Travaux Dirigés d'Informatique

Exercice 1 Décomposition en éléments simples d'une fraction rationelle

Soit la fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{X^6}{(X^2+1)^2(X+1)^2}$. La décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$ s'écrit : $G = a + \dfrac{bX+c}{X^2+1} + \dfrac{dX+e}{(X^2+1)^2} + \dfrac{f}{X+1} + \dfrac{g}{(X+1)^2}$.
On réduit les fractions composant G au même dénominateur et on identifie les numérateurs de F et de G . En déduire les valeurs de a,b,c,d,e,f,g .
Calculer la décomposition de F en éléments simples dans $\mathbb{C}$

Exercice 2 Algorithme de Horner

Soit P un polynôme de $K[X]$, s'écrivant sous la forme : $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$. L'algorithme de Hörner permet d'écrire $P(X)$ sous la forme : $P(X) = ((((a_n X + a_{n-1})X + a_{n-2})X + \cdots + a_2)X + a_1)X + a_0$.

Exemple : $Q = 3X^4 + 2X^3 - X^2 + 2X + 1$ ou $Q = (((3X+2)X-1)X+2)X+1$

Écrire une procédure PolyHorner(P , X) permettant d'écrire P(X) sous cette forme , P étant un polynôme donné de $K[X]$, X étant le nom de la variable .

NB: il est interdit d'utiliser la fonction horner de MAPLE .

Grace à la fonction cost , évaluer le coût en opérations nécessaires pour évaluer Q et PolyHorner(Q, X) ,Q étant le polynôme donné en exemple .

Exercice 3 Développement limités

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{e^{x^2}-1}{x}$.Représenter graphiquement f.
Trouver un développement limité de f à l'ordre 7.
On fabrique un développement limité en u à coefficients indéterminés pour la fonction réciproque f^{-1} et on substitue le développement de f dedans. Cela donne le développement limité de $f^{-1} \circ f$.

Exercice 4 Les boucles

Question 1:

Écrire un programme qui calcule la valeur de $n!$ (factorielle n) de deux manières : par une boucle 'for' et avec une boucle 'while' (sans récursivité). Raffinement : considérer le cas $n = 0$.

Question 2:

On définit une suite par récurrence par $u_{(n+1)} = f(u_n)$ où $f(x) = 4x(1-x)$. Écrire un programme U de variable n qui calcule le n-ième terme de la suite. On suppose donnée $u_0 = 1/5$. Afficher ensuite le 15e terme. Quelle est le nombre de décimales du numérateur et du dénominateur ?

Question 3:

Écrire un programme V de trois variables, n,f et u_0 qui renvoie le n-ième terme de la suite définie par récurrence par $u_{(n+1)} = f(u_n)$. On reprend $f(x) = 4x(1-x)$. Comparer le résultat avec $u_0 = 0.5$. Que dire de la suite $a(n+1) = cos(a(n))$ avec $a(0) = 0$?

Question 4:

On définit la suite de Fibonacci par $Fib(0) = 0$, $Fib(1) = 1$ et $Fib(n+2) = Fib(n+1) + Fib(n)$. Écrire une procédure qui calcule $Fib(n)$ (sans récursivité).

Question 5:

Écrire un programme reste qui calcule le reste de la division euclidienne de a par b, en utilisant seulement des opérations algébriques, et en particulier sans partie entière. Votre programme fonctionne-t-il avec des entiers négatifs? Comparer avec irem. On rappelle que le reste de a par b est l'unique entier r compris entre 0 et $|b| - 1$ tel qu'il existe un entier q avec $a = q * b + r$.

Exercice 5 vitesse de convergence
On donne quatre suites définies par des relations de récurrence. Dans chaque cas, on demande :
1 d'écrire un programme prenant un entier n en argument et calculant le n-ème terme.
2 d'afficher les 10 premiers termes, ainsi que le 100-ème, le 1000-ème et le 10000-ème.

3 après avoir constaté que ces suites semblent converger vers une limite commune ℓ, évaluer la différence entre la suite et la limite, ainsi que l'inverse et le logarithme de ces différences, pour $n = 10$, $n = 100$ et $n = 1000$.
Les quatre suites ont pour premier terme 1. et vérifie les relations de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^2}{2},\ v_{n+1} = \operatorname{Arctan} v_n,\ w_{n+1} = \frac{\sin w_n}{2} \text{ et } z_{n+1} = \sin^2 z_n$$

Exercice 6 instabilité numérique
On s'intéresse à des suites vérifiant des relations de récurrence d'ordre 2. On se propose de comparer certains termes obtenus d'une part avec la formule exacte de ces suites et d'autre part avec la valeur approchée calculée par un programme.
1 La suite de Fibonacci est définie par $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$.
a) Donner la formule exacte de f_n en fonction de n. Avec cette formule donner une valeur approchée de f_{100}.
b) Écrire un programme prenant en entrée n et retournant f_n. Calculer f_{100}.
2 Reprendre le même shéma d'étude avec $g_0 = 1$, $g_1 = -2$ et la relation $g_{n+2} = g_n + \frac{3}{2} g_{n+1}$.
3 Idem avec $h_{n+2} = h_n + \frac{3}{2} h_{n+1}$ mais cette fois avec les conditions initiales $h_0 = -3$ et $h_1 = \frac{3}{2}$.
Que se passe-t-il ? Expliquer. (On pourra demander à Maple de résoudre la récurrence sans conditions initiales...)
3 a) Proposer des conditions initiales pour la suite de Fibonacci qui rende le calcul numérique instable. (On pourra demander à Maple de résoudre formelement la récurrence, sans condition initiale, puis ajuster ces conditions pour rendre théoriquement nulle la partie de la solution qui explose).
b) Vérifier l'instabilité.

Exercice 7 der récurrences non monotones
On étudie deux suites vérifiant des relations de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ mais avec f décroissantes.
1 Prenons $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(t) = e^{-t}$.
a) Représenter le graphe de f ainsi que la droite $y = x$ sur le même dessin. Prévoir le comportement de la suite u.
b)Écrire une fonction prenant en entrée n et retournant u_n.
c)Donner la suite des 20 premiers termes. Décrire le comportement.
d)Montrer que les suites v et w définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ sont monotones.
e) Montrer que v et w convergent l'une et l'autre vers un point fixe de $f \circ f$. Montrer qu'il existe un unique point fixe de $f \circ f$. Conclure.
2 Sur le même shéma, étudier la suite v définie par $v_0 = 0$ et la relation $v_{n+1} = g(v_n)$ avec $g(t) = e^{-3t}$.

0.0.1 Corrigés

Exercice 1 Question 1:

$> F := X^6/(X^2+1)^2/(X+1)^2;$

$> G := a + (b*X+c)/(X^2+1) + (d*X+e)/(X^2+1)^2 + f/(X+1) + g/(X+1)^2;$

$> N := convert(numer(G), polynom) - X^6 : collect(N, X);$

$> sols := solve(seq(coeff(N, X, k), k = 0..degree(N)), a, b, c, d, e, f, g);$

$> assign(sols); F = G;$

Question 2:

$> F = convert(F, parfrac, X, I);$

Exercice 2 $PolyHorner := proc(P :: polynom, x :: name)$

$local k, n, Q;$

$n := degree(P); Q := 0;$

$for k from n by -1 to 0 do$

$Q := Q*x + coeff(P, x, k);$

$enddo;$

Q

$endproc;$

$> Q := 3*x^4 + 2*x^3 - x^2 + 2*x + 1; PolyHorner(Q, x);$

$> with(codegen, cost) : cost(Q); cost(PolyHorner(Q, x));$

Exercice 3 Utiliser la commande $dl := series(f, x = 0, 7);$
$ind := subs(u = convert(dl, polynom), a*u + b*u^3 + c*u^5);$
$ind5 := convert(series(ind - x, x = 0, 7), polynom);$
$solve(coeffs(ind5, x), a, b, c);$

Exercice 4

Exercice 5

Exercice 6

Exercice 7