

## Chapitre 15

# Arcs Paramétrés.

### 15.1 introduction

Les courbes ont toujours fasciné les mathématiciens mais aussi les artistes. La folium de Dürer (1471)  $\rho = a \sin \frac{\vartheta}{2}$  a été peinte et gravée par lui. Nous pouvons remonter loin dans l'histoire, la cissoïde de Dioclès  $\rho = a \left( \frac{1}{\cos \vartheta} - \cos \vartheta \right)$  date de -180. Il y a eu donc l'étude pure (géométrique et cinématique) des courbes par leurs descriptions multiples. C'est ainsi que la plupart des courbes proviennent de la description d'un lieu de points liés. Les cycloïdales: courbes étudiée par Charles Bouvelles en 1501, Mersenne et Galilée en 1599, Roberval en 1634, Toricelli en 1644 etc...! (Cette courbe n'était donc pas connue des Grecs) sont des courbes décrites par un point d'un cercle de rayon  $R$  roulant sans glisser sur une droite ( $D$ ); c'est donc un cas particulier de roulette. Son équation  $z = R(t + i - e^{-it})$ .

Mais l'étude des courbes a permis de faire progresser les théories mathématiques. L'histoire des courbes planes est intimement liée à l'histoire et au développement du calcul infinitésimal. Il faut néanmoins attendre Riemann (1854) pour avoir une définition globale et mathématiquement satisfaisante des courbes. Par exemple la caustique du cercle: des rayons lumineux parallèles sont réfléchis par un cercle. On a une famille de droites dont on souhaite trouver l'enveloppe (courbe tangente à chacune des droites). L'enveloppe de courbes logistiques: un canon tire des obus dans toutes les directions à une vitesse constante  $v_0 = 1$ . Trouver l'enveloppe de ces paraboles (Toricelli

1644). Le mouvement de la parabole peut-être décrit par  $x(t) = \frac{t}{\sqrt{1+a^2}}, y(t) = \frac{at}{\sqrt{1+a^2}} - \frac{t^2}{2}$  ce qui donne en éliminant  $t = x\sqrt{1+a^2}$  et en reportant  $y = ax - \frac{x^2(1+a^2)}{2}$  et en dérivant

partiellement par rapport à  $a$ :  $\frac{\partial y}{\partial a} = x - ax^2$  d'où  $a = \frac{1}{x}$  et en reportant dans l'équation de départ:  $y = \frac{(1-x^2)}{2}$  c'est une parabole de foyer le canon. Que de calcul différentiel! Enfin si on

veut déterminer le cercle approchant le mieux possible une courbe en un point, nous tombons sur le centre de courbure et le rayon de courbure. L'isochrome de Leibniz, la tractrice, la caténaire, la brachystochrome ont permis par la recherche de la longueur de faire progresser le calcul intégral; la recherche de leur équation, les équations différentielles.

Même plus tard certaines belles courbes comme celles de Peano (1890), Hilbert (1878) ou de Von Koch (1906) sur les ensembles négligeables montrent à quel point les courbes sont fascinantes.

### 15.2 Révision:

L'ensemble des fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel (écrire les opérations). On dit qu'une fonction  $f$  est bornée sur un ensemble  $A$  de  $\mathbb{R}$  s' il existe  $\alpha$  tel que: pour tout  $t$  de  $A$ :  $\|f(t)\| < \alpha$ .

$\lim_{t_0} f = l$  signifie que : Pour tout  $\epsilon$  de  $\mathbb{R}^+$  il existe  $\eta$  de  $\mathbb{R}^+$  tel que pour tout  $t$  de  $A$  si  $|t - t_0| < \eta$  alors  $\|f(t) - l\| < \epsilon$ .

Une fonction  $f$  est ainsi continue en  $x_0$  signifie que  $\lim_{t_0} f = f(t_0)$ .

Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$   $f$  associe à un réel  $t$  un  $p$ -uplet  $(y_1, y_2, \dots, y_p)$  tel que : pour tout  $i$  de 1 à  $p$  :  $y_i = f_i(t)$ . Ainsi chaque  $f_i$  est une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et on a :

**Théorème 1** *la limite de  $f$  en  $t_0$  est  $l = (l_1, l_2, \dots, l_p)$  si et seulement si pour tout  $i$  de 1 à  $p$   $\lim_{t_0} f_i = l_i$ .*

Preuve : elle se fait en remarquant simplement que  $|y_i - y_i^0| < \|y - y_0\|$  si  $y = (y_i)$  et  $y^0 = (y_i^0)$ ;

- Propriétés de la limite d'une somme, du produit d'une fonction par un scalaire, et traduction en terme de continuité.

## 15.3 Courbes paramétrées

### 15.3.1 Définition tangente.

Nous travaillons dans un espace affine  $A$  attaché à un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ , euclidien  $E$ . Il nous suffit de considérer  $\mathbb{R}^n$  muni de sa structure habituelle.

**Définition 1** *On appelle courbe paramétrée ou arc paramétré toute fonction  $f$  de classe  $C^k$  avec  $1 \leq k \leq +\infty$  d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  dans l'espace euclidien  $E$ . ( $E$  sera  $\mathbb{R}^n$  avec  $1 \leq n \leq 3$ )*

Ainsi par exemple l'application définie sur  $\mathbb{R}$  par  $M(t) = (0,1) + t(\vec{i} + \vec{j}) + t^2 \frac{\vec{j}}{2}$  définit une courbe paramétrée que l'on peut écrire aussi :  $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} \end{cases}$ .

(Nous confondons l'arc paramétré  $(I, f)$ ,  $f : I \rightarrow E$  et le support dans  $A$  muni du repère  $(O, B)$   $\Gamma = \{M; \text{il existe } t \in I : \overrightarrow{OM} = f(t)\}$  de  $A$  et nous ne parlons pas de l'arc géométrique ensemble des arcs paramétrés définis à un paramétrage  $C^k$  équivalent près et qui permet de définir un paramétrage admissible associé à l'arc géométrique.)

**Remarque 1** *Nous partons de l'aspect cinématique où la courbe est donnée avec son paramétrage. Néanmoins nous pouvons changer de paramétrage. Si  $\theta$  est un  $C^k$  difféomorphisme de  $J$  sur  $I$  alors l'arc paramétré  $(I, f)$  peut être défini par  $(J, f \circ \theta)$  on dit alors que deux paramétrages sont  $C^k$  équivalents s'ils diffèrent d'un  $C^k$  difféomorphisme. Etant donné un arc  $(I, f)$  on appelle paramétrage admissible tout paramétrage  $C^k$  équivalents à  $(I, f)$ .*

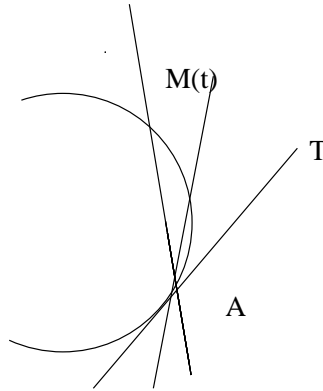
**Définition 2** *Soit un arc paramétré  $\Gamma = (I, f)$  et  $A(t_0)$  un point de l'arc. On dit que  $\Gamma$  admet en  $A$  une tangente  $D_0$  si la droite  $D(t, t_0)$  passant par  $A$  et  $M(t)$  admet une limite lorsque  $t \rightarrow t_0$ .  $D_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} D(A, M(t))$*

**Remarque 2** *Cela suppose qu'il existe un voisinage de  $t_0$  :  $]t_0 - h, t_0 + h[$  dans lequel  $M(t) \neq M(t_0)$  car sinon la droite  $D(t, t_0)$  n'existe pas.*

**Remarque 3** *Pour la limite de droites : On a  $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathcal{D}(\vec{u}(t)) = \mathcal{D}(\vec{u})$  ( $\vec{u}(t)$  et  $\vec{u}$  étant normés) si et seulement si la distance entre les droites tend vers 0. Ceci se traduit par l'angle entre les deux droites tend vers 0. Ou encore  $\lim_{t \rightarrow t_0} \sqrt{1 - \langle \vec{u}(t), \vec{u} \rangle^2} = 0$ .*

*La limite peut être prise par les vecteurs directeurs : pour que la tangente existe il suffit que, pour chaque  $t$  il existe un vecteur directeur de  $D(A, M(t))$ ,  $\lambda(t) \overrightarrow{AM}(t)$  ayant une limite non nulle par exemple par les coordonnées. On peut aussi regarder la limite sur les équations de la droite par les coefficients :  $a(t)X + b(t)Y + c(t) = 0$ . On démontre que l'existence et la limite ne dépendent pas du mode de définition choisie.*

*Si on prend pour chaque droite,  $\mathcal{D}(A, M(t))$  le vecteur directeur normé associé à  $\overrightarrow{AM}(t)$  on définit alors les demi-tangentes. La tangente existe si les deux demi-tangentes définissent la même droite.*



**Théorème 2** Soit un arc paramétré  $\Gamma : (I, f)$  de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ . Si en un point  $A(t_0)$  il existe un entier  $p$  tel que  $f^{(p)}(t_0) \neq 0$  alors en considérant le plus petit entier  $p_1$  vérifiant  $f^{(p_1)}(t_0) \neq 0$  la tangente en  $A$  est la droite passant par  $A$  et de base  $\vec{f}^{(p_1)}(t_0)$ .

Preuve : on suppose implicitement que  $k \geq p_1$  le développement de Taylor-Young en  $t_0$  donne :

$$\vec{AM}(t) = f(t) - f(t_0) = \frac{(t - t_0)^{p_1}}{p_1!} \left( f^{(p_1)}(t_0) + \epsilon(t) \right)$$

avec  $\lim_{t \rightarrow t_0} \epsilon(t) = 0$ . Comme  $f^{(p_1)}(t_0) \neq 0$  il existe un voisinage de  $t_0$  tel que  $(f^{(p_1)}(t_0) + \epsilon(t)) \neq 0$  et la droite  $D(A, M(t))$  existe, a pour vecteur directeur  $f^{(p_1)}(t_0) + \epsilon(t)$  (on a pris  $\lambda(t) = \frac{p_1!}{(t - t_0)^{p_1}}$ ) et possède une limite non nulle.

**Définition 3** : Pour un arc paramétré,  $\Gamma = (I, f)$ , on appelle vecteur unitaire tangent  $\vec{T}$  un vecteur unitaire porté par la tangente.

**Exercice 1** Soit  $(\Gamma, f)$  un arc de classe  $C^k$  de  $\mathbb{R}^n$ , choisissons un repère  $(O, e_1, \dots, e_n)$ . Ainsi  $f(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t) \cdot e_i$  et le point  $M(t)$  a pour coordonnées dans ce repère les  $x_i(t)$ . Si  $p_1$  est le premier entier dont la dérivée en  $t_0$  est non nulle, la tangente en ce point admet pour paramétrisation :  $X_i = x_i(t_0) + \lambda x_i^{(p_1)}(t_0)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

**Définition 4** Un point  $M(t)$  d'un arc paramétré  $(I, f)$  est dit régulier si  $f'(t) \neq 0$ . Sinon il est dit stationnaire. Un point est dit birégulier si  $f'(t) \neq 0$  et  $(f'(t), f''(t))$  libre.

### 15.3.2 Etude pratique :

Dans le cas d'une courbe définie par :  $y = f(x)$  on a en un point  $x_0$  la tangente  $T$  définie par :

$$Y - y_0 = f'(x_0)(X - x_0). \text{ En effet la fonction } F \text{ correspondant au paramétrage est : } \begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases}$$

et donc le premier vecteur dérivée est :  $\begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix}$  qui n'est jamais nul.

Dans le cadre des coordonnées polaires : On considère  $\theta = \widehat{(\vec{i}, \vec{u})}$  et  $\vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$  et on pose  $\vec{OM}(\theta) = r(\theta) \vec{u}$ . En travaillant dans le repère mobil  $(M(\theta_0), \vec{u}_{\theta_0}, \vec{v}_{\theta_0})$  avec  $\vec{v} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$ . Un calcul simple donne  $\vec{u}_\theta = \cos(\theta - \theta_0) \vec{u}_{\theta_0} + \sin(\theta - \theta_0) \vec{v}_{\theta_0}$  et la corde  $\mathcal{D}(M_{\theta_0}, M_\theta)$  a pour vecteur directeur pour  $\theta \neq \theta_0$  :  $\frac{r_\theta \cos(\theta - \theta_0) - r_{\theta_0} \vec{u}_{\theta_0} + r_\theta \frac{\sin(\theta - \theta_0)}{\theta - \theta_0} \vec{v}_{\theta_0}}{\theta - \theta_0}$ , qui admet pour limite  $r'_{\theta_0} \vec{u}_{\theta_0} + r_{\theta_0} \vec{v}_{\theta_0}$  dans le repère mobil. Dans l'hypothèse où  $r' \neq 0$ , on a, en considérant l'angle  $V$  tel que  $\tan V = \frac{r}{r'}$  que la tangente fait avec le rayon vecteur un angle  $V$ . Ceci est encore vraie si  $r' = 0$ . Au pôle  $O$ ,  $r$  est nul et la limite de la corde est  $\vec{u}_{\theta_0}$ .

**Exemple 1** : Etude en polaire de la courbe  $\rho = a(1 + \cos \theta)$  avec explication de la recherche des symétries et de l'ensemble d'étude.

## 15.4 Position d'un arc plan par rapport à sa tangente.

Soit un arc plan  $\Gamma = (I, f)$  de classe  $C^k$ . On suppose qu'en  $t_0$  le point  $A$  a pour premiers entiers  $p$  et  $q$ . C'est à dire  $p$  est le premier entier tel que  $f^{(p)}(t_0) \neq 0$  et  $q$  est le premier entier tel que  $(f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$  est libre.

En écrivant un développement de Taylor-young à l'ordre  $q$  en  $t_0$  on a :

$$\overrightarrow{AM}(t) = \frac{(t-t_0)^p}{p!} (1 + \lambda(t)) f^{(p)}(t_0) + \frac{(t-t_0)^q}{q!} (f^{(q)}(t_0) + \epsilon(t))$$

En effet de  $p+1$  à  $q-1$  les vecteurs dérivées sont colinéaires à  $f^{(p)}(t_0)$  et de plus ils ont au moins une fois  $(t-t_0)$  en facteur, nous pouvons donc affirmer que  $\lim_{t \rightarrow t_0} \lambda(t) = 0$ , de même  $\lim_{t \rightarrow t_0} \epsilon(t) = 0$ .

Nous travaillons maintenant dans le repère  $(A, f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$  si  $\zeta(t)$  et  $\sigma(t)$  sont les coordonnées de  $M(t)$  dans ce repère on a :

$$\begin{cases} \zeta(t) = \frac{(t-t_0)^p}{p!} \left(1 + \lambda(t) + \frac{p!}{q!} (t-t_0)^{q-p} \epsilon_1(t)\right) \\ \sigma(t) = \frac{(t-t_0)^q}{q!} (1 + \epsilon_2(t)) \end{cases} \quad (\epsilon_1(t), \epsilon_2(t)) \text{ sont simplement les coordonnées}$$

de  $\epsilon(t)$  dans le repère. On a donc  $\begin{cases} \zeta(t)_{t \rightarrow t_0} \sim \frac{(t-t_0)^p}{p!} \\ \sigma(t)_{t \rightarrow t_0} \sim \frac{(t-t_0)^q}{q!} \end{cases}$  ainsi  $\zeta(t)$  change de signe quand  $p$  est

impair et  $\sigma(t)$  change de signe quand  $q$  est impair. D'où les définitions de point d'inflexion, de rebroussement.

Dans la figure 2-1 on a  $p$  impair et  $q$  paire :  $\begin{cases} x(t) = 1 + t^2 \\ y(t) = t \ln t \end{cases}$  dans la figur 2-2 on a le cas

d'un point de rebroussement de première espèce  $p$  paire et  $q$  impair  $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}(t^2 - 2t) \\ y(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 \end{cases}$  en

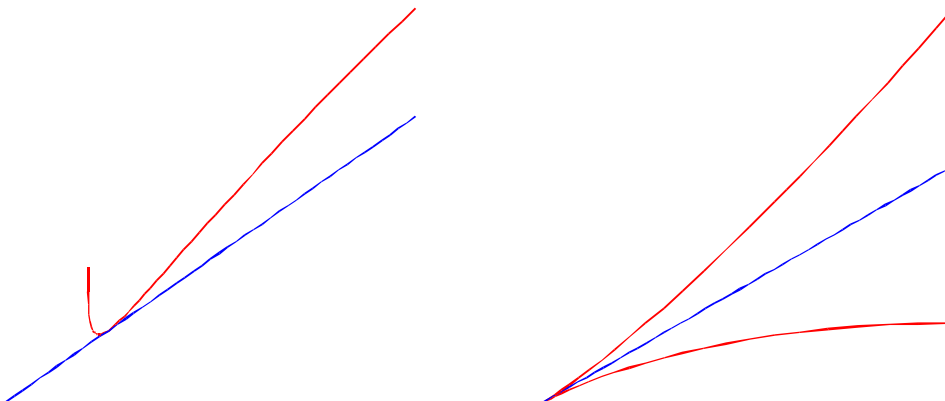
$t=0$ . En 2-3 on a le cas du point de rebroussement de deuxième espèce  $p$  pair et  $q$  paire :

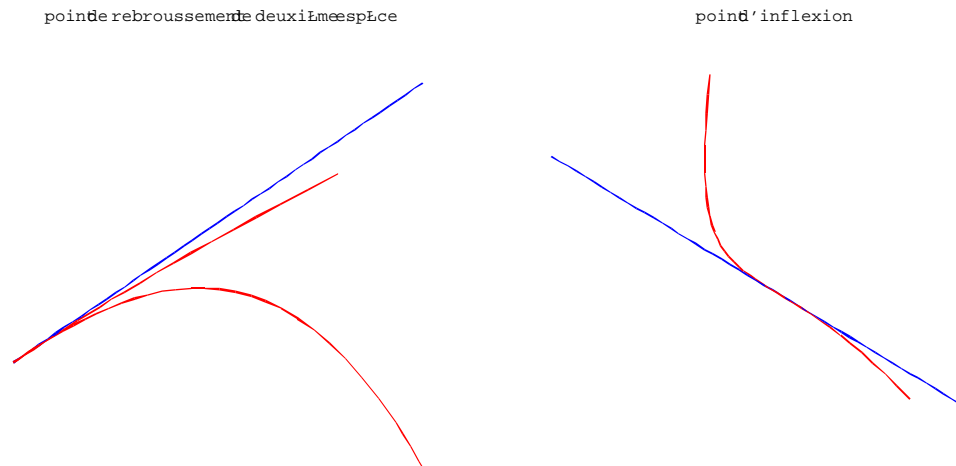
$\begin{cases} x(t) = e^{t-1} - t \\ y(t) = t^3 - 3t \end{cases}$  en  $t=1$ . Et enfin en 2-4 on le cas d'un point d'inflexion  $p$  impair et  $q$  im-

pair :  $\begin{cases} x(t) = \ln \left( \frac{t^4}{(t-2)^2} \right) \\ y(t) = \frac{t^2(t-6)}{5} \end{cases}$  en  $t = \frac{4}{3}$ .

p impair, q pair

pointe rebroussement première espèce





Concavité: en un point birégulier  $M(t_0)$  la concavité est déterminé par le demi-plan  $\mathcal{P}(M_0, f'(t_0), f''(t_0))$ .

En un point d'inflexion la concavité change. Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  le repère considéré.

Pour étudier la concavité, on veut savoir si la courbe est dans le demi-plan défini par la tangente et contenant le point  $M_0 + \vec{j}$ . On a  $f'(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j}$  et  $f''(t_0) = x''(t_0)\vec{i} + y''(t_0)\vec{j}$  ce qui donne en un point où  $x'(t_0) \neq 0$  on obtient:  $f''(t_0) = \frac{x''(t_0)}{x'(t_0)} (f'(t_0) - y'(t_0)\vec{j}) + y''(t_0)\vec{j}$

la coordonnée sur  $\vec{j}$  donne  $x'(t_0)(y'(t_0)x''(t_0) - y''(t_0)x'(t_0))$  si cette expression est positive cela signifie que  $f''(t_0)$  et  $\vec{j}$  sont du même côté que la tangente. La courbe tourne sa concavité vers les  $y$  positifs. Si  $x'(t_0) = 0$  alors  $y'(t_0) \neq 0$  et il faut regarder la concavité par rapport aux  $x$ .

## 15.5 Branche infinies. (Révision)

### 15.5.1 Définitions

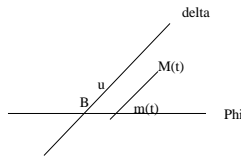
**Définition 5** Soit  $\Gamma = (I, f)$  un arc paramétré et  $t_0$  une borne de  $I$ , on dit que  $\Gamma$  admet en  $t_0$  une branche infinie si  $\lim_{t \rightarrow t_0} \|f(t)\| = +\infty$ .

**Définition 6** Soit  $\Gamma = (I, f)$  un arc paramétré admettant en  $t_0$ , borne de  $I$ , une branche infinie. Si pour un point  $A$  fixé la droite  $\mathcal{D}(A, M(t))$  admet une limite  $\Delta_A$ , lorsque  $t$  tend vers  $t_0$ , la direction de  $\Delta_A$  est indépendante du point  $A$ , et on appelle celle-ci la direction asymptotique de la branche infinie.

**Remarque 4** Comme il y a une branche infinie on a  $\lim_{t \rightarrow t_0} \|\overrightarrow{AM}(t)\| = +\infty$  et pour voir s'il y a une direction asymptotique on regarde si un vecteur directeur de  $\mathcal{D}(A, M(t))$  admet une limite en  $t_0$  c'est à dire si  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\overrightarrow{AM}(t)}{\|\overrightarrow{AM}(t)\|}$  existe.

**Définition 7** Soit un arc paramétré  $\Gamma = (I, f)$  admettent en  $t_0$ , borne de  $I$ , une branche infinie de direction asymptotique  $\delta = \mathbb{R}\vec{u}$ . On dit que  $\Gamma$  possède une asymptote en  $t_0$  si la droite  $\mathcal{D}(M(t), \vec{u})$  admet une limite en  $t_0$ .

**Remarque 5** Si cette limite existe cela donne une droite  $\Delta = \mathcal{D}(B, \vec{u})$ . Soit un sev supplémentaire  $\Phi$  de cette droite  $\Delta$ , passant par  $B$ . Alors le projeté de  $M(t)$  sur  $\Phi$  admet pour limite en  $t_0$  le point  $B$ . On a donc que la distance de  $M(t)$  à  $\Delta$  tend vers 0 en  $t_0$ .



### 15.5.2 Etude pratique.

#### Cas où l'arc est définie par une équation cartésienne:

$\Gamma$  est défini par  $y = f(x)$ . On suppose que  $f$  est une fonction continue sur  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$ . On a alors  $\|\vec{OM}(x)\|^2 = x^2 + (f(x))^2$  et cette norme devient infinie en  $x_0$  dans les cas suivants :

$$\begin{cases} x_0 = +\infty \\ x_0 = -\infty \\ x_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty \end{cases}$$

**Si  $x_0 = b \in \mathbb{R}$  et  $I = ]a, b[$  avec  $\lim_{x \rightarrow b} |f(x)| = +\infty$**  La droite  $\mathcal{D}(O, M(t))$  admet pour vecteur directeur  $\vec{V}(x) = \frac{x}{f(x)}\vec{i} + \vec{j}$  et a pour limite  $\vec{j}$  donc on a une direction asymptotique dans la direction  $\vec{j}$ . (On remarque que pour tout  $x$  assez grand ce vecteur  $\vec{V}(x)$  est bien défini et jamais nul). Ensuite la droite  $\mathcal{D}(M(x), \vec{j})$  a pour équation  $(X - x) = 0$  qui admet pour limite en  $x_0$  la droite  $X = x_0$  qui est donc asymptote.

**Si  $x_0 = \pm\infty$  et  $\lim_{x_0} f = a$**  Notons que cette limite peut ne pas exister même dans  $\overline{\mathbb{R}}$ . Dans ce cas la droite  $y = a$  est asymptote. La position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par l'étude du signe de  $(f(x) - a)$ .

**Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$**  Nous supposons que la limite est  $+\infty$ . (pour l'autre cas il suffit de changer  $f$  en  $-f$ ) Pour la direction asymptotique on regarde  $\mathcal{D}(O, M(x))$  qui admet pour vecteur directeur  $x\vec{i} + f(x)\vec{j}$ , pour étudier la limite, comme  $x$  est grand et donc non nul on peut étudier  $\vec{i} + \frac{f(x)}{x}\vec{j}$ . Nous pouvons interpréter  $\frac{f(x)}{x} = \tan \theta(x)$  avec  $\theta(x)$  l'angle que fait cette droite avec l'axe des  $x$ . (ce qui revient à prendre comme vecteur directeur  $\cos \theta(x)\vec{i} + \sin \theta(x)\vec{j}$ ). Si  $\lim \frac{f(x)}{x} = \ell$  alors il y a une direction asymptotique de vecteur directeur  $(1, \ell)$  ou pour équation  $y = \ell x$ . Si  $\lim \frac{f(x)}{x} = +\infty$  alors  $\lim \theta(x) = \frac{\pi}{2}$  et la droite  $\mathbb{R}\vec{j}$  est direction asymptotique.

Pour la recherche d'asymptote on regarde  $\mathcal{D}(M(x), \vec{j})$  dans le cas où  $\lim \frac{f(x)}{x} = +\infty$ . Cette droite a pour équation  $X = x$  et comme  $x$  tend vers  $+\infty$  il n'y a pas d'asymptote. On parle alors de branche parabolique (c'est en effet le cas de la parabole). Dans l'autre cas où  $\lim \frac{f(x)}{x} = \ell$  la droite  $\mathcal{D}(M(x), \vec{i} + \ell\vec{j})$  a pour équation  $Y - f(x) = \ell(X - x)$  elle admettra une limite si  $(f(x) - \ell x)$  en admet une donc :

Si  $\lim y - \ell x = m$  alors la droite  $y = \ell x + m$  est asymptote, l'étude du signe de  $y - \ell x - m$  donnant la position de la courbe par rapport à celle-ci.

Si  $\lim y - \ell x = \pm\infty$  on dit que la courbe admet une branche parabolique dans la direction  $y = \ell x$ .

Précisons bien que l'étude n'est pas exhaustive on peut très bien avoir l'inexistence de ces limites.

**Cas des arcs paramétrés**  $\Gamma = (I, f)$ 

Prenons le cas  $I = ]a, b[$  avec  $f(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ , nous sommes dans le cas où il y a une branche infinie et donc  $\lim (x(t)^2 + y(t)^2) = +\infty$ . On a alors les résultats suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \lim_b x(t) = x_0 \text{ et } \lim_b y(t) = \pm\infty \text{ alors } \mathcal{D} | x = x_0 \text{ est asymptote (*)} \\ \text{si } \lim_b x(t) = \pm\infty \text{ et } \lim_b y(t) = y_0 \text{ alors } \mathcal{D} | y = y_0 \text{ est asymptote} \\ \text{si } \lim_b x(t) = \pm\infty \text{ et } \lim_b y(t) = \pm\infty \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \lim_b \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty \text{ alors il y a une direction asymptotique } Oy \text{ et une BP de direction } Oy \\ \text{si } \lim_b \frac{y(t)}{x(t)} = \ell \text{ la droite } y = \ell x \text{ est direction asymptotique et} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \lim_b y(t) - \ell x(t) = m \text{ alors } \Delta | y = \ell x + m \text{ est asymptote et (**)} \\ \text{si } \lim_b y(t) - \ell x(t) = \pm\infty \text{ on a une BP de direction } y = \ell x \\ \text{si la limite n'existe pas on ne peut rien dire.} \end{array} \right.$$

(\*) la position de la courbe par rapport à l'asymptote est donné par le signe de  $x(t) - x_0$

(\*\*) la position de la courbe par rapport à l'asymptote est donné par le signe de  $y(t) - \ell x(t) - m$

**Cas des arcs en polaire**

On considère  $\theta = \widehat{(\vec{i}, \vec{u})}$  et  $\vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$  et on pose  $\overrightarrow{OM}(\theta) = r(\theta)\vec{u}$ . On a donc  $\|\overrightarrow{OM}(\theta)\| = |r(\theta)|$  et on suppose que  $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} |r(\theta)| = +\infty$ . On étudie la cas  $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} r(\theta) = +\infty$  (sinon on change  $\theta$  en  $-\theta$ ).

$\mathcal{D}(O, M(\theta))$  a pour vecteur directeur  $\frac{\overrightarrow{OM}(\theta)}{\|\overrightarrow{OM}(\theta)\|} = (\cos \theta)\vec{i} + (\sin \theta)\vec{j}$  de limite  $(\cos \theta_0)\vec{i} + (\sin \theta_0)\vec{j}$

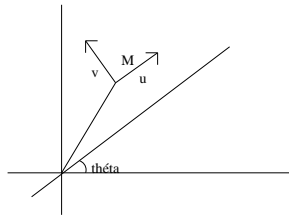
ce qui fournit la direction asymptotique de direction  $\vec{u}_0 = (\cos \theta_0)\vec{i} + (\sin \theta_0)\vec{j}$ . La droite  $\mathcal{D}(M(\theta), \vec{u}_0)$  écrivons une équation de cette droite dans le repère  $(\vec{u}_0, \vec{v}_0)$  où  $\vec{v}_0$  est le vecteur directement orthogonal à  $\vec{u}_0$ . soit :  $Y - r(\theta) \sin(\theta - \theta_0) = 0$  cette équation admet une limite si  $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} r(\theta) \sin(\theta - \theta_0)$

existe d'où :

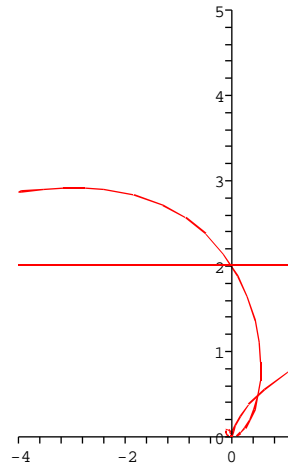
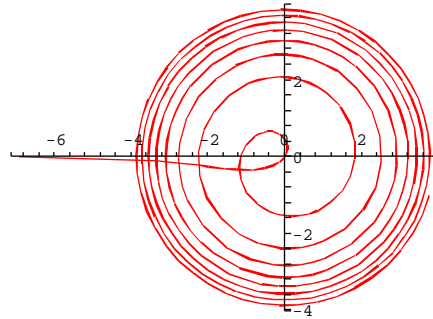
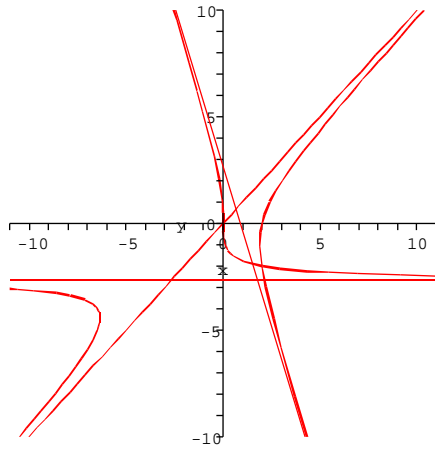
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} r(\theta) \sin(\theta - \theta_0) = \ell \text{ alors la droite } Y = \ell \text{ dans le repère } (O, \vec{u}_0, \vec{v}_0) \text{ est asymptote. (*)} \\ \text{si } \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} r(\theta) \sin(\theta - \theta_0) = \pm\infty \text{ alors on a une BP de direction } \mathbb{R}\vec{u}_0 \end{array} \right.$$

La connaissance du signe de  $r(\theta) \sin(\theta - \theta_0) - \ell$  donne la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

Si  $\theta_0 = \pm\infty$  on a une branche infinie spirale .



**Remarque 6** Dans les conditions précédentes si  $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} r(\theta) = r_0$  on n'a pas une branche infinie, mais un cercle asymptotique.



Dans la figure 3-1 :  $\begin{cases} x(t) = \frac{t^3}{(t-1)(t+2)} \\ y(t) = \frac{t^2 - 2t}{t-1} \end{cases}$  on a deux asymptotes et un point double.

Dans la figure 3-2 :  $r = \ln \theta$  on a une asymptote et une branche spirale, et quelques points doubles.

Dans la figure 3-3 :  $r = (1 - \sin \theta) \cot an \frac{\theta}{2}$  une asymptote et un petit bout à l'origine.

Dans la figure 3-4 :  $r = \sin \frac{3\theta}{2}$

## 15.6 Diverses modes de représentation des arcs

Nous avons vu les courbes paramétrées, les courbes en polaire il nous reste à voir les courbes définies par une équation implicite  $f(x,y) = 0$ . On démontre que localement sous certaines conditions ces diverses modes de définition sont équivalents : Si  $f$  est  $C^1$  sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  dans un voisinage de  $M_0(x_0, y_0)$  tel que  $f(x_0, y_0) = 0$  et  $df(x_0, y_0) \neq 0$  il existe un réel  $\varepsilon$ , une fonction  $\varphi$  définie sur l'intervalle  $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$  et un intervalle  $]y_0 - \eta, y_0 + \eta[$  tels que l'équation  $f(x,y) = 0$  avec  $(x,y) \in ]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[ \times ]y_0 - \eta, y_0 + \eta[$  équivaut à  $y = \varphi(x)$  ( ou  $x = \varphi(y)$ ) avec  $x \in ]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$  ( ou  $y \in ]y_0 - \eta, y_0 + \eta[$ ). Regarder ce qui se passe pour le cercle unité d'équation  $x^2 + y^2 = 1$ .

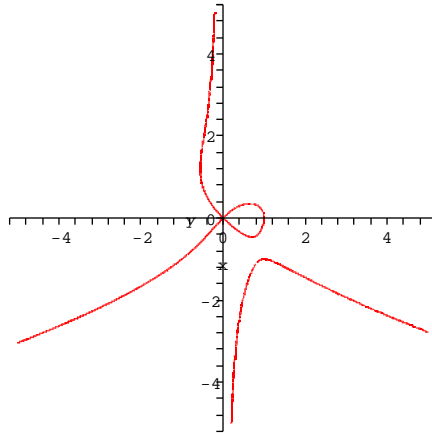
Pour une courbe définie implicitement :

La tangente en un tel point a pour équation  $(X - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (Y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$  un

vecteur normal est  $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$ .



ci-dessous  $xy^3 + x^3 + y^2 - x^2 = 0$



## 15.7 Compléments : Equations de courbes usuelles en polaires

La droite : Pour l'axe  $Ox$  on a  $\theta = 0$  modulo  $\pi$ . Pour les droites passant par l'origine de direction un vecteur que l'on écrit  $\vec{u}_\alpha = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}$  une équation en polaire est  $\theta = \alpha$  ou  $\theta = \alpha + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). Pour les droites verticales  $x = a$  on obtient  $r = \frac{a}{\cos \theta}$  elle est parcourue pour  $\theta \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . Enfin pour une droite d'équation  $x \cos \alpha + y \sin \alpha - a = 0$  on obtient  $r = \frac{a}{\cos(\theta - \alpha)}$ .

Il faut aussi savoir dans le cas général  $ax + by + c = 0$  on a :  $r = \frac{-c}{a \cos \theta + b \sin \theta}$ .

Le cercle passant par  $O$  :  $\mathcal{C}_0 : x^2 + y^2 - ax = 0$  donne  $\mathcal{C}_0 : r = a \cos \theta$  avec  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Pour  $\mathcal{C}_\alpha : \left\{ M : \overrightarrow{OM} \cdot \vec{u}(\theta) = \overrightarrow{OA} \cdot \vec{u}(\theta) \right\}$  cercle passant par  $O$  de diamètre  $OA$  on a posé  $\vec{u}(\theta) = \frac{\overrightarrow{OA}}{OA}$

on obtient  $r = a \cos(\theta - \alpha)$  on peut enfin donner comme cas particulier le cercle passant par  $O$  et de centre un point de l'axe des  $y$  :  $r = a \sin \theta$ .

**Remarque 7** Si le cercle ne passe pas par le pôle l'équation est moins simple. on notera l'analogie entre une droite  $r = a \cos(\theta - \alpha)$  et le cercle  $r = \frac{a}{\cos(\theta - \alpha)}$ .

Conique de foyer  $O$  :

Si on prend pour définition  $OM = ed(M, D)$  on obtient  $r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$  ou  $r = \frac{ed}{-1 + e \cos \theta}$

## 15.8 Interprétation cinématique

Un arc paramétré  $\Gamma = (I, f)$  représente un mouvement ponctuel. Pour tout  $t$  de  $I$  :  $\vec{V}(t) = \frac{df}{dt}(t)$  s'appelle la vitesse à l'instant  $t$  et le nombre  $v(t) = \|\vec{V}(t)\|$  s'appelle la vitesse numérique. De même  $\vec{\Gamma}(t) = \frac{d^2f}{dt^2}(t)$  s'appelle l'accélération, l'énergie cinétique est  $T = \frac{1}{2}mv^2(t)$  où  $m$  est la masse de la particule en mouvement. Un mouvement est dit rectiligne si sa trajectoire est contenue dans une droite; il est dit uniforme si sa vitesse numérique  $v(t)$  est constante; il est à accélération centrale s'il existe un point  $O$  tel qu'à chaque instant  $t$  le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  et le vecteur accélération sont colinéaires (on démontre qu'un mouvement à accélération centrale admet une trajectoire décrite par une équation en polaire  $\rho = f(\theta)$ ).

Dans le cas d'un mouvement plan : La vitesse et l'accélération ont pour coordonnées : 
$$\begin{cases} \vec{V}(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} \\ \vec{\Gamma}(t) = x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j} \end{cases}$$
 et en coordonnées polaires : 
$$\begin{cases} \vec{V}(\theta) = r'(\theta)\vec{u} + r(\theta)\vec{v} \\ \vec{\Gamma}(\theta) = (r''(\theta) - r(\theta))\vec{u} + 2r'(\theta)\vec{v} \end{cases}$$

## 15.9 Propriétés métriques des courbes planes paramétrées.

### 15.10 Longueur d'un arc, abscisse curviligne

#### 15.10.1 Définitions

**Définition 8** Soit  $\Gamma = (I, f)$ ,  $I = [a, b]$  un arc paramétré de classe  $C^1$ . La longueur de l'arc est le réel  $L = \int_a^b \|f'(t)\| dt$

**Remarque 8** Pour répondre à l'éternelle question : Pourquoi la norme de  $f'$ , on peut sans entrer dans le détail considérer une ligne polygonale :  $a = t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$  et les points correspondant  $M_i = M(t_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Cette ligne a pour longueur  $\sum_{i=1}^{n-1} \|\overrightarrow{M_i M_{i+1}}\| = \sum_{i=1}^{n-1} \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\| = \sum_{i=1}^{n-1} \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t) dt \right\| \leq \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t)\| dt$  nous admettons, mais on démontre, que la borne supérieure des longueurs des lignes polygonales ainsi construites est égale au majorant  $\int_a^b \|f'(t)\| dt$ .

**Définition 9** Soit un arc régulier  $\Gamma = (I, f)$  on définit l'abscisse curviligne de l'arc  $\Gamma$  orienté suivant les  $t$  croissants, ayant le point  $M(t_0)$  comme origine par  $s(t) = \int_{t_0}^t \|f'(u)\| du$ .

Ainsi on a que  $s$  est dérivable et  $s'(t) = \|f'(t)\| > 0$  donc  $s$  est croissante, de plus si  $I = [a, b]$  la longueur de  $\Gamma$  est  $L = s(b) - s(a)$ .

Si  $J = s(I)$  on a que  $s$  est une bijection bicontinue ( $s$  et  $s^{-1}$  sont continues), si  $s$  est  $C^k$  alors  $s^{-1}$  est  $C^k$  ( $s$  est une application continue strictement croissante sur un intervalle). On peut alors définir  $\Gamma$  par le paramètre  $s$  c'est à dire  $\Gamma = (J, g)$ , avec  $g = f \circ s^{-1}$ . On dit alors que  $\Gamma$  est paramétré par l'abscisse curviligne.

Calcul de l'abscisse curviligne :

Si on pose  $f(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$  on a alors  $\frac{ds}{dt}(t) = \|f'(t)\| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$  ce que l'on note  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ .

Si on est en polaire  $\overrightarrow{OM}(\theta) = r(\theta)\vec{u}$  avec  $\vec{u} = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$  et  $\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} = r'\vec{u} + r\vec{v}$  avec  $\vec{v}$  vecteur directement orthogonal à  $\vec{u}$ . Dans cette base orthonormée on a donc  $\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = r'^2 + r^2$

#### 15.10.2 Repère de Frenet

Soit  $\Gamma$  un arc paramétré par  $(I, f)$ , régulier, on regarde l'arc  $\Gamma$  paramétré aussi par l'abscisse curviligne  $(J, g)$ . On a donc  $\overrightarrow{OM} = f(t) = g(s)$  et  $\frac{dM}{ds} = \frac{dM}{dt} \frac{dt}{ds} = f'(t) \frac{dt}{ds}$  d'où  $\left\| \frac{dM}{ds} \right\| = \|f'(t)\| \frac{1}{\|f'(t)\|} = 1$  car  $\frac{ds}{dt}(t) = \|f'(t)\|$ .

**Définition 10** Le vecteur normé  $\vec{T} = \frac{dM}{ds}$  est appelé vecteur tangent unitaire orienté. On

définit  $\vec{N}$  le vecteur directement orthogonal à  $\vec{T}$ . Le repère  $(M(s), \vec{T}(s), \vec{N}(s))$  s'appelle repère de Frenet de  $\Gamma$  en  $M(s)$ .

**Définition 11** Soit  $\Gamma$  un arc, on dit que  $M : I \rightarrow \mathcal{E}$  est une représentation normale si et seulement si : pour tout  $t$  de  $I$  :  $\|M'(t)\| = 1$ . L'arc est alors régulier.

**Proposition 3** Si  $M$  est une représentation normale, alors l'abscisse curviligne au point  $t$  est  $s(t) = t - t_0$ .

### 15.10.3 Courbure

**Théorème 4** Soit  $\Gamma = (I, f)$  un arc paramétré de classe  $C^k$ ,  $k \geq 2$ , régulier. il existe une fonction  $\alpha$  de classe  $C^{k-1}$  sur  $I$  telle que pour tout  $t$  de  $I$  :  $\vec{T} = \vec{u}(\alpha(t)) = \cos(\alpha(t))\vec{i} + \sin(\alpha(t))\vec{j}$ .

**Remarque 9** l'angle  $\alpha(t)$  n'est autre  $(\vec{i}, \vec{T})$  et on montre en utilisant la fonction Arcos que  $\alpha$  est dérivable si  $f$  est  $C^2$ .

$$\text{Ainsi } \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{d\alpha} \frac{d\alpha}{ds} = \left( -\sin \alpha \vec{i} + \cos \alpha \vec{j} \right) \frac{d\alpha}{ds} = \left( \cos \left( \alpha + \frac{\pi}{2} \right) \vec{i} + \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{2} \right) \vec{j} \right) \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{ds} \vec{N}.$$

**Définition 12** Avec les hypothèses précédentes on définit la courbure de  $\Gamma$  en  $M(s)$  :  $\gamma(s) = \frac{d\alpha}{ds}$ .

$$\text{Ainsi } \frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma(s) \vec{N}, \text{ le rayon de courbure est } R(s) = \frac{1}{\gamma(s)} = \frac{ds}{d\alpha}$$

**Proposition 5** Un point est birégulier si et seulement si  $\gamma(s) \neq 0$ .

Il s'agit de voir à quelle condition  $\frac{d^2M}{ds^2}$  et  $\frac{dM}{ds}$  sont colinéaires, mais la représentation étant normale ce cas ne peut se produire si et seulement si  $\frac{d^2M}{ds^2} = 0$  car  $\left\| \frac{dM}{ds} \right\| = 1$  et par dérivation  $\frac{d^2M}{ds^2} \cdot \frac{dM}{ds} = 0$ .

Ainsi  $\vec{T} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$  et  $\vec{N} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$  et  $\frac{d\vec{N}}{d\alpha} = \begin{pmatrix} -\cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{pmatrix} = -\vec{T}$  ceci nous permet de calculer  $\frac{d\vec{N}}{ds} = \frac{d\vec{N}}{d\alpha} \frac{d\alpha}{ds} = -\gamma \vec{T}$  On appelle ces relations les relations de Frenet :

$$\frac{d\vec{T}}{ds}(s) = \gamma(s) \vec{N}(s) \text{ et } \frac{d\vec{N}}{ds}(s) = -\gamma(s) \vec{T}(s)$$

Expression de la courbure :

Soit un arc  $\Gamma = (I, f)$  régulier on a  $f'(t) = \|f'(t)\| \vec{T}$  et  $f''(t) = \frac{\langle f'(t), f''(t) \rangle}{\|f'(t)\|^3} \vec{T} + \|f'(t)\| \frac{ds}{dt} \gamma \vec{N} = \frac{\langle f'(t), f''(t) \rangle}{\|f'(t)\|^3} \vec{T} + \|f'(t)\|^2 \gamma \vec{N}$  et  $\det(f'(t), f''(t)) = \|f'(t)\|^3 \gamma$  d'où :

$$\gamma = \frac{\det(f', f'')}{\|f'\|^3}$$

Application : cas des courbes paramétrées.

$$\gamma = \frac{\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \text{ ou } R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'y'' - x''y'}$$
 dans le cas particulier de la courbe

définie par  $y = f(x)$  on a  $R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$ .

: cas des courbes en polaires.

on a :  $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}$  et  $dM = r'\vec{u} + r\vec{v}$  et  $d^2M = (r'' - r)\vec{u} + 2r'\vec{v}$  et par application de la formule  
 on a :  $R = \frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{r^2 + 2r'r'' - rr''}$ .

**Définition 13** Soit  $\Gamma = (I, f)$  un arc paramétré, birégulier, on appelle centre de courbure le point  $C(s)$  défini par la relation  $\overrightarrow{M(s)C(s)} = R(s)\overrightarrow{N(s)}$  où  $R(s)$  est le rayon de courbure et  $\overrightarrow{N}(s)$  la normale en  $M(s)$ .

**Remarque 10** On appelle l'ensemble des centres de courbure d'un arc  $\Gamma$  la développée on a que pour un arc de classe  $C^3$  birégulier, la tangente en  $C(s)$  à la développée est la normale à  $\Gamma$  en  $M(s)$  si cette tangente existe.

**Définition 14** Soit un arc birégulier  $\Gamma$ . On appelle cercle de courbure en  $M_0$  le cercle de centre le centre de courbure en  $M_0$  et de rayon, le rayon de courbure.

**Remarque 11** Le cercle de courbure en un point  $M_0$  est aussi le cercle osculateur c'est à dire la limite des cercles tangents en  $M_0$  à  $\Gamma$  passant par  $M(s)$  quand  $s$  tend vers  $s_0$ . (la limite est pris par exemple par les limites des coefficients des équations des cercles)

- Dans une interprétation cinématique :  
 on a  $\overrightarrow{V} = v\overrightarrow{T}$  et  $\overrightarrow{\Gamma} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{T} + \frac{v^2}{R}\overrightarrow{N}$  on remarquera l'accélération tangentielle et normale,  
 ceci permet d'obtenir :  $R = \frac{\overrightarrow{V}^3}{\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{\Gamma}}$ .

#### 15.10.4 Propriétés métriques des courbes paramétrées de l'espace.

De la même façon que dans le plan on définit l'abscisse curviligne

**Définition 15** Soit  $\Gamma = (I, f)$  un arc dans  $\mathbb{R}^3$  on dit que  $f$  est une représentation normale si pour tout  $t$  de  $I$  on a  $\|f'(t)\| = 1$  l'arc est alors régulier.

**Définition 16** Pour un arc régulier on définit l'abscisse curviligne par  $s(t) = \int_{t_0}^t \|f'(u)\| du$  l'origine est en  $f(t_0)$  et l'abscisse est comptée dans le sens des  $t$  croissant.  $s$  est un paramètre admissible au sens que  $s$  est continue,  $C^1$  et pour tout  $t$  de  $I$   $s'(t) \neq 0$ .

**Remarque 12** Si la représentation est normale on a  $s(t) = t - t_0$ . On a  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ .

**Exemple 2** : Prenons l'arc défini par  $\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-t} \\ z = t\sqrt{2} \end{cases}$   $ds = 2cht$  et  $s = 2sht$  on obtient comme

représentation  $x = \frac{s}{2} + \sqrt{1 + \frac{s^2}{4}}$ ,  $y = -\frac{s}{2} - \sqrt{1 + \frac{s^2}{4}}$ ,  $z = \sqrt{2} \ln \left( \frac{s}{2} + \sqrt{1 + \frac{s^2}{4}} \right)$

**Définition 17** Soit  $\Gamma = (I, f)$ ,  $I = [a, b]$  un arc paramétré de classe  $C^1$  de  $I$  dans  $\mathbb{R}^3$ . La longueur de l'arc est le réel  $L = \int_a^b \|f'(t)\| dt$

**Exemple 3** Calcul de la longueur de l'hélice entre deux points.

### 15.11 Exercices : Courbes remarquables

Tentez de résoudre les problèmes suivants:- Paramétrisation.

- Points doubles.
- Branches infinies.
- Tracé.
- Rectification.

- Courbure.
- Aire des boucles ou de la courbe.

**Exercice 1** Cissoïde droite

$$x(x^2 + y^2) = ay^2$$

**Exercice 2** Strophoïde droite

$$x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2)$$

**Exercice 3** Trissectrice de Mac-Laurin

$$x(x^2 + y^2) = a(3x^2 - y^2)$$

**Exercice 4** Folium de Descartes

$$x^3 + y^3 = 2axy$$

**Exercice 5** Lemniscate de Bernoulli

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

**Exercice 6** Limaçon de Pascal

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = b^2(x^2 + y^2)$$

Si  $a = b$  on obtient une cardioïde.

**Exercice 7** Folium simple (ou ovoïde)

$$(x^2 + y^2)^2 = ax^3$$

**Exercice 8** Bifolium

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2(ax + by)$$

**Exercice 9** Trifolium

$$(x^2 + y^2)^2 = 2ax(x^2 - y^2) - 4bxy^2$$

**Exercice 10** Courbes cycloïdales (en représentation complexe),  $n$  est un entier relatif,

$$z = a(ne^{it} - e^{int})$$

**Exercice 11** Cycloïdes droites

$$z = a(t - ke^{it})$$

## 15.12 Travaux dirigés : COURBES

### 15.12.1 Énoncés

**Exercice 12** Construire la courbe  $\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{t^3}{3t + 1} \\ y = \frac{3t^2}{3t + 1} \end{array} \right.$

**Exercice 13** Dans un plan euclidien  $P$  on considère l'arc  $(\gamma)$  défini par :  $] - 1, + 1[ \rightarrow P$ ,  $t \rightarrow M = O + 2 \arctan t \vec{i} + \ln \left( \frac{1+t^2}{1-t^2} \right) \vec{j}$ , dans un repère orthonormé du plan  $P$ . Tracer  $(\gamma)$ .

**Exercice 14** On considère la courbe  $(\gamma) : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \cos t + 3 \cos 2t + \cos 3t \\ y = 3 \sin t + 3 \sin 2t + \sin 3t \end{array} \right.$ , construire  $(\gamma)$ , calculer sa longueur.

**Exercice 15** 1°) Construire la courbe  $(C) : \begin{cases} x = \cos t (\sqrt{2} \cos t + 1) \\ y = \sin t (\sqrt{2} \cos t - 1) \end{cases}$

2°) Déterminer les points doubles.

3°) Montrer que  $(C)$  est invariante par trois rotations de même centre  $\Omega$  (dont l'identité).

**Exercice 16**  $\varepsilon$  est une ellipse de centre  $O$ ,  $A$  un point de  $\varepsilon$ ,  $A'$  le symétrique de  $A$  par rapport au grand axe de  $\varepsilon$ ,  $M$  l'intersection de la normale à  $\varepsilon$  en  $A$  avec la droite  $OA'$ . Quel est le lieu de  $M$  lorsque  $A$  décrit  $\varepsilon$ ?

**Exercice 17**  $B$  décrit un cercle de centre  $O$  et de rayon  $OA$ . Lieu des points  $M$ , point de contact du cercle inscrit dans le triangle  $OAB$  et de la droite  $OB$ .

**Exercice 18** 1°) Etude de la courbe d'équation polaire:  $\rho = \frac{1 - \sin \theta}{1 + \cos \theta}$

2°) de même avec  $\rho = \frac{\sin \frac{3\theta}{2}}{1 - 2 \cos \theta}$

**Exercice 19** Soit  $P$  une parabole; enveloppe des cordes  $M_1M_2$  de  $P$  telles que les normales en  $M_1$  et  $M_2$  se coupent en un point de  $P$ . On appelle enveloppe d'une famille de droites  $\Delta_t$  à un paramètre une courbe  $\Gamma = (I, f)$  telle que pour tout  $t$  de  $I$ ,  $M(t) \in \Delta_t$  et  $\Gamma$  admet en  $M(t)$ ,  $\Delta_t$  comme tangente.

**Exercice 20** Soit  $\epsilon$  une ellipse de foyers  $F$  et  $F'$ ,  $M$  un point de  $\epsilon$ . Les droites  $(MF)$  et  $(MF')$  recourent  $\epsilon$  en  $P$  et  $P'$ . Quelle est l'enveloppe des droites  $(PP')$  lorsque  $M$  décrit  $\epsilon$ ?

**Exercice 21** Déterminer le rayon de courbure en  $\theta = 0$  de la courbe  $(C)$  d'équation polaire:  $\rho = 2a \frac{\sin 3\theta}{\sin 2\theta}$ .

**Exercice 22** Soit  $ABC$  un vrai triangle d'un plan euclidien; montrer que le centre de gravité  $G$ , l'orthocentre  $H$  et le centre du cercle circonscrit  $J$  sont alignés.

**Exercice 23** Pour chacune des courbes planes suivantes, donner un paramétrage: le cercle de rayon 1 et de centre  $\Omega = (1,0)$ , donner trois paramétrage; une droite parallèle à l'axe des ordonnées, dont un en polaire.

**Exercice 24** Soit  $C$  la courbe plane donnée en coordonnées polaires par:  $\rho(t) = t + \frac{1}{t}$  et  $\theta(t) = 1 + t^2$  avec  $t \in R^*$

1°) Trouver d'éventuelles symétries.

2°) Donner les variations de  $\rho$  et de  $\theta$  en fonction de  $t$ ;

3°) Etudier les branches infinies, et les points doubles.

4°) Représenter la courbe.

5°) On se contente de la partie de la courbe donnée par les  $t$  positifs. En écrivant  $\rho$  comme fonction de  $\theta$ , redémontrer la formule donnant le rayon de courbure à l'aide de  $\rho$  et de ses dérivées. Faire le calcul pour  $t = 1$ .

**Exercice 25** Soit  $C$  une conique de foyer  $F$  et de directrice  $D$ . Une droite passant par  $F$  coupe  $C$  en deux points  $M$  et  $M'$ . Trouver le lieu du point d'intersection des tangentes à  $C$  en  $M$  et  $M'$ .

**Exercice 26** Etudier la courbe plane dont l'équation en coordonnées polaires est  $\rho = \tan \frac{\theta}{3}$ . (Période, symétries, variations, asymptotes, points doubles, courbe.)

**Exercice 27** Dans le plan affine euclidien orienté (unité 5cm) rapporté au repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  et d'axe polaire  $(O, \vec{v})$ , on considère la courbe  $G$  définie par son équation polaire:

$$r(\theta) = \left(\sin\left(\frac{\theta}{4}\right)\right)^4.$$

1°) construire  $\Gamma$ ;

2°) Calculer la longueur totale de la courbe  $\Gamma$  en cm.

3°) On oriente  $\Gamma$  dans le sens des  $\theta$  croissants; soit  $\vec{t}$  le vecteur tangent unitaire de la courbe orientée en un point  $M(\theta)$  et  $\vec{n}$  le vecteur normal unitaire directement perpendiculaire à  $\vec{t}$ . Pour  $\theta \in [0, 2\pi]$ , déterminer l'angle  $(\vec{i}, \vec{t})$  puis le rayon de courbure au point  $M(\theta)$  de  $\Gamma$ .

4°) En tout point  $M$  de  $\Gamma$ , distinct du pôle  $O$ , on considère la droite  $\Delta_M$ , perpendiculaire à la droite  $(OM)$  en  $M$ . Si  $M$  est confondu avec  $O$ ,  $\Delta_O$  est la perpendiculaire à la tangente à  $\Gamma$  en  $O$ .

- a) Donner une représentation paramétrique de l'enveloppe  $E$  des droites  $\Delta_M$ .
- b) Déterminer une équation polaire de  $E$ , puis construire  $E$ .

**Exercice 28** en reprenant la courbe de l'exercice 3, trouver sa développée c'est à dire l'ensemble des centres de courbure. Quel est le rapport entre la tangente en un point de la développée et la normale à la courbe au point correspondant.

## 15.12.2 Corrigés

**Exercice 12** L'ensemble de définition est  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$ , les dérivées sont  $x' = \frac{3t^2(2t+1)}{(3t+1)^2}$ ;  $y' = \frac{3t(3t+2)}{(3t+1)^2}$ , ce qui donne les variations.

$t$	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$		$0$		$+\infty$
$x'$		-		-	$0$	+		+		+	
$y'$		+	$0$	-		-		-	$0$	+	
$x$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{8}{27}$	$\searrow$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$    $-\infty$	$\nearrow$	$0$	$\nearrow$	$+\infty$
$y$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{4}{3}$	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\searrow$	$-\infty$    $+\infty$	$\searrow$	$0$	$\nearrow$	$+\infty$
$\frac{y'}{x'}$			$0$		$\infty$				PS		

En  $t = 0$  on a un point stationnaire et  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y'}{x'} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t+2}{t(2t+1)} = \pm\infty$ . Le tableau de variations donne que l'on a un point de rebroussement de 1<sup>ère</sup> espèce à tangente parallèle à  $Oy$ .

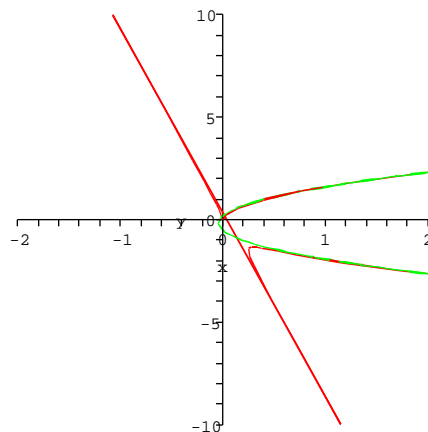
Branches infinies : quant  $t \rightarrow +\infty$  on a  $x \sim \frac{t^2}{3}$  et  $y \sim t$  donc  $\lim_{\pm\infty} \frac{y}{x} = 0$ . On a une branche parabolique dans la direction de  $Ox$ . La parabole asymptote est donnée par :  $x = \frac{t^2}{3} \frac{1}{1 + \frac{1}{3t}} =$

$$\frac{t^2}{3} \left( 1 - \frac{1}{3t} + \frac{1}{9t^2} - \frac{1}{27t^3} + o\left(\frac{1}{t^3}\right) \right) = \frac{t^2}{3} - \frac{t}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81t} + o\left(\frac{1}{t}\right) \text{ et } y = t \frac{1}{1 + \frac{1}{3t}} = t \left( 1 - \frac{1}{3t} + \frac{1}{9t^2} - \frac{1}{27t^3} + o\left(\frac{1}{t^3}\right) \right) =$$

$t - \frac{1}{3} + \frac{1}{9t} + o\left(\frac{1}{t}\right)$  et  $y^2 = t^2 \left( 1 - \frac{2}{3t} + \frac{1}{3t^2} - \frac{2}{27t^3} + o\left(\frac{1}{t^3}\right) \right)$  et par élimination on obtient  $9x - 3y^2 - y = -\frac{1}{3} + \frac{2}{9t} + o\left(\frac{1}{t}\right)$  la parabole  $9x - 3y^2 - y = -\frac{1}{3}$  est asymptote et l'on a sa position par rapport à la courbe eb l'infinie.

Quand  $t \rightarrow -\frac{1}{3}$  on pose  $t = -\frac{1}{3} + u$  et on a  $x = -\frac{1}{81u} + \frac{1}{9} - \frac{u}{3} - \frac{1}{243u^2} + o(u^2)$  avec  $y = \frac{1}{9u} - \frac{2}{3} + u$  donc  $y + 9x = \frac{1}{3} - 2u + o(u)$  et la droite  $y + 9x = \frac{1}{3}$  est asymptote, quand  $t \rightarrow -\frac{1}{3} + 0$  la courbe est en-dessous et quand  $t \rightarrow -\frac{1}{3} - 0$  la courbe est au-dessus de l'asymptote.

exercice\_1



**Exercice 13** L'abscisse de  $M$  est  $x = 2 \arctan t$  est un paramètre admissible de  $(\gamma)$  et donc  $M = O + x \vec{i} - \ln(\cos x) \vec{j}$  avec  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$  on a  $y = -\ln(\cos x) = f(x)$  et  $f'(x) = \tan x$

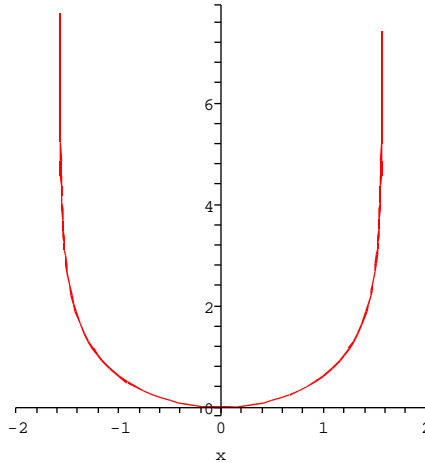


d'où

	$-\frac{\pi}{2}$		0		$+\frac{\pi}{2}$
$x$		$\searrow$		$\searrow$	
$y$		$\searrow$		$\nearrow$	

et la représentation :

exercice\_2



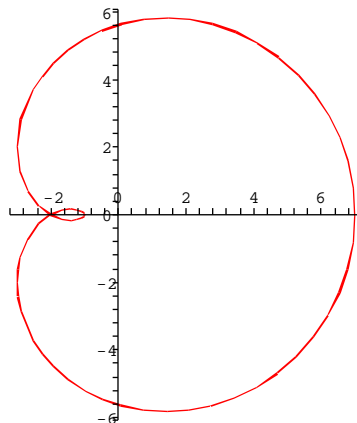
**Exercice 14** On a  $M(t + 2\pi) = M(t)$  et  $M(-t)$  et  $M(t)$  sont symétriques par rapport à  $Ox$  on se contentera donc de  $t \in [0, \pi]$ . Pour les dérivées  $x' = -6 \sin 2t (1 + \cos t)$   $y' = 6 \cos 2t (1 + \cos t)$  ce qui donne

$t$	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\pi$
$x'$	0	-		-		+		+	
$y'$		+	0	-		-	0	+	0
$x$		$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	-1
$y$	0	$\nearrow$	$3 + 2\sqrt{2}$	$\searrow$	2	$\searrow$	$2\sqrt{2} - 3$	$\nearrow$	0
$\frac{y'}{x'}$	$\infty$		0		$\infty$		0		$\infty$

, la longueur est donnée par

$$ds = 6(1 + \cos t) dt \text{ pour les } t \text{ croissants et } \ell(\Gamma) = 12 \int_0^\pi (1 + \cos t) dt = 12\pi.$$

exercice\_3



**Exercice 15** On peut se ramener à  $t \in [0, \pi]$  car  $x, y$  sont  $2\pi$ -périodique et  $x$  est paire et  $y$  est impair, il y aura une symétrie par rapport à  $Ox$ . Pour les variations  $\begin{cases} x' = -\sin t (2\sqrt{2} \cos t + 1) \\ y' = 2\sqrt{2} \cos^2 t - \cos t - \sqrt{2} \end{cases}$  sur  $[0, \pi]$  on a que  $x'$  s'annule en  $0, \pi$  et  $t_0 = \arccos\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$  et pour  $y'$  en posant  $\rho(u) =$

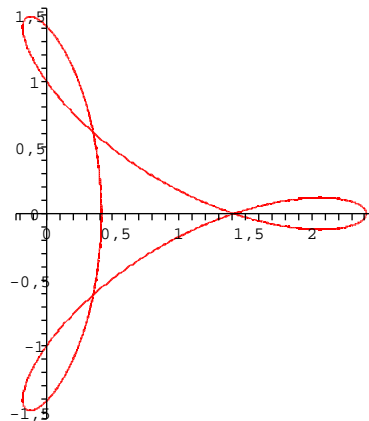
$2\sqrt{2}u^2 - u - \sqrt{2}$  on a deux solutions  $u' = \frac{1 + \sqrt{17}}{4\sqrt{2}}$  et  $u'' = \frac{1 - \sqrt{17}}{4\sqrt{2}}$  comme  $\rho(1) = \sqrt{2} - 1$  et  $\rho(-1) = \sqrt{2} + 1$  et  $u'u'' = -\frac{1}{2}$  on a  $-1 < u'' < u' < 1$ . Les valeurs numériques sont  $u' \simeq 0,91$  et  $u'' \simeq -0,55$  et ainsi  $y'$  s'annule en  $t_1 = \arccos u'$  et en  $t_2 = \arccos u''$ . Pour la position de ces deux valeurs par rapport à  $t_0$  on a  $\rho\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} < 0$  et donc  $u'' < \cos t_0 < u'$  en fait  $t_1 \simeq 25,09^\circ, t_0 \simeq 110,70^\circ, t_2 \simeq 123,51^\circ$ . Le tableau de va-

	$t$	0		$t_1$		$t_0$		$t_2$		$\pi$
	$x'$	0	-		-	0	+		+	0
riations	$x$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	
	$y$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$y'$		+	0	-		-	0	+	
	$\frac{y'}{x'}$	$\infty$		0		$\infty$		0		$\infty$

Pour les valeurs numériques elles se

calculent :  $\sin^2 t_1 = 1 - \frac{(1 + \sqrt{17})^2}{32} = \frac{7 - \sqrt{17}}{16}$  et  $\sin t_1 = \frac{\sqrt{7 - \sqrt{17}}}{4}$  et  $\sin^2 t_0 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$  et  $\sin t_0 = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$  et  $\sin^2 t_2 = 1 - \frac{(1 - \sqrt{17})^2}{32} = \frac{7 + \sqrt{17}}{16}$  ce qui donne  $\sin t_2 = \frac{\sqrt{7 + \sqrt{17}}}{4}$  tout ceci permet de calculer les valeurs approchés :  $x(0) = 1 + \sqrt{2} = 2,41$  et  $y(0) = 0$ ;  $x(t_1) = \frac{11 + 3\sqrt{17}}{8\sqrt{2}} = 2,07, y(t_1) = \frac{\sqrt{7 - \sqrt{17}}(\sqrt{17} - 3)}{16} = 0,12$ ;  $x(t_0) = -\frac{1}{4\sqrt{2}} = -0,18, y(t_0) = -\frac{3\sqrt{7}}{4\sqrt{2}} = -1,40$ ;  $x(t_2) = \frac{11 - 3\sqrt{17}}{8\sqrt{2}} = -0,12, y(t_2) = -\frac{(3 + \sqrt{17})(\sqrt{7 + \sqrt{17}})}{16} = -1,48$  et  $x(\pi) = \sqrt{2} - 1 = 0,41, y(\pi) = 0$ . Il reste les points d'intersection avec les axes :  $x = 0$  donne  $t = \frac{\pi}{2}$  ou  $t = \frac{3\pi}{4}$  et pour  $t = \frac{\pi}{2}$  on a  $x = 0, y = -1$ , pour  $t = \frac{3\pi}{4}$  on a  $x = 0, y = -\sqrt{2}$ . Tandis que pour  $y = 0$  on trouve  $t = 0$  ou  $t = \pi$  ou  $t = \frac{\pi}{4}$  pour  $t = \frac{\pi}{4}$  cela donne  $x = \sqrt{2}, y = 0$ .

exercice\_4



Les points doubles : pour  $t \in [0, \pi]$  il y en a un, les paramètres  $t_1, t_2$  qui l'atteignent sont tels que  $\frac{\pi}{4} < t_1 < \frac{\pi}{2}$  et  $\frac{3\pi}{4} < t_2 < \pi$ , avec la symétrie on en aura un deuxième et le troisième est

$C(\sqrt{2}, 0)$ . La résolution de  $\begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases}$  donne  $\begin{cases} \sqrt{2}(\cos^2 t_1 - \cos^2 t_2) + \cos t_1 - \cos t_2 = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2t_1 - \sin 2t_2) - (\sin t_1 - \sin t_2) = 0 \end{cases}$

La première donne  $2\sqrt{2}\cos\frac{t_1 + t_2}{2}\cos\frac{t_1 - t_2}{2} + 1 = 0$  et la seconde  $\sqrt{2}\sin(t_1 - t_2)\cos(t_1 + t_2) -$

$$2 \sin \frac{t_1 - t_2}{2} \cos \frac{t_1 + t_2}{2} = 0 \text{ puis } 2\sqrt{2} \cos \frac{t_1 - t_2}{2} \cos(t_1 + t_2) - 2 \sin \frac{t_1 + t_2}{2} \cos \frac{t_1 + t_2}{2} = 0 \text{ ou } \\ \sqrt{2} \cos \frac{t_1 - t_2}{2} \left( 2 \cos^2 \frac{t_1 + t_2}{2} - 1 \right) - \cos \frac{t_1 + t_2}{2} = 0 \text{ ou enfin } 2 \cos \frac{t_1 + t_2}{2} + \sqrt{2} \cos \frac{t_1 - t_2}{2} = 0.$$

$$\text{On obtient donc } \begin{cases} 2\sqrt{2} \cos \frac{t_1 + t_2}{2} \cos \frac{t_1 - t_2}{2} = -1 \\ \cos^2 \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{1}{4} \end{cases} \text{ or } \frac{\pi}{2} < \frac{t_1 + t_2}{2} < \frac{3\pi}{4} \text{ et donc } \cos \frac{t_1 + t_2}{2} = \\ -\frac{1}{2}, \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{2\pi}{3} \text{ et par suite } \cos \frac{t_1 - t_2}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ mais } -\frac{3\pi}{8} < \frac{t_1 - t_2}{2} < -\frac{\pi}{2} \text{ donc } \frac{t_1 - t_2}{2} =$$

$$-\frac{\pi}{4} \text{ et } \begin{cases} t_1 = \frac{5\pi}{12} \\ t_2 = \frac{11\pi}{12} \end{cases}. \text{ Pour les coordonnées de ce point double on a } x = x(t_1) = x(t_2) = \\ \frac{1}{2} (x(t_1) + x(t_2)) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} (\cos 2t_1 + \cos 2t_2) + \frac{1}{2} (\cos t_1 + \cos t_2)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(t_1 + t_2) \cos(t_1 - t_2) + \cos \frac{t_1 + t_2}{2} \cos \frac{t_1 - t_2}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}. \text{ Pour } y = \frac{1}{2} (y(t_1) + y(t_2)) = \\ \frac{\sqrt{2}}{4} (\sin 2t_1 + \sin 2t_2) - \frac{1}{2} (\sin t_1 + \sin t_2) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(t_1 + t_2) \cos(t_1 - t_2) - \sin \frac{t_1 + t_2}{2} \cos \frac{t_1 - t_2}{2} = \\ -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

Les coordonnées des trois points sont donc  $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right), (\sqrt{2}, 0)$ .

Pour montrer que  $(C)$  est invariante par certaine rotation on a que le centre est forcément le centre de gravité des trois points doubles :  $\Omega\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ . On a alors  $\begin{cases} x(t) - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2t + \cos t \\ y(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2t - \sin t \end{cases}$  Met-

tons l'origine en  $\Omega$  :  $z(t) = x(t) - \frac{\sqrt{2}}{2} + iy(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{2it} + e^{-it}$  et  $z(t) e^{2i\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{2it-4i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\left(t-\frac{2\pi}{3}\right)} = z\left(t - \frac{2\pi}{3}\right)$  et la courbe est invariante par la rotation  $\mathcal{R}\left(\Omega, \frac{2\pi}{3}\right)$  de même  $z(t) e^{4i\frac{\pi}{3}} = z\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)$  et on trouve la rotation  $\mathcal{R}\left(\Omega, \frac{4\pi}{3}\right)$ .

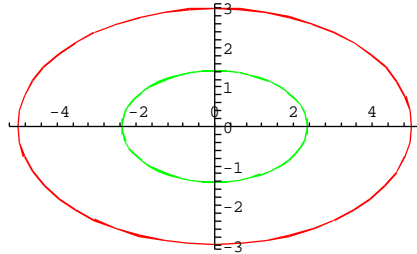
**Exercice 16** On paramètre l'ellipse par  $A(a \cos t, b \sin t)$  ainsi  $A'$  le symétrique de  $A$  par rapport à  $O \vec{i}$  a pour coordonnées  $A'(a \cos t, -b \sin t)$ . Une équation de la normale en  $A$  à  $\varepsilon$  est  $ax \sin t - by \cos t + (b^2 - a^2) \sin t \cos t = 0$  en écrivant  $-a \sin t (x - a \cos t) + b \cos t (y - b \sin t) = 0$ . Une équation de  $OA'$  est  $bx \sin t + ay \cos t = 0$ . Ces deux droites sont confondues lorsque  $\sin t \cos t = 0$

c'est à dire  $A$  sommet de  $\varepsilon$ , sinon  $M$  a pour coordonnées  $x = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} a \cos t; y = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} b \sin t$ .

Le lieu de  $M$  est l'ellipse  $\varepsilon'$  d'équation  $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 1 = 0$  avec  $A = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} a$  et  $B = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} b$  privé de ses sommets. On a  $\varepsilon'$  est l'homothétique de  $\varepsilon$  par l'homothétie de centre  $O$  et de rapport

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

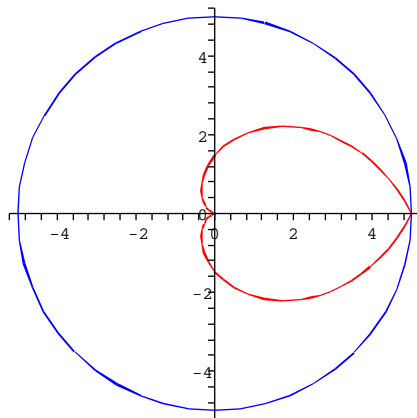
exercice\_5



**Exercice 17** Posons  $\|OA\| = a$ , on repère  $B$  par  $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = \theta [2\pi]$ . Il est clair que pour  $\theta$  et  $-\theta$  on obtient deux figures symétriques par rapport à  $OA$ .  $\theta$  et  $\theta + 2\pi$  donne le même point. On se contentera de  $\theta \in [0, \pi]$ . Un point  $M(r, \theta)$  avec  $r = \|OM\|$ , le centre  $I$  du cercle inscrit dans  $OAB$  a pour coordonnées polaires  $(\rho, \frac{\theta}{2})$  avec  $\rho = \|OI\| = \frac{r}{\cos \frac{\theta}{2}}$ . La condition  $d(I, OA) = d(I, AB)$  donne alors  $\rho \sin \frac{\theta}{2} = a \cos \frac{\theta}{2} - \rho$  c'est à dire  $r \tan \frac{\theta}{2} = a \cos \frac{\theta}{2} - \frac{r}{\cos \frac{\theta}{2}}$  et

$$r = \frac{a \cos^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \sin \frac{\theta}{2}} = a \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \right).$$

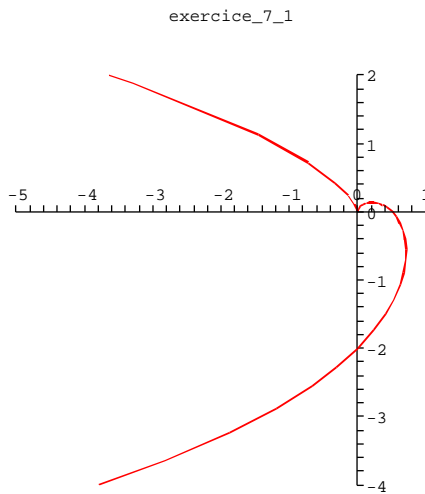
exercice\_6



**Exercice 18**  $\rho$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$  et est  $2\pi$ -périodique. Posons  $I = ]-\pi, +\pi[$ , aux bornes de  $I$  on pose  $\theta = -\pi + \phi$  et  $\rho \sin \phi = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \cos \phi_{\phi=0}} \sim \frac{2}{\phi}$  la courbe admet une branche parabolique, de même en  $\pi$ . Pour la dérivée  $\rho' = \frac{-\cos \theta + \sin \theta - 1}{(1 + \cos \theta)^2}$  qui est du signe de  $-\cos \theta +$

$\sin \theta - 1$  en passant par les formules en  $t$  c'est à dire en posant  $t = \tan \frac{\theta}{2}$  c'est du signe de  $2(t - 1)$  donc  $\rho$  est décroissante de  $-\pi$  à  $\frac{\pi}{2}$  et croissante de  $\frac{\pi}{2}$  à  $\pi$ . Le tableau de variations :

$\theta$	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$0$		$\frac{\pi}{2}$		$\pi$
$\rho$	$+\infty$	$\searrow$	$2$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$0$	$\nearrow$	$+\infty$
$\tan v$			$-1$		$-1$				

$$\tan v = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{(1 - \sin \theta)(1 + \cos \theta)}{\sin \theta - \cos \theta - 1}.$$


autre solution :  $\rho = \frac{\sin \frac{3\theta}{2}}{1 - 2 \cos \theta}$  L'ensemble de définition est  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .  
 $\rho$  est  $4\pi$ -périodique, de plus  $\rho(\theta + 2\pi) = -\rho(\theta)$  et  $O$  est centre de symétrie,  $\rho$  est impaire et  $Oy$  est axe de symétrie. On étudie  $\rho$  sur  $\left[ 0, \frac{\pi}{3} \right[ \cup \left] \frac{\pi}{3}, \pi \right[$ . On a  $\rho = 0$  si et seulement si  $\theta = 0 \left[ \frac{2\pi}{3} \right]$ .

Pour l'étude des branches infinies :  $h = \theta - \frac{\pi}{3}$  et  $Y = \rho \sin \left( \theta - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\cos \frac{3h}{2} \sinh}{1 - \cosh + \sqrt{3} \sinh} = \frac{(1 + \theta(h))(1 + \theta(h^2))}{h\sqrt{3} + \frac{1}{2}h^2 + \theta(h^2)} = \frac{1 + \theta(h)}{\sqrt{3} + \frac{1}{2}h + \theta(h)} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{6}h + \theta(h)$ . Dans le repère mobil  $(0, I, J)$  tel

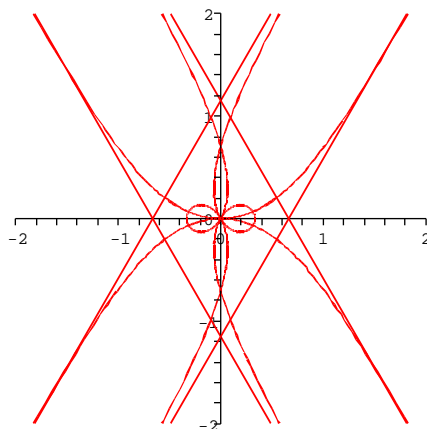
que  $(i, I) = \frac{\pi}{3}$  la droite  $Y = \frac{\sqrt{3}}{3}$  est asymptote et on a la position. Pour les variations  $\rho' = \frac{\frac{3}{2} \cos \frac{3\theta}{2} (1 - 2 \cos \theta) - 2 \sin \theta \sin \frac{3\theta}{2}}{(1 - 2 \cos \theta)^2} = \frac{3 \cos \frac{3\theta}{2} - \cos \frac{5\theta}{2} - 5 \cos \frac{\theta}{2}}{2(1 - 2 \cos \theta)^2}$  sur  $\left[ 0, \frac{\pi}{3} \right]$  on a  $1 - 2 \cos \theta \leq$

$0, \cos \frac{3\theta}{2} \geq 0, \sin \theta \geq 0, \sin \frac{3\theta}{2} \geq 0$  et la première formule donne que  $\rho' \leq 0$ , sur  $\left[ \frac{2\pi}{3}, \pi \right]$  on a  $1 - 2 \cos \theta \geq 0, \cos \frac{3\theta}{2} \leq 0, \sin \theta \leq 0, \sin \frac{3\theta}{2} \leq 0$  et la première expression donne  $\rho' \leq 0$ , sur  $\left[ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right]$  on a  $\frac{\pi}{2} \leq \frac{3\theta}{2} \leq \pi, \frac{5\pi}{6} \leq \frac{5\theta}{2} \leq \frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{6} \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{3}$  donc  $\cos \frac{3\theta}{2} \leq 0, -\frac{1}{2} \leq \cos \frac{5\theta}{2} \leq \frac{1}{2}, \cos \frac{\theta}{2} \geq 0$   
 NON

$\theta$	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\pi$
$\rho$	0	-	$-\infty \mid +\infty$	+	0	-	-1
$\tan V$							$\infty$

et la courbe :

exercice\_7\_2



**Exercice 19** On définit la parabole par  $y^2 - 2px = 0$ , la normale à  $\mathcal{P}$  au point  $A\left(\frac{a^2}{2p}, a\right)$  est la droite  $Da : 2apx + 2p^2y - a^3 - 2ap^2 = 0$ , pour  $a \neq 0$  c'est à dire  $A \neq O$  elle recoupe en la parabole en  $C\left(\frac{c^2}{2p}, c\right)$  avec  $c = -a - \frac{2p^2}{a}$ . Inversement le point  $C$  étant donné les points  $M\left(\frac{y^2}{2p}, y\right)$  de  $\mathcal{P}$  dont la normale contient  $C$  correspondent à  $y^2 + cy + 2p^2 = 0$ , il en existe effectivement deux différents si  $c^2 > 8p^2$ . La corde  $M_1M_2$  a pour équation  $2pX - (y_1 + y_2)Y + y_1y_2 = 0$  ou  $2pX + cY + 2p^2 = 0$  car  $y_1 + y_2 = -c, y_1y_2 = 2p^2$ . La droite  $M_1M_2$  passe par le point  $D(-p, 0)$  indépendant de  $c$ .

autre solution: (autre) Si on paramètre la parabole par  $x = p\frac{t^2}{2}, y = pt$  la corde  $M_1 = M(u), M_2 = M(v)$  a pour équation  $(M_1M_2) : 2x - (u+v)y + pu v = 0$ . Les coordonnées du point d'intersection des normales en  $M_1$  et  $M_2$  à  $\mathcal{P}$  vérifient  $\begin{cases} ux + y - \frac{p}{2}u^3 - pu = 0 \\ vx + y - \frac{p}{2}v^3 - pv = 0 \end{cases}$  ou  $\begin{cases} x = \frac{p}{2}(u^2 + uv + v^2 + 2) \\ y = -\frac{p}{2}uv(u+v) \end{cases}$  ce point appartient à  $\mathcal{P}$  si et seulement si  $y^2 - 2px = \frac{p^2}{4}u^2v^2(u+v)^2 - p^2(u^2 + uv + v^2 + 2) = 0$  ou  $(uv - 2)((uv + 2)(u+v)^2 + 4) = 0$  ou  $(u^2v^2 - 4)(u+v)^2 + 4uv - 8 = 0$

Cas où  $uv = 2$  alors  $x = \frac{p}{2}((u+v)^2 - uv + 2)$  et  $s = u+v$  vérifie  $s^2 \geq 8$ . Les cordes  $(M_1M_2) : 2x - sy + 2p = 0$  pivotent autour de  $A(-p, 0)$ .

Cas où  $(uv + 2)(u+v)^2 + 4 = 0$  ou  $uv = -2 - \frac{4}{s^2}$  les cordes  $(M_1M_2) : 2x - sy - 2p\left(1 + \frac{2}{s^2}\right) = 0$

et les coordonnées  $(x, y)$  du point caractéristique de  $(M_1M_2)$  vérifient  $-y + \frac{8p}{s^3} = 0$  ou  $y = \frac{8p}{s^3}$

et  $x = p\left(1 + \frac{6}{s^2}\right)$  d'où  $8(x-p)^3 - 27py^2 = 0$ , équation caractéristique de la développée de la parabole  $\mathcal{P}$ .

**Exercice 20** On paramètre l'ellipse par  $x = a\frac{1-t^2}{1+t^2}, y = \frac{2bt}{1+t^2}$ . La corde  $(PP')$  où  $P =$

$M(u), P' = M(u')$  a pour équation  $\begin{vmatrix} x & a(1-u^2) & a(1-u'^2) \\ y & 2bu & 2bu' \\ 1 & 1+u^2 & 1+u'^2 \end{vmatrix} = 0$  ou  $bx(1-uu') + ay(u+u') -$

$ab(1+uu') = 0$ .

La corde  $MP$  passe par  $F(c, 0)$  si  $c(1-ut) - a(1+ut) = 0$  la corde  $MP'$  passe par  $F'(-c, 0)$

si  $c(1 - u't) + a(1 + u't) = 0$ . Ainsi  $t \neq 0, u = \frac{c-a}{t(c+a)}, u' = \frac{c+a}{t(c-a)}$  et on a  $uu' = \frac{1}{t^2}$ ,  
 $u + u' = \frac{2c^2 + a^2}{t(c^2 - a^2)} = -\frac{2}{tb^2}(c^2 + a^2)$ . La corde  $(PP')$  s'écrit en fonction de  $t$ :  $bx \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) - \frac{2ay(c^2 + a^2)}{tb^2} - ab \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) = 0$  ou  $b^3t^2(x - a) - 2ayt(c^2 + a^2) - b^3(x + a) = 0$ . L'équation cartésienne de l'enveloppe s'obtient en écrivant que ce trinôme du second degré, exclue  $x = a$ , a une racine double:  $a^2y^2(c^2 + a^2)^2 + b^6(x^2 - a^2) = 0$  ou  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(c^2 + a^2)^2}{b^6}y^2 - 1 = 0$  c'est une ellipse  $\varepsilon'$  déduite de  $\varepsilon$  par l'affinité  $(x, y) \mapsto \left(x, \frac{b^2}{c^2 + a^2}y\right)$ .

**Exercice 21** En 0 on a  $\rho(0) = 3a$  on peut donc prolonger  $\rho$  par continuité en 0. Faisons un DL2 en 0 de  $\rho$ :  $\rho = 2a \frac{3 - \frac{1}{6}(27\theta^2)}{2 - \frac{1}{6}(8\theta^2)} + o(\theta^2) = 3a - \frac{5}{2}a\theta^2 + o(\theta^2)$  ainsi  $\rho'(0) = 0$  et  $\rho''(0) = -5a$ . Le

rayon de courbure en  $\theta = 0$  est donné par  $R(0) = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}{(\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'')} = \frac{9}{8}a$ .

**Exercice 22** Soit  $x, y, z$  les coordonnées barycentriques d'un point  $M$  du plan dans la base affine  $(A, B, C)$  on a  $M = xA + yB + zC$  avec  $x + y + z = 1$ . Posons  $a = \|BC\|, b = \|CA\|, c = \|AB\|$  puis  $p = \vec{AB} \cdot \vec{AC}, q = \vec{BC} \cdot \vec{BA}, r = \vec{CA} \cdot \vec{CB}$ . On a  $\begin{cases} 2p = b^2 + c^2 - a^2 \\ 2q = c^2 + a^2 - b^2 \\ 2r = a^2 + b^2 - c^2 \end{cases}$  et  $\vec{AM} = y\vec{AB} + z\vec{AC}$

sera orthogonal à  $\vec{BC}$  si  $qy - rz = 0$  ce qui donne une équation barycentrique de la hauteur  $AH$  ou  $H(x, y, z) : px = qy = rz$  ainsi  $H = \frac{1}{s}(qrA + rpB + pqC)$  où  $s = qr + rp + pq$ .

Soit  $A_1 = \frac{1}{2}(B + C)$  le milieu de  $[B, C]$  on a  $\vec{A_1M} = (y - \frac{1}{2})\vec{AB} + (z - \frac{1}{2})\vec{AC}$  qui sera orthogonal à  $\vec{BC}$  si  $q(y - \frac{1}{2}) - r(z - \frac{1}{2}) = 0$ , c'est une équation barycentrique de la médiatrice  $A_1J$  avec  $J(x, y, z) : qy - rz = \frac{q-r}{2}, rz - px = \frac{r-p}{2}, px - qy = \frac{p-q}{2}$  et ainsi  $J = \frac{1}{2s}(p(q+r)A + q(r+p)B + r(p+q)C)$  on constate que :

$$\frac{1}{3}(H + 2J) = \frac{1}{3}(A + B + C) = G$$

Autrement dit  $G, H, J$  sont alignés

**Exercice 24** On a  $\rho(-t) = -\rho(t)$  et  $\theta(-t) = \theta(t)$  il y a une symétrie par rapport à l'origine, on se contente de  $t > 0$ . Les variations sont données par  $\rho'(t) = 1 - \frac{1}{t^2}$  et  $\theta'(t) = 2t$  d'où

$t$	0		1		$+\infty$
$\rho'$	$-\infty$	-	0	+	1
$\rho$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
$\theta$	1	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
$\theta'$	0	+		+	

. L'étude des branches infinies se fait ainsi: on a  $\lim_{\theta \rightarrow 1^+} \rho = +\infty$

et on étudie ce qui se passe en  $t = 0$ . On a  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \rho(t) \sin(\theta(t) - 1) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^2 + 1}{t} \sin(t^2) = 0$ .

Ainsi la droite passant par l'origine et faisant un angle de  $\theta_0 = 1$  avec l'axe des abscisses est asymptote à la courbe. Il reste l'étude des points multiples on résoud  $\begin{cases} \rho(t_1) = \rho(t_2) \\ \theta(t_2) = \theta(t_1) + 2k\pi \end{cases}$  ou

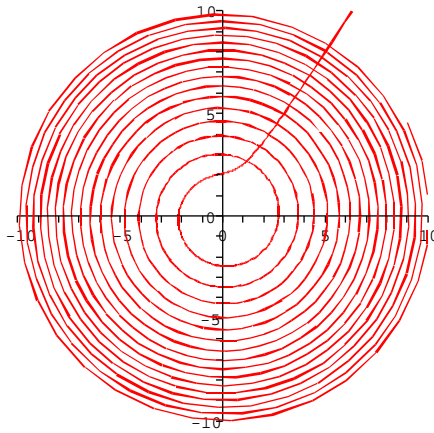
$\begin{cases} (t_1^2 + 1)t_2 = t_1(t_2^2 + 1) \\ t_2^2 - t_1^2 = 2k\pi \end{cases}$  avec  $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$  ou  $\begin{cases} (t_1 - t_2)(t_1 t_2 - 1) = 0 \\ t_2^2 - t_1^2 = 2k\pi \end{cases}$  avec  $t_1 \neq t_2$ ,

ou  $\begin{cases} t_1 t_2 = 1 \\ t_2^4 - 1 - 2k\pi t_2^2 = 0 \end{cases}$  soit  $t_2 = \sqrt{k\pi + \sqrt{1 + k^2\pi}} = \frac{1}{t_1}$  avec  $k \in \mathbb{Z}^*$  il y a une infinité de points doubles. Il y a aussi les autres points avec  $\rho(t_2) = -\rho(t_1)$  et  $\theta(t_2) = \theta(t_1) + (2k + 1)\pi$

Pour la dernière question on a  $\rho(\theta) = \frac{\theta}{\sqrt{\theta - 1}}$  pour  $\theta > 1$  et en utilisant la formule  $R =$

$$\frac{\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^3}{\left\|\frac{dOM}{d\theta} \wedge \frac{D^2OM}{d\theta^2}\right\|} = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}{|\rho^2 + 2\rho\rho' - \rho\rho''|} = \frac{8}{3}.$$

exercice\_13

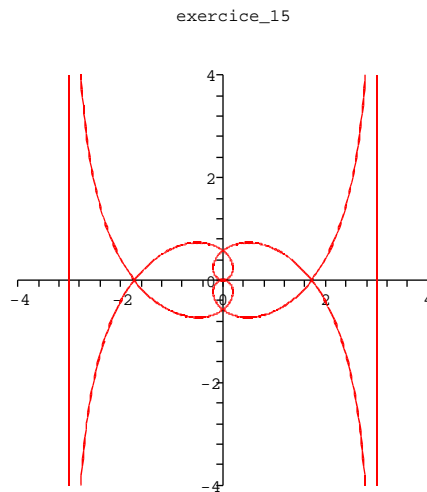


**Exercice 26** La fonction  $\rho(\theta)$  est  $3\pi$ -périodique et il faut prendre une période d'étude de  $6\pi$  qui est le ppcm de 3 et 2. Le domaine de définition est  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{2} + 3k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ . Les symétries donnent  $r(\theta + 3\pi) = \rho(\theta)$ , il y a symétrie par rapport à l'origine,  $D_e = \left] \frac{-3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$  et  $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$  ce qui donne une symétrie par rapport à  $Oy$  et on étudie la courbe sur  $\left[ 0, \frac{3\pi}{2} \right[$ . La fonction  $\rho'(\theta) = \frac{1}{3} \left( 1 + \tan^2 \frac{\theta}{3} \right) > 0$  et la fonction  $\rho$  croît sur  $\left[ 0, \frac{3\pi}{2} \right[$  de 0 à  $+\infty$ . En  $\left(\frac{\pi}{2}\right)^-$  on a  $\lim_{\theta \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} \rho \sin \left( \theta - \frac{3\pi}{2} \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \tan \left( \frac{\pi}{2} - \frac{h}{3} \right) \sin(-h) = \lim_{h \rightarrow 0^+} -\frac{\sinh \cos \frac{h}{3}}{\sin \frac{h}{3}} = 3$

et la droite d'équation  $x = -3$  est asymptote. Les points multiples sont obtenus en résolvant  $\begin{cases} \theta_2 = \theta_1 + 2k\pi \\ \rho(\theta_2) = \rho(\theta_1) \end{cases}$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  ou  $\begin{cases} \theta_2 = \theta_1 + (2k+1)\pi \\ \rho(\theta_2) = -\rho(\theta_1) \end{cases}$ . Ici compte tenu de la stricte crois-



sance de  $\rho$  sur  $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$  seuls les points d'intersection avec les axes sont des points multiples.



**Exercice 28** Pour la développée on a  $\vec{C} = \frac{dM}{ds}$  pour le vecteur tangent à  $(\Gamma)$  et  $\varphi = (\vec{i}, \vec{C})$ .

Por calculer  $\varphi$  on a par exemple  $\tan \varphi = \frac{y'}{x'} = -\cot 2t$  donc  $\varphi = 2t + \frac{\pi}{2}$  modulo  $\pi$  et  $d\varphi = 2dt$ . En posant  $I_t$ , le centre de courbure en  $M_t$  on a  $\overrightarrow{OI_t} = \overrightarrow{OM_t} + \frac{ds}{d\varphi} \vec{n}$  ce qui donne

$$\begin{cases} x_I = x_M - \frac{dy}{d\varphi} = \frac{3}{2} \cos t - \frac{1}{2} \cos 3t \\ y_I = y_M + \frac{dx}{d\varphi} = \frac{3}{2} \sin t - \frac{1}{2} \sin 3t \end{cases} \quad \text{pour la construction de cette développée } D \text{ on a } I(t + 2\pi) =$$

$I(t)$  et  $I(t + \pi)$  et  $I(t)$  sont symétriques par rapport à  $O$ ,  $I(-t)$  et  $I(t)$  sont symétriques par rapport à  $Ox$  on prendra  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  pour les dérivées :  $\begin{cases} x' = -\frac{3}{2} \sin t + \frac{3}{2} \sin 3t = 3 \sin t \cos 2t \\ y' = \frac{3}{2} \cos t - \frac{3}{2} \cos 3t = 3 \sin t \sin 2t \end{cases}$

et le tableau de variations :

$t$	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'$	0	+	0	-	0
$y'$	0	+		+	0
$x$	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	0
$y$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	2
$\frac{y'}{x'}$	0		$\infty$		0

et la représentation :

exercice\_17

