# Travaux Dirigés d'Informatique 3 : Matrices magiques, d'après une épreuve de centrale.

On dit qu'une matrice $M = ((m_{i,j}))$ est pseudo-magique si les $2n$ sommes des lignes et des colonnes sont égales, cette valeur commune est notée $s(M)$ . Elle est dîte quasi-magique si de plus la somme des éléments diagonaux est égale à $s(M)$. Elle est magique si la somme de l'anti-diagonale $\sum_{i=1}^{i=n} m_{i,n-i+1}$ vaut $s(M)$.

L'algorithme suivant construit une matrice magique d'ordre $n$ impair dont les coefficients sont les entiers $1,2,3,\cdots,n^2$.
On place l'entier 1 au milieu de la première ligne. On suppose par récurrence que les $k$ premiers entiers ont été placés et que l'entier $k$ a été placé à la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.
On place alors l'entier $k+1$ en respectant les règles suivantes :
-On pose $I = i-1$ (sauf si $i = 1$, auquel cas on pose $I = n$) et $J = j+1$ (sauf si $j = n$, auquel cas on pose $J = 1$).
-Si aucun nombre n'a été encore placé à la $I^{\text{ème}}$ ligne et $J^{\text{ème}}$ colonne, on y place $k+1$.
-Si cet emplacement est pris, on pose $I = i+1$ (sauf si $i = n$, auquel cas on pose $I = 1$) et $J = j$ et on y place $k+1$ en $I^{\text{ème}}$ ligne et $J^{\text{ème}}$ colonne.

**Exercice 1** génération d'une matrice magique
Écrire une fonction qui à $n$ impair construit une matrice magique d'ordre $n$ dont les coefficients sont $1,2,\cdots,n^2$ en respectant les règles précédentes.

**Exercice 2** Écrire une fonction qui détermine si une matrice $M$ est magique et si c'est le cas donne $s(M)$. On pourra tester cette fonction sur des exemples générés par la fonction précédente.

**Exercice 3** Bases
Pour définir une matrice pseudo-magique, on peut choisir arbitrairement les coefficients $m_{ij}$ pour tout $i$ et $j$ entre 1 et $n-1$ ainsi que le coefficients $m_{1n}$. (Montrer ce résultat et que l'ensemble des matrices pseudo magiques est un espace vectoriel dont on déterminera sa dimension).
Écrire une fonction qui à $n$ associe une base $\mathcal{B} = \{B_1,B_2,\cdots,B_{n^2-2n+2}\}$ de l'espace vectoriel des matrices pseudo-magiques d'ordre $n$.

**Exercice 4** Base des quasi-magiques
On considère la forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i1} - \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$. Si $M = \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \cdots + \lambda_{n^2-2n+2} B_{n^2-2n+2}$, donner une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda_1,\cdots,\lambda_{n^2-2n+2}$ pour que $M$ soit quasi-magique.
En déduire une base de l'espace vectoriel des matrices quasi-magiques d'ordre 4.

**Exercice 5** et les magiques
Déterminer une base de l'espace vectoriel des matrices magiques d'ordre 4.

**Exercice 6** Encore 1 Quelles sont les matrices magiques d'ordre 4 dont les premiers coefficients sont en ligne 1,2,3,4,5,6,7.

### 0.0.1 Corrigés

**Exercice 1** voir fichier maple

**Exercice 2** voir fichier maple.

**Exercice 3** Il est facile de montrer que l'ensemble des matrices pseudo-magiques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $(n-1)^2+1$. Il suffit donc de construire $n^2-2n+2$ matrices pseudo-magiques indépendantes, par exemple à partir de la base canonique de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ et de la matrice ne possèdant que des 1.

**Exercice 4** Utiliser la forme linéaire.

**Exercice 5**

**Exercice 6**