

## Travaux Dirigés d'Informatique 2 : Méthode de Leverrier-Faddeev pour calculer le polynôme caractéristique d'une matrice.

On considère une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et on pose

$$P_A(X) = \det(A - XI_d) = (-1)^n (X^n - p_1 X^{n-1} - \dots - p_n) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - X)$$

Enfin on pose pour tout entier  $k$  dans  $1..n$  :  $s_k = \lambda_1^k + \dots + \lambda_n^k$ .

### Exercice 1 Formules de Newton

Montrer que l'on a :  $\forall k \in 1..n$  :  $kp_k = s_k - p_1 s_{k-1} - p_2 s_{k-2} - \dots - p_{k-1} s_1$ .

puis que  $\forall k \in 1..n$  :  $s_k = \text{Tr}(A^k)$

Algorithme :

$$\text{On pose } \begin{cases} A_1 = A & q_1 = \text{Tr}(A_1) & B_1 = A_1 - q_1 Id \\ A_2 = AB_1 & 2q_2 = \text{Tr}(A_2) & B_2 = A_2 - q_2 Id \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_n = AB_{n-1} & nq_n = \text{Tr}(A_n) & B_n = A_n - q_n Id \end{cases}$$

**Exercice 2** Montrer que les  $q_k$  sont les  $p_k$  en utilisant les formules de Newton.

Montrer que  $B_n$  est nulle en utilisant le théorème de Cayley Hamilton.

### Exercice 3 Programmation

Écrire une procédure maple qui à partir d'une matrice  $A$  calcul le polynôme caractéristique de  $A$  ( et qui vérifie que  $B_n$  est nulle).

### Exercice 4 Test

Tester votre programme avec les matrices suivantes :  $Id_4$  ;

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \frac{1}{a_1+b_3} & \frac{1}{a_1+b_4} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \frac{1}{a_2+b_3} & \frac{1}{a_2+b_4} \\ \frac{1}{a_3+b_1} & \frac{1}{a_3+b_2} & \frac{1}{a_3+b_3} & \frac{1}{a_3+b_4} \\ \frac{1}{a_4+b_1} & \frac{1}{a_4+b_2} & \frac{1}{a_4+b_3} & \frac{1}{a_4+b_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_4 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_4 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_4 \end{pmatrix}$$

Pour les deux dernières vous pouvez faire varier la taille.

### Exercice 5 Inverse

Écrire une procédure qui calcule l'inverse d'une matrice inversible. Application avec :

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$$

### Exercice 6 vecteur propre

On définit le polynôme matriciel  $Q(t) = t^{n-1} Id + t^{n-2} B_1 + \dots + B_{n-1}$ . On suppose connue une valeur propre  $\lambda$ . Montrer que chaque colonne non nulle de la matrice  $Q(\lambda)$  donne un vecteur propre de la matrice  $A$ . Appliquer cela pour déterminer les vecteurs propres de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

### 0.0.1 Corrigés

**Exercice 1** On identifie les dérivées des deux côtés de :

$$(-1)^n (X^n - p_1 X^{n-1} - \dots - p_n) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - X)$$

En remarquant que  $P(X) = P(X) - P(\lambda_k)$  on a

$$P(X) - P(\lambda_k) = (-1)^n (X^n - \lambda_k^n - p_1 (X^{n-1} - \lambda_k^{n-1}) - \dots - p_i (X^{n-i} - \lambda_k^{n-i}) - \dots - p_{n-1} (X - \lambda_k))$$

En mettant en facteur  $X - \lambda_k$  on obtient

$$\frac{(-1)^n P(X)}{X - \lambda_k} = \left( \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_k^{n-1-j} X^j - p_1 \sum_{j=0}^{n-2} \lambda_k^{n-2-j} X^j - \dots - p_i \sum_{j=0}^{n-i-1} \lambda_k^{n-i-1-j} X^j - \dots - p_{n-1} \right)$$

ou encore :

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^n P(X)}{X - \lambda_k} = \left( \sum_{j=0}^{n-1} s_{n-1-j} X^j - p_1 \sum_{j=0}^{n-2} s_{n-2-j} X^j - \dots - p_i \sum_{j=0}^{n-i-1} s_{n-i-1-j} X^j - \dots - n p_{n-1} \right)$$

Ordonnons maintenant :

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^n P(X)}{X - \lambda_k} = s_0 X^{n-1} + (s_1 - p_1 s_0) X^{n-2} + \dots + (s_{j-1} - p_1 s_{j-2} - p_2 s_{j-3} - \dots - p_{j-1} s_0) X^{n-j} + \dots - n p_{n-1}$$

En dérivant de l'autre côté :

$$(-1)^n P'(X) = n X^{n-1} - (n-1) p_1 X^{n-2} - \dots - (n-j+1) p_{j-1} X^{n-j} - \dots - n p_{n-1}$$

et en identifiant les coefficients on obtient :  $s_0 = n$  et  $-(n-j+1) p_{j-1} = s_{j-1} - p_1 s_{j-2} - p_2 s_{j-3} - \dots - p_{j-1} s_0$  en posant  $j-1 = k$  on a  $-(n-k) p_k = s_k - p_1 s_{k-1} - p_2 s_{k-2} - \dots - p_{k-1} s_1 - n p_k$  et en regroupant :

$$k p_k = s_k - p_1 s_{k-1} - p_2 s_{k-2} - \dots - p_{k-1} s_1$$

Il y a une autre démonstration avec le produit de séries entières.

En utilisant par exemple la forme triangulaire de  $A$  on montre que  $s_k = \text{Tr}(A^k)$ .

**Exercice 2** On a bien

$$k q_k = \text{Tr}(A_k) = \text{Tr}(A B_{k-1}) = \text{Tr}(A(A_{k-1} - q_{k-1} Id)) = \text{Tr}(A A_{k-1} - q_{k-1} \text{Tr}(A))$$

puis

$$\text{Tr}(A A_{k-1}) = \text{Tr}(A^2 B_{k-2}) = \text{Tr}(A^2 (A_{k-2} - q_{k-2} Id)) = \text{Tr}(A^2 A_{k-2}) - q_{k-2} \text{Tr}(A^2)$$

soit

$$k q_k = -q_{k-1} \text{Tr}(A) - q_{k-2} \text{Tr}(A^2) - \dots - q_1 \text{Tr}(A^{k-1}) + \text{Tr}(A^k)$$

D'autre part on a :  $B_n = A_n - q_n Id = A B_{n-1} - p_n Id = A(A_{n-1} - q_{n-1} Id) = A A_{n-1} - q_{n-1} A = A^2 (A_{n-2} - q_{n-2} Id) - q_{n-1} A = A^2 A_{n-2} - q_{n-2} A^2 - q_{n-1} A = -q_{n-1} A - q_{n-2} A^2 - \dots - q_1 A^{n-1} + A^n = 0$

**Exercice 3** Voir fichier maple.

**Exercice 4** Voir fichier maple.

**Exercice 5** Pour l'inverse il suffit de remarquer que  $B_n = A_n - p_n Id = 0$  ce qui donne  $A_n = p_n Id = A B_{n-1}$  donc  $\frac{1}{p_n} B_{n-1}$  est l'inverse de  $A$ .

**Exercice 6** Calculons  $(\lambda Id - A)Q(\lambda) = \lambda^n Id + \lambda^{n-1} B_1 + \dots + \lambda B_{n-1} - \lambda^{n-1} A - \lambda^{n-2} A B_1 - \dots - A B_{n-1} = \lambda^n Id + \lambda^{n-1} A_1 + \dots + \lambda A_{n-1} - \lambda^{n-1} p_1 Id - \dots - \lambda p_{n-1} Id - \lambda^{n-1} A - \lambda^{n-2} A_2 - \dots - A_n = P(\lambda) Id + p_n Id - A_n = 0$  d'où  $\lambda Q(\lambda) = A Q(\lambda)$ . Ainsi chaque colonne de  $Q(\lambda)$  est un vecteur propre de  $A$ .