

# Chapitre 1

## Espaces vectoriels

Dans tout ce qui suit, le corps  $K$  désigne un des deux corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  ou l'un de leurs sous-corps.

### 1.1 Introduction

L'étude des équations et systèmes d'équations du premier degré était reléguée au début du 19<sup>ème</sup> siècle dans l'enseignement élémentaire et négligée des mathématiciens. Mais une axiomatique convenable montra la puissance des notions nouvelles ainsi mises en évidence. Sous sa forme actuelle l'algèbre linéaire est une remarquable synthèse conduisant à un outil universel. La linéarisation est encore utilisée dans de nombreux domaines. Gauss, étudiant la représentation géométrique des nombres complexes est amené à définir l'addition des vecteurs. Grassmann, Möbius et Hamilton pendant la première moitié du 19<sup>ème</sup> siècle aboutissent à la définition d'un espace vectoriel de dimension quelconque. L'étude des systèmes linéaires dans ce nouveau cadre amène Frobenius à définir le rang, Kronecker et Weierstrass donnent une définition axiomatique du déterminant qui était déjà connu depuis le 18<sup>ème</sup> siècle. Le calcul matriciel est élaboré par Cayley. Dès 1888, Peano donne une définition axiomatique des espaces vectoriels sur le corps des nombres réels ainsi que la définition des applications linéaires. C'est au début du 20<sup>ème</sup> siècle que Toeplitz, élève de Hilbert donne la définition d'un espace vectoriel sur n'importe quel corps. A l'époque contemporaine H. Cartan a vu avec d'autres l'intérêt d'étendre ces définitions aux anneaux pour obtenir la notion de modules...L'algèbre non commutative dont l'exemple le plus simple est l'algèbre des matrices se développe parallèlement. Lie, Frobenius, Burnside, Shur, Cartan ont utilisé cette notion d'algèbre de 1896 à 1910 pour la représentation linéaire des groupes.

### 1.2 Espaces vectoriels

**Définition 1** Soit  $E$  un ensemble,  $K$  un corps,  $+$  une loi interne sur  $E$  et  $\cdot$  une loi externe sur  $E$  à opérateurs dans  $K$ .

$(E, +, \cdot)$  est un espace vectoriel sur  $K$  (noté en abrégé  $Kev$ ) si et seulement si:

$$\begin{aligned} &(E, +) \text{ est un groupe commutatif} \\ \forall \lambda \in K \quad \forall x, y \in E \quad &\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y \\ \forall \lambda, \mu \in K \quad \forall x \in E \quad &(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x \\ \forall \lambda, \mu \in K \quad \forall x \in E \quad &(\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x) \\ \forall x \in E \quad &1_K \cdot x = x \end{aligned}$$

**Terminologie:** Les éléments de  $E$  sont appelés vecteurs (du latin *vehere*, transporter), la notion d'espace vectoriel (composé de vecteurs) provient de l'étude des translations en géométrie: une translation qui transporte les points correspond à un vecteur.

Les éléments du corps  $K$  sont appelés scalaires (du latin *scala*, échelle): la multiplication des vecteurs par un même scalaire modifie l'échelle des transformations ponctuelles qui leur sont associées.

**Remarque:** Un espace vectoriel contient toujours au moins un élément:  $0_E$ , élément neutre du groupe  $(E,+)$ .

**Exemple 1** Le corps  $K$  lui-même, muni de son addition et de la loi externe correspondant à la multiplication, est un  $K$ -espace vectoriel.

Si  $K'$  est un sous-corps de  $K$ , un  $K$ -espace vectoriel  $E$  peut être muni d'une façon naturelle d'une structure de  $K'$ -espace vectoriel en restreignant la loi externe aux éléments de  $K'$ :  $(\mathbb{C}, +, \times)$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

**Proposition 1**  $\forall \lambda \in K \quad \forall x \in E \quad \lambda \cdot x = 0_E \iff \lambda = 0_K \text{ ou } x = 0_E.$

[Ind] Dans le sens direct: pour montrer que  $x = 0_E$ , il suffit de montrer que  $1_K \cdot x = 0$ .

Pour la réciproque: pour montrer qu'un élément  $y \in E$  est nul, il suffit de montrer que  $y + y = y$ .

**Exercice 1** Montrer que pour tout scalaire  $\lambda$  et tout vecteur  $x$ :  $(-\lambda) \cdot x = \lambda \cdot (-x) = -\lambda \cdot x$

**Proposition 2** Si  $A$  est un ensemble quelconque et si  $(E, +, \cdot)$  est un  $K$ -espace vectoriel, l'ensemble  $\mathcal{F}(A, E)$  des applications de  $A$  dans  $E$ , muni des lois:

- addition: Pour tous éléments  $f, g \in \mathcal{F}(A, E)$ , l'application  $f + g$  est définie pour tout  $x \in A$  par  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- multiplication par un scalaire: Pour tout  $f \in \mathcal{F}(A, E)$  et pour tout  $\lambda \in K$ , l'application  $\lambda \cdot f$  est définie pour tout  $x \in A$  par  $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$ .

est un  $K$ -espace vectoriel.

[Ind] Appliquer la définition.

**Exemple 2** L'ensemble des suites d'éléments de  $K$ :  $K^{\mathbb{N}} = \mathcal{F}(\mathbb{N}, K)$  est un  $K$ -espace vectoriel.

**Proposition 3** Soit  $I$  un ensemble fini et  $(E_i)_{i \in I}$  une famille de  $K$ -espaces vectoriels. Muni des lois suivantes:

- Addition:  $\forall (x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} E_i \quad (x_i)_{i \in I} + (y_i)_{i \in I} = (x_i + y_i)_{i \in I}$
- Multiplication par un scalaire:  $\forall \lambda \in K \quad \forall (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} E_i \quad \lambda \cdot (x_i)_{i \in I} = (\lambda \cdot x_i)_{i \in I}$

$\prod_{i \in I} E_i$  est un  $K$ -espace vectoriel.

[Ind] Utiliser les propriétés des lois sur chaque espace  $E_i$ .

**Exemple 3** Si  $E$  est un  $K$ -espace vectoriel,  $K \times E$  est muni d'une structure naturelle de  $K$ -espace vectoriel.

Si  $E$  est un  $K$ -espace vectoriel et  $n$  un entier naturel non nul  $E^n = E \times E \cdots \times E$  est muni d'une structure naturelle de  $K$ -espace vectoriel.

**Exercice 2** Soit  $E$  le groupe  $(\mathbb{R}_+^*, \times)$  muni de la loi externe définie sur  $\mathbb{Q}$  par  $\alpha \cdot x = x^\alpha$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{Q}$  et tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Montrer que  $E$  est un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel.

### 1.2.1 Sous-espaces vectoriels

**Définition 2** Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel et  $F \subset E$ .  $F$  est un sous-espace vectoriel (s.e.v.) de  $E$  si  $F$  est stable pour les lois de  $E$  et si, muni de la restriction de ces lois,  $F$  est un  $K$ -espace vectoriel.

Cette définition sert peu, on utilise en revanche la

**Proposition 4 Caractérisation des s.e.v.**

$$F \text{ est un s.e.v.} \iff \begin{cases} F \neq \emptyset \\ \forall \lambda \in K \quad \forall x, y \in F \quad \lambda x + y \in F. \end{cases}$$

[Ind] Pour la réciproque, il suffit de montrer que  $(F, +)$  est un sous-groupe de  $(E, +)$

**Remarque:** Un sous-espace vectoriel contient toujours  $0_E$ .

**Exemple 4**  $\{0_E\}$ ,  $E$  sont des s.e.v. de  $E$

**Exemple 5** Si  $I$  est un ensemble quelconque, l'ensemble  $K^{(I)}$  constitué des familles d'éléments de  $K$  dont tous les éléments, sauf un nombre fini d'entre eux, sont nuls est un sous-espace vectoriel de  $K^I$ . L'ensemble  $K[X] = K^{(\mathbb{N})}$  des polynômes sur  $K$  est donc un espace vectoriel et l'ensemble  $K_n[X]$  des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$  sur  $K$  en est un sous-espace vectoriel.

**Exercice 3** Si  $I$  est un ensemble quelconque, montrer que  $K^{(I)}$  est un  $K$ -espace vectoriel.

**Proposition 5** Une intersection quelconque de s.e.v. est un s.e.v.

[Ind] Appliquer la caractérisation des s.e.v.

**Définition 3** Soit  $A \subset E$ . L'intersection de tous les s.e.v. de  $E$  contenant  $A$  est un s.e.v. noté  $[A]$  ou  $\text{Vect } A$ . Ce s.e.v. est le plus petit s.e.v. (au sens de l'inclusion) de  $E$  contenant  $A$  et est appelé s.e.v. engendré par  $A$ .

**Remarque:** si  $F$  est un s.e.v.  $F = [F]$ .

**Exercice 4** Parmi les parties suivantes de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , déterminer les s.e.v.:

- l'ensemble des suites ne prenant qu'un nombre fini de valeurs.
- l'ensemble des suites croissantes.
- l'ensemble des suites monotones.
- l'ensemble des suites  $(u_n)$  telles que  $(|u_n|)$  converge.
- l'ensemble des suites convergentes dans  $\mathbb{R}$ .
- l'ensemble des suites  $(u_n)$  telles que  $(u_{n+1} - u_n)$  converge.
- l'ensemble des suites négligeables devant la suite harmonique  $(1/(n+1))$ .
- l'ensemble des suites  $(u_n)$  telles qu'à partir d'un certain rang  $u_n < n!$
- l'ensemble des suites périodiques.

**Exercice 5** Parmi les parties suivantes de l'espace vectoriel  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , déterminer les s.e.v.:

- l'ensemble des fonctions affines par morceaux.
- l'ensemble des fonctions périodiques.
- l'ensemble des fonctions discontinues en au moins un point.
- l'ensemble des fonctions lipschitziennes.
- l'ensemble des fonctions continues telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)|$  existe.

**Exercice 6** Montrer que l'ensemble des suites complexes  $(u_n)$ , vérifiant  $(\sqrt[n]{|u_n|})$  est une suite bornée, est un sous espace vectoriel de l'ensemble des suites complexes.

**Exercice 7**  $F$  et  $G$  étant des s.e.v., à quelle condition  $F \cup G$  est-il un s.e.v.?

**Exercice 8**  $F$ ,  $G$  et  $H$  étant des s.e.v. de l'e.v.  $E$ , démontrer que si  $F \subset G \cup H$  alors  $F \subset G$  ou  $F \subset H$ .

### 1.2.2 Combinaisons linéaires

**Définition 4** Soit  $(x_i)_{i \in I}$  une famille finie ou non de vecteurs de  $E$ . On dit que  $x \in E$  est combinaison linéaire de la famille  $(x_i)_{i \in I}$  s'il existe un sous-ensemble fini  $J$  de  $I$  et une famille de scalaires  $(\lambda_j)_{j \in J}$  telle que

$$x = \sum_{j \in J} \lambda_j x_j.$$

**Proposition 6** Soit  $A \subset E$ .  $[A]$  est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de  $A$ .

[Ind] Noter  $A'$  l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de  $A$  et montrer que  $A'$  est un s.e.v. contenant  $A$ , montrer ensuite qu'il est inclus dans tout s.e.v. possédant cette dernière propriété.

**Exercice 9** Considérons l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^4$ . Trouver  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $(\alpha, \beta, 2, 3)$  appartienne au s.e.v. engendré par  $(1, 2, 1, 1)$  et  $(1, 3, 0, 1)$ .

**Exercice 10** La fonction exponentielle est-elle combinaison linéaire des fonctions puissances entières?

### 1.2.3 Sommes de s.e.v.

**Définition 5** Soit  $(F_i)_{i \in I}$  une famille de s.e.v., la somme des s.e.v.  $F_i$  est le s.e.v. engendré par  $\bigcup_{i \in I} F_i$  et noté  $\sum_{i \in I} F_i$ .

**Proposition 7** Soient  $F_1, \dots, F_p$  des s.e.v.,

$$F_1 + \dots + F_p = \{x_1 + \dots + x_p \mid x_1 \in F_1, \dots, x_p \in F_p\}$$

$(F_i)_{i \in I}$  étant une famille de s.e.v.,

$$\sum_{i \in I} F_i = \left\{ \sum_{i \in I} x_i \mid \forall i \in I \ x_i \in F_i, \text{ les } x_i \text{ tous nuls, sauf un nombre fini d'entre eux} \right\}.$$

[Ind] Traduire la propriété en terme de combinaisons linéaires.

**Exercice 11** Soient  $F$  et  $G$  des s.e.v. de l'e.v.  $E$ . Montrer que  $F + F = F$  et que  $F + G = F \iff G \subset F$ .

**Exercice 12** Soient  $F, G$  et  $H$  des s.e.v. de l'e.v.  $E$ ; comparer:

a)  $F + (G \cap H)$  et  $(F + G) \cap (F + H)$

b)  $F \cap (G + H)$  et  $(F \cap G) + (F \cap H)$ .

Démontrer que  $F \cap (G + (F \cap H)) = (F \cap G) + (F \cap H)$ .

**Exercice 13** Soient  $F, G$  et  $H$  des s.e.v. de l'e.v.  $E$  tels que  $F + G = F + H$  et  $F \cap G = F \cap H$ ; a-t-on  $G = H$ ?

### 1.2.4 Sommes directes

**Définition 6** On dit que la somme de la famille  $(F_i)_{i \in I}$  est directe si et seulement si pour toute partie finie  $J$  de  $I$  et toute famille  $(x_j)_{j \in J}$  d'éléments de  $E$  vérifiant  $\forall j \in J \ x_j \in F_j$ , on a

$$\sum_{j \in J} x_j = 0 \implies \forall j \in J \ x_j = 0$$

Notation:  $\bigoplus_{i \in I} F_i$  désigne la somme et représente la propriété.

**Terminologie:** Lorsqu'un nombre fini de sous-espaces sont en somme directe, leur somme est en bijection avec le produit direct (ou encore produit cartésien) de ces sous-espaces. Une démonstration possible de ce fait est donné par la proposition suivante.

**Proposition 8** Soient  $(x_i)_{i \in I}$  et  $(y_i)_{i \in I}$  deux familles d'éléments de  $(F_i)_{i \in I}$  nuls sauf un nombre fini d'entre eux. Si  $\bigoplus_{i \in I} F_i$  alors:

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} y_i \implies \forall i \in I \quad x_i = y_i.$$

[Ind] Se ramener à la définition

**Proposition 9** Soient  $F_1, F_2, \dots, F_p$  des s.e.v. de  $E$ .

$$\begin{aligned} F_1 \oplus F_2 &\iff F_1 \cap F_2 = \{0\} \\ F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 &\iff F_1 \cap F_2 = \{0\} \text{ et } (F_1 + F_2) \cap F_3 = \{0\} \\ F_1 \oplus \dots \oplus F_p &\iff F_1 \cap F_2 = \{0\} \text{ et } \forall i \in [3, p] \quad (F_1 + \dots + F_{i-1}) \cap F_i = \{0\}. \end{aligned}$$

[Ind] Pour deux s.e.v.: se demander comment obtenir les conclusions désirées.

Raisonner par récurrence dans le cas général (plus de deux s.e.v.) en remarquant que  $F_1 \oplus \dots \oplus F_p$  équivaut à  $F_1 \oplus \dots \oplus F_{p-1}$  et  $(F_1 + \dots + F_{p-1}) \oplus F_p$ .

**Définition 7** Deux s.e.v.  $F$  et  $G$  de  $E$  sont dits supplémentaires si et seulement si  $F \oplus G = E$ .

**Terminologie:** Méfiez-vous des termes supplémentaire et complémentaire. Ils ne correspondent qu'imparfaitement aux définitions de la langue naturelle: ce qui s'ajoute à quelque chose pour le compléter, car le verbe ajouter est ambigu dans le langage mathématique. Si on entend par cela additionner pour compléter, alors effectivement un supplémentaire d'un sous-espace est quelque chose qui s'ajoute à celui-ci pour le compléter. Mais si on conçoit ajouter comme mettre en plus par juxtaposition comme on le comprend pour des angles complémentaires ou supplémentaires ou simplement pour des parties complémentaires d'un ensemble, on commet une grave erreur en l'appliquant à cette notion de sous-espace supplémentaire: un sous-espace vectoriel possède, en général, une infinité de sous-espaces vectoriels supplémentaires alors que son complémentaire (le sous-ensemble des éléments de  $E$  qui ne lui appartiennent pas) n'est pas un sous-espace vectoriel: il ne contient pas 0 et n'est pas stable par addition.

**Proposition 10** Si  $A \in K[X]$  et  $d^\circ A = n > 0$ ,  $K[X] = A.K[X] \oplus K_{n-1}[X]$ .

[Ind] Utiliser la division euclidienne.

**Exercice 14** Montrer que les sous ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $\mathbb{R}^3$ :

$$F = \{(x, y, z) \mid \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, x = \lambda + \mu, y = \mu, z = -3\lambda + 5\mu\}$$

$$G = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0, x - z = 0\}$$

**Exercice 15** Démontrer que l'ensemble des fonctions paires et celui des fonctions impaires sont des s.e.v. supplémentaires de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

**Exercice 16** Démontrer que  $K[X] = K[X^2] \oplus (XK[X^2])$ .

**Exercice 17** Soit  $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ ,  $F$  le sous ensemble de  $E$  des fonctions constantes et  $G$  l'ensemble des fonctions  $f$  de  $E$  vérifiant  $\int_0^1 f = 0$ . Montrer que  $F \oplus G = E$ .

**Exercice 18** Soient  $E = \mathbb{C}[X]$ ,  $F = \{P \in E \mid P(0) = 0\}$  et  $G = \{P \in E \mid P'(0) = 0\}$ .

- a) Montrer que  $F$  et  $G$  sont des s.e.v. et trouver  $F + G$ .  
 b) Trouver des supplémentaires dans  $E$  de  $F$ ,  $G$  et  $F \cap G$ .

### 1.2.5 Bases

**Définition 8** Une famille  $(x_i)_{i \in I}$  de  $E$  est dite génératrice si l'espace engendré par cette famille est  $E$ .

**Définition 9** Soit  $(x_i)_{i \in I}$  une famille de  $E$ . On dit que la famille est libre si pour toute partie finie  $J$  de  $I$  et toute famille  $(\lambda_j)_{j \in J}$  de scalaires:

$$\sum_{j \in J} \lambda_j x_j = 0 \implies \forall j \in J \lambda_j = 0.$$

On dit que la famille est liée si elle n'est pas libre. On dit qu'une partie  $L$  de  $E$  est libre (resp liée) si la famille des éléments de  $L$  indexée par  $L$  est libre (resp liée).

**Terminologie:** On dit qu'une famille est libre lorsqu'il n'existe pas de relations entre les vecteurs de cette famille qui puissent s'écrire en termes de combinaisons linéaires (autre que celle où tous les scalaires sont nuls. En ce sens, cette famille est libre de relations linéaires significatives entre ses vecteurs.

**Remarque:** Une partie qui contient le vecteur 0 est liée. Soit  $x \in E$ .  $\{x\}$  est libre si et seulement si  $x \neq 0$ .

**Proposition 11** Toute sous famille d'une famille libre est libre.

[Ind] Une combinaison linéaire des éléments d'une sous-famille s'étend naturellement en une combinaison linéaire de la famille toute entière.

**Proposition 12** Une famille est libre si et seulement si toute sous famille finie est libre.

[Ind] Une combinaison linéaire d'une famille quelconque ne met en œuvre qu'un nombre fini de vecteurs.

**Proposition 13** Une partie est liée si et seulement si l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.

[Ind] La négation de "La partie  $L$  est libre" est: il existe des éléments  $x_1, \dots, x_n$  de  $L$  et des scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  non tous nuls tels que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$ .

**Proposition 14** Soit  $L$  une partie libre et  $x \in E - L$ .

$$L \cup \{x\} \text{ est liée} \iff x \in [L].$$

[Ind] Montrer le sens direct en étudiant une combinaison linéaire des éléments de  $L \cup \{x\}$ . Pour la réciproque: appliquer la proposition précédente

**Proposition 15** Soient  $L_1$  et  $L_2$  des parties libres; si  $[L_1] \oplus [L_2]$  alors  $L_1 \cap L_2 = \emptyset$  et  $L_1 \cup L_2$  est une partie libre

[Ind] Étudier une combinaison linéaire nulle des éléments de  $L_1 \cup L_2$ .

**Théorème 1 (Construction de sommes directes)** Soit  $L$  une partie libre et  $(L_i)_{i \in I}$  une partition de  $L$ , on a  $[L] = \bigoplus_{i \in I} [L_i]$ .

[Ind] Appliquer la définition des sommes directes

**Définition 10** Une base  $\mathcal{B}$  est une famille de vecteurs qui est libre et génératrice.

**Théorème 2 (Caractérisation des bases)** Soit  $\mathcal{B}$  une famille de vecteurs. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes:

a)  $\mathcal{B}$  est base.

b)  $\mathcal{B}$  est une famille libre maximale, c'est à dire que si on incorpore un nouveau vecteur à la famille, la famille résultante n'est plus libre

c)  $\mathcal{B}$  est une famille génératrice minimale, c'est à dire que si on tronque la famille d'un de ses éléments, la famille résultante n'est plus génératrice.

[Ind] Montrer que (a) entraîne (b), que (b) entraîne (c) puis que si  $\mathcal{B}$  est génératrice et non libre alors elle n'est pas une famille génératrice minimale.

Ces propriétés se traduisent par la notion fondamentale suivante:

**Théorème 3** Une famille est une base si et seulement si tout vecteur de  $E$  s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de cette famille, c'est à dire: en notant  $\mathcal{B} = (x_i)_{i \in I}$ , pour tout  $x \in E$  il existe une unique famille de scalaires  $(\lambda_i)_{i \in I}$  constituée d'éléments nuls sauf un nombre fini d'entre eux telle que  $x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ .

[Ind] Appliquer la définition d'une base.

**Exemple 6** La famille  $\{1, X, X^2, \dots, X^n, \dots\}$  est une base de  $\mathbb{R}[X]$ , en revanche, elle constitue une famille libre mais non génératrice de  $\mathbb{R}[[X]]$  (ensemble des séries formelles à une indéterminée)

**Exercice 19** Soit  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Si  $r \in \mathbb{R}$ , on note  $f_r$  l'élément de  $E$  défini par  $f_r(x) = |x - r|$ . Montrer que la famille  $(f_r)_{r \in \mathbb{R}}$  est libre.

**Exercice 20** Dans  $\mathbb{R}$  considéré comme  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel, montrer que  $1, \sqrt{2}$  et  $\sqrt{3}$  sont libres.

**Exercice 21** Trouver une base de l'espace vectoriel des fonctions d'une variable réelle, définies sur un intervalle fermé borné  $[a, b]$  et qui sont constantes par morceaux.

### 1.2.6 Applications linéaires

**Définition 11** Soient  $E$  et  $F$  des  $K$ -espaces vectoriels,  $u : E \rightarrow F$  est une application linéaire si et seulement si

$$\forall x, y \in E \quad \forall \lambda \in K \quad u(x + \lambda y) = u(x) + \lambda u(y)$$

**Terminologie:** Une application linéaire est simplement un morphisme d'espace vectoriel. On l'appelle linéaire car elle respecte les relations linéaires (c'est à dire les égalités entre combinaisons linéaires): l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images affectés des mêmes coefficients scalaires

Un **endomorphisme** est une application linéaire de  $E$  dans  $E$ , tandis qu'une application linéaire de  $E$  dans  $K$  est appelée **forme linéaire**. L'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$  est noté  $\mathcal{L}(E, F)$ , en général;  $\mathcal{L}(E)$  si  $E = F$  et  $E^*$  (appelé espace dual) si  $F = K$ .

**Exemple 7**  $E$  étant l'ensemble des fonctions numériques réelles continues par morceaux définies sur l'intervalle  $[a, b]$ ,  $u : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u(f) = \int_a^b f$  est une forme linéaire.

**Exemple 8**  $E = C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $F = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $u : E \rightarrow F$ ,  $u(f) = f'$  est linéaire.

**Proposition 16** Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . L'image directe et réciproque par  $u$  d'un s.e.v. est un s.e.v.. En particulier le noyau

$$\text{Ker } u = u^{-1}(\{0\}) = \{x \in E \mid u(x) = 0\}$$

et l'image

$$\text{Im } u = u(E) = \{y \in F \mid \exists x \in E \quad u(x) = y\}$$

sont des s.e.v. de  $E$  et  $F$  respectivement.

[Ind] Appliquer la caractérisation des s.e.v.

**Définition 12** Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ . On dit que le s.e.v.  $F$  de  $E$  est stable par  $u$  si et seulement si  $u(F) \subset F$ .

**Proposition 17** Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Si  $G$  est une partie génératrice de  $E$  alors  $u(G)$  est une partie génératrice de  $u(E)$ .

[Ind] Se demander comment obtenir la conclusion désirée.

**Proposition 18** Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . L'application linéaire  $u$  est injective si et seulement si  $\text{Ker } u = \{0\}$ .

[Ind] Remarquer, si cela n'a pas déjà été fait, que  $u$  linéaire entraîne  $u(0) = 0$ .

**Proposition 19** Si  $L$  est une partie libre de  $E$  et si  $u$  est injective alors  $u(L)$  est une partie libre de  $F$ . Plus généralement, si  $L$  est une partie libre et si  $[L] \cap \text{Ker } u = \{0\}$  alors  $u(L)$  est une partie libre.

[Ind] Comment obtenir la conclusion?

**Théorème 4 (Construction et identification d'une application linéaire)** Si  $E$  possède une base  $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ , alors pour toute famille  $(y_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $F$ , il existe une unique application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  vérifiant:  $\forall i \in I \quad u(e_i) = y_i$ .

[Ind] Travailler par analyse-synthèse

**Remarque:** C'est le théorème central de la représentation matricielle des applications linéaires.

**Proposition 20**  $E$  et  $F$  étant des  $K$ -espaces vectoriels,  $\mathcal{L}(E, F)$  est un  $K$ -espace vectoriel.

[Ind] Montrer que l'ensemble considéré est un s.e.v. d'un e.v. plus gros

**Proposition 21** La composée de deux applications linéaires est linéaire.

[Ind] Appliquer la définition.

**Proposition 22** L'application réciproque d'une application linéaire bijective est linéaire.

[Ind] Appliquer la définition.

Une telle application est appelée un **isomorphisme** (**automorphisme** si  $E = F$ ). L'ensemble des automorphismes de  $E$  est noté  $\mathcal{GL}(E)$ .

**Proposition 23** Soient  $E$  et  $F$  des  $K$ -espaces vectoriels et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Si  $E$  possède une base  $\mathcal{B}$ , alors

$u$  est injective si et seulement si l'image de  $\mathcal{B}$  est une famille libre de  $F$ ,

$u$  est surjective si et seulement si l'image de  $\mathcal{B}$  est une famille génératrice de  $F$ ,

$u$  est un isomorphisme si et seulement si l'image de  $\mathcal{B}$  est une base de  $F$ .

[Ind] Comment obtenir la conclusion?

**Théorème 5** Soient  $E$  et  $F$  des  $K$ -espaces vectoriels et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Si  $\text{Ker } u$  admet un supplémentaire  $H$  alors la restriction de  $u$  à  $H$  est un isomorphisme de  $H$  sur  $\text{Im } u$ .

[Ind] Chercher le noyau de la restriction de  $u$ .



**Proposition 24**  $(\mathcal{GL}(E), \circ)$  est un groupe (non commutatif en général).

[Ind] Montrer que l'ensemble considéré est un sous-groupe d'un groupe plus gros. Pour montrer qu'il n'est pas commutatif en général, trouver un contre-exemple en prenant  $E = \mathbb{R}^2$ .

**Exercice 22** Soit  $f$  une application linéaire entre les espaces vectoriels  $E$  et  $F$ . Soit  $(x_i)_{i \in I}$  une famille libre d'éléments de  $E$  et  $H$  l'espace vectoriel qu'elle engendre. Que peut-on dire de  $H$  si la famille image  $(f(x_i))_{i \in I}$  est libre? Si la famille image est génératrice de  $f(E)$ ? Si la famille image est une base de  $f(E)$ ?

**Exercice 23** Soit  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ ,  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (0, x_1, \dots, x_{n-1})$ .

- Montrer que  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ .
- Que vaut  $f^2 = f \circ f$ ?  $f^n$ ?  $f$  est-elle bijective?
- Déterminer  $\text{Ker } f$ ,  $\text{Im } f$ ,  $\text{Ker } f \cap \text{Im } f$ .

**Exercice 24** Soit  $f$  un endomorphisme de l'e.v.  $E$  tel que pour tout élément  $x$  de  $E$ ,  $(x, f(x))$  est un système lié. Montrer que  $f$  est une homothétie.

**Exercice 25** Soit  $f, g \in \mathcal{L}(E)$ . Démontrer que  $f(\text{Ker } g \circ f) = \text{Ker } g \cap \text{Im } f$ .

**Exercice 26** Soit  $f \in \mathcal{GL}(E)$ . Soit  $F$  un s.e.v. de  $E$  stable par  $f$ .  $F$  est-il stable par  $f^{-1}$ , par  $f^k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), par  $\alpha \text{Id} + \beta f$  ( $\alpha, \beta \in K$ )?

**Exercice 27** Soit  $E$  un  $K$  e.v. et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que:

$$u^2 = 0 \iff \text{Im } u \subset \text{Ker } u$$

et qu'alors  $u + \text{Id}_E$  est un automorphisme de  $E$ .

**Exercice 28** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  ( $E$  et  $F$   $K$  e.v.). Soit  $\varphi \in \mathcal{F}(E \times F, E \times F)$ , définie par  $\varphi(x, y) = (x, y - f(x))$ . Montrer que  $\varphi$  est un automorphisme de  $E \times F$ .

**Exercice 29** On considère l'endomorphisme  $\varphi$  de  $\mathbb{R}[X]$  déterminé par  $\varphi(P) = P + P'$  pour tout polynôme  $P$ . Déterminer  $\text{Ker } \varphi$ . Montrer que  $\varphi$  est bijective, calculer  $\varphi^{-1}(X^p)$  pour un entier positif  $p$ .

### 1.2.7 Algèbres

**Définition 13** Soit  $A$  un ensemble, deux lois internes  $+$  et  $\times$  et une loi externe  $\cdot$  à opérateurs dans le corps  $K$ . On dit que  $(A, +, \times, \cdot)$  est une  $K$ -algèbre si

- $(A, +, \times)$  est un anneau,
- $(A, +, \cdot)$  est un  $K$ -espace vectoriel,
- $\forall \lambda \in K \quad \forall x, y \in A \quad \lambda \cdot (x \times y) = (\lambda \cdot x) \times y = x \times (\lambda \cdot y)$

On l'appelle algèbre commutative si  $\times$  est une loi commutative.

**Exemple 9**  $(K, +, \times, \times)$  est une  $K$ -algèbre ainsi  $(\mathbb{C}, +, \times, \times)$  est une  $\mathbb{C}$ -algèbre, mais aussi un  $\mathbb{R}$ -algèbre en restreignant la multiplication externe aux réels.

**Proposition 25** Si  $I$  est un ensemble quelconque et si  $(A, +, \times, \cdot)$  est une  $K$ -algèbre, l'ensemble  $\mathcal{F}(I, A)$  des applications de  $I$  dans  $A$ , muni des lois usuelles d'addition, de multiplication par un scalaire et de la multiplication des applications:

- Pour tous éléments  $f, g \in \mathcal{F}(I, A)$ , l'application  $f \times g$  est définie pour tout  $x \in I$  par  $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$

est une  $K$ -algèbre.

[Ind] Appliquer la définition.

**Proposition 26** Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $K$ -espace vectoriel. L'ensemble  $\mathcal{L}(E)$  muni des lois d'addition et de composition des applications et de la loi externe de multiplication des applications par les scalaires est une  $K$ -algèbre.

[Ind] Appliquer la définition

**Définition 14** Soit  $A$  une  $K$ -algèbre et  $B \subset A$ .  $B$  est une sous-algèbre de  $A$  si  $B$  est stable pour les lois de  $A$  et si, muni de la restriction de ces lois,  $B$  est une  $K$ -algèbre.

**Proposition 27 (Caractérisation des sous-algèbres)** Soit  $(A, +, \times, \cdot)$  une  $K$ -algèbre et  $B$  une partie de l'algèbre  $A$

$$B \text{ est une sous-algèbre.} \iff \begin{cases} B \text{ est un sous-espace vectoriel} \\ 1_A \in B \\ \forall x, y \in B \quad x \times y \in B. \end{cases}$$

[Ind] Appliquer la définition

**Définition 15 (Morphisme d'algèbre)** Soit  $A$  et  $B$  des  $K$ -algèbres, on dit qu'une application  $\varphi$  de  $A$  dans  $B$  est un morphisme d'algèbre si  $\varphi$  est linéaire et est un morphisme d'anneau.

### 1.2.8 Endomorphismes remarquables

**Définition 16** Un endomorphisme  $p$  de  $E$  est un projecteur si et seulement si  $p \circ p = p$ .

**Proposition 28** Un endomorphisme  $p$  de  $E$  est un projecteur si et seulement si  $\text{Im } p = \text{Ker}(Id_E - p)$  et  $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$ .

[Ind] Travailler par analyse-synthèse

**Proposition 29** Soient  $F$  et  $G$  des s.e.v. supplémentaires de  $E$ , il existe alors un unique projecteur  $p$  de  $E$  tel que  $\text{Ker } p = F$  et  $\text{Im } p = G$ . Il est défini par:

Tout élément  $x$  de  $E$  s'écrivant (de façon unique) sous la forme  $x = x_1 + x_2$  avec  $x_1 \in F$  et  $x_2 \in G$ ,  $p(x) = x_2$ .

$p$  est alors appelée projection sur  $G = \text{Im } p$  parallèlement à  $F = \text{Ker } p$ .

[Ind] Vérifier que l'application donnée est un projecteur qui satisfait aux propriétés demandées

**Définition 17**  $(p, q) \in (\mathcal{L}(E))^2$  est un couple de projecteurs associés si et seulement si  $p^2 = p$ ,  $q^2 = q$ ,  $p \circ q = q \circ p = 0$  et  $p + q = Id_E$ .

**Proposition 30** Soit  $p$  un projecteur de  $E$ .  $p$  et  $Id_E - p$  forment un couple de projecteurs associés.

[Ind] Appliquer la définition

**Proposition 31** Si  $p$  et  $q$  forment un couple de projecteurs associés,  $\text{Ker } p = \text{Im } q$ ,  $\text{Ker } q = \text{Im } p$  et donc  $E = \text{Ker } p \oplus \text{Ker } q = \text{Im } p \oplus \text{Im } q$ .

[Ind] Remarquer que si  $p$  est un projecteur  $\text{Ker } p = \text{Im}(I - p)$ .

**Définition 18** Une famille d'endomorphismes de  $E$ ,  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  est une famille de projecteurs associés si et seulement si  $\forall i \in [1, n] \quad p_i^2 = p_i$ ,  $\forall i, j \in [1, n] \quad (i \neq j \implies p_i \circ p_j = 0)$  et

$$\sum_{i=1}^n p_i = Id_E.$$

**Proposition 32** On a alors  $E = \bigoplus_{i=1}^n \text{Im } p_i$  et pour tout  $i \in [1, n]$   $\text{Ker } p_i = \bigoplus_{j \in [1, n] - \{i\}} \text{Im } p_j$ .

[Ind] Comment montrer que  $E$  est bien la somme directe proposée? Pour trouver le noyau de  $p_i$ , travailler par double inclusion

**Proposition 33** Soient  $F_1, \dots, F_n$  des s.e.v.. Si  $E = \bigoplus_{i=1}^n F_i$  alors il existe une famille de projecteurs associés  $p_1, \dots, p_n$  tels que pour tout  $i \in [1, n]$   $F_i = \text{Im } p_i$ .

[Ind] Travailler par analyse-synthèse

**Définition 19** Un endomorphisme  $s$  de  $E$  est une **symétrie** si et seulement si  $s \circ s = \text{Id}_E$ .

**Proposition 34**  $s$  est une symétrie si et seulement s'il existe un couple de projecteurs associés  $p$  et  $q$  tel que  $s = p - q$ .  $s$  est alors appelée symétrie par rapport à  $\text{Im } p$  parallèlement à  $\text{Im } q$ .

[Ind] Trouver  $p$  en fonction de  $s$

**Exercice 30** Démontrer qu'un endomorphisme  $u$  commute avec un projecteur  $p$  ( $p \circ u = u \circ p$ ) si et seulement si le noyau et l'image de  $p$  sont stables par  $u$ .

**Exercice 31** Soit  $E$  un  $K$  e.v. et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que:

$$u \text{ est une symétrie} \iff p = \frac{1}{2}(u + \text{Id}_E) \text{ est un projecteur.}$$

**Exercice 32**  $p$  et  $q$  étant des projecteurs, démontrer que:

$$p + q \text{ projecteur} \iff p \circ q = q \circ p = 0$$

## 1.3 Espaces vectoriels de dimension finie

### 1.3.1 Dimension d'un espace vectoriel

**Définition 20** Un  $K$ -espace vectoriel est dit de dimension finie s'il existe une partie génératrice finie de  $E$ .

**Théorème 6 (Théorème de la base incomplète)** Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie,  $G$  une partie génératrice finie de  $E$  et  $L$  une partie libre de  $E$ . Il existe une partie  $H$  de  $G$  telle que  $L \cap H = \emptyset$  et  $L \cup H$  soit une base de  $E$ .

[Ind] Le nombre de parties de  $G$  est fini. Prendre une partie de  $G$  de cardinal maximal complétant  $L$  en une partie libre.

**Proposition 35** Si une partie  $A$  possède  $p + 1$  vecteurs qui sont combinaisons linéaires des vecteurs d'une partie  $G$  à  $p$  éléments alors  $A$  est une partie liée.

[Ind] Démontrer la proposition par récurrence: à partir d'une partie  $A$  à  $p + 2$  éléments engendrée par une partie  $G$  à  $p + 1$  éléments, construire une partie  $A'$  engendrée par  $A$  à  $p + 1$  éléments qui soit aussi engendrée par une partie  $G' \subset G$  à  $p$  éléments.

**Théorème 7 (Théorème de la dimension)** Deux bases d'un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie sont finies et ont même nombre d'éléments appelé dimension de l'espace noté  $\dim E$ .

[Ind] En utilisant le théorème de la base incomplète, montrer qu'il existe dans un espace de dimension finie au moins une base de cardinal fini. Dédire alors de la proposition précédente que le cardinal d'une partie libre est fini et inférieur ou égal à celui de cette base.

**Théorème 8** Dans un  $K$ -espace vectoriel de dimension  $n$ :

Toute partie libre a au plus  $n$  éléments.

Toute partie génératrice a au moins  $n$  éléments.

Toute partie libre (resp. génératrice) de  $n$  éléments est une base.

[Ind] Utiliser une base de  $E$  et le théorème de la base incomplète.

**Proposition 36** Tout s.e.v.  $F$  d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie est de dimension finie et  $\dim F \leq \dim E$ . De plus  $\dim F = \dim E$  implique  $E = F$ .

[Ind] Toute partie libre de  $F$  possède au plus  $\dim E$  éléments. Poser  $p$  le nombre maximal de vecteurs composant une partie libre de  $F$  et montrer que  $\dim F = p$ .

**Définition 21** Soient  $x_1, x_2, \dots, x_p$  des éléments d'un  $K$ -espace vectoriel  $E$  alors l'espace vectoriel  $F$  engendré par la famille  $(x_i)_{i \in [1,p]}$  est un s.e.v. de dimension finie. Sa dimension est appelée **rang** de la famille  $(x_i)_{i \in [1,p]}$ .

**Proposition 37** Le rang d'une famille de  $p$  vecteurs  $(x_i)_{i \in [1,p]}$  est inférieur ou égal à  $p$ , ce rang est égal à  $p$  si et seulement si la famille  $(x_i)_{i \in [1,p]}$  est une famille libre.

[Ind] Appliquer la proposition précédente.

Le rang d'une famille  $S$  est donc le nombre maximum de vecteurs que l'on peut prendre dans  $S$  pour former une famille libre.

**Proposition 38** On ne modifie pas le rang d'une famille en:

- supprimant de cette famille un vecteur qui est combinaison linéaire des autres,
- en ajoutant à un vecteur de la famille une combinaison linéaire des autres.

[Ind] L'espace vectoriel engendré par la partie ne change pas lorsqu'on fait ces manipulations

**Exercice 33** Soient  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , trouver une condition nécessaire et suffisante sur le polynôme  $P$  pour que le système  $(P, P(X+a), P(X+2a), \dots, P(X+na))$  soit libre.

**Théorème 9** Tout s.e.v.  $F$  d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie admet des supplémentaires et la dimension d'un quelconque de ces supplémentaires est  $\dim E - \dim F$ .

[Ind] Appliquer le théorème de la base incomplète pour compléter une base de  $F$  en une base de  $E$ .

**Théorème 10 (Caractérisation des sommes directes en dimension finie)** Soit  $E$  un espace vectoriel. Si  $F_1, F_2, \dots, F_p$  sont des s.e.v. de dimension finie, alors:

$F = F_1 + F_2 + \dots + F_p$  est un s.e.v. de dimension finie vérifiant

$$\dim F \leq \dim F_1 + \dim F_2 + \dots + \dim F_p.$$

de plus

$$\dim F = \sum_{i=1}^p \dim F_i \iff F = \bigoplus_{i=1}^p F_i.$$

[Ind] Prendre une base pour chacun des  $F_i$  et observer les propriétés de l'union de ces bases.

**Théorème 11 (Base adaptée à une décomposition en somme directe)** Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie et  $F_1, \dots, F_p$  des s.e.v. vérifiant  $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$ . Si pour tout  $i \in [1,p]$ ,

$(e_1^i, \dots, e_{n_i}^i)$  est une base de  $F_i$ , alors  $((e_j^i)_{j \in [1, n_i]})_{i \in [1, p]}$  est une base de  $E$ .

[Ind] C'est le cas d'égalité sur les dimensions dans le théorème précédent

**Théorème 12** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie. Si  $F$  et  $G$  sont des s.e.v. de  $E$  alors:

$$\dim F + G = \dim F + \dim G - \dim F \cap G.$$

[Ind] Prendre des supplémentaires  $F'$  et  $G'$  de  $F \cap G$  dans  $F$  et dans  $G$ . Montrer que  $F + G = (F \cap G) \oplus F' \oplus G'$ .

**Exercice 34** Soient  $F$  et  $G$  des sous-espaces d'un  $K$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie. Montrer que  $F$  et  $G$  possèdent un supplémentaire commun si et seulement si ils ont même dimension.

**Exercice 35** Soit  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille d'éléments non nuls de  $K[X]$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ :  $\text{degré}(P_n) < \text{degré}(P_{n+1})$ .

a) Montrer que la famille est libre.

b) Montrer qu'elle forme une base de  $K[X]$  si et seulement si, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\text{degré}(P_n) = n$ .

### 1.3.2 Applications linéaires en dimension finie.

**Proposition 39** Si  $E$  et  $F$  sont des espaces vectoriels isomorphes et que l'un d'entre eux est de dimension finie, alors l'autre l'est également et leurs dimensions sont égales.

[Ind] Qu'elle est l'image d'une base par un isomorphisme?

**Théorème 13 (Théorème du rang)** Soient  $E$  et  $F$  des  $K$ -espaces vectoriels et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Si  $E$  est de dimension finie, alors  $\text{Im } u$  est de dimension finie et sa dimension, appelée **rang** de  $u$ , vérifie

$$\dim \text{Im } u = \dim E - \dim \text{Ker } u.$$

[Ind] Un supplémentaire du noyau est isomorphe à l'image.

**Proposition 40** Soient  $E$  et  $F$  des  $K$ -espaces vectoriels,  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $G$  un s.e.v. de  $E$  de dimension finie.

$u(G)$  est de dimension finie et  $\dim u(G) \leq \dim G$  de plus

$$G \oplus \text{Ker } u \iff \dim u(G) = \dim G$$

.

[Ind] Prendre l'image d'une base de  $G$ .

**Remarque:** En général, si  $u$  est un endomorphisme,  $\text{Ker } u$  et  $\text{Im } u$  ne sont pas supplémentaires, même si la somme des dimensions de ces s.e.v. est celle de  $E$ . Par exemple l'endomorphisme  $u$  de  $\mathbb{R}^2$ , qui à  $\vec{v}$  associe  $\vec{0}$  et à  $\vec{j}$  associe  $\vec{i}$ , vérifie  $\text{Ker } u = \text{Im } u$ !

**Proposition 41** Soient  $E$  et  $F$  des  $K$ -espaces vectoriels de dimension finie. Si  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors

$$\begin{aligned} \text{rang}(u) = \dim F &\implies u \text{ surjective} \\ \text{rang}(u) = \dim E &\implies u \text{ injective} \end{aligned}$$

[Ind] Appliquer le théorème du rang.

**Théorème 14 (Caractérisation des isomorphismes en dimension finie)** Soient  $E$  et  $F$  des  $K$ -espaces vectoriels de dimension finie. Si  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et si  $\dim E = \dim F$ , alors:

$$u \text{ injective} \iff u \text{ surjective} \iff u \text{ bijective}$$

[Ind] Appliquer le théorème du rang.

**Exemple 10 Polynôme d'interpolation de Lagrange.**

Soient  $a_0, a_1, \dots, a_n$  des scalaires distincts et  $u$  l'application de  $K[X]$  dans  $K^{n+1}$  qui à un polynôme  $P$  associe  $(P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n))$ . L'application  $u$  est linéaire et un polynôme  $P$  appartient au noyau de  $u$  si et seulement si il possède les scalaires  $a_0, a_1, \dots, a_n$  comme zéros. On

a donc  $\text{Ker } u = \pi K[X]$  où  $\pi = \prod_{k=0}^n (X - a_k)$ .  $K_n[X]$  est un supplémentaire du noyau de  $u$ , la

restriction  $\tilde{u}$  de  $u$  à  $K_n[X]$  est donc un isomorphisme entre  $K_n[X]$  et l'image de  $u$ . Ainsi  $\text{Im } u$  est de dimension  $n + 1$ , inclus dans l'espace  $K^{n+1}$  et donc  $\tilde{u}$  est un isomorphisme entre  $K_n[X]$  et  $K^{n+1}$ . Ainsi

$$\forall (y_0, \dots, y_n) \in K^{n+1} \quad \exists ! P \in K_n[X] \quad \forall k \in [0, n] \quad P(a_k) = y_k.$$

Ce polynôme  $P$  s'appelle polynôme d'interpolation de Lagrange sur les couples  $(a_0, y_0), \dots, (a_n, y_n)$

**Exercice 36** Soit  $N$  et  $F$  deux sous-espaces d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $N = \text{Ker } u$  et  $F = \text{Im } u$ .

**Exercice 37** Soit  $u$  une application linéaire d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie dans un espace vectoriel  $E'$ . Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Montrer que:

$$\dim u(F) = \dim F - \dim (F \cap \text{Ker } u).$$

Soit  $F'$  un sous-espace vectoriel de  $E'$ . Montrer que:

$$\dim u^{-1}(F') = \dim F' \cap u(E) + \dim \text{Ker } u.$$

**Exercice 38** Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes d'un espace  $E$  de dimension finie. Montrer que

$$\dim \text{Ker } f \circ g \leq \dim \text{Ker } f + \dim \text{Ker } g.$$

**Exercice 39** Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes d'un espace  $E$  de dimension finie  $n$ . Montrer que

$$\text{rang } f + \text{rang } g - n \leq \text{rang } f \circ g \leq \min(\text{rang } f, \text{rang } g).$$

**Exercice 40** Soient  $f$  et  $g$  deux applications linéaires d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie dans un espace vectoriel  $F$ . Montrer que

$$|\text{rang } f - \text{rang } g| \leq \text{rang } (f + g) \leq \text{rang } f + \text{rang } g.$$

**Exercice 41** Soient  $E$  un  $K$  espace vectoriel de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Démontrer que  $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2 \iff \text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0\}$ .

**Exercice 42** Soient  $E$  un  $K$  espace vectoriel de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Démontrer que  $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f \iff \text{Im } f = \text{Im } f^2$ .

**Exercice 43** Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie supérieure ou égale à 2.

a) Soit  $x$  un élément de  $E$ , montrer qu'il existe un projecteur dont l'image est  $[x]$ . En déduire qu'un endomorphisme de  $E$  qui commute avec tous les projecteurs est une homothétie.

c) Soit  $x$  un élément non nul de  $E$ , montrer qu'il existe une symétrie dont l'ensemble des vecteurs invariants est  $[x]$ . En déduire qu'un endomorphisme de  $E$  qui commute avec toutes les symétries est une homothétie.

## 1.4 Espace dual

**Définition 22** On appelle forme linéaire sur le  $K$ -espace vectoriel  $E$  toute application linéaire de  $E$  dans  $K$ , les formes linéaires sont donc les éléments de  $\mathcal{L}(E, K)$  noté  $E^*$  et appelé espace dual de  $E$ .

**Exemple 11** Soit  $E = \mathcal{F}(A, K)$  et  $x_0 \in A$ .  $\varphi_{x_0} : E \rightarrow K ; f \mapsto f(x_0)$  est une forme linéaire, appelée forme évaluation en  $x_0$ .

**Exemple 12** Soit  $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ ,  $I : E \rightarrow \mathbb{R} ; f \mapsto \int_0^1 f(t) dt$  est un élément de  $E^*$ .

**Exemple 13** Soit  $E$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  constitué des suites convergentes. L'application, qui associe à la suite  $(u_n)$  sa limite, est une forme linéaire.

**Exemple 14** Soient  $a_1, \dots, a_n$  des réels, l'application  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} ; (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i$  est un élément de  $(\mathbb{R}^n)^*$ .

**Exemple 15** Soit  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$  une base d'un espace vectoriel de dimension finie  $n$ . Pour tout  $i \in [1, n]$ , l'application qui à un vecteur  $x$  associe sa  $i^{\text{ème}}$  coordonnée dans la base  $\mathcal{B}$  est une forme linéaire appelée  $i^{\text{ème}}$  forme coordonnée de la base  $\mathcal{B}$ .

**Exercice 44** Montrer qu'une forme linéaire non nulle est surjective.

**Proposition 42** Si  $E$  est un espace de dimension finie,  $E$  et  $E^*$  ont la même dimension.

[Ind] Prendre une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  de dimension  $n$ . Les  $n$  formes linéaires coordonnées de la base  $\mathcal{B}$  forment une base de  $E^*$ .

**Définition 23** On appelle hyperplan d'un espace vectoriel  $E$  un sous-espace vectoriel  $H$  qui est le noyau d'une forme linéaire non nulle  $\varphi$  définie sur  $E$ .

L'équation  $\varphi(x) = 0$  ( $x \in E$ ) est alors appelée une équation de l'hyperplan  $H$ .

**Proposition 43** Soit  $H$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .  $H$  est un hyperplan de  $E$  si et seulement si, pour tout  $x \in E - H$ ,  $H \oplus [x] = E$ .

[Ind] Travailler par analyse-synthèse: si  $H = \text{Ker } \varphi$  et  $x \notin H$  l'application qui à  $z$  associe  $z - \frac{\varphi(z)}{\varphi(x)} x$  est un projecteur. Réciproquement, si  $H \oplus [x] = E$ , construire une forme linéaire de noyau  $H$ .

**Proposition 44** Soit  $H$  un hyperplan de  $E$  et  $\varphi$  une forme linéaire non nulle dont  $H$  est le noyau. Soit  $\psi \in E^*$ ,

$$H = \text{Ker } \psi \iff \exists \alpha \in K^* \quad \psi = \alpha \varphi.$$

[Ind] Prendre  $x \notin H$  et calculer  $\alpha$  en fonction de  $x$ .

**Proposition 45** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$ . Un sous-espace vectoriel  $H$  est un hyperplan si et seulement si la dimension de  $H$  est  $n - 1$ .

[Ind] Appliquer le théorème du rang.

**Exercice 45** Soient  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  des scalaires distincts. Considérons les applications  $\varphi_i$  ( $i \in [0, n]$ ) qui à  $P \in K_n[X]$  associe  $\varphi_i(P) = P(a_i)$ . Montrer que la famille  $(\varphi_i)_{i \in [0, n]}$  est une base de  $K_n[X]^*$ .

**Exercice 46** Soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . On considère les formes linéaires suivantes:

$$\forall i \in \{0, \dots, n\} \quad \forall P \in E \quad \varphi_i(P) = P^{(i)}(0).$$

Montrer qu'elles forment une base de  $E^*$ .

**Exercice 47** Soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . On considère les formes linéaires suivantes:

$$\forall i \in [0, n] \quad \forall P \in E \quad \varphi_i(P) = \int_0^1 x^i P(x) dx.$$

Montrer qu'elles forment une base de  $E^*$ .

**Exercice 48** Soient  $f$  et  $g$  deux formes linéaires sur  $E$ . On suppose que, pour tout  $x \in E$ , on a  $f(x)g(x) = 0$ ; montrer que  $f = 0$  ou  $g = 0$ .

**Exercice 49** Soit  $E = \mathbb{R}[X]$ . On considère, pour tout entier  $i$ , la forme linéaire  $e_i^*$ , qui associe à un polynôme sa  $i^{\text{ème}}$  coordonnée dans la base canonique de  $E$ . Montrer que la famille  $(e_i^*)$  est libre, mais qu'elle ne constitue pas une base de  $E^*$ .

**Exercice 50** Soit  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des suites réelles convergentes. Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on note  $\varphi_k$  la forme linéaire qui associe à une suite  $(u_n)$  la valeur  $u_k$  et  $\varphi$  la forme linéaire qui lui associe sa limite. La famille  $(\varphi, (\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}})$  est-elle libre?

**Exercice 51** Soit  $H$  un hyperplan de  $E$  d'équation  $f(x) = 0$ . Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  qui laisse fixes tous les éléments de  $H$  et tel que  $\forall x \in E \quad u(x) - x \in H$ .

Montrer qu'il existe un unique vecteur  $c$  de  $H$  tel que:  $\forall x \in E \quad u(x) = x + f(x)c$ .

Déterminer tous les s.e.v. de  $E$  stables par  $u$ .

## 1.5 Travaux Dirigés : Espaces vectoriels

**Exercice 52** Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie,  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$ . On suppose que  $E = \text{Im } m f + \text{Im } m g = \ker f + \text{Ker } g$ . Montrer que ces deux sommes sont directes.

**Exercice 53** Etudier l'ensemble  $\mathcal{S}$  des suites réelles  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par  $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n + k$  où  $k$  est un réel donné.

**Exercice 54** Soit  $(P_n)$  une suite de  $\mathbb{R}[X]$ . Montrer que si  $\forall n \in \mathbb{N}: d^o P_{n+1} > d^o P_n$  alors la famille  $(P_n)$  est libre. De plus  $(P_n)$  est une base si et seulement si pour tout  $n \quad d^o P_n = n$ .

**Exercice 55** Soit  $u$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$ . On pose:  $K_p = \ker u^p$  et  $I_p = \text{Im } m u^p$ . Montrer que les suites  $(K_p)$  et  $(I_p)$  sont stationnaires; de plus si  $s$  est le plus petit des entiers  $p$  tels que  $I_p = I_{p+1}$  alors  $K_s = K_{s+1}$  et si  $s \geq r: K_{r-1} \neq K_r$ . Enfin montrer que  $\mathbb{R}^n$  est somme directe de  $K_s$  et  $I_s$ .

**Exercice 56** Dans  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , on pose  $s(x) = \sin x$ . Etudier l'indépendance de la famille  $(s; s \circ s; s \circ s \circ s)$ .

**Exercice 57** [Polynômes d'Hilbert]

1) On considère l'application  $\Delta: K[X] \rightarrow K[X]$  définie par  $\Delta P(X) = P(X+1) - P(X)$

2) Démontrer que  $\Delta$  est un endomorphisme surjectif et que son noyau est  $K$ . (On pensera à se ramener à la dimension finie).

3) Démontrer qu'il existe une suite  $(H_0, H_1, \dots, H_n, \dots)$  et une seule d'éléments de  $K[X]$  telle que  $H_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta H_n = H_{n-1}$  et  $H_n(0) = 0$ . On montrera que  $H_n = \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}$ . Ce sont les polynômes de Hilbert, formant une base de  $K[X]$ .

4) Pour tout  $Q$  de  $K[X]$ , montrer que la décomposition de  $Q$  dans la base d'Hilbert est  $Q = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^n Q(0) H_n$ .

5) Soit  $Q$  un élément de  $K[X]$ , écrit sous la forme  $Q = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n H_n$ ; Montrer que l'unique polynôme  $P$  tel que  $P(X+1) - P(X) = Q(X)$  et que  $P(0) = 0$  est donné par la formule suivante:  $P = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n H_{n+1}$ .

6) Application:  $P$  et  $Q$  étant associés comme en 5) montrer que:  $S_n = \sum_{m=0}^n Q(m) = P(n+1)$ .

En déduire la somme des puissances  $p^{\text{ème}}$  des entiers inférieurs un entier donné, pour  $p = 1, 2, 3, \dots$



## 1.6 Démonstrations

**Proposition 1** Soit  $x \in E$  et  $\lambda \in K$  tels que  $\lambda.x = 0$ . Si  $\lambda \neq 0$ , alors  $\frac{1}{\lambda}(\lambda.x) = (\frac{\lambda}{\lambda}).x = x = 0_E$ . Soit  $x \in E$ ,  $0_K.x = (0_K + 0_K).x = 0_K.x + 0_K.x$  donc  $0_K.x = 0_E$ . Soit  $\lambda \in K$ ,  $\lambda.0_E = \lambda.(0_E + 0_E) = \lambda.0_E + \lambda.0_E$  d'où  $\lambda.0_E = 0_E$ .

**Proposition 2** Les propriétés des lois de  $E$  déterminent les résultats suivants:  
 $(\mathcal{F}(A,E), +)$  est un groupe commutatif, l'application nulle étant l'élément neutre du groupe.  
 Soient  $f, g$  des éléments de  $\mathcal{F}(A,E)$  et  $\lambda, \mu$  des scalaires.

$$\begin{aligned} \forall x \in A \quad \lambda.(f + g)(x) &= \lambda.(f(x) + g(x)) = \\ &= \lambda.f(x) + \lambda.g(x) \\ &= (\lambda.f + \lambda.g)(x) \\ ((\lambda + \mu).f)(x) &= (\lambda + \mu).f(x) = \lambda.f(x) + \mu.f(x) \\ &= (\lambda.f + \mu.f)(x) \\ ((\lambda \times \mu).f)(x) &= (\lambda \times \mu).f(x) \\ &= \lambda.(\mu.f(x)) \\ &= \lambda.((\mu.f)(x)) \\ &= (\lambda.(\mu.f))(x) \\ (1_K.f)(x) &= 1_K.f(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

On en déduit l'égalité entre applications suivantes :  $\lambda.(f + g) = (\lambda.f + \lambda.g)$ ,  $(\lambda + \mu).f = \lambda.f + \mu.f$ ,  $(\lambda \times \mu).f = \lambda.(\mu.f)$  et  $1_K.f = f$ ; ce qui implique que  $\mathcal{F}(A,E)$  est un  $K$ -espace vectoriel.

**Proposition 3**  $(\prod_{i \in I} E_i, +)$  est un groupe commutatif d'élément neutre  $(0_{E_i})_{i \in I}$  et on vérifie les propriétés des lois externes en appliquant les propriétés de celles définie sur chacun des espaces  $E_i$

**Proposition 4** Un s.e.v.  $F$  de  $E$  est non vide car  $(F, +)$  étant un groupe, il contient au moins un élément : son élément neutre et il est stable par addition et multiplication par un scalaire. Réciproquement, si  $F \neq \emptyset$ , soit  $x \in F$ , on a alors  $(-1).x + x = 0 \in F$  donc, pour tout  $\lambda \in K$  et tout  $x \in F$ ,  $\lambda.x + 0 = \lambda.x \in F$  ainsi  $F$  est stable pour la loi externe, d'autre part, pour tout  $x$  et  $y$  dans  $F$ ,  $(1).x + y = x + y \in F$  donc  $(F, +)$  est un sous-groupe de  $E$  et puisque la restriction de la loi externe à  $F$  possède les propriétés requises, on en déduit que  $F$  est un s.e.v. de  $E$ .

**Proposition 5** Soit  $(F_i)_{i \in I}$  une famille non vide de s.e.v. et notons  $F = \bigcap_{i \in I} F_i$ . Pour tout  $i \in I$ ,  $0$  appartient à  $F_i$ , donc  $0 \in F$ . Soient  $x$  et  $y$  appartenant à  $F$  et  $\lambda \in K$ , pour tout  $i \in I$ ,  $x, y \in F_i$  et puisque  $F_i$  est un s.e.v.,  $\lambda x + y \in F_i$ , ainsi  $\lambda x + y \in F$ .

**Proposition 6** L'ensemble  $A'$  des combinaisons linéaires des éléments de  $A$  est non vide car en prenant la famille vide  $\sum_{i \in \emptyset} x_i = 0$ . Il est stable par l'addition et par la multiplication par les scalaires,  $A'$  est donc un s.e.v. de  $E$  contenant  $A$ . Soit  $F$  un s.e.v. de  $E$  contenant  $A$ , toute combinaison linéaire d'éléments de  $A$  est un élément de  $F$  et donc  $A' \subset F$ .  $A'$  est donc le plus petit s.e.v de  $E$  contenant  $A$ .

**Proposition 7** L'ensemble  $\{\sum_{i \in I} x_i \mid \forall i \in I \ x_i \in F_i, \text{ les } x_i \text{ tous nuls, sauf un nombre fini d'entre eux}\}$  est inclus dans l'ensemble  $[\cup_{i \in I} F_i]$ . Réciproquement, puisque les s.e.v. sont stables par addition et multiplication par les scalaires, toute combinaison linéaire d'éléments de  $\cup_{i \in I} F_i$  s'écrit sous la forme précédente.

**Proposition 8** Si  $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} y_i$  alors  $\sum_{i \in I} x_i - y_i = 0$  donc, pour tout  $i \in I$  on a  $x_i = y_i$ .

**Proposition 9** Supposons  $F_1 \oplus F_2$ , si  $x \in F_1 \cap F_2$  alors  $-x \in F_2$  et  $x + (-x) = 0$  donc  $x = 0$ . Réciproquement, si  $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ , soient  $x \in F_1$  et  $y \in F_2$ , l'égalité  $x + y = 0$  entraîne  $x = -y$ , on en déduit que  $x \in F_1 \cap F_2$  et donc que  $x = y = 0$ .

Supposons alors la propriété vraie pour  $p - 1$  ( $p \geq 3$ ) sous-espaces vectoriels. Soient  $F_1, \dots, F_p$  sous-espaces vectoriels, si  $F_1 \oplus \dots \oplus F_p$  alors, en notant  $G$  la somme  $F_1 + \dots + F_{p-1}$ , on a  $G = F_1 \oplus \dots \oplus F_{p-1}$  et  $G \oplus F_p$ . On en déduit alors l'implication cherchée.

Réciproquement, si  $F_1 \cap F_2 = \{0\}$  et  $\forall i \in [3, p]$   $(F_1 + \dots + F_{i-1}) \cap F_i = \{0\}$ , alors, en appliquant l'hypothèse de récurrence, on en déduit que  $F_1 \oplus \dots \oplus F_{p-1}$  et que  $(F_1 + \dots + F_{p-1}) \oplus F_p$ , ce qui entraîne  $F_1 \oplus \dots \oplus F_p$  en appliquant la définition des sommes directes.

**Proposition 10** Pour tout polynôme  $B \in K[X]$ , il existe un unique polynôme  $Q$  et un unique polynôme  $R$  de degré strictement inférieur à celui de  $A$  tel que  $B = QA + R$ . L'existence de ces polynômes indique que  $K[X] = A.K[X] + K_{n-1}[X]$  et l'unicité implique que  $A.K[X] \oplus K_{n-1}[X]$ .

**Proposition 11** Soit  $(x_i)_{i \in I}$  une famille libre et  $J \subset I$ . Si  $K$  est une partie finie de  $J$ , elle est aussi une partie finie de  $I$  donc, pour toute famille  $(\lambda_k)_{k \in K}$  de scalaires,  $\sum_{k \in K} \lambda_k x_k = 0$  entraîne pour tout  $k \in K$ ,  $\lambda_k = 0$ .

**Proposition 12** Dans un sens, c'est la proposition précédente. Soit  $(x_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs, si toute sous-famille finie est libre, prenons  $K$  une partie finie de  $I$  et  $(\lambda_k)_{k \in K}$  une famille de scalaires telle que  $\sum_{k \in K} \lambda_k x_k = 0$ , la famille  $(x_k)_{k \in K}$  étant libre, on en déduit que, pour tout  $k \in K$ ,  $\lambda_k = 0$ . Ainsi la famille  $(x_i)_{i \in I}$  est bien libre.

**Proposition 13** Soit  $L$  une partie de  $E$ . Si  $L$  est liée, il existe des éléments  $x_1, \dots, x_n$  de  $L$  et des scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  non tous nuls tels que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$ . Soit  $k \in [1, n]$  tel que  $\lambda_k \neq 0$ , on a

$$x_k = - \sum_{i \in [1, n] \setminus \{k\}} \frac{\lambda_i}{\lambda_k} x_i \text{ donc } x_k \text{ est combinaison linéaire des vecteurs de } L \setminus \{x_k\}.$$

Réciproquement, s'il existe  $y \in L$  et  $x_1, \dots, x_n \in L \setminus \{y\}$  tels que  $y$  soit combinaison linéaire de  $\{x_1, \dots, x_n\}$ , on peut trouver des scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tels que  $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ , mais alors  $1.y - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$  et puisque  $1 \neq 0$ , on en déduit que  $\{y, x_1, \dots, x_n\}$  est liée et donc que  $L$  est liée.

**Proposition 14** Supposons que  $L$  soit une partie libre.

Si  $L \cup \{x\}$  est liée, alors il existe des scalaires  $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  non tous nuls et des éléments distincts  $x_1, \dots, x_n$  de  $L$  tels que  $\lambda x + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$ . On a nécessairement  $\lambda \neq 0$  car  $\lambda = 0$  entraîne que  $L$  est liée et donc  $x = - \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i \in [L]$ .

Réciproquement, si  $x \in [L]$ , alors  $x$  est une combinaison linéaire des autres éléments de  $L \cup \{x\}$  donc cette dernière partie est liée.

**Proposition 15** Si  $[L_1] \oplus [L_2]$  alors  $L_1 \cap L_2 \subset \{0\}$  mais puisque  $0 \notin L_1$ ,  $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ . Notons  $(x)_{x \in L_1}$  et  $(y)_{y \in L_2}$  les familles d'éléments de  $L_1$  et  $L_2$  respectivement. Si  $(\lambda_z)_{z \in L_1 \cup L_2}$  est une famille de scalaires dont tous les éléments, sauf un nombre fini d'entre eux, sont nuls telle que  $0 = \sum_{z \in L_1 \cup L_2} \lambda_z z$ . On a  $\sum_{z \in L_1 \cup L_2} \lambda_z z = \sum_{z \in L_1} \lambda_z z + \sum_{z \in L_2} \lambda_z z$  avec  $\sum_{z \in L_1} \lambda_z z \in [L_1]$  et  $\sum_{z \in L_2} \lambda_z z \in [L_2]$  et on en déduit donc que  $\sum_{z \in L_1} \lambda_z z = - \sum_{z \in L_2} \lambda_z z = 0$  puis que, pour tout  $z \in L_1 \cup L_2$ ,  $\lambda_z = 0$ .

**Théorème 1** Soient  $(x_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs nuls sauf un nombre fini d'entre eux telle que, pour tout  $i \in I$ ,  $x_i \in [L_i]$  et  $\sum_{i \in I} x_i = 0$ . Notons  $J$  l'ensemble des indices des vecteurs non

nuls de la famille. Si  $J \neq \emptyset$  alors, pour tout  $j \in J$ , il existe un entier non nul  $n_j$ , des vecteurs distincts  $x_{j,1}, \dots, x_{j,n_j}$  de  $L_j$  et des scalaires  $\lambda_{j,1}, \dots, \lambda_{j,n_j}$  tel que  $x_j = \sum_{k=1}^{n_j} \lambda_{j,k} x_{j,k}$ . On a alors

$$\sum_{j \in J} \sum_{k=1}^{n_j} \lambda_{j,k} x_{j,k} = 0$$

La famille  $(x_{j,k})_{j \in J, k \in [1, n_j]}$  est libre puisqu'elle est constituée de vecteurs distincts de  $L$ , on en déduit que pour tout  $j \in J$  et tout  $k \in [1, n_j]$ ,  $\lambda_{j,k} = 0$ , mais ceci entraîne que, pour tout  $j \in J$ ,  $x_j = 0$  en contradiction avec le fait que  $J \neq \emptyset$ .

Ainsi  $J = \emptyset$  et donc, pour tout  $i \in I$ ,  $x_i = 0$ .

**Théorème 2** Si  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ , elle est donc libre et, pour tout  $x \in E$ ,  $x \in [\mathcal{B}]$ , ainsi la famille  $(\mathcal{B}, x)$  est liée.

Si  $\mathcal{B}$  est une partie libre maximale, pour tout  $x \in E$ ,  $(\mathcal{B}, x)$  est liée on en déduit que  $x \in [\mathcal{B}]$  et donc que  $\mathcal{B}$  est génératrice. Si  $y$  est un élément de  $\mathcal{B}$ , la famille  $\mathcal{B}'$ , obtenue en supprimant de  $\mathcal{B}$  l'élément  $y$  n'est plus génératrice, sinon on aurait  $y \in [\mathcal{B}']$  et donc  $\mathcal{B}$  ne serait pas libre.

Montrons que (c) entraîne (a) par la contraposée. Si  $\mathcal{B}$  n'est pas une base et qu'elle n'est pas génératrice, elle ne peut être génératrice minimale, si elle n'est pas libre, il existe un élément  $y$  de  $\mathcal{B}$  qui est combinaison linéaire des autres éléments de  $\mathcal{B}$  et l'espace vectoriel engendré par la famille  $\mathcal{B}'$ , obtenue en supprimant de  $\mathcal{B}$  l'élément  $y$  est celui engendré par  $\mathcal{B}$ . Ainsi, si  $\mathcal{B}$  est génératrice, elle ne peut être génératrice minimale.

**Théorème 3** Si  $\mathcal{B} = (x_i)_{i \in I}$  est une base, l'existence de la famille  $(\lambda_i)_{i \in I}$  se déduit du caractère générateur de  $\mathcal{B}$  tandis que l'unicité provient de son caractère libre.

Réciproquement, pour tout  $x \in E$ , l'existence de la famille  $(\lambda_i)_{i \in I}$  entraîne que  $\mathcal{B}$  est génératrice. Pour montrer que la famille  $\mathcal{B}$  est libre, il suffit de considérer l'unicité de la combinaison linéaire donnant  $O$ . En effet si la famille de scalaires  $(\lambda_i)_{i \in I}$  constituée d'éléments nuls sauf un nombre fini d'entre eux est telle que  $0 = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$  alors, puisque  $0 = \sum_{i \in I} 0 \cdot x_i$ , on en déduit que pour tout

$i \in I$ ,  $\lambda_i = 0$ .

**Proposition 16** Soit  $H$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .  $H$  contenant  $0_E$ , l'ensemble  $u(H)$  est non vide et contient  $0_F$  car  $u(0_E) = u(O \cdot O_E) = 0 \cdot u(0_E) = 0_F$ . Soient  $x', y' \in u(H)$  et  $\lambda \in K$ , il existe  $x$  et  $y$  dans  $H$  tels que  $x' = u(x)$  et  $y' = u(y)$ , ainsi  $\lambda \cdot x' + y' = \lambda \cdot u(x) + u(y) = u(\lambda \cdot x + y)$  et puisque  $H$  est un sous-espace, l'élément  $\lambda \cdot x + y$  appartient à  $H$ , ainsi  $\lambda \cdot x' + y' \in u(H)$ .

Soit  $H'$  un sous-espace vectoriel de  $F$ ,  $0_E \in u^{-1}(H')$  donc  $u^{-1}(H') \neq \emptyset$ . Soient  $x, y \in u^{-1}(H')$  et  $\lambda \in K$ ,  $u(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot u(x) + u(y)$  or  $u(x)$  et  $u(y)$  appartenant à  $H'$ , on a  $u(\lambda \cdot x + y) \in H'$  ce qui signifie que  $\lambda \cdot x + y \in u^{-1}(H')$ .

**Proposition 17** Soit  $x' \in u(E)$ , il existe  $x \in E$  tel que  $x' = u(x)$ , or il existe des éléments  $x_1, \dots, x_n$  de  $G$  et des scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tels que  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ , ainsi  $x' = \sum_{i=1}^n \lambda_i u(x_i)$  et donc  $u(G)$  est bien une partie génératrice de  $u(E)$ .

**Proposition 18** Si  $u$  est injective alors  $u(x) = u(0) = 0$  entraîne  $x = 0$ . Réciproquement, si  $x$  et  $y$  sont des éléments de  $E$  vérifiant  $u(x) = u(y)$  alors,  $u(x) - u(y) = u(x - y) = 0$  ainsi  $x - y \in \text{Ker } u$ , donc si  $\text{Ker } u$  est réduit à  $0$ ,  $u$  est injective.

**Proposition 19** Il suffit de prouver la deuxième propriété, plus générale que la première. Soit  $x'_1, \dots, x'_n$  des éléments distincts de  $u(L)$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  des scalaires tels que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i x'_i = 0$ . Il existe des éléments nécessairement distincts de  $L$  tels que, pour tout  $i \in [1, n]$ ,  $u(x_i) = x'_i$ , on en déduit donc que  $u(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) = 0$ , ainsi,  $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in [L] \cap \text{Ker } u = \{0\}$  et donc, puisque la famille  $(x_1, \dots, x_n)$  est libre, on a, pour tout  $i \in [1, n]$ ,  $\lambda_i = 0$ .

**Théorème 4** Montrons l'unicité. Soient  $u$  et  $v$  deux applications linéaires (s'il en existent) vérifiant la propriété. Alors, pour tout  $x \in E$ , il existe une famille de scalaires  $(\lambda_i)_{i \in I}$  dont tous les éléments, sauf un nombre fini d'entre eux sont nuls, telle que  $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$ , ainsi  $u(x) =$

$$u\left(\sum_{i \in I} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i \in I} \lambda_i u(e_i) = \sum_{i \in I} \lambda_i y_i = v(x), \text{ ainsi } u = v.$$

Construisons une application linéaire qui vérifie la condition souhaitée. Pour tout  $x \in E$ , il existe une unique famille de scalaires  $(\lambda_i)_{i \in I}$  dont tous les éléments, sauf un nombre fini d'entre eux sont nuls, telle que  $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$ , on pose  $u(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i y_i$  et on vérifie alors que  $u$  est linéaire et que pour tout  $i \in I$ ,  $u(e_i) = y_i$ .

**Proposition 20** Puisque  $F$  est un espace vectoriel, l'ensemble des applications de  $E$  dans  $F$  est un espace vectoriel, on vérifie alors qu'il est non vide, l'application nulle étant linéaire, et qu'il est stable pour la multiplication par un scalaire et pour l'addition des applications.

**Proposition 21** Soient  $E$ ,  $F$  et  $G$  des  $K$ -espaces vectoriels,  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $v \in \mathcal{L}(F, G)$ . Pour tous éléments  $x$  et  $y$  de  $E$  et tout scalaire  $\lambda$ , on a  $v \circ u(\lambda x + y) = v(u(\lambda x + y)) = \lambda v(u(x)) + v(u(y)) = \lambda v \circ u(x) + v \circ u(y)$ .

**Proposition 22** Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Supposons que  $u$  soit bijective et notons  $v$  sa réciproque. Pour tous éléments  $x'$  et  $y'$  de  $F$  et tout scalaire  $\lambda$ , on a  $u(v(\lambda x' + y')) = \lambda x' + y' = \lambda u(v(x')) + u(v(y')) = u(\lambda v(x') + v(y'))$  et puisque  $u$  est injective, on en déduit que  $v(\lambda x' + y') = \lambda v(x') + v(y')$ .

**Proposition 23** Si une application linéaire est injective, l'image d'une famille libre donc d'une base est une famille libre. Réciproquement, si l'image d'une base est une famille libre, soit  $x$  un élément de  $E$  tel que  $u(x) = 0$ . Il existe une famille de scalaires  $(\lambda_i)_{i \in I}$  dont tous les éléments, sauf un nombre fini d'entre eux sont nuls, telle que  $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$  en notant  $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ . On a

alors  $\sum_{i \in I} \lambda_i u(e_i) = 0$  ce qui entraîne que, pour tout  $i \in I$ ,  $\lambda_i = 0$  et donc que  $x = 0$ .

L'image par une application linéaire  $u$  d'une famille génératrice est une famille génératrice de l'image de  $u$ . L'équivalence proposée est donc immédiate.

La troisième équivalence est une conséquence des deux premières.

**Théorème 5** Notons  $v$  l'application définie de  $H$  dans  $\text{Im } u$  par  $v(x) = u(x)$  pour tout  $x \in H$ .  $v$  est linéaire et son noyau est constitué des éléments de  $H$  dont l'image est nulle, c'est à dire que l'on a  $\text{Ker } v = \text{Ker } u \cap H = \{0\}$ , on en déduit que  $v$  est injective. Soit  $x' \in \text{Im } u$ , il existe  $x \in E$  tel que  $u(x) = x'$  or, il existe  $y \in H$  et  $z \in \text{Ker } u$  tel que  $x = y + z$  donc  $u(x) = u(y) + u(z) = v(y) = x'$ . L'application linéaire  $v$  étant injective et surjective est donc un isomorphisme entre  $H$  et  $\text{Im } u$ .

**Proposition 24** L'ensemble des bijections de  $E$  dans  $E$  muni de la loi de composition est un groupe. Le sous-ensemble  $\mathcal{GL}(E)$  est non vide, stable pour la composition et l'inverse d'un automorphisme est linéaire.

**Proposition 25** Les propriétés des lois de  $A$  déterminent les résultats suivants:

$(\mathcal{F}(I, A), +, \times)$  est un anneau et  $(\mathcal{F}(I, A), +, \cdot)$  est un  $K$ -espace vectoriel. On vérifie alors sans difficulté la dernière propriété.

**Proposition 26** On sait déjà que  $(\mathcal{L}(E), +, \cdot)$  est un  $K$ -espace vectoriel.

Montrons que  $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$  est un anneau:

- l'application identique  $Id_E$  est l'élément unité pour la composition
- La loi  $\circ$ 
  - est associative
  - distributive à droite sur la loi  $+$  par définition de la loi  $\circ$

– distributive à gauche sur la loi  $+$  car les éléments de  $\mathcal{L}(E)$  sont linéaires

$$\begin{aligned} \forall f, g, h \in \mathcal{L}(E) \quad \forall x \in E \quad f \circ (g + h)(x) &= f(g(x) + h(x)) \\ &= f(g(x)) + f(h(x)) \\ &= (f \circ g + f \circ h)(x) \end{aligned}$$

Ce qui signifie que  $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$  est un sous-anneau.

– Soit  $\lambda \in K$  et  $f, g \in \mathcal{L}(E)$ . Pour tout  $x \in E$ ,

$$\begin{aligned} \lambda \cdot f \circ g(x) &= (\lambda \cdot f) \circ g(x) \\ &= \lambda \cdot f(g(x)) \\ &= f(\lambda g(x)) \\ &= f \circ (\lambda g)(x) \end{aligned}$$

**Proposition 27** Le sens direct est clair. Pour la réciproque, on constate que  $(B, +, \times)$  est alors un sous-anneau de  $A$  et la dernière propriété des algèbres est vérifiée dans  $B$  puisqu'elle est vraie dans  $A$ .

**Proposition 28** Soit  $x \in E$ , si  $x$  appartient à  $\text{Ker}(Id_E - p)$  alors  $x = p(x)$  donc  $x \in \text{Im } p$ . Réciproquement, si  $x \in \text{Im } p$ , il existe  $y \in E$  tel que  $x = p(y)$ , mais alors  $p(x) = p(p(y)) = p(y) = x$  donc  $x \in \text{Ker}(Id_E - p)$ .

Soit  $x \in E$ , on a  $p(x) \in \text{Im } p$ ,  $x - p(x) \in \text{Ker } p$  et  $x = p(x) + (x - p(x))$  ainsi  $E = \text{Ker } p + \text{Im } p$ . De plus, si  $x \in \text{Ker } p \cap \text{Im } p$ , alors  $x = p(x)$  et  $p(x) = 0$ , ainsi  $x = 0$ .

Réciproquement, si  $E = \text{Ker } p \oplus \text{Ker}(Id_E - p)$ , alors, pour tout  $x \in E$ , il existe  $y \in \text{Ker } p$  et  $z \in \text{Ker}(Id_E - p)$  tels que  $x = y + z$ . On a donc  $p(x) = p(y) + p(z) = z$  et  $p(p(x)) = p(z) = z = p(x)$  ce qui implique  $p \circ p = p$ .

**Proposition 29** L'application  $p$  définie par la proposition est bien linéaire, vérifie  $p \circ p = p$ ,  $G = \text{Im } p$  et enfin  $F = \text{Ker } p$ .

**Proposition 30** Si  $p$  est un projecteur, posons  $q = Id_E - p$ , on a  $q^2 = Id_E - p - p + p \circ p = q$ ,  $p \circ q = q \circ p = 0$  et  $p + q = Id_E$ .

**Proposition 31** C'est une simple reformulation de deux propositions précédentes.

**Proposition 32** Puisque  $Id_E = p_1 + \dots + p_n$ , pour tout  $x \in E$ ,  $x = p_1(x) + \dots + p_n(x)$  donc  $E = \text{Im } p_1 + \dots + \text{Im } p_n$ . Pour tout  $i \in [1, n]$  prenons  $x_i \in \text{Im } p_i$  tel que  $x_1 + \dots + x_n = 0$ , on a alors, pour tout  $i \in [1, n]$ ,  $x_i = p_i(x_i)$  et donc  $p_i(x_1 + \dots + x_n) = p_i p_1(x_1) + \dots + p_i p_n(x_n) = p_i(x_i) = 0$ .

Pour tout  $j \in [1, n] \setminus \{i\}$ , et tout  $x \in \text{Im } p_j$ ,  $p_i(x) = p_i(p_j(x)) = 0$  donc  $\sum_{j \in [1, n] \setminus \{i\}} \text{Im } p_j \subset \text{Ker } p_i$ .

Soit  $x \in \text{Ker } p_i$ ,  $x = p_1(x) + \dots + p_{i-1}(x) + p_{i+1}(x) + \dots + p_n(x) \in \bigoplus_{j \in [1, n] - \{i\}} \text{Im } p_j$ .

**Proposition 33** Pour tout  $x$  dans  $E$ , et pour tout  $i \in [1, n]$ , il existe un unique élément  $x_i \in F_i$  tel que  $x = \sum_{i=1}^n x_i$ . On peut donc construire une application  $p_i$  de  $E$  dans  $E$  en posant  $p_i(x) = x_i$ . On vérifie alors que la famille  $p_1, \dots, p_n$  est une famille de projecteurs associés.

**Proposition 34** Si  $s$  est une symétrie,  $p = \frac{1}{2}(Id_E + s)$  est un projecteur qui vérifie  $s = p - (Id_E - p)$

**Théorème 6** Soit  $\mathcal{H}$  l'ensemble des parties de  $G$  complétant  $L$  en une partie libre.  $\mathcal{H}$  est non vide car  $\emptyset \in \mathcal{H}$ . L'ensemble des cardinaux des éléments de  $\mathcal{H}$  est une partie bornée de  $\mathbb{N}$ , il possède alors un plus grand élément  $p$  et il existe un élément  $G'$  de  $\mathcal{H}$  de cardinal  $p$ . Pour tout  $x \in G \setminus G'$ , la partie  $L \cup (G' \cup \{x\})$  est donc liée et donc  $G \setminus G' \subset [L \cup G']$ , on en déduit que  $G \subset [L \cup G']$  et donc que  $L \cup G'$  est une partie libre et génératrice de  $E$ .

**Proposition 35** La propriété est vraie pour  $p = 0$  car la seule combinaison linéaire d'une partie vide est 0. Si on préfère éviter ce cas, on peut supposer que  $p$  est supérieur ou égal à 1 et démontrer la propriété pour  $p = 1$

Supposons la propriété vraie pour un entier  $p \geq 0$ .

Soit  $A = \{a_1, \dots, a_{p+2}\}$  engendrée par  $G = \{e_1, \dots, e_{p+1}\}$ .

Il existe une famille de scalaires  $(\alpha_{i,j})_{\substack{i \in [1, p+1] \\ j \in [1, p+2]}}$  telle que

$$\forall j \in [1, p+2] \quad a_j = \sum_{i=1}^{p+1} \alpha_{i,j} e_i$$

Si  $A$  est engendré par  $G' = \{e_1, \dots, e_p\}$ , alors, en appliquant l'hypothèse de récurrence,  $A$  est liée car elle contient une partie liée. Sinon, il existe au moins  $j \in [1, p+2]$  tel que  $\alpha_{p+1,j} \neq 0$  et la partie  $A' = \{a_k - \frac{\alpha_{p+1,k}}{\alpha_{p+1,i}} a_j \mid k \in [1, p+2] \setminus \{j\}\}$  à  $p+1$  éléments est engendrée par  $G'$ . Elle est donc liée et il existe des scalaires  $\beta_1, \dots, \beta_{j-1}, \beta_{j+1}, \dots, \beta_{p+2}$  non tous nuls tels que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{p+2} \beta_k \left( a_k - \frac{\alpha_{p+1,k}}{\alpha_{p+1,i}} a_j \right) \\ &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{p+2} \beta_k a_k - \left( \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{p+2} \beta_k \frac{\alpha_{p+1,k}}{\alpha_{p+1,i}} \right) a_j \end{aligned}$$

On en déduit alors que  $A$  est liée.

**Théorème 7** Soit  $E$  un espace de dimension finie et  $G$  une partie génératrice finie de  $E$ . Appliquons le théorème de la base incomplète à partir de  $L = \emptyset$  qui est une partie libre. On peut donc extraire de  $G$  une base de cardinal fini  $n$ . Toute partie libre de  $E$  possède donc un cardinal inférieur ou égal à  $n$  et donc toute base de  $E$  possède un cardinal fini. Si  $G$  et  $G'$  sont deux bases de  $E$ , toujours en appliquant la proposition précédente, on a alors que  $\text{card } G \leq \text{card } G' \leq \text{card } G$ . Ainsi toute base a pour cardinal  $n$ .

**Théorème 8** S'il existe une base de cardinal  $n$ , toute partie à  $n+1$  éléments est liée, donc une partie libre a au plus  $n$  éléments.

De toute partie génératrice on peut extraire une base, donc toute partie génératrice a au moins  $n$  éléments.

Une partie libre à  $n$  éléments est une base de  $E$ , sinon, à l'aide du théorème de la base incomplète, on pourrait la compléter en une base de  $E$  possédant au moins  $n+1$  éléments. Une partie génératrice  $G$  de  $E$  à  $n$  éléments est libre, sinon,  $n$  n'étant pas nul, il existerait au moins un élément  $x$  de  $G$  combinaison linéaire de éléments de  $G \setminus \{x\}$  et donc  $G \setminus \{x\}$  serait une partie génératrice à  $n-1$  éléments, ce qui est impossible.

**Proposition 36** Une partie libre de  $F$  est une partie libre de  $E$ , donc toute partie libre de  $F$  possède au plus  $n = \dim E$  éléments. Soit  $\mathcal{H}$  l'ensemble des parties libres de  $F$ .  $\mathcal{H}$  est non vide et l'ensemble des cardinaux des éléments de  $\mathcal{H}$  est une partie bornée de  $\mathbb{N}$  qui possède donc un plus grand élément  $p$ . Soit  $L \in \mathcal{H}$  de cardinal  $p$ . Tout élément de  $F \setminus L$  vérifie alors que  $L \cup \{x\}$  est une partie liée, ainsi  $F \subset [L] \subset F$  et donc  $L$  est une base de  $F$ . Si  $p = n$ ,  $L$  est alors une partie libre à  $n$  éléments, c'est donc une base de  $E$  et on a alors  $E = F$ .

**Proposition 37** L'espace vectoriel engendré par une partie finie  $A$  est de dimension finie inférieure ou égale au cardinal de  $G$ . Si cette dimension est égale au cardinal de  $A$  alors  $A$  est une partie libre.

**Proposition 38** Soit  $A$  une partie de  $E$ . On vérifie sans difficulté que si un élément  $x$  appartient à  $[A]$ ,  $[A] = [A \cap \{x\}]$  et donc  $\dim[A] = \dim[A \cap \{x\}]$  ce qui est une traduction en terme de parties des deux assertions.

**Théorème 9** Soit  $L$  une base de  $F$  et  $B$  une base de  $E$ ,  $L$  est une partie libre de  $E$ , on peut donc la compléter en prenant une partie  $G$  de  $B$  en une base de  $E$  et en posant  $H = [G]$ , on a alors  $F \oplus H = E$ .

$G$  étant une partie libre et génératrice de  $H$ , on a  $\dim H = \text{card } G = \text{card}(L \cup G) - \text{card } L = \dim E - \dim F$ .

**Théorème 10** Soient  $B_1, \dots, B_p$  des bases de  $F_1, \dots, F_p$ .  $\bigcup_{i \in [1, p]} B_i$  est une partie génératrice

finie de  $\sum_{i \in [1, p]} F_i$  donc cette somme est de dimension finie et sa dimension est inférieure à

$$\text{card} \bigcup_{i \in [1, p]} B_i \leq \sum_{i=1}^p \dim F_i.$$

Si  $\dim F = \sum_{i=1}^p \dim F_i$  alors nécessairement  $B = \bigcup_{i \in [1, p]} B_i$  est de cardinal  $\dim F$ , c'est donc

une base de  $F$ , de plus, l'ensemble des parties  $B_1, \dots, B_p$  forme une partition de  $B$ , ainsi  $F = \bigoplus_{i \in [1, p]} [B_i] = \bigoplus_{i \in [1, p]} F_i$  (théorème de construction des sommes directes).

Si  $F = \bigoplus_{i \in [1, p]} F_i$ , alors on a, pour tous éléments distincts  $i$  et  $j$  de  $[1, p]$ ,  $B_i \cap B_j = \emptyset$  et

$B = \bigcup_{i \in [1, p]} B_i$  est une partie libre de  $F$ , en effet,  $[B_1] \oplus [B_2]$  et  $B_1, B_2$  parties libres entraîne

$B_1 \cup B_2$  libre, puis on démontre par récurrence que, pour tout  $k \in [1, p]$   $\bigcup_{i=1}^k B_i$  est une partie

libre, puisque, si  $k < p$ ,  $[\bigcup_{i=1}^k B_i] \oplus [B_{k+1}]$ . Ainsi  $B$  est une base de  $F$  de cardinal  $\sum_{i=1}^p \dim F_i$ .

**Théorème 11** La famille  $((e_j^i)_{j \in [1, n_i]})_{i \in [1, p]}$  est génératrice de  $E$  et possède  $\dim E$  éléments, c'est donc une base de  $E$ .

**Théorème 12** Il existe des sous-espaces vectoriels  $F'$  et  $G'$  de  $F$  et  $G$  respectivement tels que  $(F \cap G) \oplus F' = F$  et  $(F \cap G) \oplus G' = G$ .  $G' \cap F \subset G' \cap G \cap F = \{0\}$  donc  $F \oplus G' = F + (F \cap G) + G' = F + G$ . Ainsi  $\dim(F + G) = \dim F' + \dim(F \cap G) + \dim G'$  et donc  $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - 2 \dim(F \cap G) + \dim(F \cap G)$ .

**Proposition 39** L'image d'une base par un isomorphisme est une base de l'image et toutes les deux possèdent le même nombre d'éléments.

**Théorème 13** Puisque  $E$  est de dimension finie,  $\text{Ker } u$  possède un supplémentaire  $H$  dans  $E$ . Or  $H$  et  $\text{Im } u$  sont isomorphes, donc  $\dim H = \dim E - \dim \text{Ker } u = \dim \text{Im } u$ .

**Proposition 40** L'image d'une base  $B$  de  $G$  est une partie génératrice de  $u(G)$ , donc si  $G$  est de dimension finie,  $\dim u(G) \leq \text{card } u(B) \leq \text{card } B$ .

Si de plus  $G \cap \text{Ker } u = \{0\}$ , l'image de  $B$  est une partie libre et génératrice de  $u(G)$ , les deux dimensions sont donc égales.

**Proposition 41** Si  $\text{rang}(u) = \dim F$ , alors  $\text{Im } u$  et  $F$  sont des sous-espaces emboîtés de même dimension, ils sont donc égaux.

Si  $\text{rang}(u) = \dim E$ , alors  $\dim \text{Ker } u = 0$  donc  $\text{Ker } u = \{0\}$  et l'application linéaire  $u$  est injective.

**Théorème 14** Si les deux espaces  $E$  et  $F$  ont même dimension,  $\text{rang}(u) = \dim E$  équivaut à  $\text{rang}(u) = \dim F$ . On applique alors la proposition précédente.

**Proposition 42** Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $(f_1, \dots, f_n)$  les  $n$  formes coordonnées de la base  $\mathcal{B}$ . Pour toute forme linéaire  $f$ , la forme linéaire  $f - \sum_{i=1}^n f(e_i)f_i$  s'annule sur les éléments de  $\mathcal{B}$ , d'après le théorème de caractérisation des applications linéaires, on en déduit alors qu'elle est nulle, ainsi  $(f_1, \dots, f_n)$  est une partie génératrice de  $E^*$ . Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  des scalaires tels que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = 0$ , alors, pour tout  $k \in [1, n]$ ,  $0 = (\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i)(e_k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(e_k) = \lambda_k$ , la famille des  $n$  formes coordonnées forme donc une base de  $E^*$  qui est donc un espace vectoriel de dimension  $n$ .

**Proposition 43** Soit  $H$  un hyperplan défini par une forme linéaire non nulle  $\varphi$  et  $x \notin H$ . L'application linéaire  $p$  qui à  $z \in E$  associe  $p(z) = z - \frac{\varphi(z)}{\varphi(x)}x$  est linéaire, vérifie

$$\begin{aligned} p(p(z)) &= p(z) - \frac{\varphi(p(z))}{\varphi(x)}x \\ &= p(z) - \frac{\varphi(z - \frac{\varphi(z)}{\varphi(x)}x)}{\varphi(x)}x \\ &= p(z) \end{aligned}$$

$p$  est donc un projecteur et  $p(z) = z$  équivaut à  $\varphi(z) = 0$  ainsi  $\text{Im } p = H$ . D'autre part  $p(z) = 0$  entraîne  $z \in [x]$  donc  $\text{Ker } p \subset [x]$  et puisque  $p(x) = 0$ , on en déduit que  $\text{Ker } p = [x]$  et donc  $H \oplus [x] = E$ .

Réciproquement soit  $H$  un sous-espace de  $E$  et  $x \in E$  tel que  $H \oplus [x] = E$ . Soit  $q$  le projecteur sur  $[x]$  parallèlement à  $H$ . Pour tout  $z \in E$ , il existe un unique scalaire  $\lambda$  tel que  $z - \lambda x \in H$ . Soit  $\varphi$  l'application de  $E$  dans  $K$  définie par  $\varphi(z) = \lambda_x$ . On vérifie sans peine que  $\varphi$  est linéaire et que  $\text{Ker } \varphi = H$  ce qui implique que  $H$  est un hyperplan.

**Proposition 44** Si  $\alpha \in K^*$ , alors  $\text{Ker}(\alpha\varphi) = H$ . Réciproquement si  $\psi$  est une forme linéaire de noyau  $H$ , soit  $x \in E \setminus H$ , la forme linéaire  $\psi - \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\varphi$  est nulle sur  $H$ , nulle sur  $[x]$  donc est nulle sur  $E = H \oplus [x]$ . Ainsi  $\psi = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\varphi$ .

**Proposition 45** Si  $H$  est un hyperplan, et  $\varphi$  une forme linéaire de noyau  $H$ . Puisque  $\varphi \neq 0$ , le rang de  $\varphi$  est supérieur ou égal à 1, inférieure ou égal à la dimension de  $K$ . Ainsi, le rang de  $\varphi$  est égal à 1 et  $\dim \text{ker } \varphi = n - 1$ .

Réciproquement, si  $H$  est un sous-espace de dimension  $n - 1$ , pour tout  $x \notin H$ ,  $H \cap [x] = \{0\}$  et  $\dim H \oplus [x] = n - 1 + 1 = n$ , ainsi  $H$  est bien un hyperplan.



## 1.7 Exercices

### 1.7.1 Indications

**Exercice 1** Se rapporter à la définition du symétrique d'un élément dans un groupe additif.

**Exercice 2** Cet exercice est une façon de qualifier les propriétés de  $\mathbb{R}_+^*$  et de la puissance rationnelle d'un réel positif

**Exercice 3** Utiliser la caractérisation des sous-espaces vectoriels

**Exercice 4** a) oui b) non c) non d) non e) non f) oui g) oui h) non i) oui

**Exercice 5** a) oui b) non c) non d) oui e) oui

**Exercice 6** Pour montrer que l'ensemble est stable pour l'addition, montrer que si  $a$  et  $b$  sont des réels positifs, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sqrt[n]{a^n + b^n} \leq a + b$ .

**Exercice 7** Il faut que  $F$  et  $G$  soient emboîtés. Pour le montrer, travailler par dichotomie (principe du tiers exclus): supposer que  $F$  n'est pas inclus dans  $G$  et montrer qu'alors  $G$  est inclus dans  $F$ .

**Exercice 8** Supposer que  $F$  n'est pas inclus dans  $G$  et montrer qu'alors  $F$  est inclus dans  $H$ .

**Exercice 9** Trouver  $\alpha$  et  $\beta$  pour que l'équation  $(\alpha, \beta, 2, 3) = \lambda(1, 2, 1, 1) + \mu(1, 3, 0, 1)$  soit vérifiée.

**Exercice 10** Comparer les fonctions dérivées

**Exercice 11** Expliciter les éléments d'une somme de sous-espaces vectoriels.

**Exercice 12** a) Le premier est inclus dans le second.

b) Le second est inclus dans le premier.

Pour montrer l'égalité, travailler par double inclusion.

**Exercice 13** Non, trouver un exemple.

**Exercice 14** Les sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  sont engendrés respectivement par  $\{(1, 0, -3), (1, 1, 5)\}$  et  $\{(1, -2, 1)\}$ . Montrer alors que  $F + G = \mathbb{R}^3$ .

**Exercice 15** Travailler par analyse-synthèse

**Exercice 16** Comment s'écrit un polynôme pair, un polynôme impair?

**Exercice 17** Travailler par analyse-synthèse.

**Exercice 18** Chercher la forme des polynômes appartenant respectivement à  $F$  et  $G$ .

**Exercice 19** La fonction nulle est dérivable en tout point tandis que la fonction  $f_r$  ( $r \in \mathbb{R}$ ) n'est pas dérivable en  $r$ .

**Exercice 20** Les réels  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  et  $\sqrt{6}$  sont irrationnels.

**Exercice 21** Notons  $\chi_A$  la fonction indicatrice de la partie  $A$  inclus dans  $\mathbb{R}$ . La définition d'une fonction constante par morceaux sur  $[a, b]$  peut se traduire par: une fonction  $f$  est constante par morceaux sur  $[a, b]$  si et seulement si elle est combinaison linéaire de fonctions indicatrices d'intervalles inclus dans  $[a, b]$ : il existe une suite  $a = c_1 < c_2 < \dots < c_n = b$ , des réels  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  et  $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$  tels que

$$f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{\{c_k\}} + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k \chi_{]c_k, c_{k+1}[}$$

La famille  $(\chi_{]a, c[})_{c \in ]a, b]}$  est libre, la compléter en une base de l'espace considéré.

**Exercice 22** Étudier  $H \cap \text{Ker } f$  et  $H + \text{ker } f$ .

**Exercice 23** Appliquer les définitions.

**Exercice 24** L'hypothèse signifie que, pour tout  $x \in E$ , il existe  $\lambda_x \in K$  tel que  $f(x) = \lambda_x \cdot x$ . Prendre un vecteur  $x$  non nul. Montrer que si  $\{x, y\}$  est une partie libre alors  $\lambda_x = \lambda_y$ . Vérifier la propriété sur la droite engendré par  $x$ .

**Exercice 25** Montrer l'égalité par une double inclusion.

**Exercice 26** Non (trouver un contre-exemple lorsque  $E = K[X]$ ), oui si  $k \geq 0$ , oui

**Exercice 27** Pour montrer que  $u + \text{Id}_E$  est un automorphisme de  $E$ , trouver l'application réciproque.

**Exercice 28** Trouver l'inverse de  $\varphi$

**Exercice 29** Étudier le degré de  $\varphi(P)$ , étudier l'équation différentielle  $y' + y = Q$  où  $Q$  est une fonction polynomiale.

**Exercice 30** L'image de  $p$  est l'ensemble des vecteurs  $x$  vérifiant  $p(x) = x$ .

**Exercice 31** Calculer  $p^2$ .

**Exercice 32** Effectuer des calculs algébriques

**Exercice 33** Poser  $T(P) = P(x + a)$  et  $\Delta = T - \text{Id}$ . Montrer que le rang du système proposé est celui du système  $(P, \Delta(P), \Delta^2(P), \dots, \Delta^n(P))$ .

**Exercice 34** Pour la réciproque, essayer de construire un supplémentaire commun à  $F$  et  $G$  dans  $F + G$  à partir d'un supplémentaire de  $F \cap G$  dans  $F$  et d'un supplémentaire de  $F \cap G$  dans  $G$

**Exercice 35** Étudier le degré d'une combinaison linéaire de ces polynômes.

**Exercice 36** Il faut et il suffit que  $\dim N + \dim F = \dim E$ .

**Exercice 37** a) Appliquer le théorème du rang à la restriction de  $u$  à  $F$ .

b) Appliquer le théorème du rang à la restriction de  $u$  à  $u^{-1}(F')$ .

**Exercice 38** Étudier la restriction de  $g$  à  $\text{Ker } f \circ g$ .

**Exercice 39** Pour la première inégalité, étudier la restriction de  $f$  à l'image de  $g$ .

**Exercice 40** Montrer que  $(f + g)(E) \subset f(E) + g(E)$ , en déduire la deuxième inégalité. Remarquer que  $f = (f + g) + (-g)$  et en déduite la première inégalité.

**Exercice 41** Dans l'égalité  $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$ , seule l'inégalité  $\text{Ker } f^2 \subset \text{Ker } f$  est remarquable.

**Exercice 42** Dans l'égalité  $\text{Im } f = \text{Im } f^2$ , seule l'inégalité  $\text{Im } f \subset \text{Im } f^2$  est remarquable.

Utiliser l'exercice précédent.

**Exercice 43** Prendre un supplémentaire de  $[x]$ . Que vérifie un endomorphisme qui commute avec une projection? Comment caractériser une homothétie?

**Exercice 44** Quelle est la dimension de l'image?

**Exercice 45** Utiliser les polynômes d'interpolation élémentaires de Lagrange pour montrer que la famille est libre.

**Exercice 46** Montrer que la famille est libre.

**Exercice 47** Montrer que la famille est libre.

**Exercice 48** Démontrer par l'absurde.

**Exercice 49** La forme linéaire qui à  $P$  associe  $\sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(0)$  n'est pas combinaison linéaire de la famille.

**Exercice 50** Oui.

**Exercice 51** Utiliser un vecteur  $x_0$  n'appartenant pas à l'hyperplan pour trouver  $c$ . Pour trouver un sous-espace stable  $F$ , distinguer le cas où  $c \in F$

### 1.7.2 Corrigés

**Exercice 1** Soit  $\lambda \in K$  et  $x \in E$ . En appliquant les règles définissant un espace vectoriel, on vérifie que  $\lambda.x + (-\lambda).x = \lambda.x + \lambda.(-x) = 0_E$ .

**Exercice 2** On vérifie sans difficulté que, muni de ces lois,  $\mathbb{R}_+^*$  est un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel: les propriétés de loi externe provenant des propriétés sur les puissances, en particulier, pour tout  $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ , pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ ,  $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$ ,  $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$  et  $x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta$ .

**Exercice 3** Caractérisons les éléments de  $K^{(I)}$  parmi les éléments de  $K^I$ . Soit  $x = (x_i)_{i \in I} \in K^I$  en utilisant l'ensemble  $\mathcal{P}\mathcal{F}(I)$  des parties finies de  $I$ :

$$x \in K^{(I)} \iff \exists J_x \in \mathcal{P}\mathcal{F}(I) \quad \forall i \in I \setminus J_x \quad x_i = 0$$

La suite nulle appartient à  $K^{(I)}$  qui est donc non vide. Soient  $\lambda \in K$  et  $x, y \in K^{(I)}$ , pour tout  $i \in I \setminus (J_x \cup J_y)$ ,  $\lambda.x_i + y_i = 0$  donc  $\lambda.x + y$  appartient à  $K^{(I)}$ . Ainsi  $K^{(I)}$  est un sous-espace vectoriel de  $K^I$ .

**Exercice 4** Notons  $F$  l'ensemble étudié dans chaque question.

a) Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ,  $u \in F \iff S_u = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  est fini. On constate alors que  $0 \in F$ , que, si  $\lambda$  est un réel et  $u$  et  $v$  appartiennent à  $F$ , l'ensemble  $S_{\lambda.u+v}$  est fini de cardinal inférieur à la somme des cardinaux de  $S_u$  et de  $S_v$ .

b)  $(n)$  est une suite croissante, mais  $-(n)$  est non croissante.

c) Les suites  $(1, 0, 0, \dots)$  et  $(0, 0, 1, 1, \dots)$  sont monotones, alors que leur somme  $(1, 0, 1, 1, \dots)$  ne l'est pas.

d)  $((-1)^n)$  et  $\left((-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\right)$  (où  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  désigne la partie entière de  $\frac{n}{2}$ ) sont des éléments de  $F$  alors que leur somme est une suite périodique de période 4:  $(2, 0, 0, -2, \text{etc.})$  qui n'appartient pas à  $F$ .

e)  $(n + (-1)^n)$  et  $(-n)$  sont deux éléments de  $F$  et leur somme  $(-1)^n$  n'est pas convergente.

f)  $F$  est non vide car il contient 0, si  $u$  et  $v$  sont deux éléments de  $F$  et  $\lambda$  est un réel, la suite  $(\lambda.u + v)_{n+1} - (\lambda.u + v)_n = \lambda(u_{n+1} - u_n) + (v_{n+1} - v_n)$  est convergente donc  $\lambda.u + v$  appartient à  $F$ .

g) On vérifie que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  en caractérisant parmi les suites réelles celles qui appartiennent à  $F$ :  $u \in F \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 0$ .

h) La suite  $(n! - 1)$  appartient à  $F$ , mais la suite  $2.(n! - 1)$  n'y appartient pas.

i)  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  car  $F$  est non vide ( $(0) \in F$ ), le produit par un scalaire non nul d'une suite périodique est une suite périodique de même période, la somme de deux suites périodiques est une suite périodique dont une période est le produit de deux périodes des deux suites.

**Exercice 5** Notons  $F$  l'ensemble étudié dans chaque question.

a) Une fonction réelle définie sur  $\mathbb{R}$  est affine par morceaux si et seulement si, pour tous réels  $a$  et  $b$  ( $a < b$ ), il existe un entier naturel non nul  $n$  et une suite strictement croissante  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$  tels que; pour tout  $i \in [0, n-1]$ , la restriction de  $f$  à chaque intervalle  $]a_i, a_{i+1}[$  est affine.

On en déduit alors que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  car, pour tous réels  $\alpha$  et  $\beta$ , l'ensemble des fonctions affines sur l'intervalle  $]a, b[$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(]a, b[, \mathbb{R})$ . Le seul point délicat à vérifier se situe lorsqu'on étudie la somme de deux fonctions affines par morceaux, si  $f$  et  $g$  sont des fonctions affines par morceaux, si  $a < b$  sont des réels et  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$  et  $a = b_0 < b_1 < \dots < b_m = b$  des suites adaptées à  $f$  et à  $g$ , on ordonne alors du plus petit au plus grand l'ensemble  $\{a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m\}$  en une suite  $a = c_0 < c_1 < \dots < c_p = b$ , et puisque chaque intervalle de la forme  $]c_i, c_{i+1}[$  est inclus dans l'un des intervalles de la forme  $]a_j, a_{j+1}[$  et  $]b_k, b_{k+1}[$ , la restriction à  $]c_i, c_{i+1}[$  de  $f + g$  est affine par morceaux.

b) La fonction  $f : x \mapsto \cos x + \cos(\sqrt{2}x)$  n'est pas périodique, car  $f(0) = f(T)$  entraîne  $\cos T = \cos(\sqrt{2}T) = 1$  ce qui implique  $T = 0$  car sinon, on en déduirait que  $\sqrt{2}$  est rationnel (ce qui est faux).

c) La fonction nulle est continue donc n'appartient pas à  $F$ .

d) La fonction nulle est lipschitzienne de rapport 0 et si  $\lambda$  est un réel et  $f$  et  $g$  sont lipschitziennes de rapports respectifs  $k_1$  et  $k_2$ , alors la fonction  $\lambda f + g$  est lipschitzienne de rapport  $|\lambda|k_1 + k_2$ .  
 e) La principale difficulté est de démontrer que si  $f$  est continue et si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = l$  existe, alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  existe.

La propriété est vraie si  $l = 0$ . Supposons  $l \in \mathbb{R}^*$ . Pour tout  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ , il existe  $a_\varepsilon \in \mathbb{R}$  tel que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \geq a_\varepsilon$  entraîne  $l - \varepsilon \leq |f(x)| \leq l + \varepsilon$ . En particulier, en prenant  $\varepsilon = \frac{|l|}{2}$ , on en déduit que l'image par  $f$  de l'intervalle  $[a_\varepsilon, +\infty[$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  (car  $f$  est continue) qui ne contient pas  $O$ , ainsi  $f$  garde un signe constant sur l'intervalle  $[a_\varepsilon, +\infty[$  d'où le résultat. On vérifie alors facilement que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

**Exercice 6** Notons  $S$  cet ensemble; il est non vide car la suite nulle lui appartient et il est stable par multiplication par un scalaire. Soient  $u$  et  $v$  des éléments de  $S$ , il existe deux réels positifs  $M$  et  $N$  tels que, pour tout entier  $n$ ,  $|u_n| \leq M^n$  et  $|v_n| \leq N^n$ . Ainsi, pour tout entier  $n$ ,  $|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq M^n + N^n$ , en appliquant la formule du binôme pour  $n \geq 1$ , on a  $(M + N)^n = M^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} M^{n-k} N^k + N^n \geq M^n + N^n$  et donc,  $|u_n + v_n| \leq (M + N)^n$ , on en déduit que  $S$  est stable par addition.

**Exercice 7** Soient  $F$  et  $G$  des sous-espaces vectoriels et supposons que  $F \cup G$  est un sous-espace vectoriel. Si  $F$  n'est pas inclus dans  $G$ , il existe un élément  $x$  appartenant à  $F$  et n'étant pas dans  $G$ . Le sous-espace vectoriel  $F \cup G$  étant stable par addition, pour tout élément  $y$  de  $G$ , la somme  $x + y$  appartient à  $F \cup G$ , ainsi  $x + y$  appartient à  $F$  ou à  $G$ , s'il appartient à  $G$ ,  $x = (x + y) - y$  est un élément de  $G$  ce qui est exclu, ainsi,  $x + y$  est un élément de  $F$  et  $y = (x + y) - x$  appartient à  $F$ ,  $G$  est donc inclus dans  $F$ .

**Exercice 8** Supposons que  $F$  n'est pas inclus dans  $G$ , il existe donc un élément  $x$  de  $F$  qui n'est pas dans  $G$  et donc appartient à  $H$ . Soit  $y \in F$ , montrons que  $y$  appartient à  $H$ . Si  $y \notin H$ , alors  $y$  appartient à  $G$  et  $x + y$  appartient à  $G$  ou à  $H$ . Si  $x + y$  est un élément de  $G$  alors  $x = (x + y) - y \in G$  ce qui est faux, si  $x + y \in H$ , alors  $y = (x + y) - x \in H$  ce qui est contradictoire avec l'hypothèse, ainsi  $y$  appartient à  $H$  et donc  $F$  est inclus dans  $H$ .

**Exercice 9** Résolvons l'équation  $(\alpha, \beta, 2, 3) = \lambda(1, 2, 1, 1) + \mu(1, 3, 0, 1)$ , on a  $\alpha = \lambda + \mu$ ,  $\beta = 2\lambda + 3\mu$ ,  $2 = \lambda$  et  $3 = \lambda + 2\mu$ , les deux dernières équations donnent  $\lambda = 2$  et  $\mu = 1$  et donc les deux conditions  $\alpha = 3$  et  $\beta = 7$  sont celles cherchées.

**Exercice 10** Une combinaison linéaire  $f$  des fonctions puissances entières est une fonction polynomiale. Il existe donc un entier  $n$  tel que la fonction dérivée d'ordre  $n$  de  $f$  est nulle ce qui n'est pas le cas pour la fonction exponentielle.

**Exercice 11** Un sous-espace vectoriel  $F$  étant stable par addition, on a  $F + F \subset F$ , d'autre part,  $O$  appartient à  $F$ ,  $F = \{x + 0 \mid x \in F\} \subset F + F$ .

Si  $G$  est un sous-espace vectoriel inclus dans  $F$ , on a  $F \subset F + G \subset F + F \subset F$  et donc  $F + G = F$ . Réciproquement, si  $F + G = F$  alors,  $G \subset F + G \subset F$ .

**Exercice 12** a) Si  $x$  est un élément de  $F + (G \cap H)$ , il existe  $y \in F$  et  $z \in G \cap H$  tels que  $x = y + z$  et donc  $x$  appartient à la fois à  $F + G$  et à  $F + H$  et donc à leur intersection.

b) Si  $x$  est un élément de  $(F \cap G) + (F \cap H)$ , il existe  $y \in F \cap G$  et  $z \in F \cap H$  tels que  $x = y + z$  ainsi,  $x$  appartient à  $F$  et à  $G + H$ .

En utilisant la réponse à la deuxième question, on a  $(F \cap G) + (F \cap H) = (F \cap G) + (F \cap (F \cap H)) \subset F \cap (G + (F \cap H))$ . Si  $x$  est un élément de  $F \cap (G + (F \cap H))$ ,  $x$  appartient à  $F$  et il existe  $y$  dans  $G$  et  $z$  dans  $F \cap H$  tels que  $x = y + z$ , mais alors  $y = x - z$  appartient à  $F$  donc à  $F \cap G$  et donc  $x$  appartient à  $(F \cap G) + (F \cap H)$ .

**Exercice 13** Prenons  $E = \mathbb{R}^2$  et  $F, G$  et  $H$  les sous-espaces vectoriels engendrés respectivement par  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  et  $(1, 1)$ , on a  $F + G = E = F + H$ ,  $F \cap G = \{0\} = F \cap H$  et  $G \neq H$ .

**Exercice 14** Soit  $X = (x, y, z)$  appartenant à  $F$  et à  $G$ , il existe donc des réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que  $x = \lambda + \mu$ ,  $y = \mu$  et  $z = -3\lambda + 5\mu$  et on a  $x + y + z = -2\lambda + 7\mu = 0$  et  $x - z = 4\lambda - 5\mu = 0$ , on en déduit, en résolvant ce système d'équations dont les inconnues sont  $\lambda$  et  $\mu$  que  $\lambda = \mu = 0$ .

Soit  $X = (x, y, z)$  un élément de  $\mathbb{R}^3$ . On cherche trois réels  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $\nu$  tels que  $X = (\lambda + \mu + \nu, \mu - 2\nu, -3\lambda + 5\mu + \nu)$ , en résolvant le système de trois équations qui en résulte, on trouve  $\lambda = 5/18(x + y + z)$ ,  $\mu = 2/9(x + y + z)$  et  $\nu = x/9 - 7y/18 + z/9$  ainsi  $X$  est la somme de  $\lambda(1, 0, -3) + \mu(1, 1, 5)$  et  $\nu(1, -2, 1)$  qui appartiennent à  $F$  et  $G$  respectivement, on en déduit que  $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ .

**Exercice 15** On vérifie sans peine qu'une fonction paire et impaire est nulle, ainsi l'ensemble des fonctions paires  $\mathcal{P}$  et celui des fonctions impaires  $\mathcal{I}$  sont en somme directe. Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Posons, pour tout réel  $x$ ,  $f_p(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$  et  $f_i(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$ . La fonction  $f_p$  est paire tandis que  $f_i$  est impaire, d'autre part on a  $f = f_p + f_i$ , ainsi  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P} + \mathcal{I}$ .

**Exercice 16** Un polynôme s'écrit de façon unique comme la somme d'un polynôme pair et d'un polynôme impair. Il suffit alors de vérifier que  $K[X^2]$  est le s.e.v. des polynômes pairs tandis que  $XK[X^2]$  est celui des polynômes impairs.

**Exercice 17** Seule la fonction nulle appartient à  $F \cap G$ . Si  $e$  est un élément de  $E$ , posons, pour tout réel  $x$  de  $[0, 1]$ ,  $f(x) = \int_0^1 e$  et  $g(x) = e(x) - \int_0^1 e$ ; on a bien  $f \in F$ ,  $g \in G$  et  $e = f + g$ , ainsi  $E = F + G$ .

**Exercice 18** Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ , il existe un entier  $n$  et une suite  $(a_k)_{k \in [0, n]}$  de complexes tels que  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ . Le polynôme  $P$  appartient à  $F$  si et seulement si  $a_0 = 0$  et il appartient à  $G$  si et seulement si  $a_1 = 0$ .

a) On vérifie en appliquant la caractérisation des sous-espaces vectoriels que  $F$  et  $G$  sont bien des sous-espaces vectoriels. Si  $P$  est un polynôme qui s'écrit  $\sum_{k=0}^n a_k X^k$ , alors  $Q = a_0$  appartient à  $G$ ,  $R = P - Q$  appartient à  $F$  et  $P = Q + R$  ainsi  $E = F + G$ .

b) Un supplémentaire de  $F$  est  $\mathbb{C}_0[X]$ , un supplémentaire de  $G$  est  $\mathbb{R}.X$ . Les éléments de  $F \cap G$  sont les polynômes de valuation supérieure ou égale à 2, ainsi un supplémentaire de  $F \cap G$  est  $C_1[X]$ .

Exercice complémentaire: chercher la forme générale des supplémentaires de  $F$ ,  $G$  et  $F \cap G$ .

**Exercice 19** Soit  $n$  un entier naturel et soit  $(r_k)_{k \in [0, n]}$  une suite de réels distincts et  $(\lambda_k)_{k \in [0, n]}$  une suite de réels quelconques. Supposons que  $f = \sum_{k=0}^n \lambda_k f_{r_k}$  est la fonction nulle. Soit  $p \in [0, n]$ , la fonction  $\sum_{k \in [0, n] \setminus \{p\}} \lambda_k f_{r_k}$  est dérivable en  $r_p$ . Ainsi, pour que  $f$  soit dérivable en  $r_p$ , il faut que le réel  $\lambda_p$  soit nul.

**Exercice 20** Soit  $a$ ,  $b$  et  $c$  des rationnels tels que  $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$ . On en déduit que  $a^2 = 2b^2 + 3c^2 + bc\sqrt{6}$  donc  $ab\sqrt{6}$  appartient à  $\mathbb{Q}$  ce qui implique que le rationnel  $bc$  est nul et donc  $b = 0$  ou  $c = 0$ . Si  $b = 0$ ,  $c\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$  donc  $c = 0$ , si  $c = 0$ ,  $b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$  ce qui entraîne  $b = 0$ , ainsi  $b = c = 0$ , on constate alors que  $a$  est nul aussi.

**Exercice 21** Montrons que la famille  $\mathcal{I} = (\chi_{[a, c]})_{c \in [a, b]}$  est libre. Soit  $a \leq c_1 < c_2 < \dots < c_n \leq b$  une suite croissante de réels et  $(\lambda_k)_{k \in [1, n]}$  une suite de réels quelconques. Supposons que  $f = \sum_{k=1}^n \lambda_k \chi_{[a, c_k]} = 0$ . On a  $f(c_n) = \lambda_n = 0$  et on en déduit alors par récurrence descendante que, pour tout  $k \in [1, n]$ ,  $\lambda_k = 0$ .

Notons  $F$  l'espace vectoriel engendré par  $\mathcal{I}$ .

On vérifie que la famille  $\mathcal{P} = (\chi_{\{c\}})_{c \in [a,b]}$  est libre et que l'espace vectoriel  $G$  qu'elle engendre est celui des fonctions nulles sauf en un nombre fini de points de  $[a,b]$ . Puisqu'une fonction  $f$  non nulle de  $F$  est non nulle en un infini de points, on en déduit que  $F$  et  $G$  sont en somme directe et que la réunion des familles  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{P}$  est libre.

Soit  $c$  et  $d$  ( $c < d$ ) deux éléments de  $]a,b[$ ,  $\chi_{]c,d[} = \chi_{]a,d[} - \chi_{]a,c[}$  appartient au sous-espace vectoriel  $F$  engendré par  $\mathcal{I}$  et donc  $\chi_{]c,d[} = \chi_{]c,d[} - \chi_{\{c\}}$  appartient à  $F + G$ .

Tous les types d'intervalles nécessaires à l'écriture d'une fonction constantes par morceaux sont donc dans  $F + G$ , ainsi la réunion des familles  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{P}$  est une base de l'espace considéré.

**Exercice 22** Si la famille  $(f(x_i))_{i \in I}$  est libre, une combinaison linéaire non nulle de la famille  $(x_i)_{i \in I}$  a une image non nulle, ainsi  $H$  et  $\text{Ker } f$  sont en somme directe et on ne peut rien dire de plus, car si  $H \oplus \text{Ker } f$ , l'image d'une famille libre d'éléments de  $H$  est une famille libre.

Si la famille image est génératrice de  $f(E)$ , pour tout  $x \in E$ , il existe  $y \in H$  tel que  $f(x) = f(y)$  donc  $x - y \in \text{Ker } f$ , ainsi  $E = H + \text{Ker } f$ . Réciproquement, si  $E = H + \text{Ker } f$ , l'image d'une famille génératrice de  $H$  est génératrice de  $f(E)$ , on ne peut donc, là aussi, rien dire de plus.

Si enfin, la famille image est une base de  $f(E)$  alors  $E = H \oplus \text{Ker } f$ .

**Exercice 23** a) Simple vérification

b) Pour  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $f^2(x) = (0, 0, x_1, \dots, x_{n-2})$  et  $f^n(x) = (0, \dots, 0)$ . L'application  $f$  n'est pas bijective car elle n'est pas injective, l'image de  $(0, \dots, 0, 1)$  est nulle.

c) Si on note  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ , le noyau de  $f$  est l'espace vectoriel engendré par  $e_n$ , son image est l'espace vectoriel engendré par la famille  $(e_2, \dots, e_n)$  et on a donc  $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \text{Ker } f$ .

**Exercice 24** On peut déjà remarquer que si  $x \neq 0$ , la valeur  $\lambda_x$  donnée par la définition est déterminée de façon unique.

Soit  $x_0 \in E - \{0\}$ . Pour tout  $y \in E$ , on a deux possibilités: soit  $y$  est colinéaire à  $x_0$ , c'est à dire qu'il existe  $\lambda \in K$  tel que  $y = \lambda x_0$ , soit  $\{x_0, y\}$  est une partie libre.

Dans le premier cas, on a  $f(y) = \lambda_y y = \lambda f(x_0) = \lambda \lambda_{x_0} x_0 = \lambda_{x_0} y$ . Si  $y \neq 0$ , on en déduit que  $\lambda_{x_0} = \lambda_y$ . Si  $y = 0$ , on ne peut rien conclure,  $\lambda_0$  n'étant pas unique.

Dans le deuxième cas, on a  $y \neq 0$  et  $f(x_0 + y) = \lambda_{x_0+y}(x_0 + y) = f(x_0) + f(y) = \lambda_{x_0} x_0 + \lambda_y y$ , on en déduit que  $(\lambda_{x_0+y} - \lambda_{x_0})x_0 + (\lambda_{x_0+y} - \lambda_y)y = 0$  et puisque la famille  $(x_0, y)$  est libre,  $\lambda_{x_0+y} = \lambda_{x_0} = \lambda_y$ .

Ainsi, pour tout  $y \in E$  ( $y$  compris 0), on a  $f(y) = \lambda_{x_0} y$  et  $f$  est bien une homothétie.

**Exercice 25** Soit  $x \in \text{Ker } g \circ f$ , on a  $g \circ f(x) = 0$  donc  $f(x)$  appartient à  $\text{Ker } g$  et puisque  $f(x)$  appartient à  $\text{Im } f$ , on a bien  $f(\text{Ker } g \circ f) \subset \text{Ker } g \cap \text{Im } f$ .

Soit  $x \in \text{Ker } g \cap \text{Im } f$ , on a  $x \in \text{Im } f$  et il existe donc  $x' \in E$  tel que  $x = f(x')$ . L'appartenance de  $x$  à  $\text{Ker } g$  entraîne que  $g(x) = g \circ f(x') = 0$  donc  $x' \in \text{Ker } g \circ f$ , ainsi  $x$  appartient à  $f(\text{Ker } g \circ f)$ .

**Exercice 26** Si  $F$  est stable par  $f$ , on a  $f(F) \subset F$ , ce qui entraîne  $F \subset f^{-1}(F)$ . Si  $F$  est de dimension finie,  $f(F)$  a la même dimension que  $F$  car  $f$  est un automorphisme, ainsi, on a bien  $f(F) = F$  et  $F = f^{-1}(F)$  donc  $F$  est stable par  $f^{-1}$ . En revanche, si  $F$  n'est pas de dimension finie, on peut avoir  $f(F) \neq F$  et donc  $F \neq f^{-1}(F)$ . Prenons  $E = K[X]$  et définissons l'application linéaire  $f$  par l'image de la base canonique de  $K[X]$ : si  $p$  est un entier pair,  $f(X^p) = X^{p+2}$ ,  $f(X) = 1$  et pour tout entier impair  $p$  supérieur ou égal à 3,  $f(X^p) = X^{p-2}$ . L'application linéaire  $f$  est bien un automorphisme car l'image de la base canonique est une base, d'autre part, en prenant  $F = K[X^2]$ , on a bien  $f(F) = X^2 K[X^2] \subset F$  alors que  $f^{-1}(F) = F \oplus \text{Vect}(X)$ ,  $F$  n'est donc pas stable par  $f^{-1}$ .

On montre facilement par récurrence que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$   $f^k(F) \subset f^{k-1}(F) \subset \dots \subset F$ .

On a  $(\alpha \text{Id} + \beta f)(F) \subset \alpha \text{Id}(F) + \beta f(F) \subset \alpha F + \beta F \subset F$ .

**Exercice 27** Si  $u^2 = 0$ , puisque, pour tout  $x \in \text{Im } u$ , il existe  $y \in E$  tel que  $x = u(y)$ , on a donc  $u(x) = u^2(y) = 0$ , ainsi  $x$  appartient à  $\text{Ker } u$ . Réciproquement si  $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$ , alors pour tout  $x \in E$ ,  $u(x) \in \text{Im } u$  donc  $u^2(x) = 0$  donc  $u^2 = 0$ .

Si  $u^2 = 0$ , alors  $(u + \text{Id}_E) \circ (-u + \text{Id}_E) = \text{Id}_E$  donc  $u + \text{Id}_E$  est bien un automorphisme de  $E$ .

**Exercice 28** Il suffit de vérifier que l'application  $\psi$  définie pour  $(x, y) \in E \times F$  par  $\psi(x, y) = (x, y + f(x))$  est l'application inverse de  $\varphi$ .

**Exercice 29** On vérifie que, pour tout polynôme réel  $P$ , le degré de  $\varphi(P)$  est celui de  $P$  donc  $\varphi(P) = 0$  implique  $P = 0$ .

Si  $Q$  est une fonction polynomiale, il existe une solution particulière de l'équation différentielle  $y' + y = Q$  qui est un polynôme, on en déduit que  $\varphi$  est surjective. La méthode de variation de la constante appliquée à l'équation  $y' + y = x^p$  donne comme solution particulière  $x \mapsto e^{-x} \int e^x x^p dx$ , en intégrant par parties l'intégrale à calculer en ajustant judicieusement la

constante d'intégration arbitraire, on trouve alors  $\varphi^{-1}(X^p) = \sum_{k=0}^n (-1)^k k! \binom{p}{k} X^{p-k}$

**Exercice 30** Supposons  $p \circ u = u \circ p$ . Si  $x \in \text{Ker } p$ ,  $p \circ u(x) = u \circ p(x) = 0$  donc  $u(x) \in \text{Ker } p$  et donc  $\text{Ker } p$  est stable par  $u$ . Si  $x \in \text{Im } p$ ,  $p \circ u(x) = u \circ p(x) = u(x)$  donc  $u(x)$  vérifie la propriété caractéristique des éléments de  $\text{Im } p$  ainsi  $u(x) \in \text{Im } p$  et donc  $\text{Im } p$  est stable par  $u$ .

Supposons que le noyau et l'image de  $p$  soient stables par  $u$ . Pour tout  $x \in E$ , il existe  $y \in \text{Ker } p$  et  $z \in \text{Im } p$  tel que  $x = y + z$ , on a alors  $p \circ u(x) = p(u(y)) + p(u(z))$ , or  $u(y) \in \text{Ker } p$  et  $u(z) \in \text{Im } p$ , donc  $p \circ u(x) = u(z) = u(p(x))$ , ainsi  $p$  et  $u$  commutent.

**Exercice 31** Les applications  $u$  et  $\text{Id}_E$  commutent donc, si  $p = \frac{1}{2}(u + \text{Id}_E)$ , alors  $p^2 = \frac{1}{4}(u^2 + 2u + \text{Id}_E)$  et donc  $p^2 - p = \frac{1}{4}(u^2 - \text{Id}_E)$ , on en déduit l'équivalence proposée.

**Exercice 32** On a  $(p + q)^2 = p^2 + q^2 + pq + qp$  donc si  $qp = pq = 0$ , on a alors  $(p + q)^2 = p + q$  et  $p + q$  est bien un projecteur.

Réciproquement, si  $p + q$  est un projecteur, on a  $pq + qp = 0$ , ce qui implique, en composant à gauche et à droite par  $p$ ,  $pq + pqp = 0$  et  $pqp + qp = 0$ . On en déduit donc que  $qp = pq$  puis que  $pq = qp = 0$ .

**Exercice 33** Les application linéaires  $T$  et  $\text{Id}$  commutent donc, pour tout entier strictement positif  $n$ :

$$\Delta^n = T^n + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} T^{n-k}$$

Puisqu'on ne modifie pas le rang d'une famille en ajoutant à l'un des vecteurs une combinaison linéaire des autres vecteurs, le rang du système proposé  $(P, T(P), \dots, T^{n-1}(P), T^n(P))$  est celui du système  $(P, T(P), \dots, T^{n-1}, \Delta^n(P))$  en recommençant le procédé, on découvre alors que le rang cherché est celui du système  $(P, \Delta(P), \Delta^2(P), \dots, \Delta^n(P))$ .

On montre alors, sans difficulté, en étudiant par exemple l'image par  $\Delta$  de la base canonique de  $\mathbb{R}[X]$  que si  $P$  est un polynôme de degré  $p > 0$ ,  $\Delta(P)$  est un polynôme de degré  $p - 1$  puis de proche en proche que  $\Delta^k(P)$  est de degré  $p - k$  si  $k \leq p$  et est nul si  $k > p$ . On en déduit, en examinant le degré d'une combinaison linéaire de la famille  $(P, \Delta(P), \Delta^2(P), \dots, \Delta^n(P))$  que celle-ci est libre si et seulement si le degré de  $P$  est supérieur ou égal à  $n$ .

**Exercice 34** Si  $F$  et  $G$  possèdent un supplémentaire commun  $H$ , leurs dimensions sont donc égales à  $\dim E - \dim H$ .

Réciproquement, supposons que  $\dim F = \dim G$ . Notons  $p$  la dimension commune de ces sous-espaces,  $q$  la dimension de  $F \cap G$  et  $r = 2p - q$  la dimension de  $F + G$ .

Soient  $F_1$  et  $G_1$  des supplémentaires de  $F \cap G$  dans  $F$  et dans  $G$  respectivement, les dimensions de  $F_1$  et  $G_1$  sont égales à  $p - q$  et notons  $(f_{q+1}, \dots, f_p)$  et  $(g_{q+1}, \dots, g_p)$  des bases de  $F_1$  et  $G_1$ , soit alors  $H_1$  le sous-espace engendré par la famille  $(f_{q+1} + g_{q+1}, \dots, f_p + g_p)$ . Puisque  $F_1 \cap G_1 \subset F \cap G$ , on a  $F_1 \cap G_1 \subset F_1 \cap (F \cap G) = \{0\}$ , les sous-espaces  $F_1$  et  $G_1$  sont donc en somme directe et la famille  $(f_{q+1} + g_{q+1}, \dots, f_p + g_p)$  est libre car si  $\lambda_{q+1}, \dots, \lambda_p$  sont des scalaires tels que  $\lambda_{q+1}(f_{q+1} + g_{q+1}) + \dots + \lambda_p(f_p + g_p) = 0$  alors  $\lambda_{q+1}f_{q+1} + \dots + \lambda_p f_p \in F_1 \cap G_1 = \{0\}$  et les scalaires  $\lambda_{q+1}, \dots, \lambda_p$  sont donc nuls puisque la famille  $(f_{q+1}, \dots, f_p)$  est libre. On en déduit que la dimension de  $H_1$  est  $p - q$ .

L'espace vectoriel engendré par  $F \cup H_1$  est celui engendré par  $F \cup \{f_{q+1} + g_{q+1}, \dots, f_p + g_p\}$  donc celui engendré par  $F \cup \{g_{q+1}, \dots, g_p\}$  car les vecteurs  $f_1, \dots, f_p$  appartiennent à  $F$ , ainsi  $F + H_1 = F + G_1 = F + (F \cap G) + G_1 = F + G$ , or la somme des dimensions de  $F$  et  $H_1$  est égale à celle de  $F + G$ , on en déduit donc que  $F \oplus H_1 = F + G$ , de la même façon, on a  $G \oplus H_1 = F + G$ , en prenant finalement un supplémentaire  $H_2$  de  $F + G$  dans  $E$ , on construit un supplémentaire  $H_1 \oplus H_2$  commun à  $F$  et à  $G$  dans  $E$ .

**Exercice 35** a) Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $\lambda_0, \dots, \lambda_n$  des scalaires. Si la famille de scalaires n'est pas nulle, il existe un plus grand indice  $m \in [0, n]$  tel que  $\lambda_m \neq 0$ , le polynôme  $P = \sum_{k=0}^m \lambda_k P_k$  est donc égal à la somme de  $\lambda_m P_m$  qui est un polynôme de degré égal à celui de  $P_m$  et d'un polynôme de degré strictement inférieur, le polynôme  $\sum_{k=0}^n \lambda_k P_k$  a donc un degré égal à celui de  $P_m$ , ce polynôme n'est donc pas nul. Ainsi, en prenant la contraposée de ce que l'on vient de démontrer, la famille  $(P_0, \dots, P_n)$  est libre. On en déduit que la famille complète  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est libre.

b) Supposons que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\text{degré}(P_n) = n$ . La famille est donc libre, montrons qu'elle est génératrice de  $K[X]$ . Soit  $Q$  un polynôme non nul et  $d$  son degré, la famille  $(P_0, \dots, P_d)$  est une famille libre à  $d + 1$  éléments de  $K_d[X]$ , elle en constitue donc une base, ainsi  $Q$  est une combinaison linéaire des éléments de la famille  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

On déduit de la question précédente que le degré d'une combinaison linéaire non nulle de la famille  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est celui d'un des polynômes de cette famille. Montrons alors la réciproque par la contraposée de cette implication

Supposons qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\text{degré}(P_n) \neq n$ , notons  $m$  le premier entier positif vérifiant cette inégalité. Si  $m = 0$ , on a donc  $\text{degré}(P_0) > 0$  et donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\text{degré}(P_n) \geq \text{degré}(P_0) > 0$ , ainsi, les polynômes constants ne peuvent être combinaison linéaire de cette famille. Si  $m > 0$ , pour tout  $k \in [0, m - 1]$ , on a  $\text{degré}(P_k) = k$  et le degré de  $P_m$  est donc strictement supérieur à  $m - 1$  et, étant différent de  $m$ , il est donc supérieur ou égal à  $m + 1$ , on en déduit que  $m$  n'est pas le degré d'un polynôme de cette famille, ainsi,  $X^m$  ne peut être combinaison linéaire de cette famille.

**Exercice 36** Le théorème du rang montre que s'il existe une telle application,  $\dim N + \dim F = \dim E$ .

Réciproquement, supposons que  $\dim N = p$ ,  $\dim F = q$  et  $\dim E = p + q$ . En appliquant le théorème de la base incomplète, on peut trouver une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$  de  $E$  telle que  $(e_1, \dots, e_p)$  soit une base de  $N$  et construisons par ailleurs une base de  $F$ :  $(f_{p+1}, \dots, f_n)$ , l'endomorphisme  $u$  défini par l'image suivante de la base  $\mathcal{B}$ : pour tout  $i \in [1, p]$ ,  $u(e_i) = 0$  et pour tout  $i \in [p + 1, n]$ ,  $u(e_i) = f_i$  est tel que  $\text{Im } u = F$  et  $N \subset \text{Ker } u$ , mais alors  $N$  et  $\text{Ker } u$  ont la même dimension  $p = n - q$  donc ces deux sous-espaces sont égaux, on a donc trouvé une application linéaire qui répond à la question.

**Exercice 37** a) Soit  $v$  la restriction de  $u$  à  $F$ . Le noyau de  $v$  est l'ensemble des éléments de  $E$  qui sont éléments de  $F$  et d'image nulle, ainsi  $\text{Ker } v = F \cap \text{Ker } u$  et puisque l'image de  $v$  est  $u(F)$ , l'égalité désirée s'obtient donc en appliquant le théorème du rang à  $v$ . b) Soit  $w$  la restriction de  $u$  à  $u^{-1}(F')$ . L'image de  $w$  est  $F' \cap u(E)$  et puisque  $\text{Ker } u \subset u^{-1}(F')$ , on a  $\text{Ker } w = \text{Ker } u$ . L'égalité s'en déduit aussitôt.

**Exercice 38** Soit  $h$  l'application linéaire de  $F = \text{Ker } f \circ g$  dans  $E$  qui, à un élément  $x$  de  $F$  associe  $g(x)$ . Le noyau de  $h$  est égal à  $F \cap \text{Ker } g$  et son image est incluse dans  $\text{Ker } f$ . Appliquons le théorème du rang, on a:  $\dim F = \dim F \cap \text{Ker } g + \dim \text{Im } h \leq \dim \text{Ker } g + \dim \text{Ker } f$ .

**Exercice 39** Soit  $h$  la restriction de  $f$  à  $\text{Im } g$ , le noyau de  $h$  est égal à  $\text{Ker } f \cap \text{Im } g$  et son image est  $f(\text{Im } g) = \text{Im } f \circ g$ . Appliquons le théorème du rang:  $\dim \text{Im } g = \dim \text{Ker } f \cap \text{Im } g + \dim \text{Im } f \circ g$  soit  $\text{rang } f \circ g = \text{rang } g - \dim \text{Ker } f \cap \text{Im } g$ . Puisque  $\text{Ker } f \cap \text{Im } g$  est inclus dans  $\text{Ker } f$ , on a  $\dim \text{Ker } f \cap \text{Im } g \leq n - \text{rang } f$ , ainsi  $\text{rang } g - (n - \text{rang } f) \leq \text{rang } f \circ g \leq \text{rang } g$ . La première inégalité est donc démontrée. D'autre part, on a  $\text{Im } f \circ g \subset \text{Im } f$  et on en déduit alors la deuxième inégalité

**Exercice 40** On a  $(f + g)(E) = \{f(x) + g(x) \mid x \in E\} \subset \{f(x) + g(y) \mid x, y \in E\} = f(E) + g(E)$ . Ainsi  $\text{rang } (f + g) \leq \text{rang } f + \text{rang } g$ . On en déduit aussi que  $\text{rang } (f + g - g) \leq \text{rang } (f + g) + \text{rang } (-g)$  et puisque  $g(E) = -g(E)$ , on a  $\text{rang } (f) - \text{rang } g \leq \text{rang } (f + g)$ . En échangeant les rôles de  $f$  et  $g$ , on a aussi  $\text{rang } (g) - \text{rang } f \leq \text{rang } (g + f)$ . On en déduit aussitôt la première inégalité.



**Exercice 41** Pour tout endomorphisme  $f$ , on a  $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2$ .

Supposons que  $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$  et soit  $x \in \text{Im } f \cap \text{Ker } f$ , on a  $f(x) = 0$  et il existe  $y \in E$  tel que  $x = f(y)$ , on a donc  $f^2(y) = 0$  ce qui entraîne  $x = f(y) = 0$ .

Réciproquement, supposons  $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0\}$ . Soit  $x \in \text{Ker } f^2$ , on a  $f(f(x)) = 0$  donc  $f(x) \in \text{Im } f \cap \text{Ker } f$  ce qui entraîne  $f(x) = 0$ , ainsi  $x \in \text{Ker } f$ .

**Exercice 42** Pour tout endomorphisme  $f$ , on a  $\text{Im } f^2 \subset \text{Im } f$ .

Supposons que  $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$  et soit  $x \in \text{Im } f$ . Il existe donc  $y \in E$  tel que  $x = f(y)$ , de plus, il existe  $y' \in E$  et  $z' \in \text{Ker } f$  tel que  $y = f(y') + z'$ . On en déduit que  $x = f(f(y') + z') = f^2(y')$  et donc  $x \in \text{Im } f^2$ .

Réciproquement, supposons  $\text{Im } f = \text{Im } f^2$ . On en déduit, en appliquant le théorème du rang, que les dimensions des noyaux de  $f$  et de  $f^2$  sont égales, et puisque  $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2$ , on a donc  $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$ . Ainsi, en appliquant l'exercice précédent  $\text{Im } f \oplus \text{Ker } f$ . La dimension de  $\text{Im } f \oplus \text{Ker } f$  est donc égale à  $\text{rang } f + \dim \text{Ker } f = \dim E$ , ce qui implique  $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$ .

**Exercice 43** a) Soit  $x \in E$  et  $F$  un supplémentaire de l'espace vectoriel engendré par  $x$ . La projection sur ce dernier sous-espace parallèlement à  $F$  est un des projecteurs cherchés.

Supposons que l'endomorphisme  $u$  commute avec tous les projecteurs. Soit  $x \in E$  et  $p$  un projecteur dont l'image est  $[x]$ , de l'égalité  $u \circ p = p \circ u$ , on en déduit facilement que l'image de  $p$  est stable par  $u$  et donc que  $u(x) \in [x]$ . Ainsi, pour tout  $x \in E$ ,  $\{x, u(x)\}$  est une partie liée, ceci étant une propriété caractéristique des homothéties, on en déduit que  $u$  est une homothétie.

b) Soit  $x \in E$  et  $F$  un supplémentaire de l'espace vectoriel engendré par  $x$ . La symétrie par rapport à  $[x]$  parallèlement à  $F$  est une des symétries cherchées.

Supposons que l'endomorphisme  $u$  commute avec toutes les symétries. Soit  $x \in E$  et  $s$  une symétrie dont l'ensemble des vecteurs invariants est  $[x]$ . On a  $u \circ s(x) = u(x) = s(u(x))$ , on en déduit que  $u(x)$  est un vecteur invariant par  $s$  et donc que  $u(x) \in [x]$ . Comme précédemment, il en résulte que  $u$  est une homothétie.

**Exercice 44** Si la forme linéaire  $f$  est non nulle, son rang est alors supérieur ou égal à 1, mais puisque la dimension de  $K$  est égale à 1, on en déduit que  $1 \leq \text{rang}(f) \leq 1$  et donc que  $\text{Im } f = K$ ,  $f$  est bien surjective

**Exercice 45** Puisqu'il y a  $n + 1$  éléments dans cette famille, il suffit de montrer qu'elle est libre pour conclure.

Soient  $\lambda_0, \dots, \lambda_n$  des scalaires tels que  $\sum_{k=0}^n \lambda_k \varphi_k = 0$ . Soit  $i \in [0, n]$ , en évaluant cette somme sur

le polynôme  $P_i = \prod_{k \in [0, n] - \{i\}} (X - a_k)$ , on trouve  $\sum_{k=0}^n \lambda_k \varphi_k(P_i) = \lambda_i \prod_{k \in [0, n] - \{i\}} (a_i - a_k) = 0$  ce qui implique que  $\lambda_i = 0$ .

**Exercice 46** Puisqu'il y a  $n + 1$  éléments dans cette famille, il suffit de montrer qu'elle est libre pour conclure.

Soient  $\lambda_0, \dots, \lambda_n$  des scalaires tels que  $\sum_{k=0}^n \lambda_k \varphi_k = 0$ . Soit  $i \in [0, n]$ , en évaluant cette somme sur

le polynôme  $X^i$ , on trouve  $\sum_{k=0}^n \lambda_k \varphi_k(X^i) = \lambda_i i! = 0$  ce qui implique que  $\lambda_i = 0$ .

**Exercice 47** Puisqu'il y a  $n + 1$  éléments dans cette famille, il suffit de montrer qu'elle est libre pour conclure.

Soient  $\lambda_0, \dots, \lambda_n$  des scalaires tels que  $\sum_{k=0}^n \lambda_k \varphi_k = 0$ . On en déduit que, pour tout polynôme  $P$ ,

on a  $\int_0^1 \left( \sum_{k=0}^n \lambda_k x^k \right) P(x) dx = 0$ . Prenons  $P = \sum_{k=0}^n \lambda_k X^k$ , on a  $\int_0^1 P^2(x) dx = 0$ , la fonction polynomiale  $P^2$  est continue, positive, son intégrale entre 0 et 1 ne peut être nulle que si la fonction  $P^2$  est nulle sur  $[0, 1]$ , ceci entraîne que  $P$  possède une infinité de zéros et donc que  $P$  est le polynôme nul. Ainsi, pour tout  $k \in [0, n]$ ,  $\lambda_k = 0$ .

**Exercice 48** Supposons que  $f \times g = 0$ ,  $f \neq 0$  et  $g \neq 0$ . Il existe donc des éléments  $x$  et  $y$  de  $E$  tels que  $f(x) \neq 0$  et  $g(y) \neq 0$  qui vérifient de plus  $f(y) = g(x) = 0$ . On a alors  $(f \times g)(x + y) = (f(x) + f(y))(g(x) + g(y)) = f(x)g(y) \neq 0$  en contradiction avec les hypothèses.

**Exercice 49** Soient  $\lambda_0, \dots, \lambda_n$  des scalaires tels que  $\sum_{k=0}^n \lambda_k e_k^* = 0$ , en évaluant cette somme sur le polynôme  $X^i$  pour  $i \in [0, n]$ , on trouve  $\lambda_i = 0$ . La famille est donc libre/

L'application  $\varphi$  qui, à  $P \in \mathbb{R}[X]$ , associe  $\sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(0)$  est bien définie puisque, pour tout polynôme  $P$ , il existe  $d \in \mathbb{N}$  tel que  $P^{(d)} = 0$ . On vérifie ensuite que  $\varphi$  est linéaire: soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes réels et  $\lambda$  un réel, prenons  $m$  supérieur ou égal au plus grand des degrés de  $P$  et  $Q$ , on a

$$\begin{aligned} \varphi(P + \lambda Q) &= \sum_{k=0}^m (P + \lambda Q)^{(k)}(0) \\ &= \sum_{k=0}^m P^{(k)}(0) + \lambda \sum_{k=0}^m Q^{(k)}(0) \\ &= \varphi(P) + \lambda \varphi(Q) \end{aligned}$$

Si  $\varphi$  est une combinaison linéaire de la famille  $(e_i^*)_{i \in \mathbb{N}}$ , il existe un entier positif  $n$  et des scalaires  $\lambda_0, \dots, \lambda_n$  tels que  $\varphi = \sum_{k=0}^n \lambda_k e_k^*$ , mais ceci implique que  $\varphi(X^{n+1}) = 0$  en contradiction avec la définition de  $\varphi$ .

**Exercice 50** Soient  $\lambda, \lambda_0, \dots, \lambda_n$  des scalaires tels que  $\lambda \varphi + \sum_{k=0}^n \lambda_k \varphi_k = 0$ . Pour  $p \in [0, n]$ , définissons la suite dont l'élément d'indice  $p$  vaut 1 et dont tous les autres éléments sont nuls, cette suite a une limite nulle et en évaluant la somme précédente sur cette suite, on trouve alors  $\lambda_p = 0$ . Puisque  $\varphi \neq 0$ , on en déduit finalement que  $\lambda = 0$ .

**Exercice 51** Soit  $x_0 \in E - H$ , puisque  $f(x_0) \neq 0$ , si  $c$  existe, il est déterminé de façon unique par l'équation  $u(x_0) = x_0 + f(x_0)c$ .

Posons alors  $c = \frac{1}{f(x_0)}(u(x_0) - x_0)$ . Le vecteur  $c$  appartient bien à  $H$  et pour tout  $x \in E$ , il existe  $y \in H$  et  $\lambda \in K$  tels que  $x = \lambda x_0 + y$ . On alors  $u(x) = u(y) + \lambda u(x_0) = y + \lambda(x_0 + f(x_0)c) = x + \lambda f(x_0)c$ , mais, puisque  $f(x) = f(y) + \lambda f(x_0) = \lambda f(x_0)$ , on a bien  $u(x) = x + f(x)c$ .

Tous les sous-espaces inclus dans  $H$  sont stables par  $u$ , prenons  $F$  un sous-espace stable par  $u$  non inclus dans  $H$ , il existe alors un élément  $x_0$  appartenant à  $F - H$ . Puisque  $u(x_0)$  appartient à  $F$ , on a donc nécessairement  $c \in F$ . On vérifie alors que tout sous-espace vectoriel  $F$  qui contient  $c$  est stable par  $u$ .

Les sous-espaces vectoriels stables par  $u$  sont donc les sous-espaces contenus dans  $H$  et les sous-espaces obtenus comme somme d'un sous-espace contenu dans  $H$  et contenant  $c$  et d'une droite non contenue dans  $H$  car si un sous-espace  $F$  n'est pas contenu dans  $H$ , en prenant  $x_0 \in F - H$ , on a  $F = (F \cap H) \oplus [x_0]$ .

**Exercice 52** C'est la formule du rang:  $\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} m f = \dim \ker g + \dim \operatorname{Im} m g$ , l'hypothèse donne:

$$\dim E = \dim \operatorname{Im} m f + \dim \operatorname{Im} m g - \dim (\operatorname{Im} m f \cap \operatorname{Im} m g) = \dim \ker f + \dim \ker g - \dim (\ker f \cap \ker g).$$

$$\text{Ainsi } \dim (\operatorname{Im} m f \cap \operatorname{Im} m g) = \dim \operatorname{Im} m f + \dim \operatorname{Im} m g - \dim E = \dim \operatorname{Im} m g - \dim \ker f$$

$$= \dim E - \dim \ker g - \dim \ker f = -\dim (\ker f \cap \ker g) = 0, \text{ car toute dimension est positive.}$$

Ceci prouve que les sommes sont directes.

**Exercice 53** Nous allons commencer à étudier le cas où  $k = 0$ . L'ensemble des suites à récurrence linéaire d'ordre 2 a une structure d'espace vectoriel de dimension 2. En effet nous pouvons considérer l'application  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{S}$  qui à un couple de réel  $(u_0, u_1)$  associe la suite vérifiant (\*) de premier terme  $(u_0, u_1)$ . On montre que cette application est linéaire et bijective, essentiellement parce que une suite de  $\mathcal{S}$  est entièrement déterminé par ces deux premiers termes. On en déduit le résultat. Si  $k \neq 0$  on a une structure de variété affine de dimension 2.

Il suffit donc de trouver une base formée de deux éléments pour obtenir toutes les solutions par combinaisons linéaires. On montrera par la réduction que l'on peut chercher des suites géométriques, leur recherche après simplification donne l'équation  $r^2 - r - 1 = 0$  ce qui donne pour solutions  $\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$  et  $\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)$  et  $u_n = -k + \lambda \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$  où  $\lambda, \mu$  sont des constantes réelles éventuellement déterminées par les conditions initiales

**Exercice 54** Pour la première partie si on prend une combinaison linéaire de longueur minimale c'est à dire  $\sum_{i=0}^N \lambda_i P_{n_i} = 0$  avec  $\lambda_N \neq 0$  en regardant les termes de plus haut degré nous obtenons

une contradiction. Ensuite il faut montrer que  $(P_n)$  est génératrice ssi  $d^0 P_n = n$ . Montrons la partie directe par contraposée soit  $n_0$  le plus petit entier tel que  $d^0 P_{n_0} \neq n_0$  ainsi  $d^0 P_0 = 0, \dots, d^0 P_{n_0-1} = n_0 - 1$  mais  $d^0 P_{n_0} > n_0$  et d'après la première partie la famille  $(P_n) \cup (X^{n_0})$  est libre et donc  $X^{n_0}$  ne peut pas s'exprimer à l'aide des  $(P_n)$  et les  $(P_n)$  ne sont pas générateurs. Pour la réciproque si  $d^0 P_n = n$  pour tout  $n$  alors dans  $\mathbb{R}_n[X]$  nous avons  $n + 1$  polynômes  $(P_i)_{0 \leq i \leq n}$  libres et donc qui forme une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ , ceci prouve en utilisant la structure emboîtée de  $(\mathbb{R}_n[X])_n$  que les  $(P_n)$  est une base de  $\mathbb{R}[X]$ .

**Exercice 55** On a pour tout  $p$ :  $\ker u^{p+1} \supset \ker u^p$  car si  $u^p(x) = 0$  alors  $u^{p+1}(x) = 0$ . Ainsi  $(\ker u^p)_p$  est une suite croissante de sev de  $\mathbb{R}^n$ . La suite des dimensions est une suite croissante d'entiers bornée donc convergente c'est à dire stationnaire et par suite il existe  $p_0$  tel que  $K_{p_0} = K_{p_0+1} = \dots = K_{p_0+n}$ . De même on a  $\text{Im } u^{p+1} \subset \text{Im } u^p$  car si  $x = u^{p+1}(y)$  on a  $x = u^p(u(y))$  ce coup-ci on a une suite des dimensions décroissante bornée donc convergente et comme il s'agit d'entiers on a que cette suite est stationnaire et donc il existe  $s$  le plus petit des entiers  $p$  tels que  $I_p = I_{p+1}$ . La formule du rang donne pour tout  $p$ :  $n = \dim K_p + \dim I_p$  ainsi si  $\dim I_p = \dim I_{p+1}$  on a  $\dim K_p = \dim K_{p+1}$  et donc  $K_s = K_{s+1}$  et si  $r \leq s$  alors  $K_{r-1} \neq K_r$  puisque  $I_{r-1} \neq I_r$ . Si  $x$  est un élément de  $K_s \cap I_s$  alors  $u^s(x) = 0$  et il existe  $y$  tel que  $x = u^s(y)$  ce qui donne  $u^{2s}(y) = 0$  c'est à dire  $u^s(y) = 0$  car  $K_{2s} = K_s$  donc  $x = 0$ . Ainsi  $K_s \cap I_s = \{0\}$  et comme  $\dim K_s + \dim I_s = n$  on a  $\mathbb{R}^n = K_s \oplus I_s$ .

**Exercice 56** C'est un exercice reliant analyse et algèbre. En effet si on a  $\lambda \sin x + \mu \sin \sin x + \nu \sin \sin \sin x = 0$  alors en posant  $y = \sin x$  on a pour tout  $y \in [-1, 1]$  la relation  $\lambda y + \mu \sin y + \nu \sin \sin y = 0$ . Faisons un développement limité de cette fonction au voisinage de zéro :  $\sin y = y - \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{120} + o(y^6)$  et  $\sin \sin y = y - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{10}y^5 + o(y^5)$  ce qui donne  $(\lambda + \mu + \nu)y + \frac{1}{6}(-\mu - 2\nu)y^3 + (\frac{1}{120}\mu + \frac{1}{10}\nu)y^5 + o(y^5)$  l'unicité des coefficients d'un D.L. donne en résolvant le système  $\nu = \mu = \lambda = 0$ .