \geq 0$ et $f(y) \geq f(x)$, f est bien croissante.
Le même raisonnement donne que si φ est strictement croissante alors φ' est positive et il ne peut y avoir d'intervalle non réduit à un point où $\varphi' = 0$ car sinon φ serait constante sur cet intervalle. Réciproquement les hypothèses donnent pour les accroissements finis que pour $c \in]x, y[$ on a $f'(c) > 0$ donc f est strictement croissante.

Proposition 21 D'après les hypothèses on a que φ est bijective de I dans $\varphi(I)$/ Pour $x \neq y$ on a $\dfrac{\varphi^{-1}(y') - \varphi^{-1}(y)}{y' - y} = \dfrac{x' - x}{\varphi(x') - \varphi(x)}$ avec $x' = \varphi^{-1}(y')$ et puisque φ est injective la fonction $\phi : x' \mapsto \dfrac{x' - x}{\varphi(x') - \varphi(x)}$ est définie pour $x' \neq x$. D'après le résultat sur les limites $\phi(x')$ tend vers $\dfrac{1}{\varphi'(x)}$ quand x' tend vers x. Nous savons d'autre part que φ^{-1} est continue. Le théorème sur les fonctions composées montre que $\dfrac{\varphi^{-1}(y') - \varphi^{-1}(y)}{y' - y} = \phi(\varphi^{-1}(y))$ tend vers $\dfrac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))} = \dfrac{1}{\varphi'(x)}$ quand y' tend vers y.

Théorème 3 Si φ est un C^k-difféomorphisme alors elle est injective, donc strictement monotone et par suite sa dérivée ne s'annule pas.
Réciproquement si pour tout rél x de I,$\varphi'(x) \neq 0$, alors φ' étant continue, elle garde un signe constant et φ est strictement monotone donc injective et bijective de I dans $\varphi(I)$. Ainsi φ^{-1} existe et est continue si $k = 0$ nous avons un C^0 difféomorphisme et si $k \geq 1$ alors φ^{-1} est dérivable de dérivée : $\dfrac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))}$. Ceci montre que $(\varphi^{-1})'$ est C^{k-1} comme composée et opération de fonctions C^{k-1}, donc φ^{-1} est C^k et φ est un C^k difféomorphisme de I.

Proposition 22 Prenons le cas où I est fermé. $C^1_{pm}(I)$ est non vide car contient 0, si f, g sont dedans et λ un scalaire, prenons une subdivision commune à f, g, disons $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$. Pour tout $i \in [0, n-1]$, la restriction de $f + \lambda g$ à l'intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ est prolongeable en une fonction $\tilde{f}_i + \lambda\tilde{g}_i$ de classe C^1 sur $[a_i, a_{i+1}]$, donc $f + \lambda g$ est C^1 par morceaux.
Dans le cas où I est quelconque on raisonne sur chaque fermé contenu dans I.

Proposition 23 D'abord pour les intervalles fermés. En prenant une subdivision adaptée à f et g, disons $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$. Pour tout $i \in [0, n-1]$, les restrictions de f et g à l'intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ sont prolongeables en des fonctions $\tilde{f}_i$ et $\tilde{g}_i$ de classe C^1 sur $[a_i, a_{i+1}]$. Ainsi les $B(\tilde{f}_i, \tilde{g}_i)$ sont C^1 sur $]a_i, a_{i+1}[$ (résultat déjà montré). Donc $B(f, g)$ est C^1_{pm}. Ensuite pour I quelconque on fait la même chose que pour la proposition précédente.

Proposition 24 f est en escalier si et seulement si il existe une subdivision à l'intérieur de laquelle la fonction est constante c'est à dire si et seulement si $\tilde{D}f$ est nulle.

9.10.1 Corrigés du T.D.

Exercice 25 $\lim\limits_{0}(\cos x)^{\cot an 2x} = \lim\limits_{0} e^{co\tan 2x \ln\cos x} = \lim\limits_{0} e^{\frac{1}{\tan 2x}\ln\left(1-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)\right)} = \lim\limits_{0} e^{\frac{1}{2x}\quad -\frac{x^2}{2}} =$
1

$\lim\limits_{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{2x-\pi}} = \lim\limits_{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{1}{2x-\pi}\ln\sin x} = \lim\limits_{0} e^{\frac{1}{2t}\ln\cos t} = \lim\limits_{0} e^{\frac{1}{2t}\ln\quad 1-\frac{t^2}{2}} = 1$

$\lim\limits_{0}\ |\sin x|^{\tan x} = \lim\limits_{0}\ e^{\tan x\ln|\sin x|} = \lim\limits_{0}\ e^{x\ln x} = 1$

$\lim\limits_{\infty}\ (x+1)exp(\frac{1}{x+1}) - xexp(\frac{1}{x}) = \lim\limits_{\infty}\ (x+1)exp(\frac{1}{x+1})\left(1-\dfrac{x}{x+1}exp(\frac{1}{x(x+1)})\right)$

$= \lim\limits_{\infty}\ (x+1)\left(exp(\frac{1}{x+1})\right)\left(1-\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)\left(1+\dfrac{1}{x\,(x+1)}\right)\right) = 1$

$\lim\limits_{+\infty} x\left(\frac{1}{e}-\left(\frac{x}{x+1}\right)^x\right) = \lim\limits_{+\infty} x\left(\frac{1}{e}-e^{x\ln\frac{x}{x+1}}\right) = \lim\limits_{+\infty} x\left(\frac{1}{e}-e^{x\ln\left(1-\frac{1}{x+1}\right)}\right) = \lim\limits_{+\infty} x\left(\frac{1}{e}-e^{-\frac{x}{x+1}}\right) =$
$\lim\limits_{+\infty} x\left(\frac{1}{e}-e^{-1+\frac{1}{x+1}}\right)$

$= \lim\limits_{+\infty} x\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{e}e^{\frac{1}{x+1}}\right) = \lim\limits_{+\infty} x\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)\right) = \frac{1}{e}$

$\lim\limits_{0}\frac{\cos x-\sqrt{\cos 2x}}{\sin^2 x} = \lim\limits_{0}\frac{1-\frac{x^2}{2}-\left(1-2x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{x^2} = \lim\limits_{0}\frac{1-\frac{x^2}{2}-1+x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{0}\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^{\dfrac{\sin x}{(x-\sin x)}} = \lim\limits_{0} e^{\dfrac{\sin x}{x-\sin x}\ln\dfrac{x}{\sin x}} = \lim\limits_{0} e^{\dfrac{\sin x}{x-\sin x}\quad\dfrac{x}{\sin x}-1} = e$

$\lim\limits_{0}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{0} e^{\frac{1}{x}\ln(\sin x+\cos x)} = \lim\limits_{0} e^{\frac{1}{x}(\sin x+\cos x-1)} = \lim\limits_{0} e^{\frac{1}{x}x} = e$

$\lim\limits_{a}\dfrac{x^a-a^x}{x^x-a^a}$: $x^a-a^x = ((1+t)\,a)^a - a^{(1+t)a} = a^a\left((1+t)^a-a^{ta}\right) = a^a\left(a\,(1-\ln a)\,t+o\,(t)\right)$
avec $x=(1+t)\,a$

et $x^x = ((1+t)\,a)^{(1+t)a} = a^a a^{at}\,(1+t)^{(1+t)a} = a^a\,(1+(a\ln a)\,t+o\,(t))\left(e^{(1+t)a\ln(1+t)}\right)$

$= a^a\,(1+(a\ln a)\,t+o\,(t))\left(e^{at+o(t)}\right) = a^a\,(1+(a+a\ln a)\,t+o\,(t))$ et donc $x^x-a^a = a^a\,(a\,(1+\ln a)\,t+o\,(t))$

et $\dfrac{x^x-a^x}{x^x-a^a} = \dfrac{(1-\ln a)\,t+o\,(t)}{(1+\ln a)\,t+o\,(t)}$. Si $\ln a\neq\pm1; a\neq e$ et $\frac{1}{e}$ on a $\lim\limits_{a}\dfrac{x^a-a^x}{x^x-a^a} = \dfrac{1-\ln a}{1+\ln a}$. Pour les cas particuliers on a si $a=e$: $\lim\limits_{a}\dfrac{x^a-a^x}{x^x-a^a} = 0$ et si $a=\frac{1}{e}$ alors $\lim\limits_{a}\dfrac{x^a-a^x}{x^x-a^a} = +\infty$ car $\dfrac{x^a-a^x}{x^x-a^a}\sim\dfrac{a^a 2at}{a^a\frac{a}{2}t^2}\sim\frac{4}{t}$.

Exercice 26 Posons $x+1=t$ on a $\dfrac{x+1}{x^2+3x+3} = \dfrac{t}{(t-1)^2+3\,(t-1)+3} = \dfrac{t}{t^2-2t+1+3t-3+3} =$
$\dfrac{t}{t^2+t+1}$
$= t\left(1-t+o\left(t^2\right)\right) = t-t^2+o\left(t^3\right)$.

$\cos^n x$.

$y_1\sim\sqrt{x}; y_2\sim\sqrt{x}; y_3\sim x$ et $y_1-y_2\sim\sqrt{x}; y_1-y_3 = \sqrt[3]{1+x+x^3}-\sqrt{1+x^2}\sim\frac{1}{3}x$.

$\sqrt{1+\ \sqrt{1+x}} = \left(1+(1+x)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o\left(x^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{4}x-\frac{1}{16}x^2+o\left(x^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}$
$= \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}x^2-\frac{1}{32}x^2+o\left(x^2\right)\right) = \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{8}x-\frac{5}{128}x^2+o\left(x^2\right)\right)$.

$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e^{\frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+o\left(x^4\right)\right)} = e^{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\left(x^3\right)} = e\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{48}x^3+\right.$
$= e\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{11}{24}x^2-\frac{7}{16}x^3+o\left(x^3\right)\right)$.

$e^x-\sqrt{1+2x} = x^2-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x^4-\frac{13}{15}x^5+o\left(x^5\right)$.

$\arctan\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} =$.

$(1+\tan x)^{\frac{1}{3}}$ en posant $u = x - \frac{\pi}{4}$ on obtient $(1+\tan x)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(1 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 + o\left(x^3\right)\right)$.

$\dfrac{x^3+2}{x-2} = \left(x^3+2\right)\frac{1}{x}\left(1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{8}{x^3} + \dfrac{16}{x^4} + o\left(\dfrac{1}{x^4}\right)\right) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{x^2} + x^2 + 2x + 4 + \dfrac{8}{x} + \dfrac{16}{x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

$= x^2 + 2x + 4 + \dfrac{10}{x} + \dfrac{20}{x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

$\dfrac{\ln x}{x^2} =$.

$f(x) = (\tan x)^{\tan 2x}$ définie une fonction f sur $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $f\left(\dfrac{\pi}{4} + h\right) = \left(\dfrac{1+\tan h}{1-\tan h}\right)^{-\dfrac{1}{\tan 2h}} = g(h)$. On a $\ln g(h) = -\dfrac{1}{\tan 2h}\ln\dfrac{1+\tan h}{1-\tan h}$ qui admet un D.L. en O. On a $\ln\dfrac{1+\tan h}{1-\tan h} \sim 2h$ et $\left(\ln\dfrac{1+\tan h}{1-\tan h}\right)' = \dfrac{2}{\cos 2h} = \dfrac{2}{1-2h^2+\frac{2}{3}h^4+o\left(h^4\right)} = 2\left(1+2h^2+\frac{10}{3}h^4+o\left(h^4\right)\right)$ d'où $\ln\dfrac{1+\tan h}{1-\tan h} = 2\left(h + \frac{2}{3}h^3 + \frac{2}{3}h^5 + o\left(h^5\right)\right)$ car en 0 nous avvons 0. Ce qui donne $-\ln g(h) = \dfrac{2\left(1+\frac{2}{3}h^2+\frac{2}{3}h^4+o\left(h^4\right)\right)}{2+\frac{8}{3}h^2+\frac{64}{15}h^4+o\left(h^4\right)} = 1 - \frac{2}{3}h^2 - \frac{26}{45}h^4 + o\left(h^4\right)$ et $g(h) = \frac{1}{e}\left(1+\frac{2}{3}h^2+\frac{4}{5}h^4+o\left(h^4\right)\right)$.

$\diamondsuit$DL5(0) de f^{-1} où f est définie par : $\begin{cases} \dfrac{e^{x^2}-1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ pour cela il faudra montrer que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On a que f est impaire et $f(x) \sim x$ au voisinage de 0 et $f'(0) = 1$. Sur $\mathbb{R}^*$ on a $f'(x) = \dfrac{\left(2x^2-1\right)e^{x^2}+1}{x^2}$ et f' est du signe de $g : t \longmapsto (2t-1)e^t+1$, sur $\mathbb{R}^+$ on a $g'(t) = (2t+1)e^t > 0$ sur $\mathbb{R}^+$ et $g(t) > g(0) = 0$ sur $\mathbb{R}^+$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel $f'(x) > 0$ ainsi f est un difféomorphisme. Le fait que f soit impaire et $f(x) \sim \dfrac{e^{x^2}}{x} \overset{+\infty}{\rightarrow} +\infty$. donne que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Faisons un dl de l'exp : $y = f(x) = x + \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^5}{6} + o\left(x^5\right)$. Or $y \sim x$ donc $x^3 = y^3 + o\left(y^3\right)$ ce qui donne $x = y - \dfrac{y^3}{2} + o\left(y^3\right) = y\left(1 - \dfrac{y^2}{2} + \left(y^2\right)\right)$ et $x^3 = y^3\left(1 - \dfrac{y^2}{2} + o\left(y^2\right)\right)^3 = y^3\left(1 - \dfrac{3y^2}{2} + o\left(y^2\right)\right)$. On a $x^5 = y^5 + o\left(y^5\right)$ et en reportant $x = y - \dfrac{y^3}{2}\left(1 - \dfrac{3y^2}{2}\right) - \dfrac{y^5}{6} + o\left(y^5\right) = y - \dfrac{y^3}{2} + \dfrac{7y^5}{12} + o\left(y^5\right)$ et $f^{-1}(y) = y - \frac{1}{2}y^3 + \frac{7}{12}y^5 + o\left(y^5\right)$.

Exercice 27 $f'(t) = \dfrac{t^2+1}{\left(t^2-1\right)^2}\left(\dfrac{t^2-1}{t^2+1} - \ln t\right)$ et nous étudions le signe de $\left(\dfrac{t^2-1}{t^2+1} - \ln t\right)$ dont la dérivée est $\dfrac{4t^2-t^4-2t^2-1}{t\left(t^2+1\right)^2} = -\dfrac{\left(t^2-1\right)^2}{t\left(t^2+1\right)^2}$ qui reste négatif sur $\mathbb{R}^{+*}$. Ainsi $\left(\dfrac{t^2-1}{t^2+1} - \ln t\right)$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ de $+\infty$ à -∞ et s'annulant en 1, et donc la dérivée de f est positive sur $]0, 1[$ et positive sur $]1, +\infty[$ la fonction f est donc croissante sur $]0, 1[$ de 0 à $\frac{1}{2} = \lim\limits_{1} f$ et décroissante sur $]1, +\infty[$ de $\frac{1}{2}$ à 0.
En 1 on a : en posant $u = t - 1$: $f(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{u^2}{6} - \frac{1}{12}u^3 + o\left(u^3\right)\right)$. D'où la courbe.

$e^{\frac{1}{t}}g'(t) = \dfrac{t^3+t^2-t-1}{t^3} = \dfrac{(t-1)(t+1)^2}{t^3}$ et g est croissante sur $]-\infty, 0[$ de 0 à $+\infty$ puis décroissante sur $]0, 1[$ de 0 à $-\frac{2}{e}$ et croissante sur $]1, +\infty[$ de $-\frac{2}{e}$ à 0. D'où la courbe.

Exercice 28 $f(x) = e^{\frac{1}{x}\ln chx}$ en 0 on a $f(x) = e^{\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)} = e^{\frac{x}{2}+o(x^2)} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + o\left(x^2\right)$ et en $+\infty$ on a $chx \sim \frac{1}{2}e^x$; $\ln chx \sim x$ et $\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{x}\ln chx = 1$ soit $\lim\limits_{+\infty} f = e$. D'autre part pour tout x de $\mathbb{R}$ on a $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$ et $\lim\limits_{-\infty} f = \dfrac{1}{e}$. Pour les variations $f'(x) = f(x)\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\ln chx}{x}\right) = \dfrac{f(x)}{x^2}(xthx - \ln chx)$ si $g(x) = xthx - \ln chx$ alrs $g'(x) = \dfrac{x}{ch^2x}$. et g décroit en passant au minimum en 0 et est donc positive sur $\mathbb{R}$ et donc aussi f' et f est croissante de $\frac{1}{e}$ à e. En 0 on a un point d'inflexion.

Exercice 29 f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$.
En -1 : en posant $x = -1+t$ on a $\ln|f()| = t\ln|t| + (1-t)\ln|1-t| = t\ln|t| + o(t\ln|t|)$ et $|f(x)| = 1 + t\ln|t| + o(t\ln|t|)$ et come $f(x) < 0$ si $x < 0$ on a $f(x) = -1 - t\ln|t| + o(t\ln|t|)$, on prolongera donc en posant $f(-1) = -1$ et f n'est pas dérivable en -1 car $\dfrac{f(x)+1}{x+1} \sim -\ln(x+1)$.
En 0 on a $\ln|f(x)| = -x\ln|x| + (x+1)\ln(x+1) = -x\ln|x| + o(x\ln|x|)$ et $|f(x)| = 1 - x\ln|x| + o(x\ln|x|)$ ainsi si $x > 0$ on a $f(x) = 1 - x\ln x + o(x\ln x)$ et si $x < 0$ on a $f(x) = -1 + x\ln|x| + o(x\ln|x|)$ et $\lim\limits_{0^+} f = 1$ et $\lim\limits_{0^-} f = -1$ pour $x > 0$ on a $\dfrac{f(x)-1}{x} \sim -\ln x$ et si $x < 0$ alors $\dfrac{f(x)+1}{x} \sim \ln|x|$.
En $\pm\infty$ on a $\ln|f(x)| = \ln|x| + (x+1)\ln\left|x+\dfrac{1}{x}\right| = \ln|x| + (x+1)\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{3x^3} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)\right)$ $= \ln|x| + 1 + \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{6x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. Ainsi $f(x) = ex\left(1 + \dfrac{1}{2x} + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{6}\right)\dfrac{1}{x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right) = ex + \frac{1}{2}e - \dfrac{1}{24x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ il y a une asymptote $y = ex + \frac{1}{2}e$ et la position est donnée $\left(f(x) - ex - \frac{e}{2}\right) \sim -\dfrac{e}{24x}$.
Pour les variations on a $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \ln|x+1| - \ln|x| = \ln\left|\dfrac{x+1}{x}\right| > 0$ si et seulement si $-\frac{1}{2} < x < 0$ donc f est croissante sur $]-\infty,-1[$ de $-\infty$ à-1 et croisante sur $\left]-1,-\frac{1}{2}\right[$ de -1 à $-\frac{1}{2}$ puis décroissante sur $\left]-\frac{1}{2},0\right[$ de $-\frac{1}{2}$ à -1 et croissante sur $]0,+\infty[$ de $+1$ à $+\infty$.

Exercice 30 Oui, on a $E\left(\dfrac{1}{k\pi}\sin k\pi\right) = 0$. Soit$\mathcal{D}=(a_0,\cdots,a_n)$ les points de discontinuité de f , alors $f\circ\varphi$ est continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathcal{D}$ et $\lim\limits_{a_i^+} \varphi\circ f = \varphi\left(f\left(a_i^+\right)\right)$. On a aussi le résultat suivant si f et g sont C_{pm}^r alors si de plus f est monotone par morceaux alors $g\circ f$ est C_{pm}^r.
Soit $f(x) = x^2\sin\dfrac{1}{x}$ on a $f'(x) = 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$ et f est continue et C^1 par morceaux.

Exercice 31 En utilisant la formule $f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x f'(t)\,dt$ on a $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f'(t)\,dt = \displaystyle\int_0^1 f'(tx)\,dt$. D'après les hypothèses et le théorème de régularité des intégrales dépendant d'un paramètre on a que $\dfrac{f(x)}{x}$ est de classe C^{k-1}.
En étudiant les variations de g on a qu'elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car $g'(x) = \dfrac{2x^2e^{x^2} - e^{x^2} + 1}{x^2}$ et en posant $\varphi(x) = 2x^2e^{x^2} - e^{x^2} + 1$ on a $\varphi'(x) = 2x\left(2x^2+1\right)e^{x^2}$ qui admet un minimum en 0 qui vaut 1 donc φ et $g'(x)$ sont positifs. Posans $h = g^{-1}$ on a $h(0) = 0$ puis $\lim\limits_0 \dfrac{h(x)}{x} = \lim\limits_0 \dfrac{y}{g(y)} = \lim \dfrac{y^2}{e^{y^2}-1} = 1$. Ensuite $\lim\limits_0 \dfrac{h(x)-x}{x^2} = \lim\limits_0 \dfrac{y-g(y)}{(g(y))^2} =$

$$\lim \frac{y - \dfrac{e^{y^2}-1}{y}}{\left(\dfrac{e^{y^2}-1}{y}\right)^2} = \lim \frac{y^2 - e^{y^2}+1}{\dfrac{\left(e^{y^2}-1\right)^2}{y}} = \lim \frac{-\frac{1}{2}y^4}{y^3} = 0 \text{ et enfin } \lim_0 \frac{h(x)-x}{x^3} = \lim \frac{-\frac{1}{2}y^3}{y^3} = -\tfrac{1}{2}$$

ainsi $g^{-1}(x) = x - \frac{1}{2}x^3 + o\left(x^3\right)$.

Exercice 32 La fonction $g : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$ et $g(0) + g\left(\frac{1}{2}\right) = 12$ il en résulte que $\frac{1}{2}\left(g(0) + g\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 6 \in \left[g(0), g\left(\frac{1}{2}\right)\right]$ par application du théorème des valeurs intermédiaires on a l'existence de t_0 tel que $g(t_0) = 6$ on parcourt donc 6 km dans l'intervalle $\left[t_0, t_0 + \frac{1}{2}\right]$.

Exercice 34 La formule de Taylor appliquée sur $[x, x+h]$ où $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$ donne l'existence de $\theta \in]0,1[$ tel que $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x+\theta h)$. En divisant par h et en exprimant $f'(x)$ on obtient $f'(x) = \frac{1}{h}\left(f(x+h) - f(x)\right) - \frac{h}{2}f''(x+\theta h)$, à l'aide de l'inégalité triangulaire on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{h}\left(|f(x+h)| + |f(x)|\right) + \frac{h}{2}|f''(x+\theta h)|$. Comme f et f'' sont bornées par α et β on obtient : pour tout x de $\mathbb{R}$ et tout $h > 0$: $|f'(x)| \leq \dfrac{2\alpha}{h} + \dfrac{h\beta}{2}$. On en déduit pour tout x de $\mathbb{R}$: $|f'(x)| \leq \inf\limits_{h>0}\left(\dfrac{2\alpha}{h} + \dfrac{h\beta}{2}\right)$. En étudiant les variations de la fonction $h \longmapsto \dfrac{2\alpha}{h} + \dfrac{h\beta}{2}$ on trouve que le minimum est atteint pour $h = 2\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ et vaut $2\sqrt{\alpha\beta}$ donc pour tout x de $\mathbb{R}$: $|f'(x)| \leq 2\sqrt{\alpha\beta}$ il suffit alors de prendre le sup