Travaux Dirigés d'Informatique 2 : Méthode de Leverrier-Faddeev pour calculer le polynôme caractéristique d'une matrice.

On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on pose

$$P_A(X) = \det(A - XI_d) = (-1)^n(X^n - p_1X^{n-1} - \cdots - p_n) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - X)$$

Enfin on pose pour tout entier k dans $1..n$: $s_k = \lambda_1^k + \cdots + \lambda_n^k$.

Exercice 1 Formules de Newton

Montrer que l'on a : $\forall k \in 1..n \ : \ kp_k = s_k - p_1s_{k-1} - p_2s_{k-2} - \cdots - p_{k-1}s_1$.

puis que $\forall k \in 1..n \ : \ s_k = \mathrm{Tr}(A^k)$

Algorithme :

$$\text{On pose} \left\{ \begin{array}{lll} A_1 = A & q_1 = \mathrm{Tr}(A_1) & B_1 = A_1 - q_1Id \\ A_2 = AB_1 & 2q_2 = \mathrm{Tr}(A_2) & B_2 = A_2 - q_2Id \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_n = AB_{n-1} & nq_n = \mathrm{Tr}(A_n) & B_n = A_n - q_nId \end{array} \right.$$

Exercice 2 Montrer que les q_k sont les p_k en utilisant les formules de Newton.

Montrer que B_n est nulle en utilisant le théorème de Cayley Hamilton.

Exercice 3 Programmation

Écrire une procédure maple qui à partir d'une matrice A calcul le polynôme caractéristique de A (et qui vérifie que B_n est nulle).

Exercice 4 Test

Tester votre programme avec les matrices suivantes :Id_4 ;

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \frac{1}{a_1+b_3} & \frac{1}{a_1+b_4} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \frac{1}{a_2+b_3} & \frac{2}{a_1+b_4} \\ \frac{1}{a_3+b_1} & \frac{1}{a_3+b_2} & \frac{1}{a_3+b_3} & \frac{1}{a_3+b_4} \\ \frac{1}{a_4+b_1} & \frac{1}{a_4+b_2} & \frac{1}{a_4+b_3} & \frac{1}{a_4+b_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_4 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_4 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_4 \end{pmatrix}$$

Pour les deux dernières vous pouvez faire varier la taille.

Exercice 5 Inverse

Écrire une procédure qui calcule l'inverse d'une matrice inversible. Application avec :

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 vecteur propre

On définit le polynôme matriciel $Q(t) = t^{n-1}Id + t^{n-2}B_1 + \cdots + B_{n-1}$. On suppose connue une valeur propre λ. Montrer que chaque colonne non nulle de la matrice $Q(\lambda)$ donne un vecteur propre de la matrice A. Appliquer cela pour déterminer les vecteurs propres de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

0.0.1 Corrigés

Exercice 1 On identifie les dérivées des deux côtés de :

$$(-1)^n(X^n - p_1X^{n-1} - \cdots - p_n) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - X)$$

En remarquant que $P(X) = P(X) - P(\lambda_k)$ on a

$$P(X) - P(\lambda_k) = (-1)^n \left(X^n - \lambda_k^n - p_1(X^{n-1} - \lambda_k^{n-1}) - \cdots - p_i(X^{n-i} - \lambda_k^{n-i}) - \cdots - p_{n-1}(X - \lambda_k)\right)$$

En mettant en facteur $X - \lambda_k$ on obtient

$$\frac{(-1)^n P(X)}{X - \lambda_k} = \left(\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_k^{n-1-j} X^j - p_1 \sum_{j=0}^{n-2} \lambda_k^{n-2-j} X^j - \cdots - p_i \sum_{j=0}^{n-i-1} \lambda_k^{n-i-1-j} X^j - \cdots - p_{n-1}\right)$$

ou encore :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^n P(X)}{X - \lambda_k} = \left(\sum_{j=0}^{n-1} s_{n-1-j} X^j - p_1 \sum_{j=0}^{n-2} s_{n-2-j} X^j - \cdots - p_i \sum_{j=0}^{n-i-1} s_{n-i-1-j} X^j - \cdots - np_{n-1}\right)$$

Ordonnons maintenant :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^n P(X)}{X - \lambda_k} = s_0 X^{n-1} + (s_1 - p_1 s_0) X^{n-2} + \cdots + (s_{j-1} - p_1 s_{j-2} - p_2 s_{j-3} - \cdots - p_{j-1} s_0) X^{n-j} + \cdots - np_{n-1}$$

En dérivant de l'autre côté :

$$(-1)^n P'(X) = nX^{n-1} - (n-1)p_1 X_{n-2} - \cdots - (n-j+1)p_{j-1} X^{n-j} - \cdots - np_{n-1}$$

et en identifiant les coefficients on obtient : $s_0 = n$ et $-(n-j+1)p_{j-1} = s_{j-1} - p_1 s_{j-2} - p_2 s_{j-3} - \cdots - p_{j-1} s_0$ en posant $j - 1 = k$ on a $-(n-k)p_k = s_k - p_1 s_{k-1} - p_2 s_{k-2} - \cdots - p_{k-1} s_1 - np_k$ et en regroupant :

$$kp_k = s_k - p_1 s_{k-1} - p_2 s_{k-2} - \cdots - p_{k-1} s_1$$

Il y a une autre démonstration avec le produit de séries entières.
En utilisant par exemple la forme triangulaire de A on montre que $s_k = \mathrm{Tr}(A^k)$.

Exercice 2 On a bien

$$kq_k = \mathrm{Tr}(A_k) = \mathrm{Tr}(AB_{k-1}) = \mathrm{Tr}(A(A_{k-1}) - q_{k-1}Id)) = \mathrm{Tr}(AA_{k-1} - q_{k-1}\mathrm{Tr}(A)$$

puis

$$\mathrm{Tr}(AA_{k-1}) = \mathrm{Tr}(A^2 B_{k-2}) = \mathrm{Tr}(A^2(A_{k-2} - q_{k-2}Id)) = \mathrm{Tr}(A^2 A_{k-2}) - q_{k-2}\mathrm{Tr}(A^2)$$

soit

$$kq_k = -q_{k-1}\mathrm{Tr}(A) - q_{k-2}\mathrm{Tr}(A^2) - \cdots - q_1 \mathrm{Tr}(A^{k-1}) + \mathrm{Tr}(A^k)$$

D'autre part on a : $B_n = A_n - q_n Id = AB_{n-1} - p_n Id = A(A_{n-1} - q_{n-1}Id) = AA_{n-1} - q_{n-1}A$ $= A^2(A_{n-2} - q_{n-2}Id) - q_{n-1}A = A^2 A_{n-2} - q_{n-2}A^2 - q_{n-1}A = -q_{n-1}A - q_{n-2}A^2 - \cdots - q_1 A^{n-1} + A^n = 0$

Exercice 3 Vour fichier maple.

Exercice 4 Voir fichier maple.

Exercice 5 Pour l'inverse il suffit de remarquer que $B_n = A_n - p_n Id = 0$ ce qui donne $A_n = p_n Id = AB_{n-1}$ donc $\dfrac{1}{p_n} B_{n-1}$ est l'inverse de A.

Exercice 6 Calculons $(\lambda Id - A)Q(\lambda) = \lambda^n Id + \lambda^{n-1}B_1 + \cdots + \lambda B_{n-1} - \lambda^{n-1}A - \lambda^{n-2}AB_1 - \cdots - AB_{n-1} = \lambda^n Id + \lambda^{n-1}A_1 + \cdots + \lambda A_{n-1} - \lambda^{n-1}p_1 Id - \cdots - \lambda p_{n-1} Id - \lambda^{n-1}A - \lambda^{n-2}A_2 - \cdots - A_n = P(\lambda)Id + p_n Id - A_n = 0$ d'où $\lambda Q(\lambda) = AQ(\lambda)$. Ainsi chaque colonne de $Q(\lambda)$ est un vecteur propre de A.