Chapitre 7

Espaces vectoriels normés

7.1 Introduction

Il s'agit dans ce chapitre d'une présentation moderne et abstraite d'espaces vectoriels. L'analyse fonctionnelle linéaire du début du 20$^{\text{ème}}$ siècle, autour des problèmes posés par les équations intégrales en a été la cause. Hilbert (1904-1906) étudie les développements en séries de fonctions orthogonales, Riesz (1880-1956) étudie les fonctions de carré sommable, il introduit les espaces L^p.
Il faut attendre 1920 pour que la notion d'espace normé apparaisse avec Banach (1892-1945) , Von Neumann (1903-1957) propose une présentation axiomatique des espaces d'Hilbert.
Banach écrit en 1920 : L'ouvrage (Sur les opérations dans les espaces abstraits et leur application aux équations intégrales) a pour but d'établir quelques théorèmes valables pour différents champs fonctionnels, que je spécifie dans la suite. Toutefois, afin de ne pas être obligé à les démontrer isolément pour chaque champ particulier, ce qui serait bien pénible, j'ai choisi une voie différente que voici : je considère d'une façon générale les ensembles d'éléments dont je postule certaines propriétés, j'en déduis des théorèmes et je démontre ensuite de chaque champ fonctionnel particulier que les postulats adoptés sont vrais pour lui.
La topologie s'est développée parallèlement mais il ne faut pas croire que les espces vectoriels normés sont un cas particulier des espaces topologiques. Les mt́hodes ne sont pas les mêmes. Ensuite on a étudié la géométrie des espaces vectoriels normés. Dans la seconde partie du 20$^{\text{ème}}$ siècle les progrès sont considèrables pour les espaces de banach (espace vectoriel complet) et les opérateurs que l'on peut définir dessus.

7.2 Normes sur un espace vectoriel réel ou complexe

On essaie d'étendre la notion de valeur absolue définie dans $\mathbb{R}$ ou de module définie dans $\mathbb{C}$ à un espace vectoriel pour mesurer des longueurs.

Définition 1 *Soit E un espace vectoriel sur K ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).*
On appelle norme sur E une application N de E dans $\mathbb{R}$ vérifiant:
(N1) $\forall x \in E \quad N(x) = 0 \implies x = 0.$
(N2) $\forall x \in E \quad \forall \lambda \in K \quad N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$
(N3) $\forall x,y \in E \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y).$

Exercice 1 Montrer que $N(0) = 0$ et que, pour tout $x \in E$, $N(x) \geq 0$.

Proposition 1 (Inégalité triangulaire)

$$\forall x,y \in E \quad |N(x) - N(y)| \leq N(x + y) \leq N(x) + N(y).$$

[Ind] Adapter la démonstration pour les valeurs absolues.

Exercice 2 Soit E un espace vectoriel normé par la norme N. Soit u un endomorphisme de E, montrer que $N \circ u$ est une norme sur E si et seulement si u est injective.

7.2.1 normes associées à un produit scalaire

Proposition 2 *Soit φ un produit scalaire sur E. L'application de E dans $\mathbb{R}_+$ qui, à $x \in E$ associe $\sqrt{\varphi(x,x)}$ est une norme sur E.*

[Ind] Vérifier.

7.2.2 Normes usuelles sur K^n

Proposition 3 *Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Les applications, qui à $x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ associent*

$$||x||_\infty = \sup_{i \in [1,n]} |x_i|\,, \quad ||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,, \quad ||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

sont des normes sur K^n.

[Ind] Vérifier, pour la norme 3 trouver un produit scalaire.

7.2.3 Norme usuelle sur $\mathcal{B}(A,K)$

Proposition 4 *Soit $\mathcal{B}(A,K)$ l'ensemble des fonctions bornées définies sur l'ensemble A. L'application qui à un élément f de $\mathcal{B}(A,K)$ associe*

$$||f||_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|\,.$$

est une norme sur $\mathcal{B}(A,K)$ appelée norme de la convergence uniforme

[Ind] Vérifier.

7.2.4 Normes usuelles sur $C^0([a,b],K)$

Proposition 5 *Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Les applications qui, à $f \in C^0([a,b],K)$, associe*

$$||f||_1 = \int_a^b |f(t)|\, dt, \quad ||f||_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\, dt}, \quad ||f||_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

sont des normes sur $C^0([a,b],K)$.

[Ind] Vérifier.

7.2.5 Distance dans un espace vectoriel normé

Définition 2 (Distance) *Soit A un ensemble, une application d définie sur $A \times A$ dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant (D1), (D2) et (D3) est appelée distance sur A:*
(D1) $\forall x,y \in A \quad d(x,y) = d(y,x)$.
(D2) $\forall x,y \in A \quad d(x,y) = 0 \iff x = y$.
(D3) $\forall x,y,z \in A \quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$.
Le couple (A,d) est appelé espace métrique.

Proposition 6 *Soit (E,N) un espace normé. L'application d de $E \times E$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par :*

$$\forall x,y \in E \quad d(x,y) = N(x - y).$$

est une distance sur E appelée distance associée à N.

[Ind] vérifier.

Proposition 7 *Soit (E,N) un espace normé et d la distance associée*

$$\forall x,y,z \in E \quad d(x+z,y+z) = d(x,y) \quad \textit{(Invariance par translation)}$$
$$\forall x,y \in E \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad d(\lambda.x,\lambda.y) = |\lambda|\, d(x,y) \quad \textit{(Homogénéité)}$$

[Ind] Vérifier.

7.2.6 Suites

E est un espace vectoriel normé par la norme $||\cdot||$.

Les définitions et les propriétés qui suivent sont analogues à celles déjà vues dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et se démontrent pratiquement de la même façon.

Définition 3 (Suite convergente) *Soit (u_n) une suite de E. On dit que la suite (u_n) est convergente vers une limite $l \in E$ si la suite $||u_n - l||$ converge vers 0, c'est à dire*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies ||u_n - l|| \leq \varepsilon.$$

Exercice 3 Montrer que si la suite (u_n) converge vers l, alors la suite $(||u_n||)$ converge vers $||l||$.

Proposition 8 *Si la limite d'une suite existe, elle est unique.*

[Ind] Si il y en avait deux...

Proposition 9 *Toute suite convergente est bornée.*

[Ind] Majorer pour n assez grand puis les termes qui restent.

Proposition 10 *La somme de deux suites convergentes est convergente vers la somme des limites.*

[Ind] Écrire les définitions.

Proposition 11 *Le produit d'une suite de scalaires qui converge vers λ et d'une suite de E qui converge vers l est une suite de E qui converge vers $\lambda.l$.*

[Ind] Écrire une différence de produits autrement.

Définition 4 (Suite extraite) *Soit (u_n) une suite d'éléments de E. On dit que la suite (v_n) est une suite extraite de la suite (u_n) s'il existe une injection croissante φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier n: $v_n = u_{\varphi(n)}$.*

Exercice 4 Montrer qu'une suite extraite d'une suite extraite de la suite (u_n) est une suite extraite de (u_n).

Proposition 12 *Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente vers la même limite.*

[Ind] Utiliser les définitions.

7.2.7 Applications lipschitziennes

Définition 5 *Soit $f : A \subset E \to F$. On dit que f est lipschitzienne de rapport $k \in \mathbb{R}_+$ si*

$$\forall x,y \in A \quad \mathbb{N}(f(x) - f(y)) \leq k||x - y||.$$

Exemple 1 La norme sur E est une application lipschitzienne de rapport 1.

Proposition 13 *Toute application lipschitzienne est uniformément continue.*

[Ind] Trouver η.

Remarque: La norme sur E est donc une fonction numérique continue.

Proposition 14 *L'ensemble des applications lipschitziennes définies sur A est un s.e.v. de $\mathcal{F}(A,F)$.*

[Ind] Le montrer.

7.2.8 Normes équivalentes

Définition 6 *Soit E un Ke.v. Deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes s'il existe deux réels α et β strictement positifs tels que*

$$\forall x \in E \quad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x).$$

On montre facilement que

Proposition 15 *Cette relation entre normes est une relation d'équivalence.*

[Ind] Réflexivité, symétrie, transitivité.

Proposition 16 (Comparaison de deux normes) *Soient N_1 et N_2 deux normes sur E. Les assertions suivantes sont équivalentes:*
a) Il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $N_1 \leq \alpha N_2$.
b) Toute partie bornée pour N_2 est bornée pour N_1.
c) Toute suite convergente pour N_2 est convergente pour N_1.
d) Toute suite convergente vers 0 pour N_2 est bornée pour N_1.

[Ind] Démonstration en boucle.

Remarque: On en déduit que si deux normes sont équivalentes, elles sont interchangeables pour montrer la convergence de suites etc...
En revanche, si elles définissent les mêmes applications lipschitziennes, les rapports de ces applications changent. Ainsi, par exemple, une application ayant un rapport plus petit que 1 pour une norme, peut avoir un rapport plus grand que 1 pour une norme équivalente.

Exercice 5 Montrer que les normes $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ et $||\cdot||_\infty$, définies sur K^n, sont équivalentes.

A partir de maintenant et jusqu'à la fin du chapitre la dimension est finie

7.3 Espaces vectoriels de dimension finie

Théorème 1 *Soit E un K-ev de dimension finie. Deux normes sur E sont équivalentes.*

[Ind] Hors programme

La remarque faite au paragraphe précédent et ce théorème prouve que, dans un espace vectoriel de dimension finie, les propriétés topologiques (ouverts, fermés, voisinages, limites , continuité, compacité,...) ne dépendent pas de la norme utilisée et , qu'en général, on n'a pas besoin de préciser la norme que l'on a prise pour obtenir la propriété. Seules les propriétés purement métriques (vecteurs de norme 1, rapport d'une application lipschitzienne, ...) dépendent de telle ou telle norme, auquel cas il sera important de préciser la norme prise pour établir le résultat numérique.
Remarque: Ce théorème est faux en dimension infinie:

Exercice 6 Montrer que les normes $||.||_1$ et $||.||_\infty$ définies sur $C^0([a,b],K)$ ne sont pas équivalentes.

7.3.1 Parties bornées

Définition 7 (Partie bornée) *$A \subset E$ est dite bornée s'il existe une boule de E contenant A.*

Proposition 17 *Soit $x_0 \in E$ et $A \subset E$. A est bornée si et seulement s'il existe $r > 0$ tel que $A \subset B(x_0,r)$.*

[Ind] Ajouter et retrancher la même quantité.

Exercice 7 Soit a et b deux points distincts de E. Montrer qu'il existe un réel ε strictement positif tel que $B_o(a,\varepsilon) \cap B_o(b,\varepsilon) = \emptyset$. (On dit que E est séparé).

7.3.2 suites

Proposition 18 *Pour qu'une suite (u_n) d'éléments d'un espace vectoriel normé E de dimension finie soit convergente il faut et il suffit que ses coordonnées dans une base de E soient convergentes.*

[Ind] Choisir sa norme.

7.4 Espaces vectoriels normés complets

Définition 8 (Suites de Cauchy) *Soit E un espace vectoriel normé. On appelle suite de Cauchy une suite (x_n) vérifiant*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall p,q \in \mathbb{N} \quad p \geq n_0 \text{ et } q \geq n_0 \implies ||x_p - x_q|| \leq \varepsilon.$$

ou encore

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall p,q \in \mathbb{N} \quad p \geq n_0 \implies ||x_p - x_{p+q}|| \leq \varepsilon.$$

Proposition 19 *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

[Ind] Écrire les définitions et utiliser l'inégalité triangulaire.

Proposition 20 *Toute suite de Cauchy est bornée et s'il existe une suite extraite qui converge alors la suite converge.*

[Ind]

Définition 9 *Un espace vectoriel normé dans lequel toute suite de Cauchy est convergente est appelé espace vectoriel normé complet.*
Plus généralement, on dit qu'un sous-ensemble A d'un espace vectoriel normé est complet si toute suite de Cauchy de A converge vers un élément de A.

Théorème 2 *Un espace vectoriel normé de dimension finie est complet.*

[Ind] Utiliser que K est complet.

En particulier $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont des espaces vectoriels complets.

Exercice 8 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes.
Montrer que si, pour tout entier n, $|u_{n+1} - u_n| \leq 2^{-n}$ alors la suite (u_n) est convergente.

Il existe de nombreux espaces complets de dimension infinie. En voici deux exemples:

Proposition 21 *Soit A un ensemble et E un espace vectoriel normé complet, l'espace $\mathcal{B}(A,E)$ muni de la norme $||\cdot||_\infty$ est complet.*

[Ind] Admis.

Théorème 3 (Théorème du point fixe pour une application contractante) *Soit E un espace vectoriel normé complet, A un sous-ensemble fermé de E et f une application de A dans lui-même, lipschitzienne de rapport k strictement inférieur à* 1 *(application contractante). Il existe alors un unique point c de A tel que $f(c) = c$.*

[Ind] Construire une suite de cauchy.

Exercice 9 Montrer que l'équation $\cos x = 2x$ possède une unique solution réelle.

7.4.1 Relations de comparaison entre suites

Définition 10 (Domination) *Soit (u_n) une suite d'éléments d'un espace vectoriel normé E et (α_n) une suite de réels positifs. On dit que la suite (u_n) est dominée par la suite (α_n), s'il existe un réel C tel qu'à partir d'un certain rang, on a $||u_n|| \leq C\alpha_n$. On note alors $(u_n) \in O(\alpha_n)$ ou, par abus de langage $u_n = O(\alpha_n)$.*

Définition 11 (Négligeabilité) *Soit (u_n) une suite d'éléments d'un espace vectoriel normé E et (α_n) une suite de réels positifs. On dit que la suite (u_n) est négligeable devant la suite (α_n) si*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies ||u_n|| \leq \varepsilon \alpha_n$$

On note alors $(u_n) \in o(\alpha_n)$ ou, par abus de langage, $u_n = o(\alpha_n)$ ou encore $u_n << \alpha_n$.

Remarque: Une suite dominée ou négligeable devant la suite nulle est nulle à partir d'un certain rang.

Remarque: Dans le cas où la suite α_n ne s'anule pas à partir d'un certain rang on a que $(u_n) \in O(\alpha_n)$ est équivalent à $\dfrac{||u_n||}{\alpha_n}$ est borné et $(u_n) \in o(\alpha_n)$ est équivalent à $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{||u_n||}{\alpha_n} = 0$

Exercice 10 Déterminer $O(1)$ et $o(1)$.

Exercice 11 Soit (α_n) une suite de réels positifs. Montrer que l'ensemble $O(\alpha_n)$ (resp $o(\alpha_n)$) des suites de E dominées par (resp négligeables devant) la suite (α_n) est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$ et que $o(\alpha_n) \subset O(\alpha_n)$.

Exercice 12 Soient (α_n) et (β_n) deux suites de réels positifs. Montrer que si (α_n) est dominée par (β_n) ou est négligeable devant (β_n) alors $O(\alpha_n) \subset O(\beta_n)$ et $o(\alpha_n) \subset o(\beta_n)$.

Proposition 22 *Soit (u_n) une suite d'éléments d'un espace vectoriel normé E et (α_n) une suite de réels positifs. La suite (u_n) est négligeable devant la suite (α_n) si et seulement s'il existe une suite (ε_n) de réels positifs qui tend vers O tel* **qu'à partir d'un certain rang** *on a $||u_n|| = \varepsilon_n \alpha_n$.*

[Ind] Essayer de définir ε_n à partir de u_n et α_n.

Définition 12 *Équivalence Soient (u_n) et (v_n) deux suites d'éléments de E. On dit que (u_n) est équivalente à la suite (v_n) si et seulement si $u_n - v_n = o(||u_n||)$ et on note $u_n \sim v_n$.*

Proposition 23 *L'équivalence entre suites d'un même espace vectoriel normé est une relation d'équivalence.*

[Ind] Réflexive, symétrique, transitive.

Proposition 24 *Soit (u_n) une suite d'éléments d'un espace vectoriel normé E et l un élément de E. Si la suite (u_n) est équivalente à la suite constante (l) alors la suite (u_n) converge vers l. La réciproque est vraie si l est* **NON NUL**.

[Ind] Séparer le cas $l \neq 0$ et $l = 0$.

Proposition 25 *Soient (α_n) et (β_n) deux suites de* **scalaires**. *On a $\alpha_n \sim \beta_n$ si et seulement si il existe une suite ε_n convergeant vers* 0 *telle* **qu'à partir d'un certain rang** *on a $\alpha_n = (1 + \varepsilon_n)\beta_n$.*

[Ind] Utliser une proposition précédente.

7.4.2 Exemples d'étude de suites de nombres réels ou complexes définies par une relation de écurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

Voir T.D.

7.5 Etude locale d'une application

7.5.1 Boules ouvertes, Boules fermées

Soit E un espace vectoriel normé par l'application $x \to ||x||$.

Définition 13 (Boule fermée) *Soit $x_0 \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$. On appelle boule fermée, de centre x_0 et de rayon r, l'ensemble $B_f(x_0,r) = \{x \in E \mid ||x - x_0|| \leq r\}$.*

Définition 14 (Boule ouverte) *Soit $x_0 \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle boule ouverte, de centre x_0 et de rayon r, l'ensemble $B_o(x_0,r) = \{x \in E \mid ||x - x_0|| < r\}$.*

Proposition 26 *Une boule (ouverte ou fermée) est convexe.*

[Ind] Comment montrer qu'un ensemble est convexe.

Exercice 13 Soit $x_0 \in E$, r un réel positif et $\alpha \in K^*$. On appelle $\alpha B_o(x_0,r)$ l'ensemble $\{\alpha x \mid x \in B_o(x_0,r)\}$.
1) Montrer que $\alpha B_o(x_0,r) = B_o(\alpha x_0, |\alpha|\, r)$.
2) Soit $y_0 \in E$. Montrer que $y_0 + B_o(x_0,r) = B_o(x_0 + y_0,r)$.
Montrer les mêmes propriétés pour une boule fermée.
En déduire que toutes les boules se déduisent par homothéties et translations de la boule centrée en 0 de rayon 1 (boule unité)

Exercice 14 On suppose qu'il existe x, y, z trois éléments distincts de E appartenant à la sphère unité de E (ensemble des éléments de norme 1) et vérifiant $z \in [x,y]$. Montrer que le segment $[x,y]$ est inclus dans la sphère unité.

Exercice 15 Représenter les boules fermées unité pour les normes usuelles dans $\mathbb{R}^2$.

7.5.2 Point adhérent, point intérieur

Définition 15 (Point adhérent à une partie) *Soit A une partie de E. Un élément x de E est adhérent à A si et seulement si $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad B_o(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. On note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents à A.*

Définition 16 (Partie dense) *Une partie A de E est dite dense dans E si $\overline{A} = E$. Ainsi dans toute boule ouverte non vide de E, il y a (au moins) un élément de A.*

Exemple 2 $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Définition 17 (Point intérieur à une partie) *Soit A une partie de E et $x \in E$. On dit que x est intérieur à A si et seulement s'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B_o(x,\varepsilon) \subset A$. On note $\overset{\circ}{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A.*

Proposition 27 (Caractérisation des parties ouvertes) *Soit A un partie de A. A est ouverte si et seulement si tous les points de A sont intérieurs à A.*

[Ind] Écrire la définition d'un ouvert.

Exercice 16 Soit $x \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.
a) Montrer que l'ensemble des points intérieurs à la boule fermée de centre x de rayon r est la boule ouverte de centre x de rayon r.
b) Montrer que l'ensemble des points adhérents à la boule ouverte de centre x de rayon r est la boule fermée de centre x de rayon r.

7.5.3 Applications de la notion de suite convergente

Proposition 28 (Caractérisation d'un point adhérent à une partie) *Soit A une partie de E.*
Un élément x est adhérent à A si et seulement s'il existe une suite (u_n) d'éléments de A qui converge vers x.

[Ind] Construire la suite. Pour la réciproque prendre un point non adhérent et rgarder ses propriétés par rapport au complémentaire.

Proposition 29 (Caractérisation des parties fermées par les suites) *Soit A une partie de E.*
Si A est fermée, un élément x appartient à A si et seulement s'il existe une suite (u_n) d'éléments de A qui converge vers x.
La partie A est fermée si et seulement si toute suite convergente d'éléments de A possède une limite qui appartient à A.

[Ind] Le complémentaire d'un fermést un ouvert.

7.5.4 Limites d'une application

Les notions et les propriétés suivantes de limite en un point et de continuité d'une application définie d'une partie d'un espace vectoriel normé dans un autre sont analogues à celles déjà vues (et se démontrent de la même façon).
E, F et G sont, dans ce qui suit, des espaces vectoriels normés respectivement par $||\cdot||$, N et M.

Définition 18 (Limite d'une application) *Soit A une partie de E et f une application de A dans F. Soit a un point adhérent à A, on dit que f admet une limite l en a (et on note $\lim\limits_a f = l$) si*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in A \quad ||x-a|| \leq \eta \implies N(f(x)-l) \leq \varepsilon.$$

On montre alors que:

Proposition 30 *Si la limite existe, elle est unique.*

[Ind] Adapter la preuve pour les suites.

Proposition 31 *Pour E de dimension finie, en choisissant une base de E on peut définir $f = (f_1, \cdots, f_n)$ par ses composantes. Ainsi f a pour limite $\ell = \ell_1 \cdots, \ell_n)$ en a si et seulement si pour tout $i \in [1,..,n]$ les fonctions f_i ont pour limite en a ℓ_i.*

[Ind] Choisir une norme.

Proposition 32 *Si f est définie sur $A \subset E$ à valeurs dans F et possède une limite l en un point a adhérent à A, alors l est adhérent à $f(A)$.*

[Ind] Construire une suite.

Proposition 33 (Limite d'une somme) *Si f et g sont définies sur $A \subset E$ à valeurs dans F et possèdent des limites respectives l et l' en a adhérent à A, alors $f+g$ possède en a la limite $l+l'$.*

[Ind] Revoir la preuve pour les suites.

Proposition 34 (Limite d'un produit) *Soient λ et f sont définies sur une partie A de E à valeurs respectivement dans K et dans un espace vectoriel normé F et a un point adhérent à A. Si λ et f admettent, en a des limites α et l, alors le produit $\lambda\dot{f}$ admet, en a, la limite αl.*

[Ind] Revoir la preuve de ce résultat pour les suites.

Proposition 35 (Limite d'un inverse) *Soit f une fonction numérique définie sur une partie A de E et a adhérent à A. Si f admet, en a, une limite α non nulle alors il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in B_o(a,r) \cap A \quad f(x) \neq 0$ et en appelant $\tilde{f}$ la restriction de f à $B_o(a,r) \cap A$, on a $\lim\limits_a \frac{1}{\tilde{f}} = \frac{1}{\alpha}$.*

[Ind] Transformer la différence de deux inverses.

Proposition 36 (Limite d'une composée) *Soient $f : A \subset E \to F$ et $g : B \subset F \to G$ telles que $f(A) \subset B$. Si a adhérent à A et b adhérent à B sont tels que $\lim\limits_a f = b$ et $\lim\limits_b g = l \in G$, alors $\lim\limits_a g \circ f = l$.*

[Ind] Prendre la définition avec les ε.

7.5.5 Relations de comparaison au voisinage d'un point

Définition 19 (Domination) *Soient $f : A \subset E \to F$, $\varphi : A \to \mathbb{R}$ et a un point adhérent à A. On dit que f est dominée par φ au voisinage de a s'il existe un réel C et un réel r strictement positif tel que*

$$\forall x \in A \cap B_o(a,r) \quad ||f(x)|| \leq C\varphi(x)$$

On note alors $f \in 0_a(\varphi)$ ou par abus $f = 0_a(\varphi)$.

Définition 20 (Négligeabilité) *Soient $f : A \subset E \to F$, $\varphi : A \to \mathbb{R}$ et a un point adhérent à A. On dit que f est négligeable devant φ au voisinage de a si*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in A \cap B_o(a,\eta) \quad ||f(x)|| \leq \varepsilon\varphi(x)$$

On note alors $f \in o_a(\varphi)$ ou par abus $f = o_a(\varphi)$.

Exemple 3 $\sin x = 0_0(x)$ et $\sin x - x = o_0(x^2)$

7.6 Applications continues

Définition 21 (Application continue) *Soit $f : A \subset E \to F$ et $a \in A$, on dit que f est continue en a si $\lim\limits_a f = f(a)$.*
f est continue si elle est continue en tout point de A.

On déduit de cette définition que:

Proposition 37 *La somme, la composée d'applications continues est continue. Le produit de deux fonctions numériques continues est continue. Le quotient de deux fonctions numériques continues est continue sur son ensemble de définition.*

[Ind] Traduire par les limites

Exercice 17 Considérons K^n muni de la norme $|| \cdot ||_\infty$. Montrer que les formes linéaires coordonnées sont continues. En déduire que toute fonction rationnelle à n variables est continue sur son ensemble de définition.

Proposition 38 (Image d'une suite convergente par une application continue) *Soit $f : A \subset E \to F$ et $a \in A$. f est continue en a si et seulement si toute suite (u_n) d'éléments de A qui converge vers a est telle que la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.*

[Ind] Partie directe les ε, la réciproque par contraposée.

Remarque: Cette proposition est aussi bien utilisée pour trouver la limite d'une suite image que pour montrer qu'une application n'est pas continue en un point.

Exercice 18 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si}(x,y) = (0,0) \\ \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.

Montrons des propriétés importantes des fonctions continues.

Proposition 39 (Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue) *Soit $f : A \subset E \to F$ une application continue.*
L'image réciproque par f d'un ouvert (resp fermé) de F est l'intersection d'un ouvert (resp fermé) de E et de A.

[Ind] Utiliser les suites.

Exercice 19 Montrer que la propriété précédente caractérise les fonctions continues.

Ainsi si f est à valeurs réelles alors pour tout nombre rél α, l'ensemble des points x tels que $f(x) \geq \alpha$ ou tels que $f(x) = \alpha$ est une partie fermée de E. De même l'ensemble des points x tels que $f(x) > \alpha$ est une partie ouverte de E.

7.7 Applications linéaires continues

Soient E et F deux K-e.v.n.

Théorème 4 *Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:*
(1) u est continue.
(2) u est continue en 0.
(3) $\exists C \in \mathbb{R}_+ \quad \forall x \in E \quad ||u(x)|| \leq C||x||$.
(4) u est lipschitzienne.
(5) u est uniformément continue.
(6) u est bornée sur la boule unité de E.
(7) u est bornée sur la sphère unité de E.
(8) Pour toute suite (x_n) tendant vers 0 dans E, la suite $(u(x_n))$ tend vers 0 dans F.

[Ind] Démonstration circulaire.

Proposition 40 *Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue.*

[Ind] Passer par les coordonnées.

Proposition 41 *L'ensemble $\mathcal{L}_c(E,F)$ des applications linéaires continues de E dans F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$ et l'ensemble $\mathcal{L}_c(E)$ des endomorphismes de E continues est un sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.*

[Ind] Utiliser ce que vous savez.

Proposition 42 *Pour tout $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$.*

$$\sup_{x \in E-\{0\}} \frac{||u(x)||}{||x||} \in \mathbb{R}$$

On note ce nombre $|||u|||$.

[Ind] Utiliser le bon critére.

Exercice 20 Montrer que:
$$|||u||| = \sup_{x\in E, ||x||=1} ||u(x)||$$

Proposition 43 *Soit $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$.*
$$\forall x \in E \quad ||u(x)|| \leq |||u|||\,.||x||$$

[Ind] Écrire la dnition d'un *sup*.

Proposition 44 *L'application définie sur $\mathcal{L}_c(E,F)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui, à u associe $|||u|||$ est une norme que l'on appelle norme subordonnée aux normes de E et F.*

[Ind] Vérifier.

Proposition 45 *Soit G un K-e.v.n. et soient $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}_c(F,G)$. On a:*
$$|||v \circ u||| \leq |||v|||\,.\,|||u|||$$

[Ind] Évaluer $||v(u(x))||$.

Proposition 46 *La norme sur $\mathcal{L}_c(E)$ associée à la norme de E est une norme d'algèbre.*

[Ind] Qu'est-ce que c'est qu'une norme d'algèbre.

Exercice 21 Soit $u \in \mathcal{L}_c(E)$. Montrer que si λ est une valeur propre de u: $|\lambda| \leq |||u|||$.

Sur un produit d'espaces vectoriels normés (E_i,N_i) nous pouvons entr'autres définir trois normes classiques et équivalentes : avec $X = (x_1,\cdots,x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i$

$||X||_\infty = \sup_{i=1,\cdots,n} N_i(x_i)$

$||X||_1 = \sum_{i=1}^{n} N_i(x_i)$

$||X||_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} N_i^2(x_i)\right)^{\frac{1}{2}}$.

Proposition 47 *Soient E, F et G des K-espaces vectoriels normés et B une application bilinéaire de $E\times F$ dans G. Les assertions suivantes sont équivalentes: (1) B est continue.*
(2) B est continue en $(0_E,O_F)$.
(3) B est bornée sur le produit des boules unités de E et F.
(4) B est bornée sur le produit des sphères unités de E et F.
(5) Il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall (x,y) \in E\times F \quad ||B(x,y)|| \leq C||x||\cdot||y||$.
(6) Pour toute suite (x_n) de E et toute suite (y_n) de F qui convergent vers 0, la suite $(B(x_n,y_n))$ converge vers O.

[Ind] Adapter les preuves pour les applications linéaires.

Exercice 22 Soit E un espace préhilbertien. Montrer que le produit scalaire est une application continue définie de $E\times E$ dans K.

Remarque: Cela permet aussi de montrer la continuité de $(u,v) \longmapsto uv$ dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$.

Proposition 48 *Soient E, F et G des K-espaces vectoriels normés et B une application bilinéaire de $E\times F$ dans G. Si E et F sont de dimension finie, B est continue.*

[Ind] Quelle est la forme d'une application bilinéaire.

7.8 Parties compactes

Définition 22 (Compact) *Une partie A de E espace vectoriel normé de* ***dimension finie*** *est dite compacte si, elle est fermée et bornée.*

Exemple 4 Toute segment de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est compacte.

Remarque: Cette définition n'est plus vraie pour un espace vectoriel de dimension infinie, on aura seulement que tout compact est fermé borné. **Remarque:** On montre que cette définition est caractéristique des espaces vectoriels de dimension finie.

Proposition 49 *Soit $E = K^p$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ muni de la norme $||\cdot||_\infty$. Soit F un compact (fermé, borné) de toute suite de F on peut extraire une suite convergente.*

[Ind] hors programme.

Théorème 5 *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et A une partie de E*

A compacte $\Longleftrightarrow$ A fermée et bornée $\Longleftrightarrow$ de toute suite de Aon peut extraire une suite convergente

[Ind] Tout est déjà fait.

Exercice 23 Soit $E = \mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles bornées muni de la norme $||\cdot||_\infty$. Montrer que la boule fermée unité n'est pas compacte.

Exercice 24 Soit $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts emboîtés non vides de E. Il existe un point commun à tous ces compacts et ce point est unique si et seulement si le diamètre des compacts C_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Théorème 6 (Image directe d'un compact) *Soit $f : A \subset E \to F$ une application continue. Si K est un compact de E inclus dans A alors $f(K)$ est une partie compacte de F.*

[Ind] Admis.

Proposition 50 *Une fonction à valeurs réelles, définie sur un compact de E et continue est bornée et atteint ses bornes.*

[Ind] Utiliser la proposition précédente.

Exercice 25 Soit F un s.e.v de dimension finie de E. Montrer que, pour tout $x \in E$, il existe $y \in F$ tel que $||x-y|| = \inf_{z\in F} ||x-z||$ ce nombre est aussi noté $d(x,F)$. Montrer en utilisant une norme choisie dans $\mathbb{R}^2$ qu'il peut exister plusieurs vecteurs possédant cette propriété.

7.9 Compléments

7.9.1 Normes usuelles

Soit un réel p un réel supérieur ou égal à 1. Pour un élément de x de $\mathbb{C}^n$, on note

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Montrons que $||\cdot||_p$ est une norme sur K^n $(p \geq 1)$.

Les propriétés (N1) et (N2) sont bien vérifiées. Montrons (N3).
Notons, pour tout $x \in K^n$, $f(x) = ||x||_p$.

Étape 1: $B = \{x \in K^n \quad | \quad f(x) \leq 1\}$ est convexe.
La fonction f est positive donc $B = \{x \in K^n \quad | \quad f^p(x) \leq 1\}$.
Soient x et y dans B, et $t \in [0,1]$.

$$f^p(tx + (1-t)y) = \sum_{i=1}^{n} |tx_i + (1-t)y_i|^p$$

mais

$$\forall i \in [1,n] \quad |tx_i + (1-t)y_i|^p \leq t\,|x_i|^p + (1-t)\,|y_i|^p$$

car l'application $z \to |z|^p$ est une application convexe de K dans $\mathbb{R}$, c'est en effet la composée de la fonction convexe $z \to |z|$ et de la fonction convexe et croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ qui au réel λ associe λ^p $(p \geq 1)$. On a donc:

$$\begin{aligned} f^p(tx + (1-t)y) &\leq t \sum_{i=1}^{p} |x_i|^p + (1-t) \sum_{i=1}^{p} |y_i|^p \\ &\leq t + (1-t) \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Étape 2: $\forall x,y \in K^n \quad f(x+y) \leq f(x) + f(y)$, c'est la propriété (N3).
Si $x = 0$ ou $y = 0$, c'est vrai.
Supposons $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

$$f(\frac{1}{f(x)}x) = 1 \quad \text{et} \quad f(\frac{1}{f(y)}y) = 1,$$

donc $x_1 = \frac{1}{f(x)}x$ et $y_1 = \frac{1}{f(y)}y$ appartiennent à B. Le barycentre z des points pondérés $(x_1,f(x))$ et $(y_1,f(y)$ est alors dans B. Or

$$(f(x) + f(y))z = f(x)x_1 + f(y)y_1 = x + y,$$

et donc

$$z = \frac{1}{f(x) + f(y)}(x+y) \in B.$$

Ainsi

$$f(z) = \frac{1}{f(x) + f(y)} f(x+y) \leq 1.$$

En multipliant cette inégalité par $f(x) + f(y)$, on trouve bien l'inégalité cherchée.

Exercice 26 Montrer que, si $x \in K^n$: $\lim_{p \to \infty} ||x||_p = ||x||_\infty$.

et plus généralement, pour un réel $p \geq 1$

$$||f||_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On démontre que $|| \cdot ||_p$ est une norme, en utilisant la continuité des éléments de $C^0([a,b],K)$ et la positivité de l'intégrale pour la propriété (N1), la linéarité de l'intégrale pour montrer que (N2) est vérifiée et on prouve (N3) d'une manière analogue à la démonstration précédente.

Exercice 27 Soit $f \in C^0([a,b],K)$. Montrer que $\lim_{p \to \infty} ||f||_p = ||f||_\infty$.

7.10 Exercices

E désigne un espace vectoriel normé et $||\cdot||$ sa norme.

Exercice 28 Montrer que si le sous-ensemble A est complet alors il est fermé et que la réciproque est vraie si E est lui-même complet.

Exercice 29 Montrer qu'un compact de E est complet.

Exercice 30 Soient a et b des réels, l'espace vectoriel des fonctions numériques continues de $[a,b]$ dans K, muni de la norme $||\cdot||_\infty$, est complet.

Exercice 31 Supposons E de dimension finie. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Montrer qu'une partie A de E est bornée si et seulement si toutes les projections de A sur les axes de coordonnées sont bornées.

Exercice 32 Soient A et B deux parties de E.Montrer que:

$$\inf_{x\in A} d(x,B) = \inf_{y\in B} d(y,A) = \inf_{(x,y)\in A\times B} ||x-y||.$$

On note ce nombre $d(A,B)$. Que peut-on dire de A et B si $d(A,B)=0$.

Exercice 33 Supposons E de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{GL}(E)$. Montrer que $x \to ||u(x)||$ est une norme sur E. Montrer directement qu'elle est équivalente à la norme $||\cdot||$ sur E.

Exercice 34 Soit F un sous-espace vectoriel de E.
a) Montrer que si $F \neq E$, alors il n'existe pas de boule ouverte non vide contenue dans F.
b) Montrer que tout sous-espace vectoriel de dimension finie est un fermé.
c) Montrer qu'un sous-espace vectoriel n'est pas forcément fermé.

Exercice 35 Soient N_1 et N_2 les applications définies sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$\forall P=(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad N_1(P) = \sup_{x\in[0,1]} |x+ty| \text{ et } N_2(P) = \Big(\int_0^1 (x+ty)^2 \mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2}}$$

Montrez que ce sont des normes et trouvez les boules unités.

Exercice 36 Soit $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. Soit $g\in E$. et $N_g :\ f \to ||fg||_\infty$.
a) Trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur g pour que N_g soit une norme sur E.
b) N_g étant une norme, comparer N_g et $||\cdot||_\infty$ et trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur g pour que ces deux normes soient équivalentes.

Exercice 37 Soit $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$. Si $x\in E$, on pose $N_1(x) = \sup|x| + \sup|x'|$ et $N_2(x) = \sup|x| + |x'|$. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E. Sont-elles équivalentes?

Exercice 38 Soit $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. Montrer que la forme linéaire définie sur E qui, à x, associe $x'(0)$ n'est pas continue.

Exercice 39 Soit $E=\mathbb{R}[X]$, si $P\in E$, on note $N_1(P) = \sum_{n=0}^{\infty}\left|P^{(n)}(0)\right|$ et $N_2(P) = \sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{1}{n!}P^{(n)}(0)\right|$. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E. Comparez-les entre elles et à la norme $||P|| = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$.

Exercice 40 Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$, on pose $||A|| = n \sup_{i,j\in[1,n]} |a_{ij}|$. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme sup. Montrer que:

$$\forall X\in\mathbb{R}^n \quad ||AX|| \leq ||A||.||X||$$

a) Montrer que si $||A||<1$, alors $I-A$ est inversible.
b) Trouver en fonction de $||A||$ un majorant de l'ensemble des valeurs propres de A.

Exercice 41 Soit $E = \mathcal{B}(A,K)$ l'algèbre des fonctions à valeurs dans K, définies et bornées sur un ensemble A. On munit E de sa norme usuelle:

$$\forall f \in E \quad ||f||_\infty = \sup_{x\in A} |f(x)|\,.$$

Montrer que E est complet.

Exercice 42 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par: $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$. Montrer que (f_n) converge vers la fonction nulle pour la norme sup sur $[0,1]$.

Exercice 43 Soit $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrez que $f_{|S_n}$ est bornée et atteint ses bornes. Montrer qu'il existe au moins deux points diamétralement opposés ayant même image par f.

Exercice 44 Montrer que $\mathcal{GL}_n(K)$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(K)$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Ouvert, image réciproque d'un ouvert par une fonction continue. Dense, limite de suites...

Exercice 45 Montrer que l'ensemble des matrices complexes diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Est-il ouvert?

Exercice 46 Soit $f \in E^*$. Montrer que f est continue si et seulement si $\mathrm{Ker}\, f$ est fermé (Indication: si $f \neq 0$, il existe $a \in E$ tel que $f(a) = 1$, le complémentaire de $f^{-1}(1)$ est alors un ouvert contenant 0.)

On considère maintenant que $E = \mathrm{K}^n$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Exercice 47 Montrer que la norme sur $\mathcal{L}(E)$ associée à la $||.||_\infty$ est définie par:
si $A = (a_{ij})$ est la matrice de l'endomorphisme u

$$|||u|||_\infty = \sup_{i\in[1,n]} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Exercice 48 Montrer que la norme sur $\mathcal{L}(E)$ associée à la norme $||.||_1$ est:

$$|||u|||_1 = \sup_{j\in[1,n]} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

7.11 Travaux Dirigés : Espace vectoriel normé

Exercice 49 Soit I un intervalle fermé borné, p une fonction continue sur I strictement positive. Démontrer que E_p ensemble des fonctions x continues de I dans K est un K-espace vectoriel préhilbertien quand on définit $\langle x,y\rangle = \int_I \overline{x(t)}y(t)p(t)dt$.

Exercice 50 On garde les notations de l'exercice précédent. Vérifier que la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ est dans E_p . On appelle P_n une suite de polynômes orthogonaux (par le procédé de Gram-schmidt) de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$. Ecrire la construction de (P_n).
1) Démontrer que :

i) Pour tout n le polynôme P_n est orthogonal à tous les polynômes Q de degré strictement inférieur à n.

ii) Pour tout n, $P_n - tP_{n-1}$ est un polynôme de degré inférieur strictement à n, en déduire que : $\langle tP_{n-1},P_n\rangle = \langle P_n,P_n\rangle$.

iii) Pour tous éléments de E_p on a : $\langle xy,z\rangle = \langle x,\overline{y}z\rangle$.
2) Montrer que tous les polynômes P_n ont n racines réelles distinctes et intérieures à I.
3) Montrer qu'il existe deux suites de nombres réels λ_n et μ_n avec $\mu_n \succ 0$ telles que $\forall n \geq 2$ on ait $P_n = (t+\lambda_n)P_{n-1} - \mu_n P_{n-2}$.

Exercice 51 [:d'après météo 86]
Soit les polynômes de Legendre : $L_n(X) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dX^n}\left[\left(X^2-1\right)^n\right]$, $n \in \mathbb{N}$
1) Montrer que L_n est un polynôme de degré n, ayant la parité de n.
2) Calculer L_0,L_1,L_2. Préciser le cœfficient de X^n dans L_n.
3) En utilisant la formule de Leibnitz, démontrer que $L_n(1) = 1$ et $L_n(-1) = (-1)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
4) On pose $w_n(x) = (x^2-1)^n$:

i) Ecrire une équation différentielle du premier ordre vérifiée par w_n.

ii) En dérivant un bon nombre de fois cette équation, déterminer une équation différentielle du second ordre vérifiée par L_n, que l'on notera (E).
5) Montrer : (1) $L'_n(x) = xL'_{n-1}(x) + nL_{n-1}(x)$, pour tout $n \geq 1$.
6) En utilisant (E) et (1) établir (2) : $nL_n(x) = xL'_n(x) - L'_{n-1}(x)$, pour tout $n \geq 1$.
7) Déduire, à l'aide de (1) et (2) une relation de récurrenceentre les trois polynômes L_{n+1},L_n,L_{n-1} ; cette relation ne faisant plus intervenir de dérivées.
8) On pose $I_n = \int_{-1}^{+1}(1-x^2)^n dx$. Calculer I_n par récurrence.
9) Soit Q un polynôme de degré strictement inférieur à n , calculer : $\int_{-1}^{+1} L_n(x)Q(x)dx$.
10) Calculer $\int_{-1}^{+1} L_n(x)L_m(x)dx$, suivant que $m = n$ ou $m \neq n$.

Exercice 52 [Polynômes de Tchebitchev (enset 88)]
On définit une suite de polynômes de variable réelle à cœfficients réels par : $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_n(x) = xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)$ pour $n \geq 2$.
a) Montrer que P_n est un polynôme de degré n.
b) i) Montrer que $P_n(2\cos\theta) = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$, $\forall\theta \in]0,\pi[$.

ii) En dérivant (i) montrer que : $nP_n(2\cos\theta) = 2\cos\theta P'_n(2\cos\theta) - 2P'_{n-1}(2\cos\theta)$.
c) Quels sont les zéros du polynôme P_n?
d) Montrer que : $\forall n \in N, n \geq 1, \forall x \in R, nP_n(x) = xP'_n(x) - 2P'_{n-1}(x)$ et
$(n-1)P'_n(x) = xP''_n(x) - 2P''_{n-1}(x)$ et $2P''_n(x) = xP''_{n-1}(x) + (n+2)P'_{n-1}(x)$.
e) Etablir une équation différentielle linéaire du second ordre satisfaite par P_n.

Exercice 53 Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $(e_1,e_2,...,e_n)$ une base de E. Vérifier que l'on obtient trois normes particulières sur E en posant, pour tous x_i de K :

$$\nu_0\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sup_{1\leq i\leq n} |x_i|\,,\nu_1\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,,\nu_2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

De plus ces normes sont équivalentes, montrer que : $\forall x \in E : \nu_0(x) \leq \nu_1(x) \leq \sqrt{n}\nu_2(x) \leq n\nu_0(x)$.
Décrire les pavés ouverts de $\mathbb{R}^n$ pour $n = 1,2,3$ pour ces trois normes.

Exercice 54 Avec $n \in \mathbb{N}^*$ on considère l'algèbre sur K : $E = M_n(K)$ des matrices carrées nxn , à cœfficients dans K. Prouver que l'application $\|\|$ de $M_n(K)$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par : $\|A\| = n \sup_{\begin{cases} 1\leq i\leq n \\ 1\leq J\leq n\end{cases}} |a_{i,j}|$ où $A = ((a_{i,j}))$ est une norme qui possède de plus la propriété suivante:
$\forall A \in E,\forall B \in E : \|A \times B\| \leq \|A\| \|B\|$

Exercice 55 Montrer que $n : (x,y) \longmapsto \int_0^1 |x+ty|\,dt$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$, représenter la boule unité .

Exercice 56 On définit sur l'espace vectoriel $E = C^0([0,1]\,,\mathbb{R})$ les applications ν_1 et ν_2 par : $\nu_1(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et $\nu_2(f) = \int_0^1 e^x\,|f(x)|\,dx$.
1) Montrer que ν_1 et ν_2 sont des normes sur E.
2) Soit (f_n) la suite de fonctions définies par $f_n(x) = 1 - nx$ si $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ et $f_n(x) = 0$ si $\frac{1}{n} \leq x \leq 1$. Etudier la suite (f_n) dans (E,ν_1) et (E,ν_2), conclusion.

Exercice 57 Soit E l'espace des fonctions réelles définies sur $I = [0,1]$ et lipschitziennes. On pose $K(f) = \sup_{\substack{x\neq y\\(x,y)\in I^2}} \dfrac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|}$ et $M(f) = \sup_{x\in I} |f(x)|$ puis $N(f) = M(f) + K(f)$.
1^0) Montrer que E est un sev de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.
2^0) Montrer que M et N sont des normes sur E, sont-elles équivalentes?

Exercice 58 1^0) Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.
2^0)
-1- Montrer que $\mathbb{Z}$ est complet
-2- Montrer que $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ n'est pas de Cauchy dans $\mathbb{R}$.
-3- Soit (u_n) une suite réelle telle que les suites extraites $(u_{2n})\,,(u_{2n+1})\,,(u_{3n})$ convergent, montrer que (u_n) converge.
-4- Soit (u_n) une suite réelle telle que les suites extraites $(u_{3n+2})\,,(u_{4n+1})\,,(u_{5n+3})$ convergent, (u_n) converge -t-elle?.

Exercice 59
- Montrer que toute partie complète est fermée.
- Soit A et B deux parties d'un evn (E,N). On pose $A+B = \{a+b,a \in A,b \in B\}$. Montrer que
  -a- si A ou B est ouvert alors $A+B$ est ouvert.
  -b- si A et B sont compacts alors $A+B$ l'est.
  -c- si A est compact et B est fermé alors $A+B$ est fermé.

Exercice 60 Soit E l'ensemble des applications de $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ telles que $f(0) = 0$ Montrer que N_1,N_2 définies par $N_1(f) = \sup_I |f(t)|$ et $N_2(f) = \sup_I |f'(t)|$ où $I = [0,1]$ sont des normes et les comparer.

Exercice 61 Soit $\mathbb{R}^2$ muni d'une norme quelconque et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que : $\exists\alpha \in]0,\frac{1}{2}[$: $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|f(x) - f(y)\| \leq \alpha(\|f(x) - x\| + \|f(y) - y\|)$. Montrer que f admet un point fixe unique.

Exercice 62 [De l'utilisation de la formule de Leibnitz]
On considère la fonction $f(x) = e^{-x^2}$.
1) Montrer que : a) $f'(x) = -2xf(x), \forall x \in \mathbb{R}$

b) $f^{(n+1)}(x) = -2xf^{(n)}(x) - 2nf^{(n-1)}(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geq 1$

2) Montrer que $f^{(n)}(x) = e^{-x^2}P_n(x)$ où P_n est un polynôme de degré n vérifiant :

$$P_{n+1}(x) = -2xP_n(x) - 2nP_{n-1}(x), \forall x \in R, \forall n \geq 1.$$

Ces polynômes P_n sont les polynômes d'Hermitte. Déterminer P_n pour $0 \leq n \leq 3$.

Exercice 63 [suites...suites révision]
1) Soient a et b des réels, $0 < a < b$. On pose $u_0 = a, v_0 = b$ et $\forall n \in N^* : u_n = \sqrt{u_{n-1}v_{n-1}}$
$v_n = \frac{u_{n-1}+v_{n-1}}{2}$. Montrer que u_n et v_n admettent une limite commune.
2) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n-6}{u_n-4}$.

a) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$: $\begin{cases} u_0 = \alpha \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = \alpha \\ u_0 = \beta \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = \beta \end{cases}$

b) On supppose $u_0 \notin \{\alpha, \beta\}$ et on pose $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = \frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}$, déterminer une relation entre v_n et v_{n+1} et en déduire la limite de u_n.
3) CCP 97 Soient des réels a, u_0, u_1 tels que $0 < a < 1$ et $0 < u_0 < u_1$. Soit la suite : $u_{n+1} = u_n + au_{n-1}$. Cette suite converge-t-elle ?

Exercice 64 [suites $u_{n+1} = f(u_n)$ révision]
1) Etudier la suite définie par $u_{n+1} = 1 - \cos u_n$ avec $u_0 \in \mathbb{R}$.
2) Etudier la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n^2 + 1\right)$.
3) Etudier la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}, u_{n+1} = 1 - u_n^2$.

Exercice 65 [Et toujours...A.F., Rolle...révision]
1) Soit $\alpha \in]0,1[$. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^* : \dfrac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leq (n+1)^\alpha - n^\alpha \leq \dfrac{\alpha}{n^{1-\alpha}}$, puis en déduire un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p^{1-\alpha}}$.
2) Montrer que tout polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle.
3) Montrer que si f est dérivable sur un intervalle I et admet n zéros sur I , sa dérivée admet au moins $n-1$ zéros sur I , séparant les zéros de f.

Application : Montrer que le polynôme de Legendre $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n$ admet n zéros distincts dans $]-1,+1[$.

Exercice 66 [révision]
1) Montrer que l'équation $\ln x + x = k$, admet une solution unique x_k, quelque soit $k \in \mathbb{N}$.
2) Montrer que lorsque $k \to +\infty$, on a : $x_k = ak + b\ln k + c\frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right)$, a,b,c étant des constantes à déterminer.

Exercice 67 [révision]
Soit f une fonction numérique dérivable sur $[a,b]$ telle que : $f'(a) \neq f'(b)$.. Montrer que f' prend toute valeur de l'intervalle $]f'(a), f'(b)[$. Enoncer le résultat.

Exercice 68 [révision équations fonctionnelles]
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en 0 telles que :

1) $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = 2f(x)$

2) $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = [f(x)]^2$

Exercice 69 [révision]
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$; soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $f(a) = 0$. Montrer qu'il existe un point M de la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de f tel que la tangente en M à $(\mathcal{C})$ passe par O.

Exercice 70 [révision]
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application C^2 telle que $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f''(c) = f(c)$.

Exercice 71 [révision]
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$; montrer que l'équation $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx - (a+b+c) = 0$ admet au moins une solution x dans]0,1[.

Exercice 72 Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ normé par $N : E \to \mathbb{R}^+$, $f \longmapsto N(f) = \int_0^1 |f(t)|\, dt$ et T l'endomorphisme de E défini par :
$$\begin{array}{l} T : E \to E \\ f \longmapsto T(f) : T(f)(x) = \int_0^x f(t)\, dt \end{array}$$
Montrer que T est continue et calculer sa norme.

Exercice 73 Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose pour $f \in \mathbb{R}[X]$, $N(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left|f^{(k)}(0)\right|}{k!}$.

a) Montrer que N est une norme.

b) On pose $f_p(X) = \sum_{k=1}^{p} \frac{X^k}{k^2}$. Montrer que la suite (f_p) est de Cauchy dans (E,N). Converge-t-elle?

c) La dérivation est-elle continue?

d) On pose, pour $f \in E, \psi_n(f) = f^{(n)}(0)$; ψ_n est-elle continue? Calculer la norme de ψ_n.

e) On dit que f précède g, $f \prec g$, lorsque pour tout n on a : $f^{(n)}(0) \leq g^{(n)}(0)$. Pour g,h dans E, on pose $G = \{f \in E, f \prec g\}$ et $H = \{f \in E, h \prec f\}$, montrer que G et H sont des fermés de E et que leur intersection est compacte.

Exercice 74 Dans $K[X]$ on considère les normes $\|P\|_1 = \sup_{[0,1]} |P(x)|$, $\|P\|_2 = \sum_{i=0}^{n} |P(i)|$, $\|P\|_3 = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$, $\|P\|_4 = \sup_{[0,1]} \sum_{i=0}^{n} \left|P^{(i)}(x)\right|$, $\|P\|_5 = \int_0^1 |P(t)\, dt|$

Exercice 75 [Normes subordonnées.]
Soit $A = ((a_{ij}))$ une matrice carrée d'ordre $n \geq 2$ à coefficients dans $\mathbb{C}$.

1°) Montrer que la norme subordonnée à la norme N_1 est définie par $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right)$.

2°) Montrer que la norme subordonnée à la norme N_∞ est définie par $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right)$.

3°) Montrer que $N : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui à A associe $N(A) = \sqrt{tr\left({}^tAA\right)}$ est une norme non subordonnée qui vérifie pour toutes matrices A,B : $N(AB) \leq N(A)\, N(B)$.

7.12 Démonstrations

Proposition 1 Écrivons $N(x) = N(x+y-y) \leq N(x+y)+N(y)$ et donc $N(x)-N(y) \leq N(x+y)$. Puis en écrivant $N(y) = N(x+y-x) \leq N(x+y)+N(x)$ on a $N(y)-N(x) \leq N(x+y)$. Ainsi $|N(x)-N(y)| \leq N(x+y)$.

Proposition 2 φ étant un produit scalaire on a $\forall x \in E$: $\varphi(x,x) \in \mathbb{R}^{+*}$. Pour l'axiome de déparation : si on $||x|| = 0$ alors $\varphi(x,x) = 0$ et donc $x = 0$ car φ est définie positive. La pseudo homogènéité : $||\lambda x|| = \varphi(\lambda x,\lambda x) = \lambda\overline{\lambda}\varphi(x,x)$ et $||\lambda x|| = |\lambda|\,||x||$. L'inégalité triangulaire provient de l'inégalité de cauchy-schwarz. En effet on veut $||x+y|| \leq ||x||+||y||$ ou en core en élevant au carré : $\varphi(x,x)+\varphi(y,y)+2Re\left(\varphi(x,y)\right) \leq \varphi(x,x)+\varphi(y,y)+2\varphi(x,x)\varphi(y,y)$ en simplifiant $Re\left(\varphi(x,y)\right) \leq \varphi(x,x)\varphi(y,y)$ ce qui est vrai car $Re\left(\varphi(x,y)\right) \leq |\varphi(x,y)|$ et la deuxième inégalité est cauchy-schwarz.

Proposition 3 $||x+y||_\infty = \sup\limits_{i\in[1,n]} |x_i+y_i|$. Or on a $\forall i \in [1..n]$: $|x_i+y_i| \leq |x_i|+|y_i|$ donc $\forall i \in [1..n]$: $|x_i+y_i| \leq \sup\limits_{i\in[1,n]} |x_i| + \sup\limits_{i\in[1,n]} |y_i|$, puis en prenant le *sup* à gauche on obtient $||x+y||_\infty \leq ||x||_\infty + ||y||_\infty$.
Pour $\lambda \in K$ on a $\lambda x = (\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n)$, ainsi $||\lambda x||_\infty = \sup\limits_{i\in[1,n]} |\lambda x_i| = |\lambda| \sup\limits_{i\in[1,n]} |x_i| = |\lambda|\,||x||_\infty$.
Si $||x||_\infty = 0$ alors $\forall i \in [1,n]$ on a $x_i = 0$ et donc $x = 0$.
Pour la norme 1, aucune difficulté.
Pour la norme 2, l'homogénéité et l'axiome de séparation ne posent pas de problème. L'inégalité triangulaire provient de l'inégalité de cauchy schwarz pour le produit scalaire : $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Proposition 4 Tout d'abord pour f bornée sur A, $||f||_\infty$ existe bien et est un élément de K. Si f est dans $\mathcal{B}(A,K)$ et $\lambda \in K$ on a $||\lambda f||_\infty = |\lambda|\,||f||_\infty$, puis avec g dans $\mathcal{B}(A,K)$: $\forall x \in A$ on a $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)|$ donc $\forall x \in A$: $|f(x)+f(y)| \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$ ce qui donne en prenant le *sup* à gauche : $||f+g||_\infty \leq ||f||_\infty ||g||_\infty$. Enfin si $||f||_\infty = 0$ alors $\forall x \in A$: $|f(x)| = 0$ et $f = 0$.

Proposition 5 Pour la norme 1 : Pour f,g dans $C^0([a,b],K)$ on a $\forall x \in [a,b]$: $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)|$ donc par intégration sur $[a,b]$ on obtient l'inégalité triangulaire. L'homogénéité ne pose pas de problème. La séparation : $||f||_1 = 0$ donne $\int_a^b |f| = 0$ mais l'intégrale d'une fonction positive continue est nulle si et seulement si la fonction est nulle d'où $f = 0$.
Pour la norme 2 elle provient du produit scalaire : $\langle f,g\rangle = \int_a^b \overline{f(x)}g(x)dx$, c'est une norme euclidienne.
Pour la norme infinie : une fonction continue sur le compact $[a,b]$ étant bornée, $C^0([a,b],K)$ est inclus dans $\mathcal{B}(A,K)$, donc la norme $||\cdot||_\infty$ est définie sur $C^0([a,b],K)$ et vérifie les trois propriétés.

Proposition 6 Pour (D1) : $d(x,y) = N(x-y) = N(-(x-y)) = N(y-x) = d(y,x)$, pour (D2) : $d(x,y) = 0$ donne $N(x-y) = 0$ et $(x-y = 0$ ou $x = y$. Poyr D3 : $\forall x,y,z \in A$: $d(x,y) = N(x-z+z-y) \leq N(x-z)+N(y-z) \leq N(x,z)+N(y,z)$.

Proposition 7 $\forall x,y,z \in E$ on a $d(x+z,y+z) = N(x+z-y-z) = N(x-y) = d(x,y)$ et $\forall \lambda \in K$: $d(\lambda x,\lambda y) = N(\lambda x-\lambda y) = N(\lambda(x-y)) = |\lambda|\,N(x-y) = |\lambda|\,d(x,y)$.

Proposition 8 Si on a une suite (u_n) ayant deux limites ℓ et ℓ'. Ainsi $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies ||u_n-\ell|| \leq \varepsilon$. et $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies ||u_n-\ell'|| \leq \varepsilon$. donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies ||\ell-\ell'|| \leq 2\varepsilon$. en écrivant $||\ell-u_n+u_n-\ell'|| \leq ||u_n-\ell||+||u_n-\ell'||$. Ce qui donne $\forall \varepsilon$: $||\ell-\ell'|| \leq \varepsilon$ donc $||\ell-\ell'|| = 0$ et $\ell = \ell'$.

Proposition 9 Soit (u_n) une suite convergente vers ℓ on a $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies ||u_n-\ell|| \leq \varepsilon$. donc pour $\varepsilon = 1$ on a $\exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies ||u_n|| \leq ||\ell||+1$. et donc $\forall n$: $||u_n|| \leq \sup\{||\ell||+1,||u_0||,\cdots,||u_{n_0-1}||\}$.

Proposition 10 Si u_n et v_n sont des suites convergentes vers ℓ et ℓ' alors $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_1 \implies ||u_n - \ell|| \leq \varepsilon$ et $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ \exists n_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies ||v_n - \ell'|| \leq \varepsilon$ ainsi $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists n_0 = \sup\{n_1,n_2\} \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies ||u_n + v_n - \ell - \ell'|| \leq ||u_n - \ell|| + ||v_n - \ell'|| \leq 2\varepsilon$. Donc $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$.

Proposition 11 Soit (λ_n) et (u_n) convergeant vers λ et ℓ. on écrit $||\lambda_n u_n - \lambda\ell|| = ||(\lambda_n - \lambda)u_n + (u_n - \ell)\lambda||$ qui est majorée par $||\lambda_n - \lambda||||u_n|| + ||u_n - \ell||||\lambda||$. La suite (u_n) étant bornée, par comparaison on obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} ||\lambda_n u_n - \lambda\ell|| = 0$.

Proposition 12 Si (u_n) est une suite convergente vers ℓ, alors $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies ||u_n - \ell|| \leq \varepsilon$. Or φ est une injection croissante donc il existe $i_0 \geq n_0$ et $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists i_0 \in \mathbb{N} \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad i \geq i_0 \implies ||u_{\varphi(i)} - \ell|| \leq \varepsilon$.

Proposition 13 Si $k = 0$ alors la fonction est identiquement nulle et le résultat est vrai. Sinon il suffit de prendre $\eta = \dfrac{\varepsilon}{k}$.

Proposition 14 L'ensemble n'est pas vide et avec les notations qui s'imposent on a $N(f + \lambda g(x) - f + \lambda g(y)) \leq N(f(x) - f(y)) + |\lambda|\, N(g(x) - g(y)) \leq k_1||x - y|| + |\lambda|\, k_2||x - y||$ et $f + \lambda g$ est lipschitzienne de rapport $k_1 + |\lambda|\, k_2$.

Proposition 15 Nous avons $\forall x \in E \quad N_1(x) \leq N_1(x) \leq N_1(x)$, puis si $\forall x \in E \quad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_3(x)$ alors $\forall x \in E \quad \dfrac{1}{\beta}N_2(x) \leq N_1(x) \leq \dfrac{1}{\alpha}N_2(x)$ et enfin si $\forall x \in E \quad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$ et $\forall x \in E \quad \alpha' N_2(x) \leq N_3(x) \leq \beta' N_2(x)$ alors $\forall x \in E \quad \alpha\alpha' N_1(x) \leq N_3(x) \leq \beta\beta' N_1(x)$.

Proposition 16 a) $\Rightarrow$ b) : si une partie A est bornée pour n_2 alors il existe une boule $B_{N_2}(O,r)$ contenant A mais alors la boule $B_{N_1}(O,\alpha r)$ contient A qui est donc borné pour N_1.
b) $\Rightarrow$ c)Si une suite (x_n) converge vers x pour N_2 alors $\forall\varepsilon : \exists n_0 : \forall n : n \geq n_0 \Rightarrow N_2(x_n - x) \leq \varepsilon$ ou encore $\forall\varepsilon : \exists n_0 : \forall n : n \geq n_0 \Rightarrow N_1(x_n - x) \leq \alpha\varepsilon$ donc la suite converge vers x pour N_1.
c) $\Rightarrow$ d) : il suffit de prendre $x = 0$. une suite qui converge vers 0 pour N_2 converge pour N_1 et est donc borné pour N_1.
d) $\Rightarrow$ a) : par contraposée si $\forall\alpha \in \mathbb{R}_+^* : \exists x \in E$ tel que $N_1(x) > \alpha N_2(x)$. Prenons $\alpha = n$ d'où une suite (x_n) vérifiant $N_1(x_n) > nN_2(x_n)$. Les x_n ne sont jamais nul à cause de l'inégalité stricte. Posons $y_n = \dfrac{x_n}{\sqrt{n}N_2(x_n})$ on a $N_2(y_n) = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $N_1(y_n) > \sqrt{n}$. Voilà une suite convergente vers 0 pour N_2 et non bornée pour N_1.

Théorème 1 Nous allons montrer que toute norme N est équivalente à $||||_\infty = \nu$.
On a $N\left(\sum_{i=1}^{p} x_i e_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p} |x_i|\, N(e_i) \leq p \sup_i |x_i| \sum_{i=1}^{p} N(e_i)$ où (e_i) est une base de E. Ainsi $N(x) \leq k\nu$.
D'autre part on a pour tout élément x,y : $|N(x) - N(y)| \leq N(y - x) \leq k\nu(y - x)$ c'est à dire que N est lipschitzienne de $(E,\nu) \to \mathbb{R}$. Or l'application $\varphi : \mathbb{R}^n \to E$ telle que $x \mapsto \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$ est une isométrie de $\mathbb{R}^n$ dans (E,ν) donc un homéomorphisme en munissant $\mathbb{R}^n$ de la norme ν. Dans $\mathbb{R}^n$ la sphère unité S est compact (comme produit d'espce compacts, un segment de $\mathbb{R}$ étant compact par le théorème de Bazano-Weierstrass dan $\mathbb{R}$), son image par φ aussi, et donc la fonction continue N est borné et atteint ses bornes sur $\varphi(S)$. Soit $h = N(a)$ sa borne inférieure on a donc $\nu(x) = 1 \Rightarrow N(x) \geq h > 0$. Si $x \in E^*$ alors $N(\dfrac{x}{\nu(x)}) = 1$ et donc $N\left(\dfrac{x}{\nu(x)}\right) \geq h$ ce qui donne $h\nu(x) \leq N(x)$.

Proposition 17 Si $A \subset B(a,r)$ alors $||x - x_0|| = ||x - a + a - x_0|| \leq r + ||a - x_0||$ et A est contenu dans la boule de centre x_0 et de rayon $r + ||a - x_0||$.

Proposition 18 Étant en dimension finie toutes les normes sont équivalentes on peut donc choisir la norme du sup. Posons $u_n = (u_n^i)_{1\leq i\leq p}$, si la suite converge vers $l = (l_i)_{1\leq i\leq p}$ alors pour tout i on a $\left|u_n^i - l_i\right| \leq ||u_n - l||_\infty$ donc chaque composante converge vers la composante de la limite. Réciproquement si chaque composante (u_n^i) converge vers l_i alors $||u_n - l||_\infty = \left|u_n^{i_0} - l_{i_0}\right|$ et donc (u_n) converge vers $l = (l_i)$.

Proposition 19 Soit (x_n) une suite convergente vers a donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies ||x_n - a|| \leq \varepsilon$. Ainsi $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall p,q \in \mathbb{N} \quad p \geq n_0$ et $q \geq n_0 \implies ||x_p - x_q|| \leq ||x_p - a|| + ||x_q - a|| \leq 2\varepsilon$.

Proposition 20 Soit (x_n) une suite de cauchy donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall p,q \in \mathbb{N} \quad p \geq n_0$ et $q \geq n_0 \implies ||x_p - x_q|| \leq \varepsilon$ pour $\varepsilon = 1$ on obtient $\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall p,q \in \mathbb{N} \quad p \geq n_0 \implies ||x_p - x_{n_0}|| \leq 1$ ou $||x_p|| \leq ||x_{n_0}|| + 1$ pour $p \geq n_0$. Ainsi les éléments de la suite sont bornés à partir du rang n_0, de 1 à n_0 il n'y en a qu'un nombre fini donc la suite est bornée. Maintenant s'il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant vers a alors $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad p \geq n_0 \implies ||x_{\varphi(p)} - a|| \leq \varepsilon$ et $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall p,q \in \mathbb{N} \quad p \geq n_1$ et $q \geq n_1 \implies ||x_p - x_q|| \leq \varepsilon$. Formons $||x_n - a|| \leq ||x_n - x_{\varphi(p)}|| + ||x_{\varphi(p)} - a|| \leq 2\varepsilon$ si $p \geq n_0$ et $p \geq n_1$ et $\varphi(p) \geq n_1$ ce qui est possible car φ est croissante.

Théorème 2 Si E est un espace vectoriel de dimension finie sur K. Les suites des coordonnées d'une suite de cauchy sont des suites de cauchy dans K donc convergentes. Prendre par exemple la norme du *sup*, puique toutes les normes sont équivalentes ou bien utiliser l'uniforme continuité des projections. Ainsi la suite converge car ses composantes convergent.

Proposition 21 Admis.

Théorème 3 Partant d'un point a quelconque, considèrons la suite des itérés $x_n = f^n(a)$. On a $||f^n(a) - f^{n-1}(a)|| \leq k||f^{n-1}(a) - f^{n-2}(a)|| \leq k^{n-1}||f(a) - a||$. Ainsi $||f^{n+p}(a) - f^n(a)|| \leq \sum_{i=1}^{p} ||f^{n+i}(a) - f^{n+i-1}(a)||$ et donc $||f^{n+p}(a) - f^n(a)|| \leq \sum_{i=1}^{p} k^{n+i-1}||f(a) - a||$ et en utilisant la série géométrique : $||f^{n+p}(a) - f^n(a)|| \leq \dfrac{k^{n+p} - k^n}{1-k}||f(a) - a||$ ou $||f^{n+p}(a) - f^n(a)|| \leq k^n \dfrac{||f(a) - a||}{1-k}$. Or $k < 1$ et donc k^n tend vers 0 quand n tend vers l'infinie. Ceci prouve que la suite $(f^n(a))$ est une suite de cauchy dans E espace complet donc convergente. Soit c sa limite. Comme la suite $f^{n+1}(a)$ converge d'une part vers $f(c)$ et aussi vers c on a $f(c) = c$. Pour l'unicité : si on avait deux points fixes c,d alors $||f(c) - f(d)|| = ||c - d|| < ||c - d||$, contradiction. Il est à noter que quelque soit le point a la suite des itérés de a converge vers le point fixe.

Proposition 22 Si (u_n) est négligeable devant α_n alors $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies ||u_n|| \leq \varepsilon\alpha_n$, posons $\varepsilon_n = \dfrac{||u_n||}{\alpha_n}$ si $\alpha_n \neq 0$ et $\varepsilon_n = 0$ sinon. Ainsi $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies \varepsilon_n \leq \varepsilon$, ce qui prouve que (ε_n) tend vers 0. Pour la réciproque il suffit décrire que la limite est 0.

Proposition 23 On a bien entendu $u_n \sim u_n$. Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n - v_n = o(||u_n||)$ ce qui peut se traduire par $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies |||u_n|| - ||v_n||| \leq ||u_n - v_n|| \leq \varepsilon||u_n||$ ou encore $||v_n|| - \varepsilon||u_n|| \leq ||u_n|| \leq ||v_n|| + \varepsilon||u_n||$ ce qui donne $||u_n|| - \varepsilon||v_n|| \leq ||v_n|| \leq ||u_n|| + \varepsilon||v_n||$. Ce qui donne que $||u_n|| \leq (1+\varepsilon)||v_n||$ et en reportant $||u_n - v_n|| \leq \varepsilon(1+\varepsilon)||v_n||$. Enfin la transitivité : On utilisera $||u_n - w_n|| = ||u_n - v_n + v_n - w_n|| \leq ||u_n - v_n|| + ||v_n - w_n||$ et $||v_n|| \leq (1+\varepsilon)||w_n||$.

Proposition 24 Si $l = 0$ alors la suite est nulle à partir d'un certain rang donc converge vers 0. Sinon on a $\lim \dfrac{u_n}{l} = 1$ ce qui donne $\lim u_n = l$. Pour la réciproque si $l \neq 0$ alors $lim\dfrac{u_n}{l} = 1$ et $u_n \sim l$.

Proposition 25 Si $(\alpha_n) \sim (\beta_n)$ alors les deux suites ont le même signe à partir d'un certain rang, on peut donc les supposer positifs. D'autre part $\alpha_n - \beta_n = \varepsilon_n\beta_n$ ou $\alpha_n = (1+\varepsilon_n)\beta_n$ avec $\lim \beta_n = 0$.

Proposition 26 Soit u,v dans $\mathcal{B}_o(a,r)$. Il faut montrer que le segment d'extrémités u,v est dans cette boule. C'est à dire pour t réel avec $0 \leq t \leq 1$, on a $tu + (1-t)v \in \mathcal{B}_o(a,r)$. Or $a = ta + (1-t)a$ et $d(a, tu + (1-t)v) = \|ta + (1-t)a - (tu + (1-t)v)\| =$
$= \|t(a-u) + (1-t)(a-v)\| \leq |t|\,\|a-u\| + |1-t|\,\|a-v\|$
$\leq (t + 1 - t)r \leq r$.

Proposition 27 Si A est ouvert et $a \in A$ alors il existe $B_o(a,\varepsilon) \subset A$ donc a est intérieur à A. Si tous les points de A sont intérieurs à A alors si $a \in A$ il existe une boule $B_o(a,\varepsilon \subset A$.

Proposition 28 Si a est adhérent à A alors $\forall n$ la boule $\mathcal{B}\left(a,\frac{1}{n}\right)$ rencontre A ce qui nous permet de prendre un $x_n \in \mathcal{B}\left(a,\frac{1}{n}\right) \cap A$ on a alors $\lim x_n = a$. Si a n'est pas adhérent alors il est intérieur au complémentaire de A ce qui donne l'existence d'une boule $\mathcal{B}(a,r)$ ne rencontrant pas A. Si donc il existait une suite (x_n) de A ayant pour limite a, a partir d'un certain rang on aurait $x_n \in \mathcal{B}(a,r)$ ce qui contredit que cette boule ne rencontre pas A. Ainsi il n'existe pas de telle suite.

Proposition 29 Soit F un fermé et (x_n) une suite de F ayant pour limite dans E l'élément x. Si $x \notin F$ alors il appartient à son complémentaire qui est ouvert donc il existe $\mathcal{B}(x,r)$ ne rencontrant pas F. Comme $\lim x_n = x$ à partir d'un certain rang on est dans $\mathcal{B}(x,r)$ et donc plus dans F d'où contradiction. ($\exists n_0 : n \geq n_0 \Longrightarrow \|x_n - x\| < r$). Si F n'est pas fermé considèrons encore $O = CF$, il existe $\ell \in O$ qui n'est le centre d'aucune boule contenue dans O (sinon O est ouvert et F fermé). Choisissons alors $x_n \in F \cap \mathcal{B}\left(\ell,\frac{1}{n}\right)$ on a $\lim x_n = \ell$ et $\ell \notin F$.

Proposition 30 On prend des limites différentes l,l' et en écrivant que $N(l-l') = N(l - f(x) + f(x) - l') \leq N(f(x) - l) + N(f(x) - l')$ on montre que cette quantité peut être rendu aussi petite que l'on veut, elle est donc nulle.

Proposition 31 Pour la partie directe on a $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in A \quad ||x-a|| \leq \eta \implies N(f(x) - \ell) \leq \varepsilon$.. En prenant à l'arrivée la norme du sup on obtient $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in A \quad ||x-a|| \leq \eta \implies \forall i \in [1..n]\, |f_i(x) - \ell_i| \leq \varepsilon$. c'est à dire que la limite de f_i est ℓ_i. Pour la réciproque il suffit de remarquer que $||f(x) - \ell||_\infty = |f_{i_0}(x) - \ell_{i_0}|$ pour un certain i_0.

Proposition 32 On a $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in A \quad ||x-a|| \leq \eta \implies N(f(x) - l) \leq \varepsilon$. Avec $\varepsilon = \frac{1}{n}$ et en prenant à chaque fois un $x_n \in A$ tel que $N(f(x_n - l) \leq \frac{1}{n}$ on a que $limf(x_n) = l$ donc l est adhérent à $f(A)$.

Proposition 33 On écrit $N((f+g)(x) - l - l') \leq N(f(x) - l) + N(g(x) - l')$ les termes de droite tendent vers 0 quand x tend vers a donc aussi le terme de gauche par encadrement.

Proposition 34 On écrit $N(\lambda(x)f(x) - \alpha l) = N((\lambda(x) - \alpha)f(x) + (f(x) - l)\alpha$ et en utilisant que f est bornée au voisinage de a on obtient le résultat par encadrement.

Proposition 35 Avec les hypothèses $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in A \quad ||x-a|| \leq \eta \implies \alpha - \varepsilon \leq f(x) \leq \alpha + \varepsilon$ en prenant $\varepsilon = \alpha/2$ on a que f est non nulle au voisinage de a. On écrit : $\left|\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{\alpha}\right| = \dfrac{|f(x) - \alpha|}{|f(x)\alpha|}$ et en minorant le dénominateur par $f(x) \geq \alpha/2$ pour x assez proche de a, on obtient le résultat.

Proposition 36 Traduisons $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta_1 \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall y \in B \quad ||y-b|| \leq \eta \implies N(g(y) - l) \leq \varepsilon$ et $\exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in A \quad ||x-a|| \leq \eta \implies N(f(x) - b) \leq \eta_1$ d'où $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in A \quad ||x-a|| \leq \eta \implies N(g \circ f(x) - l) \leq \varepsilon$.

Proposition 37 C'est exactement l'application de ces résultats pour les limites.

Proposition 38 Si f est continue en a alors $\forall \varepsilon : \exists \eta : \forall x \in A : ||x-a|| \leq \eta \Rightarrow ||f(x) - f(a)|| \leq \varepsilon$. Donc si (u_n) tend vers a on a $\forall \varepsilon : \exists n_0 : \forall n : n \leq n_0 ||u_n - a|| \leq \eta$ et donc $||f(u_n) - f(a)|| \leq \varepsilon$ ceci prouve que $(f(u_n)$ tend vers $f(a)$.
Réciproquement Par contraposée : si f n'est pas continue en a alors $\exists \varepsilon : \forall \eta : \exists x \in A : ||x-a|| \leq \eta$ et $||f(x) - f(a)|| \geq \varepsilon$ prenons $\eta = \frac{1}{n}$ on obtient une suite (x_n) de A tel que x_n converge vers a car $||x-a|| \leq \frac{1}{n}$ et $(f(x_n)$ ne tend pas vers $f(a)$ puisque $||f(x_n) - f(a)|| \geq \varepsilon$.

Proposition 39 Pour montrer que si F est fermé alors $\overset{-1}{f}(F)$ est fermé il suffit de prendre une suite de (x_n) de $\overset{-1}{f}(F)$ c'est à dire $f(x_n) \in F$ convergeant dans E vers ℓ et montrer que $\ell \in \overset{-1}{f}(F)$. Or (x_n) converge vers ℓ et f est continue donx $f(x_n) \in F$ converge vers $f(\ell)$ et comme F est fermé $f(\ell) \in F$ donc $\ell \in \overset{-1}{f}(F)$. Pour les ouverts on passe au complémentaire.

Théorème 4 (1) $\Rightarrow$ (2) : Si u est continue elle est continue en 0.
(2) $\Rightarrow$ (3) : si u est continue en 0 alors $\exists\eta\ :\ \forall x\ :\ ||x|| \leq \eta \Rightarrow ||u(x)|| \leq 1$. Maintenant pour x non nul quelconque dans E on a $||\eta\frac{x}{||x||}|| \leq \eta$ et donc $||u\left(\eta\frac{x}{||x||}\right)|| \leq 1$ ou $||u(x)|| \leq \frac{1}{\eta}||x||$. Si $x = 0$ la relation est encore vraie.
(3) $\Rightarrow$ (4) : en fait (3) donne que u est "lipschitzienne" en 0 mais pour une application linéaire on s'y ramène. En effet $||u(x) - u(y)|| = ||u(x - y)|| \leq C||x - y||$.
(4) $\Rightarrow$ (5) : dejà vu.
(5) $\Rightarrow$ (6) : si u est uniformément continue alors $\exists\eta\ :\ \forall x\ :\ ||x|| \leq \eta \Rightarrow ||u(x)|| \leq 1$ alors pour un x de la boule unité on a $||\eta u(x)|| \leq 1$ ou $||u(x)|| \leq \frac{1}{\eta}$. Ainsi u est bien bornée sur la boule unité.
(6) $\Rightarrow$ (7) : La sphère unité est contenue dans la boule unité.
(7) $\Rightarrow$ (8) : Soit une suite (x_n) tendant vers 0. La suite $y_n = \frac{x_n}{||x_n||}$ si $x_n \neq 0$ et $x_n = u$ pour n'importe quel vecteur u de norme 1 est dans la sphère unité. Ainsi $||u(y_n)|| \leq C$ ou $||u(x_n|| \leq C||x_n||$ même si $x_n = 0$. Par encadrement on en déduit que $(u(x_n))$ tend vers 0.
(8) $\Rightarrow$ (1) : (8) prouve que u est continue en 0. Mais pour une fonction linéaire la continuité en 0 donne la continuité partout. En effet on a $\forall\varepsilon\ \exists\eta\ :\ \forall x,y\ :\ ||x - y|| \leq \eta \Rightarrow ||u(x - y)|| \leq \varepsilon$ ou $\forall\varepsilon\ \exists\eta\ :\ \forall x,y\ :\ ||x - y|| \leq \eta \Rightarrow ||u(x) - u(y)|| \leq \varepsilon$ ce qui donne même l'uniforme continuité.

Proposition 40 Les fonctions coordonnées de u sont des fonctions polynômiales en les coordonnées donc continues. Il en résulte que u est continue comme somme de fonctions continues.

Proposition 41 On a par exemple $\mathcal{L}_c(E,F) = \mathcal{L}(E,F) \cap \mathcal{L}\rangle(E,F)$ où $\mathcal{L}\rangle$ est l'espace vectoriel des fonctions lipschitziennes. Comme intersection d'espaces vectoriels c'est un espace vectoriel. $\mathcal{L}_c(E)$ est un espace vectoriel contenant l'identité et stable par la composé car la composé de deux fonctions continues est continue, c'est donc une sous-algèbre.

Proposition 42 On sait que si u est continue alors il existe C tel que $\forall x \in E\ :\ ||u(x)|| \leq C||x||$ donc $\sup_{x\in E-\{0\}} \frac{||u(x)||}{||x||}$ est fini.

Proposition 43 Par définition $|||u||| = \sup_{x\in E-\{0\}} \frac{||u(x)||}{||x||}$ donc $\forall x \in E\ :\ ||u(x)|| \leq |||u|||\,||x||$.

Proposition 44 Si $|||u||| = 0$ alors $\forall x \in E\ :\ ||u(x)|| \leq 0$ donc u est nulle.
On a pour les applications linéaires continues u,v on a, pour tout x de E $||u(x) + v(x)|| \leq ||u(x)|| + ||v(x)|| \leq (|||u||| + |||v|||)\,||x||$ donc $|||u + v||| \leq |||u||| + |||v|||$.
Enfin de même $|||\lambda u||| = \lambda\,|||u|||$.

Proposition 45 On a $\forall x \in E$ $||v(u(x))|| \leq |||v|||\,||||u(x) \leq |||v|||\,|||u|||\,||x||$ d'où le résultat en passant au *sup*.

Proposition 46 C'est la proposition précédente.

Proposition 47 1) donne 2). 2) donne 3) car la continuité en 0 donne l'existence de $\forall\varepsilon\eta$ tel que $||(x,y)|| \leq \eta \implies ||B(x,y)|| \leq \varepsilon$. Soit maintenant un (x,y) dans $\prod_{i=1}^{2} B_f(0,1)$ le vecteur $\eta(x,y)$ à une norme inférieur à η. Ainsi $||B(\eta x,\eta y)|| = \eta^2||B(x,y)|| \leq \varepsilon$ et par suite $||B(x,y)|| \leq \frac{\varepsilon}{\eta^2}$. Ceci montre que B est bornée sur $\prod_{i=1}^{2} B_f(0,1)$. 3) donne 4). Pour 4) donne 5) : Soit $X = (x,y) \in E \times F$, on peut supposer $x \neq 0$ et $y \neq 0$ car sinon 5) est vrai. Le vecteur $\left(\frac{x}{||x||},\frac{y}{||y||}\right)$ est dans le produit des sphères unités de rayon 1. Si C est un majorant de B sur celles-ci on aura $\forall x,y$: $||B(x,y)|| \leq C||x||||y||$. 5) donne 6) en utilisant l'existence de limite par encadrement. 6) donne 1) car si (x_n) et (y_n) sont des suites de E et F qui convergent vers x et y alors les suites $(x_n - x)$ et $(y_n - y)$ convergent vers 0. D'après 6) on a donc $B(x_n - x,y_n - y)$ qui tend vers 0. C'est à dire $-B(x_n - x,y) + B(x_n,y_n) - B(x,y)$ tend vers 0. On a $B(x_n - x,y)$ qui tend vers $B(0,y) = 0$ et donc $B(x_n,y_n)$ tend vers $B(x,y)$. Cela prouve que B est séquentiellement continue donc continue.

Proposition 48 En prenant des bases on a que B est une fonction polynômiale en les coordonnées, donc continue.

Proposition 49 Il suffit de montrer que de toute suite de F, fermé, borné de E on peut extraire une suite convergente. Nous prenons une suite (X_n) de K^p chaque vecteur X_n à p composantes $x_n^1,\cdots,x_n^p$. Les projections coordonnées p_i sont continues donc $p_i(F)$ est un compact de K. Partant de la suite $(p_p(X_n) = (x_n^p)$ on peut extraire une suite convergente $x_{\varphi_p(n)}$. Repartant de la suite $X_{\varphi_p(n)}$ on peut extraire de x_n^{p-1} une suite convergente. Ainsi de suite jusqu'à épuisement des coordonnées (en nombre fini). On trouve ainsi une suite extraite de (X_n) dont chaque composante converge, donc elle converge pour la norme infinie. Nous avons utilisé Bolzano-Weierstrass dans K.

Théorème 5 E étant de dimension fini est homéomorphe á K^n, on sait le résultat pour K^n muni de la norme infinie. Mais toutes les normes étant équivalentes nous avons les mêmes fermés, bornés, d'où le résultat pour E espace vectoriel de dimension finie muni de n'importe quelle norme.

Théorème 6 Si K est compact de toute suite de K on peut extraire une suite convergente dans K. Soit une suite de $f(K)$ elle s'écrit $y_n = f(x_n)$ avec $x_n \in K$ de (x_n) on peut extraire une suite $(x_{\varphi(n)})$ convergente vers $\ell \in K$. f étant continue $f(x_{\varphi(n)})$ converge vers $f(\ell)$ et il reste à montrer que $f(\ell \in f(K)$, ce qui est admis.

Proposition 50 Soit K le compact on a donc $f(K)$ est compact donc borné soit $m = inf f(K)$ et $M = Sup f(K)$. m,M sont des limites de points de $f(K)$ qui est fermé, donc $m,M \in K$.

7.13 Exercices

7.13.1 Indications

Exercice 1 $0 = x - x$ puis $x - x = 0$.

Exercice 2 Utiliser la linéarité de u puis bien écrire les définitions.

Exercice 3 Trouver une inégalité.

Exercice 4 Composer les injections.

Exercice 5 Trouver à la main les constantes des inégalités.

Exercice 6 Trouver une suite sui tend vers 0 pour l'une et pas pour l'autre.

Exercice 7 Si $a \neq b$ alors $||a - b||/3 > 0$.

Exercice 8 Démontrer qu'elle est de cauchy.

Exercice 9 Penser aux accroissements finis.

Exercice 10 Appliquer les définitions.

Exercice 11 Vérifier que c'est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites.

Exercice 12 Prendre un élément de l'un et montrer qu'il est dans l'autre.

Exercice 13 Une égalité d'ensembles se montre par double inclusion.

Exercice 14 Monter que l'application qui à $t \in [0{,}1]$ associe $||x + t(y - x)||$ est convexe.

Exercice 15 Pour cela on se débarassera des valeurs absolues ou du *sup* en se plaçant dans des domaines bien choisis.

Exercice 16 Procéder par double inclusion.

Exercice 17 Utiliser l'inégalité $|x_i - a_i| \leq ||x - a||_\infty$.

Exercice 18 Trouver des suites tendant vers 0 dont leurs images n'ont pas la même limite.

Exercice 19 Utiliser les suites.

Exercice 20 En multipliant un vecteur par l'inverse de sa norme on obtient un vecteur unitaire.

Exercice 21 Le *sup* est le plus grand de tous.

Exercice 22 Trouver une application bilinéaire.

Exercice 23 Considérer la suite (S_n) d'éléments de E définie par: pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est la suite $(\delta_{np})_{p\in\mathbb{N}}$ où δ est le symbole de Kronecker.

Exercice 24 C'est la généralisation du théorème des segments emboités.

Exercice 25 Utiliser le fait que F est fermé et que les parties fermées et bornées de F sont compactes.

Exercice 26 Procéder par double encadrement.

Exercice 27 Même indication.

Exercice 28 Utiliser le fait que A est fermé.

Exercice 29 Utiliser le critère séquentiel d'un compact.

Exercice 30 A quelle condition une partie d'un espace complet est-il complet ?

Exercice 31 Partie directe et réciproque, bien choisir sa norme.

Exercice 32 Procéder par multi inégalités. Un peu difficule penser à l'adhérence d'une partie (ensemble des limites de points de la partie).

Exercice 33 Vérifier les trois propriétés des normes en utilisant les propriétés de u.

Exercice 34 a) Si tel était le cas alors $F = E$. b) En prenant la caractérisation par les suites, et en passant par les coordonnées on se ramène au cas d'une droite. c) Prendre un contre-exemple.

Exercice 35 Vérifier. Discuter pour supprimer la valeur absolue, calculer l'intégrale.

Exercice 36 En vérifiant les trois propriétés trouver ce qui bloque. Pour b) il suffit de trouver des conditions suffisantes et montrer qu'elles sont nécessaires.

Exercice 37 Le vérifier. Essayer de trouver des inégalités.

Exercice 38 Trouver une suite.

Exercice 39 Le vérifier. Trouver des inégalités et des suites.

Exercice 40 a) Trouver l'inverse en vous inspirant d'une fameuse égalité. b) Que vérifie une valeur propre.

Exercice 41 Utiliser que K est complet pour trouver la limite, puis montrer que la suite converge vers cette limite pour la norme uniforme.

Exercice 42 Vous pouvez chercher le sup.

Exercice 43 Utiliser la compacité. Utiliser la fonction $\varphi(x) = f(x) - f(-x)$.

Exercice 44

Exercice 45 Utiliser le polynôme caractéristique pour construire une suite de matrices diagonalisables, regarder son complémentaire.

Exercice 46 Si $f \neq 0$, il existe $a \in E$ tel que $f(a) = 1$, le complémentaire de $f^{-1}(1)$ est alors un ouvert contenant 0.

Exercice 47 Calculer la norme : majorer et montrer que le majorant est atteint.

Exercice 48 Majorer et montrer que le majorant est atteint.

7.13.2 Corrigés

Exercice 49 E_p est bien un K-espace vectoriel, sev de $C(I,K)$ car E_p est non vide ($0 \in E_p$) et si x,y sont des éléments de E_p alors l'inégalité : $|x+y|^2 \leq 2|x|^2+2|y|^2$ prouve que la somme est dans E_p, l'opération externe ne pose pas de problème. E_p est préhilbertien car $\langle x,y\rangle = \int_I \overline{x(t)}y(t)p(t)dt$ est bien linéaire à droite, semi-linéaire à gauche et $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$, $\langle x,x\rangle \geq 0$ car p est positive et enfin $\langle x,x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ car pour tout t de I la fonction $|x|^2 p$ est continue et positive.

Exercice 50 Posons $V_n = vect(1,X,\cdots,X^n)$ la construction s'effectue par $P_0 = 1$ et $P_{n+1} = X^n - p_{V_n}\left(X^{n+1}\right)$ où p_{V_n} est la projection de $K[X]$ sur V_n. Ainsi on est assuré que les P_n sont bien orthogonaux et $P_{n+1} \in V_{n+1}$. Pratiquement on pose $P_{n+1} = X^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i$ et on résoud en λ_i le système pour $i = 1..n : 0 = \left\langle X^{n+1},P_i\right\rangle + \lambda_i \langle P_i,P_i\rangle$. Il ne reste plus qu'à normer les polynômes : $P'_n = \|P_n\|^{-1} P_n$.

1 Pour tout t on a P_n orthogonal Q polynôme de degré inférieur strictement à n car celui-ci est combinaison linéaire des $(P_i)_{0\leq i<n}$.
P_n et tP_{n-1} ont le même terme de plus haut degré car $P_n = X^n + \cdots$, ainsi $d^0(P_n - tP_{n-1}) < n$ et $\langle tP_{n-1},P_n\rangle = 0$.
On a $\langle xy,z\rangle = \langle \overline{xy}z,1\rangle = \langle x,y\overline{z}\rangle$
2 On a par orthogonalité de P_n et P_0 : $\int_I P_n p = 0$ donc P_n change de signe au moins une fois dans l'intérieur de I. Plus généralement soit $(t_1,\cdots,t_r)$ avec $t_i < t_{i+1}$ la suite des racines de P_n intérieurs à I en lesquelles P_n change de signe. Si $r < n$ alors on pose $Q(t) = (t-t_1)(t-t_2)\cdots(t-t_r)$ et le polynôme P_nQ a un signe constant sur I d'où $\langle P_n,Q\rangle \neq 0$ ce qui contredit le 1-1 et donc $r = n$.
3 Le polynôme $P_n - tP_{n-1}$ est de degré $< n$ et donc $P_n - tP_{n-1} = \sum_{i\leq n-1} c_i P_i$ avec pour tout $i \leq n-1 : -\langle tP_{n-1},P_i\rangle = c_i \langle P_i,P_i\rangle$. La question 1-3 donne $\langle tP_{n-1},P_i\rangle = \langle P_{n-1},tP_i\rangle$. Donc si $i+1 < n-1$ ou $i < n-2$ ce produit scalaire est nul et $c_i = 0$ sauf pour $i = n-2$ et $n-1$.
Pour $i = n-2$ la remarque $1-2$ donne $-\langle P_{n-1},P_{n-1}\rangle = c_{n-2}\langle P_{n-2},P_{n-2}\rangle$ et donc $c_{n-2} < 0$.
Pour $i = n-1$ la relation $-\langle tP_{n-1},P_i\rangle = c_i\langle P_i,P_i\rangle$ montre seulement que $c_{n-2} \in \mathbb{R}$.
Ce qui donne $P_n = tP_{n-1} + c_{n-1}P_{n-1} - |c_{n-2}| P_{n-2}$.

Exercice 51
- $\left(x^2-1\right)^n$ est un polynôme de degré n donc $D^n\left[\left(x^2-1\right)^n\right]$ est de degré n. Nous savons que la dérivée d'une fonction paire $f(x) = f(-x)$ est impaire $f'(x) = -f'(-x)$ et que la dérivée d'une fonction paire est impaire, ainsi L_n a la parité de n.
- On a : $L_0(x) = 1, L_1(x) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(x^2-1\right) = x, L_2(x) = \frac{1}{8}\frac{d^2}{dx^2}\left(x^4-2x^2+1\right) = \frac{1}{8}\frac{d}{dx}\left(4x^3-4x\right) = \frac{1}{8}\left(12x^2-4\right) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$. Le coefficient de x^n est obtenu en dérivant x^{2n}, n fois, soit $2n(2n-1)\cdots(2n-(n-1)) = 2n(2n-1)\cdots(n+1)$ ou $\frac{2n!}{n!}$ et en multipliant par $\frac{1}{2^n n!}$ on obtient $\frac{2n!}{2^n(n!^2)}$. Pour $n = 1$ on trouve 1 et pour $n = 2$, $\frac{3}{2}$.
- On a $L_n(x) = \frac{1}{2^n n!}D^n\left[(x-1)^n(x+1)^n\right] = \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[(x-1)^n\right]^{(k)}\left[(x+1)^n\right]^{(n-k)} =$
$\frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} n(n-1)\cdots(n-k+1)(x-1)^{n-k}\, n(n-1)\cdots(n-(n-k)+1)(x+1)^{n-(n-k)}$
et ainsi $L_n(1) = \frac{1}{2^n n!}\binom{n}{n}n!2^n = 1$ et $L_n(-1) = \frac{1}{2^n n!}\binom{n}{0}(-2)^n n! = (-1)^n$.
  - $w'_n(x) = n2x\left(x^2-1\right)^{n-1}$ et $\left(x^2-1\right)w'_n(x) - 2nxw_n(x) = 0$.
  - En dérivant n+1 fois on a : $D^{n+1}\left[\left(x^2-1\right)w'_n(x)\right] - 2nD^{n+1}(xw_n) = 0$ soit $\left(x^2-1\right)w_n^{(n+2)} + 2(n+1)xw_n^{(n+1)} + 2\frac{(n+1)n}{2}w_n^{(n)} - 2nxw_n^{(n+1)} - 2n(n+1)w_n^{(n)} = 0$ ou $\left(x^2-1\right)w_n^{(n+2)} + 2xw_n^{(n+1)} - n(n+1)w_n^{(n)} = 0$ ce qui donne $\left(x^2-1\right)L''_n + 2xL'_n - n(n+1)L_n = 0$.

- $L'_n = xL'_{n-1} + nL_{n-1}$ donne $L''_n = L'_{n-1} + xL''_{n-1} + nL'_{n-1} = (n+1)\,L'_{n-1} + xL''_{n-1}$. En utilisnt l'équation différentielle précédente on a $\left(x^2-1\right)(n+1)\,L'_{n-1} + \left(x^2-1\right)xL''_{n-1} + 2xL'_n - n\,(n+1)\,L_n = 0$ et en recommençant à utiliser l'équation différentielle pour L''_{n-1}: $\left(x^2-1\right)(n+1)\,L'_{n-1} - 2x^2L'_{n-1} + n\,(n-1)\,xL_{n-1} + 2xL'_n - n\,(n+1)\,L_n = 0$ ou $(n+1)\left(x^2-1\right)L'_{n-1} - 2x^2L'_{n-1} + (n-1)\,xL'_n - (n-1)\,x^2L'_{n-1} + 2xL'_n - n\,(n+1)\,L_n = 0$. Par simplification $-(n+1)\,L'_{n-1} + (n+1)\,xL'_n - n\,(n+1)\,L_n = 0$ ce qui donne $nL_n = xL'_n - L'_{n-1}$.
- On a $\left\{\begin{array}{c} xL'_n - L'_{n-1} = nL_n \\ L'_n - xL'_{n-1} = nL_{n-1}\end{array}\right.$ en éliminant L'_n puis L'_{n-1} on obtient $\left\{\begin{array}{c}\left(x^2-1\right)L'_{n-1} = -nxL_{n-1} + nL_n \\ \left(x^2-1\right)L'_n = nxL_n - nL_{n-1}\end{array}\right.$ d'où $\left(x^2-1\right)L'_{n-1} = -nxL_{n-1} + nL_n = (n-1)\,xL_{n-1} - (n-1)\,L_{n-2}$. Ou $nL_n = (2n-1)\,xL_{n-1} - (n-1)\,L_{n-2}$.
- On a $I_0 = 2$ et $I_n = \int_{-1}^{+1} 1\left(1-x^2\right)dx = \left[x\left(1-x^2\right)^n\right]_{-1}^{+1} + n\int_{-1}^{+1} 2x^2\left(1-x^2\right)^{n-1}dx$ ce qui donne $(1+2n)\,I_n = 2nI_{n-1}$ et $I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1}$. Pae récurrence cela donne $I_n = \dfrac{2n2\,(n-1)\cdots 2.1}{(2n+1)\,(2\,(n-1)+1)\cdots 3}2 = \dfrac{2^{2n+1}\,(n!)^2}{(2n+1)!}$.
- Si $d^0(Q) < n$ alors $\int_{-1}^{+1} D^n\left(x^2-1\right)^n Q(x)\,dx = -\int_{-1}^{+1} D^{n-1}\left(x^2-1\right)^n Q'(x)\,dx = \cdots = (-1)^n\int_{-1}^{+1}\left(x^2-1\right)^n D^nQ(x)\,dx = 0$.
- Si $m \neq n$ disons $m < n$ alors $\int_{-1}^{+1} L_n(x)\,L_m(x)\,dx = 0$ et si $m = n$ alors $\int_{-1}^{+1} L_n^2(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} L_n(x)\,L_n(x)\,dx = \int_{-1}^{+1}\left(x^2-1\right)^n D^{2n}L_n(x)\,dx = \int_{-1}^{+1}\left(x^2-1\right)^n 2n!dx = \dfrac{(2n)!2^{2n+1}\,(n!)^2}{(2n+1)!}$ en multipliant par le coefficient et en simplfiant on trouve $\frac{2}{2n+1}$.

Exercice 52 – P_0 est de degré 0 et si pour $k \leq n-1$ on suppose que P_k est de degré k alors P_n est la différence d'un polynôme de degré n et d'un polynôme de degré $n-2$ il est donc de degré n.

- $P_n(\cos\theta) = \dfrac{\sin(n+1)\,\theta}{\sin\theta}$. La formule est vraie au rang0 et 1. Supposons-la vraie au rang $n \geq 2$, $P_{n+1}(2\cos\theta) = 2\cos\theta\dfrac{\sin(n+1)\,\theta}{\sin\theta} - \dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta}\left(2\cos\theta\sin(n+1)\,\theta - \sin n\theta\right)$ or en utilisant la formule $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a\cos b$ on a $2\cos\theta\sin(n+1)\,\theta - \sin n\theta = \cos\theta\sin(n+1)\,\theta + \cos(n+1)\,\theta\sin\theta = \sin(n+2)\,\theta$ d'où $P_{n+1}(2\cos\theta) = \dfrac{\sin(n+2)\,\theta}{\sin\theta}$.
- On a $-2\sin\theta P'_n(2\cos\theta) = (n+1)\dfrac{\cos(n+1)\,\theta}{\sin\theta} - \dfrac{\sin(n+1)\,\theta\cos\theta}{\sin^2\theta}$ soit $-2P'_n(2\cos\theta) = (n+1)\dfrac{\cos(n+1)\,\theta}{\sin^2\theta} - \dfrac{\sin(n+1)\,\theta\cos\theta}{\sin^3\theta}$. De la même formule au rang en dessous on a : $-2\sin\theta P'_{n-1}(2\cos\theta) = \dfrac{n\cos n\theta}{\sin\theta} - \dfrac{\sin n\theta\cos\theta}{\sin^2\theta}$ soit $2\cos\theta P'_n(2\cos\theta) = -(n+1)\dfrac{\cos(n+1)\,\theta\cos\theta}{\sin^2\theta} + \dfrac{\sin(n+1)\,\theta\cos^2\theta}{\sin^3\theta}$. Formons la quantité $2\cos\theta P'_n(2\cos\theta) - 2P'_{n-1}(2\cos\theta) = \Delta$. Avec $2\cos\theta P'_n(2\cos\theta) = -\dfrac{n\cos(n+1)\,\theta\cos\theta}{\sin^2\theta} - \dfrac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\left(\cos(n+1)\,\theta\sin\theta - \sin(n+1)\,\theta\cos\theta\right) = -\dfrac{n\cos(n+1)\,\theta\cos\theta}{\sin^2\theta} + \dfrac{\sin n\theta\cos\theta}{\sin^3\theta}$ on obtient $\Delta = -\dfrac{\cos(n+1)\,\theta\cos\theta}{\sin^2\theta} + \dfrac{\sin n\theta\cos\theta}{\sin^3\theta} - \dfrac{n\cos n\theta}{\sin^2\theta} - \dfrac{\sin n\theta\cos\theta}{\sin^3\theta} = \frac{n}{\sin^2\theta}\left(\cos n\theta - \cos n\theta\cos^2\theta + \sin n\theta\sin\theta\cos\theta\right)$
$= \frac{n}{\sin^2\theta}\left(\cos n\theta - \cos n\theta + \cos n\theta\sin^2\theta + \sin n\theta\sin\theta\cos\theta\right) = \frac{n}{\sin^2\theta}\left(\cos n\theta\sin^2\theta + \sin n\theta\sin\theta\cos\theta\right) = \frac{n}{\sin^2\theta}\left(\sin\theta\sin(n+1)\,\theta\right) = nP_n(2\cos\theta)$.

- Les zéros de P_n sont les zéros de $\sin(n+1)\,\theta$ c'est à dire $(n+1)\,\theta = k\pi$ ou $\theta_k = \frac{k}{n+1}\pi$ on a bien n zéros.

- Le polynôme $nP_n - xP'_n + 2P'_{n-1}$ est un polynôme de degré n qui est nul pour tout θ de $]0,\pi[$ en $2\cos\theta$ donc sur tout $]-2,+2[$ d'où l'égalité.

  - De la première relation on a $nP'_n = P'_n + xP''_n - 2P''_n$ d'où $(n-1)\,P'_n = xP''_n - 2P''_n$.
  - De $P_n = xP_{n-1} - P_{n-2}$ on a en dérivant $P'_n = P_{n-1} + xP'_{n-1} - P'_{n-2}$ puis $P''_n = 2P'_{n-1} + xP''_{n-1} - P''_{n-2}$ or la deuxième relation donne $(n-2)\,P'_{n-1} = xP''_{n-1} - 2P''_{n-2}$ d'où $-P''_{n-2} = \frac{n-2}{2}P'_{n-1} - \frac{x}{2}P''_{n-1}$. Ainsi $P''_n = 2P'_{n-1} + xP''_{n-1} + \frac{n-2}{2}P'_{n-1} - \frac{x}{2}P''_{n-1}$ soit $2P''_n = (n+2)\,P'_{n-1} + xP''_{n-1}$.

- $2P''_n = xP''_{n-1} + (n+2)\,P'_{n-1}$ or $P''_{n-1} = \frac{x}{2}P''_n - \frac{n-1}{2}P'_n$ et $P'_{n-1} = \frac{x}{2}P'_n - \frac{n}{2}P_n$. Ainsi $2P''_n = \frac{x^2}{2}P''_n - \frac{n-1}{2}xP'_n + \frac{(n+2)}{2}xP'_n - \frac{n(n+2)}{2}P_n$ soit $\left(4-x^2\right)P''_n = 3xP'_n - n\,(n+2)\,P_n$ et l'équation différentielle $\left(4-x^2\right)P''_n - 3xP'_n + n\,(n+2)\,P_n = 0$

Exercice 53 Nous avons montré dans le cours que nous avions bien des normes, seule ν_2 est euclidienne et l'inégalité triangulaire provient de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Nous avons $\nu_0(x) \leq \nu_1(x)$ car pour tout i : $|x_i| \leq \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |x_i|$. Ensuite $\left(\displaystyle\sum_i |x_i|\right)^2 = \displaystyle\sum_i\sum_j |x_i|\,|x_j| \leq \frac{1}{2}\sum_i\sum_j \left(|x_i|^2 + |x_j|^2\right) \leq \frac{1}{2}\,(n+1)\,\nu_2^2\,(x)$ en utilisant $\frac{n+1}{2} \leq n$ nous obtenons le résultat. Enfin en majorant chaque $|x_i|$ par le plus grand d'entr'eux on a la dernière comparaison. Les boules sont déterminées par $\nu\,(x) \leq k$, regardons les boules unitées : $\sup\left(|x|\,,|y|\right) \leq 1$ donne en décomposant dans chaque quadrant du plan un carré (si x,y sont positifs on sépare $x \leq y$ ce qui donne $y \leq 1$, puis $y \leq x$), dans le cas $n = 3$, un cube. Pour la seconde norme, $|x|+|y| \leq 1$, dans chaque quadrant on trouve des segments (x,y positifs et $x+y \leq 1$) ce qui donne un carré "penché". Pour la dernière c'est un cercle ou une vraie boule.

Exercice 54 Cette norme n'est rien d'autre que la norme ν_0 sur K^{n^2} a un coefficient près. De plus $A \times B = ((c_{ij}))$ avec $c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. On a pour tout indice $|a_{ik}b_{kj}| \leq \sup\limits_{i,j}|a_{ij}|\sup\limits_{i,j}|b_{ij}|$ et donc $|c_{ij}| \leq n\sup\limits_{i,j}|a_{ij}|\sup\limits_{i,j}|b_{ij}|$ ce qui donne $\|A \times B\| \leq \|A\|\,\|B\|$.

Exercice 55 Par invariance en changeant (x,y) en $(-x,-y)$ il suffit de considérer deux cas. Supposons $x \geq 0$ et $y \geq 0$ dans ce cas la boule unité donne par intégration $x + \frac{y}{2} \leq 1$. Si $x \geq 0$ et $y \leq 0$ l'étude de $x + ty \geq 0$ donne $t \leq \frac{x}{-y}$. Le nombre $\frac{x}{-y}$ n'appartient pas toujours à l'intervalle $[0,1]$. $\frac{x}{-y} \geq 0$ mais $\frac{x}{-y} \leq 1$ donne $x \leq -y$ et dans ce cas $n\,(x,y) = \int_0^{\frac{x}{-y}} x + ty + \int_{\frac{x}{-y}}^{1} -x - ty = \frac{x^2}{-y} + \frac{x^2}{2y} - x - \frac{x^2}{y} - \frac{y}{2} + \frac{x^2}{2y} = -2\frac{x^2}{y} + \frac{x^2}{y} - x - \frac{y}{2} = -\frac{x^2}{y} - x - \frac{y}{2}$. Faisonx la synthèse : dans la quadrant $x \geq 0, y \geq 0$ on trouve le segment d'équation $x + \frac{y}{2} \leq 1$, dans le demi quadrant $x \geq 0, y \leq 0$ et $x \geq -y$ le segment qui se recole $x + \frac{y}{2} \leq 1$, et dans le demi quadrant $x \geq 0, y \leq 0, x \leq -y$ on trouve l'ellipse $x^2 + xy + \frac{y^2}{2} + y \leq 0$. Nous obtenons là un bout d'éllipse d'axe $x = -\frac{y}{2}$ et $y = -2$ qui se reboute.

Exercice 56 Pour ν_1: Pour toute fonction f le réel $\nu_1\,(f)$ existe car f est continue sur $[0,1]$. On a $\nu_1(\lambda f) = \sup\limits_{x\in[0,1]}|\lambda f(x)|$ or pour tout x de $[0,1]$ on a $|\lambda f\,(x)| = |\lambda|\,|f\,(x)| \leq |\lambda|\,\nu_1(f)$ puis en prenant le sup à gauche on obtient $\nu_1(\lambda f) \leq \lambda\nu_1(f)$. Il faut recommencer en prenant l'égalité dans l'autre sens, pour obtenir l'égalité $\nu_1\,(\lambda f) = |\lambda|\,\nu_1\,(f)$. Pour l'inégalité triangulaire on part de la relation vraie pour tout x : $|f\,(x) + g\,(x)| \leq |f\,(x)| + |g\,(x)|$. Puis on prend le sup à droite et ensuite à gauche. La dernière propriété est vraie car $\nu_1\,(f) = 0$ donne pour tout x de $[0,1]$: $|f\,(x)| \leq \sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)| = 0$ et donc f est nulle sur tout l'intervalle. Pour ν_2, l'homogénéité, l'inégalité triangulaire ne posent pas de problème, enfin si $\nu_2(f) = 0$ alors $\displaystyle\int_0^1 e^x\,|f(x)|\,dx = 0$ et on en déduit que pour tout x de $[0,1]$: $e^x\,|f\,(x)| = 0$ car nous avons une fonction continue et positive, on en déduit que f est nulle sur $[0,1]$.

Il s'agit de calculer $\nu_1(f_n) = 1$ pour tout n. D'autre part $\nu_2(f_n) = \int_0^{\frac{1}{n}} (1-nx)\, e^x dx = e^{\frac{1}{n}} - 1 - \int_0^{\frac{1}{n}} xe^x dx = e^{\frac{1}{n}} - 1 - [xe^x]_0^{\frac{1}{n}} + [e^x]_0^{\frac{1}{n}} = 2e^{\frac{1}{n}} - 2 - \frac{1}{n} e^{\frac{1}{n}}$, cette suite réelle tend vers 0. Nous pouvons en déduire que les normes ne sont pas équivalentes néanmoins nous avons $\nu_2(f) \leq (e-1)\, \nu_1(f)$. Ainsi toute suite convergeant vers 0 pour ν_1 converge vers 0 pour ν_2.

Exercice 57 Pour montrer que E est un sev, il suffit de voir que E n'est pas vide ($0 \in E$), et que la somme et $\lambda \cdot f$ de fonctions lipschitziennes est lipschitzienne, nous l'avons fait en cours.
Nous avons déja montré que M est une norme sur l'ensemble des fonctions continues sur I, ici on est sur un sev et on a donc aussi une norme. Pour N, pour les deux premières propriétés il suffit de les vérifier pour K. On a $K(\lambda f) = |\lambda|\, K(f)$, pour l'inégalité triangulaire on part de $\dfrac{|(f+g)(x) - (f+g)(y)|}{|x-y|} = \dfrac{|f(x) - f(y) + g(x) - g(y)|}{|x-y|} \leq \dfrac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} + \dfrac{|g(x) - g(y)|}{|x-y|} \leq K(f) + K(g)$ maintenant en passant au sup à gauche puisque cette inégalité est vraie pour tout $x \neq y$ de I, on obtient $K(f+g) \leq K(f) + K(g)$. Par suite N vérifie l'inégalité triangulaire. Pour la dernière $N(f) = 0$ donne en outre $M(f) = 0$ et donc $f = 0$.
Pour l'équivalence nous avons $M(f) \leq N(f)$ si nous pensons qu'elles ne sont pas équivalentes, recherchons une suite tendant vers 0 pour M et non pour N. Prenons la suite f_n définie par $f_n(x) = \left(x - \frac{1}{n}\right)$ si $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ et 0 sinon. Ainsi $M(f_n) = \frac{1}{n}$ qui tend vers 0 mais $K(f_n)$ est supérieur à 1 en effet $\sup\limits_{x \neq y} \dfrac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \geq 1$ car 1 est atteint pour $x = 0$ et $y = \frac{1}{n}$. Pour le coefficient de lipschitz on regarde la tangente car le taux de variation $\dfrac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|}$ peut s'écrire $f'(\zeta)$, c'est ainsi que toute fonction à dérivée bornée est lipschitzienne. Nous aurions pu construire un contre exmple à l'aide de x^n.

Exercice 58 Le critère de convergence donne pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier n_0 tel que si $n > n_0$ alors $|u_n - \ell| < \varepsilon$ ainsi si p,q sont supérieurs à n_0 on a $|u_p - u_q| = |u_p - \ell - (u_q - \ell)| \leq |u_p - \ell| + |u_q - \ell| < 2\varepsilon$ ainsi (u_n) est de Cauchy pour les puristes on pouvait écrire le critère de convergence avec $\frac{\varepsilon}{2}$.
Si $\lim\limits_n u_n = \ell \in \mathbb{R}$ alors il existe un entier N tel que pour tous p,q entiers si $(p > n, q > n)$ alors $|u_p - u_q| < \frac{1}{2}$ ce qui donne $u_p = u_q$ et donc toute suite de Cauchy dans $\mathbb{Z}$ est stationnaire donc convergente.

- On a en effet $u_{2n} - u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} > \frac{1}{2}$
- On considère (u_{6n}) qui est extraite de (u_{2n}) et de(u_{3n}), puis (u_{6n+3}) extraite de (u_{2n+1}) et (u_{3n}) ce qui prouve que ces trois suites convergent vers la même limite. Maintenant (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convegeant vers la même limite on en déduit que (u_n) converge. Il suffit en quelque sorte de satisfaire pour n assez grand les deux critères de limite.
- Non prenons $u_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ n'est pas congru à 4 modulo 60.} \\ 1 \text{ si } n \text{ est congru à 4 modulo 60.} \end{cases}$

Exercice 59
- Pour tout b de B considèrons $\Phi_b : E \to E$ tel que $\Phi_b(x) = x + b$ on a que Φ_b est une translation donc un homéomorphisme de E. Si A est ouvert, $\Phi_b(A)$ est ouvert. Ensuite on écrit $A + B = \bigcup\limits_{b \in B} \Phi_b(A)$ qui montre que $A + B$ est ouvert comme réunion d'ouverts.
- Soit $z_n = a_n + b_n$ une suite de $A + B$. Le produit $A \times B$ de compacts est compact. De la suite (a_n, b_n) on peut donc extraire une suite $\left(a_{\varphi(n)}, b_{\varphi(n)}\right)$ qui converge. Ainsi pour tout entier n on a $z_{\varphi(n)} = a_{\varphi(n)} + b_{\varphi(n)}$ et $z_{\varphi(n)}$ convergevers un élément de $A \times B$ qui est donc compact.
- Soit $z_n = a_n + b_n$ une suite de $A + B$ qui converge disons $\lim z_n = \ell$. De la suite (a_n) du compact A, on extrait $a_{\varphi(n)}$ qui tend vers a élément de A. En écrivant $z_{\varphi(n)} = a_{\varphi(n)} + b_{\varphi(n)}$ on a que $\left(b_{\varphi(n)}\right)$ converge vers $\ell - a$ qui est bien un élément de B car B est fermé donc $\ell \in A + B$ et $A + B$ est femé.

Exercice 60 Le fait que ce sont des normes ne pose pas de difficulté, il faut bien remarquer que E est formé des fonction de classe 1 et nulle en 0, ainsi si le dérivée est nulle on a que la fonction est constante et donc nulle.Pour la comparaison on a : Pour tout t de $[0,1]$, $|f'(t)| \leq N_2(f)$, ensuite par les accroissements finis on a : $|f(t) - f(0)| \leq N_2(f)|t|$ ce qui prouve que $|f(t)| \leq N_2(f)$ puis $N_1(f) \leq N_2(f)$. Mais N_1n'est pas plus fine que N_2 en effet considèrons pour $n \geq 2$: $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin nx$ pour $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2n}$ et $f_n(x) = \frac{1}{n}$ si $\frac{\pi}{2n} \leq x \leq 1$. On a $f_n'(x) = \cos nx$ si $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2n}$ et 0 sinon. On a bien $f_n \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ et $f_n(0) = 0$ donc $f_n \in E$. Pour les limites on a $N_1(f_n) = \frac{1}{n}$ qui tend vers 0 mais $N_2(f_n) = 1$ qui ne tend pas vers 0.

Exercice 61

- Pour l'unicité on a si $x = f(x)$ et $y = f(y)$ la relation donne $\|f(x) - f(y)\| = 0$ et donc $f(x) = f(y)$ et par suite $x = y$.
- Pour l'existence, partons d'un x_0 quelconque et posons $x_{n+1} = f(x_n)$ on a $\|x_{n+1} - x_n\| \leq \alpha(\|x_{n+1} - x_n\| + \|x_n - x_{n-1}\|)$ ou $\|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\|x_n - x_{n-1}\|$. Posons $k = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ on a $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ et donc $0 < k < 1$. Pour tout p on a : $\|x_{n+p} - x_n\| \leq \sum_{j=n}^{n+p-1}\|x_{j+1} - x_j\|$ or $\|x_{j+1} - x_j\| \leq k^j\|x_1 - x_0\|$. Nous avons donc $\|x_{n+p} - x_n\| \leq \|x_1 - x_0\|\left(\sum_{j=n}^{n+p-1}k^j\right) \leq \dfrac{k^n}{1-k}\|x_1 - x_0\|$. Nous avons donc que (x_n) est une suite de Cauchy car $\lim k^n = 0$ et elle converge donc. Si $\ell = \lim x_n$ on a pour tout n $\|f(x_n) - f(\ell)\| \leq \alpha(\|f(x_n) - x_n\| + \|f(\ell) - \ell\|)$ et en passant à la limite $\|\ell - f(\ell)\| \leq \alpha\|f(\ell) - \ell\|$ ou $(1-\alpha)\|\ell - f(\ell)\| \leq 0$ soit $\ell = f(\ell)$.

Exercice 62 On a $f'(x) = -2xe^{-x^2} = -2xf'(x)$. En utilisant la formule de Leibnitz $(-2xf(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-2x)^{(k)}f^{(n-k)}(x)$ il y a peu de termes non nuls seulement pour $k = 0$ et 1 ce qui donne $f^{(n+1)}(x) = -2xf^{(n)}(x) - 2nf^{(n-1)}(x)$ pour tout x réel et tout entier supérieur à 1. Il ya bien sur d'autre méthode! On démontre l'existence de P_n par récurrence, pour $n = 0$ et 1 la propriété est vraie avec $P_0 = 1$ de degré 0 et $P_1 = -2x$ de degré 1. En supposant la propriété vraie jusqu'au rang n on a $f^{(n+1)}(x) = -2xe^{-x^2}P_n(x) - 2ne^{-x^2}P_{n-1}(x) = e^{-x^2}(-2xP_n(x) - 2nP_{n-1}(x))$ et en posant $P_{n+1}(x) = -2xP_n(x) - 2nP_{n-1}(x)$ on obtient bien un polynôme de degré $n+1$. Cette formule permet de calculer de proche en proche le polynômes : $P_2(x) = -2x(-2x) - 2 = 4x^2 - 2$,$P_3(x) = -2x(4x^2 - 2) - 4(-2x) = -8x^3 + 12x$.

Exercice 63

- Il s'agit de la moyenne arythmétique et géométrique on a les relations de comparaison : pour tout n : $u_n \leq u_{n+1}$,$v_{n+1} \leq v_n$ et $u_n \leq v_n$. Faisons une démonstration par récurrence : au rang 0 on a $u_0 = a$ et $u_1 = \sqrt{u_0v_0} = \sqrt{ab} \geq \sqrt{aa} = a = u_0$ et $v_1 = \frac{u_0+v_0}{2} \leq b = v_0$ et enfin $u_0 \leq v_0$. En supposant la propriété vraie au rang n on a de la même façon $u_{n+1} = \sqrt{u_nv_n} \geq \sqrt{u_nu_n} = u_n$ (on met dans l'hypothèse de récurrence la positivité des suites) ainsi $u_{n+1} \geq u_n \geq 0$ et $0 \leq v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \leq v_n$ enfin la relation $2\sqrt{u_nv_n} \leq u_n + v_n$ qui résulte de la positivité de $\left(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}\right)^2$ donne la dernière relation. Ainsi les deux suites sont adjacentes et elles convergent vers la même limite.
- Ces valeurs correspondent aux points fixes de l'application f définie par $f(x) = \frac{x-6}{x-4}$ qui conduit à l'équation $x = \frac{x-6}{x-4}$ ou $x^2 - 5x + 6 = 0$ dont les racines sont 2 et 3. On a $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - \alpha}{u_{n+1} - \beta} = \dfrac{\frac{u_n-6}{u_n-4} - 2}{\frac{u_n-6}{u_n-4} - 3} = \dfrac{-u_n + 2}{u_n - 4}\dfrac{u_n - 4}{-2u_n + 6} = \frac{1}{2}\dfrac{u_n - 2}{u_n - 3} = \frac{1}{2}v_n$. Ainsi (v_n) est une suite géométrique qui converge vers zéro. En revenant à $u_n = \dfrac{\beta v_n - \alpha}{v_n - 1}$converge vers α. Remarquons une chose : il faut supposer pour tout n : $u_n \neq 4$.

Exercice 64

- Si la limite existe elle vérifie $l = 1 - \cos l$ ce qui donne en étudiant la fonction $f(x) = x - 1 + \cos x$, $l = 0$. On remarque que pour tout n : $0 \leq u_n \leq 2$. La relation $1 - \cos u_n = 2\sin^2\frac{u_n}{2}$ on a $u_{n+1} - u_n = 2\left(\sin^2\frac{u_n}{2} - \sin^2\frac{u_{n-1}}{2}\right)$. La fonction $x \longmapsto \sin^2 x$ est croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $0 \leq \frac{u_n}{2} \leq 1 \leq \frac{\pi}{2}$. Ainsi par récurrence $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $u_2 - u_1 = 1 - \cos u_1 - u_1 \leq 0$ car $1 - \cos x - x$ est décroissante sur $[0,2]$. On a donc $\lim u_n = 0$.

- La seule limite possible est $\ell = 1$, pour tout u_0 on a pour tout $n \geq 1 : u_n > 0$. D'autre part $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(1+u_n^2\right) - u_n = \frac{1}{2}\left(1+u_n^2\right) - \frac{1}{2}\left(1+u_{n-1}^2\right) = \frac{1}{2}\left(u_n - u_{n-1}\right)\left(u_n + u_{n-1}\right)$. Ainsi (u_n) est momotone et comme $u_1 - u_0 = \frac{1}{2}\left(u_0 - 1\right)^2 \geq 0$ on a que (u_n) est croissante.
  - Si $u_0 = 1$ alors pour tout $n : u_n = 1$.
  - SI $|u_0| \leq 1$ alors $u_1 \leq 1$ et pour tout $n : u_n \leq 1$ comme (u_n) est croissante et majorée, elle converge et ce ne peut être que vers 1.
  - Si $|u_0| > 1$ alors $u_1 - |u_0| = \frac{1}{2}\left(1+u_0^2\right) - |u_0| = \frac{1}{2}\left(|u_0| - 1\right)^2$et $u_1 > |u_0|$ et pour tout $n : u_n > |u_0| > 1$ et par suite (u_n) diverge.

Exercice 65 – Pour $\alpha \in]0,1[$ et n entier, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est continue dans $[n,n+1]$ et dérivable sur $]n,n+1[$ en appliquant le théorème des accroissements finis sur cet intervalle on a : il existe $c \in]n,n+1[$ tel que $(n+1)^\alpha - n^\alpha = \alpha c^{\alpha-1}$. La fonction $t \longmapsto t^{\alpha-1}$ étant décroissante on en déduit : $\dfrac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leq (n+1)^\alpha - n^\alpha \leq \dfrac{\alpha}{n^{1-\alpha}}$. En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient $\alpha \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{(p+1)^{1-\alpha}} \leq n^\alpha$ et $\alpha \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^{1-\alpha}} \leq (n+1)^\alpha - 1$ d'où $\dfrac{(n+1)^\alpha}{\alpha} - \dfrac{1}{\alpha} \leq \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^{1-\alpha}} \leq \frac{n^\alpha}{\alpha}$. En divisant par n^α et en faisant tendre n vers ∞ on a $\lim n^\alpha = +\infty$, $\lim \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^\alpha = 1$ ce qui donne $\dfrac{1}{\alpha} \leq \lim \dfrac{1}{n^\alpha} \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^{1-\alpha}} \leq \frac{1}{\alpha}$ ou encore $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^{1-\alpha}} \overset{+\infty}{\sim} \frac{n^\alpha}{\alpha}$.

- Un polynôme est une fonction continue et comme le degré est impair, $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$ ainsi par le théorème des valeurs intermédiaires on a que P s'annule au moins une fois.
- Si f admet n zéros sur I disons $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$ alors sur chaque intervalle $]\alpha_i,\alpha_{i+1}[$ le théorème de Rolle donne que la dérivée f' s'annule sur cet intervalle ouvert, ainsi f' a bien $n-1$ zéros séparant les zéros de f. Pour le polynôme de Legendre on part du polynôme $\left(x^2-1\right)^n$ il a deux zéros $+1$ et -1 donc sa dérivée s'annule une fois dans l'intervalle $]-1,+1[$. En supposant que le polynôme $\left(x^2-1\right)^{(p)}$ pour $1 \leq p < n$ s'annule p fois dans l'intervalle ouvert $]-1,+1[$ on a qu'il s'annule $p+2$ fois sur $[-1,+1]$ donc d'après ce qui précède sa dérivée $\left(x^2-1\right)^{(p+1)}$ s'annule $p+1$ fois sur $]-1,+1[$. On en déduit le résultat pour $p = n$.

Exercice 66 en conidèrant la fonction $f(x) = \ln x + x$ elle est strictement croissante de $]0,+\infty[$ vers $]-\infty,+\infty[$ et continue par suite elle atteint la valeur k une et une seule fois, en x_k. On a donc $\ln x_k + x_k = k$, et $\lim\limits_{k \to +\infty} x_k = +\infty$ car f^{-1} va de $]-\infty,+\infty[$ vers $]0,+\infty[$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} f^{-1}(x) = +\infty$. Ensuite on a $x_k \sim k$ car $\ln x$ est négligeable en $+\infty$ par rapport à x, on peut aussi écrire : $\frac{x_k}{k} = 1 - \frac{\ln x_k}{k}$. Ensuite $\ln x_k \sim \ln k$ ou $\ln x_k = \ln k + o(\ln k)$ ou $\frac{\ln x_k}{k} = \frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right)$ en injectant ceci à la relation précédente on obtient $\frac{x_k}{k} = 1 - \frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right)$. Poursuivons $\ln \frac{x_k}{k} = \ln\left(1 - \frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right)\right) = -\frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right)$ ce qui donne en partant de $x_k = k - \ln x_k = k - \ln k - \ln \frac{x_k}{k} = k - \ln k + \frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right)$.

Exercice 67 Prenons un élément k tel que $f'(a) < k < f'(b)$. Supposons que le rapport $h = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} \in]f'(a),f'(b)[$ alors $k \in]f'(a),h[\cup]h,f'(b)[$ plusieurs cas sont possibles :

- si $k \in]f'(a),h]$ alors on considère lapplication $g :]a,b] \to \mathbb{R}$ qui à t associe $\dfrac{f(t) - f(a)}{t-a}$ on a que g est continue et $\lim\limits_{t \to a} g(t) = f'(a)$ ainsi $g(]a,b]) \supset]f'(a),h]$ et c'est gagné il existe c tel que $k = g(c)$.

- Si $f'(a) < f'(b) < h$ on a que $k \in]f'(a),h]$ et c'est gagné.
- Si $h \leq f'(a) < f'(b)$ alors $k \in]h,f'(b)[$ et on considère la fonction $g_1 : [a,b[\to \mathbb{R}$ qui à t associe $\dfrac{f(t) - f(b)}{t - a}$.

Exercice 68 – Si $f(0) = 0$. Considèrons $g : \mathbb{R} \to R$ tel que $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = f'(0)$ on a que g est continue en 0 et $g(2x) = g(x)$ et $g\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = g(x)$ et g est constante. Ainsi les seules solutions qui conviennent sont $f(x) = ax$.
Or il existe $a \neq 0$ tel que $f(a) = 0$ alors en considèrant $f\left(\frac{a}{2^n}\right) = 0$ on a $f(0) = 0$.

- Il existe $b \neq 0$ tel que $f(b) > 0$ car $f \neq 0$ et même $f \geq 0$. Considèrons $f(b) = \left(f\left(\frac{b}{2^n}\right)\right)^{2^n}$ on a $\ln f\left(\frac{b}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} \ln f(b)$ et donc $\ln f(0) = 0$ et $f(0) = 1$. Ainsi $g = \ln f$ vérifie $g(2x) = 2g(x)$ donc en remontant on trouve les fonctions $x \longmapsto e^{\lambda x}$.

Exercice 72 – Pour f de E on a $\int_0^1 |Tf(x)|\, dx \leq \int_0^1 \left[\int_0^x |f(t)|\, dt\right] dx \leq \int_0^1 \left[\int_0^1 |f(t)|\, dt\right] dx$ ce qui donne $N[T(f)] \leq N(f)$. On en déduit la continuité de T et que$\|T\| = \sup\limits_{f \in E \setminus \{0\}} \dfrac{N[T(f)]}{N(f)} \leq 1$.

- Montrons que pour f élément de E on a : $\int_0^1 \left[\int_0^x f(t)\, dt\right] dx = \int_0^1 (1-t) f(t)\, dt$ en effet posons $F(y) = \int_0^y \left(\int_0^x f(t)\, dt\right) dx$ et $G(y) = \int_0^y (y-t) f(t)\, dt$. Ces deux applications sont dérivables et $F(0) = G(0), F'(y) = \int_0^y f(t)\, dt, G'(y) = \int_0^y f(t)\, dt$. Ainsi $F = G$ et en particulier $F(1) = G(1)$. On peut aussi intégrer par parties.
- Pour f dans E à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ on a $\int_0^1 (1-t) f(t)\, dt = \int_0^1 f(t)\, dt$ si on suppose pour tout t de $[0,1]$ que l'on a $tf(t) = 0$ c'est à dire $f = 0$. Cherchons donc une suite (f_n) de $E \to \mathbb{R}^+$ telle que pour tout n on ait $\int_0^1 |f_n(t)|\, dt = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 (1-t) f_n(t)\, dt = 1$. En effet cela donnera $1 \geq \|T\| \geq \lim \int_0^1 (1-t) f_n(t)\, dt = 1$. Soit $f_n(t) = n(1-t)^{n-1}$ on a $N(f_n) = \int_0^1 |f_n(t)|\, dt = \left[-(1-t)^{n-1}\right]_0^1 = 1$ et $N(T(f_n)) = \int_0^1 n(1-t)^n\, dt = \left[-\dfrac{n}{n+1}(1-t)^{n+1}\right]_0^1 = \dfrac{n}{n+1}$ qui a bien pour limite 1.

Exercice 73 – Il est clair que N est une norme on a : si $f = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ alors $N(f) = \sum\limits_{k=0}^{n} |a_k|$.
Ainsi on a une bonne connaissance de la convergence : $P_n = \sum\limits_k a_{n,k} X^k$ et $P = \sum\limits_k \alpha_k X^k$ on a si $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = P$ pour la norme N de E alors pour tout k : $\lim\limits_n a_{n,k} = \alpha_k$. Mais la réciproque est fausse comme le montre la suite définie par $\alpha_{n,k} = \begin{cases} \frac{1}{n+1} \text{ si } k \leq n \\ 0 \text{ si } k > n \end{cases}$ en effet pour tout k $\lim\limits_n a_{n,k} = 0$ mais $P_n = \frac{1}{n+1}(1 + X + \cdots + X^n)$ suite de polynômes ne tendant pas vers 0, mais $N(P_n) = 1$.

- On pose $f_p(X) = \sum\limits_{k=1}^{p} \dfrac{X^k}{k^2}$ on a pour p,q tels que $q > p$: $N(f_q - f_p) = \sum\limits_{k=p+1}^{q} \dfrac{1}{k^2} \leq \sum\limits_{k=p+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{p+1}$ donc la suite est bien de Cauchy. En effet $\sum \frac{1}{k^2} \leq \sum \frac{1}{(k+1)k} \leq \sum \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \leq \frac{1}{p}$. Si la suite converge alors sa limite $P = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \alpha_k X^k$ vérifierait pour tout k : $\alpha_k = \frac{1}{k^2}$ et ce ne serait pas un polynôme.
- Pour tout n on a $N(X^n) = 1$ et $N(DX^n) = N\left(nX^{n-1}\right) = n$ donc l'opération de dérivation n'est pas continue.
- Soit ψ_n une forme linéaire sur E on a pour toute f de E : $|\psi_n(f)| \leq n! N(f)$ donc ψ_n est continue et $\|\psi_n\| \leq n!$.

– Si $(f_n) \in G$ et $\lim f_n = d$ dans (E,N) on a pour tout k : $f^{(k)}(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n^{(k)}(0)$. Or $f^{(n)}(0) \leq g^{(n)}(0)$ pour tout n et donc pour tout k : $f^{(k)}(0) \leq g^{(k)}(0)$ et par suite $f \in G$ de même pour H.

Soit $d = \max\left\{d^0 g, d^0 h\right\}$ on a $G \cap H \subset \mathbb{R}_d[X]$. Posons $g = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k$ et $h = \sum\limits_{k=0}^{d} b_k X^k$. Les normes sur l'espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{R}_d[X]$ définissent la même topologie et $G \cap H$ est homéomorphe au pavé compact $\prod\limits_{k=0}^{d} [a_j, b_k]$ de $\mathbb{R}^{d+1}$.

Exercice 74 Des comparaisons évidentes $\|P\|_5 \leq \|P\|_1, \|P\|_1 \leq \|P\|_4, \|P\|_1 \leq \|P\|_3, \|P\|_5 \leq \|P\|_3$. Des moins évidentes : $\|P\|_2 \leq n^n (n+1)\|P\|_3, \|P\|_3 \leq \|P\|_4$ et $\|P\|_4 \leq \sum\limits_{i=0}^{n} i! \binom{n}{i} \|P\|_3$. Ensuite en utilisant les formules de Cramer avec $n+1$ points on peut exprimer les a_i en fonctions de valeurs de P et ainsi $\|P\|_1 \leq \|P\|_3 \leq R\|P\|_1$. Si $\tilde{P}$ est une primitive de P on a $\int_0^1 |P(t)\,dt| \geq \left|\int_0^1 P[t]\,dt\right| \geq \tilde{P}(x)$ et donc $\left\|\tilde{P}\right\|_1 \leq \|P\|_5$. En écrivant les coefficients de P on a $\left|\frac{a_i}{i+1}\right| \leq R_{n+1}\left\|\tilde{P}\right\|_1$ ou $|a_i| \leq (n+1) R_{n+1}\left\|\tilde{P}\right\|_1$. De nouveau avec les formules de Cramer on a $|a_i| \leq L_n \sum |P(j)|$ d'où $\|P\|_3 \leq (n+1) L_n \|P\|_2$. On doit avoir tout!

Exercice 75 Notons ${}^tX = (x_1, \cdots, x_n)$ et ${}^tY = (y_1, \cdots, y_n)$ on a $Y = AX$ soit pour $1 \leq i \leq n$: $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$.

1°) $N_1(AX) = \sum\limits_{i=1}^{n} |y_i| \leq \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij} xj| \leq \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j| \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right)$ et $N_1(AX) \leq \max\limits_{1\leq j\leq n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right) \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|$

Soit j_0 tel que $\max\limits_{1\leq j\leq n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij_0}|$ et posons ${}^tZ = (z_1, \cdots, z_n)$ où $z_j = 1$ si $j = j_0$ et $z_j = 0$ sinon. Ainsi $N_1(Z) = 1$ et $N_1(AZ) = \sum\limits_{i=1}^{n}\left|\sum\limits_{ji=1}^{n} a_{ij} z_j\right| = \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{i,j_0}|$. On peut ainsi conclure.

2°) $N_\infty(AX) = \max\limits_{1\leq i\leq n}\left|\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right| \leq \max\limits_{1\leq i\leq n}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right) N_\infty(X)$. Soit i_0 tel que $1 \leq i_0 \leq n$ et $\max\limits_{1\leq i\leq n}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{i_0 j}|$. Soit ${}^tZ = (z_1, \cdots, z_n)$ tel que $z_j = 1$ si $a_{i_0,j} = 0$ et $z_j = \dfrac{\overline{a_{i_0,j}}}{|a_{i_0,j}|}$ sinon. Ainsi $N_\infty(Z) = 1$ et $N_\infty(AZ) \geq \left|\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i_0,j} z_j\right| = \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| = \max\limits_{1\leq i\leq n}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right)$. On en déduit le résultat.

3°) La norme $N(A) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} (a_{ij})^2}$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^{n^2}$. D'après Cauchy-Schwarz pour tous réels $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n), (\beta_1, \cdots, \beta_n)$ on a $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k\right)^2 \leq \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k^2\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k^2\right)$ ainsi avec $AB = ((c_{ij}))$ où $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ on a $c_{ij}^2 \leq \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2\right)$ et pour tout j : $\sum\limits_{i=1}^{n} c_{ij}^2 \leq \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2\right) = N(A)^2\left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2\right)$ donc $N(AB)^2 = \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n} c_{ij}^2 \leq N(A)^2 N(B)^2$. D'où l'inégalité puisque la norme est positive. D'autre part cette norme n'est pas subordonnée car $N(I_n) = n \neq 1$.