

Chapitre 4

Réduction des endomorphismes

Marie Ennemond Camille Jordan (5 janvier 1838 - 22 janvier 1922) était un mathématicien français, connu à la fois pour son travail fondamental dans la théorie des groupes et pour son influent Cours d'analyse. Il est né à Lyon et étudia à l'École polytechnique (Promotion 1855). Il fut ingénieur de profession puis plus tard, enseigna à l'École polytechnique et succéda à Liouville au Collège de France où il avait une réputation de choix de notation excentriques. On se souvient aujourd'hui de son nom dans un certain nombre de résultats fondamentaux : le théorème de la courbe de Jordan : un résultat topologique requis en analyse complexe ; la forme normale de Jordan et la réduction de Jordan souvent confondue avec les travaux de Wilhelm Jordan 1842-1899 à qui l'on doit la méthode du pivot ou d'élimination de Gauss-Jordan. le théorème de Jordan-Hölder qui est un résultat basique des séries de compositions. En fait le travail de Jordan a fait beaucoup pour introduire la théorie de Galois dans le courant de pensée majoritaire. Il investiga aussi les groupes de Mathieu, les premiers exemples de groupes sporadiques. Son Traité des substitutions sur les permutations de groupes fut publié en 1870.

4.1 Généralités

E désigne un espace vectoriel sur K non réduit à $\{0\}$.

4.1.1 Sous-espaces stables

Définition 1 Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un s.e.v. de E , on dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$. On note alors $u|_F$ l'endomorphisme de F déduit de u par restriction à F .

Exercice 1 Si E est de dimension finie et si u est un automorphisme de E , montrer que le s.e.v F est stable par u si et seulement si $u(F) = F$.

En revanche, montrer que si E n'est pas de dimension finie, on peut avoir F stable par u et $u(F) \neq F$ même si $u \in \mathcal{GL}(E)$.

4.1.2 Sous-espaces propres

Définition 2 Valeur propre, sous-espace propre. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. un scalaire λ est une valeur propre de u si et seulement si $E_\lambda = \text{Ker}(u - \lambda I_E) \neq \{0\}$. Le sous-espace vectoriel E_λ est alors appelé sous-espace propre relatif à la valeur propre λ .

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $\lambda \in K$ est une valeur propre de A si et seulement si $\text{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$, où A est identifié avec l'application linéaire de K^n dans K^n qui à X associe AX .

Définition 3 L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme u (resp d'une matrice A) est appelé spectre de u (resp de A) et noté $\text{Sp}(u)$ (resp $\text{Sp}(A)$).

Définition 4 Vecteur propre. Un vecteur x appartenant à E est un vecteur propre de u si et seulement si $x \neq 0$ et s'il existe $\lambda \in K$ tel que $u(x) = \lambda x$, c'est à dire $x \in E_\lambda - \{0\}$.

Exercice 2 Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$ suivants:

a) $P \mapsto XP$ b) $P \mapsto XP'$ c) $P \mapsto (X^2 - 1)P' - XP$

Proposition 1 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) des valeurs propres distinctes de u .

1) Les sous-espaces propres correspondants sont en somme directe : $\bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}$.

2) Si x_1, x_2, \dots, x_p sont des vecteurs propres de u associés respectivement aux valeurs $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, la famille (x_1, \dots, x_p) est une famille libre.

[Ind] Faire une démonstration par récurrence sur l'entier p .

Exercice 3 Soit (r_n) une suite de réels tous distincts et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n la fonction numérique d'une variable réelle définie par $\varphi_n(x) = e^{r_n x}$. Montrer que la famille de fonctions (φ_n) est une famille libre de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Proposition 2 Soit $a \in \mathcal{GL}(E)$. L'application Φ_a , qui, à un endomorphisme u , associe l'endomorphisme $\Phi_a(u) = aua^{-1}$ est un automorphisme de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ appelé automorphisme intérieur de $\mathcal{L}(E)$ associé à a .

[Ind] Appliquer les définitions.

Exercice 4 Que peut-on dire de l'application Φ qui, à $a \in \mathcal{GL}(E)$ associe $\Phi_a \in \mathcal{GL}(\mathcal{L}(E))$?

Proposition 3 Soit $a \in \mathcal{GL}(E)$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On a $\text{Sp}(u) = \text{Sp}(aua^{-1})$ et pour tout élément λ de $\text{Sp}(u)$:

$$\text{Ker}(aua^{-1} - \lambda Id_E) = a(\text{Ker}(u - \lambda Id_E))$$

[Ind] Commencer par l'égalité des sous-espaces vectoriels en procédant par double inclusion.

4.1.3 Polynômes d'endomorphismes

Définition 5 Soient $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme à coefficients dans K et $u \in \mathcal{L}(E)$. L'endomorphisme $P(u)$, appelé polynôme de l'endomorphisme u , est défini par

$$P(u) = a_0 \cdot Id_E + a_1 \cdot u + \dots + a_n u^n = \sum_{k=0}^n a_k u^k$$

où, pour $k \in \mathbb{N}$, u^k désigne la composée $\underbrace{u \circ u \circ \dots \circ u}_{k \text{ fois}}$ (avec la convention $u^0 = Id_E$).

Définition 6 Soient $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in K[X]$, la matrice $P(A)$, appelé polynôme de la matrice A , est définie par

$$P(A) = \sum_{k=0}^n a_k A^k$$

avec la convention $A^0 = I_n$.

Proposition 4 Soit E un espace de dimension finie n et \mathcal{B} une base de E . Si A est la matrice de $u \in \mathcal{L}(E)$ dans la base \mathcal{B} , alors, pour tout polynôme $P \in K[X]$, $P(A)$ est la matrice de $P(u)$ dans la base \mathcal{B} .

[Ind] Si \mathcal{B} est une base de E , $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ est un isomorphisme d'algèbre.

Exercice 5 Soit I un intervalle de \mathbb{R} et D l'endomorphisme de $E = C^\infty(I, \mathbb{R})$ qui, à la fonction f , associe f' . Trouver l'ensemble des polynômes de D .

Exercice 6 Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et T l'endomorphisme de E qui, à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, associe la suite $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$. Soit P le polynôme $P(X) = 1 + X - X^2$. Trouver le noyau de $P(T)$.

ATTENTION. Si u est à valeurs dans K et P un polynôme, ne confondez pas, pour $x \in E$, les valeurs $P(u)(x)$ (valeur sur x de l'endomorphisme $P(u)$) et $P(u(x))$ (valeur du polynôme P sur le scalaire $u(x)$).

On fait cette grave confusion en ne distinguant pas $u^n(x) = u \circ u \cdots \circ u(x)$ et $(u(x))^n = u(x) \times u(x) \times \cdots \times u(x)$.

Proposition 5 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'application de $K[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$ qui, au polynôme P , associe l'endomorphisme $P(u)$ est un morphisme d'algèbre dont l'image (ensemble des polynômes en u) est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.

[Ind] Appliquer les définitions.

Exercice 7 Soit $A \in \mathcal{M}_2(K)$, α sa trace et β son déterminant.

a) Montrer que $A^2 - \alpha A + \beta I_2 = 0$.

b) Montrer que la sous-algèbre $F = \{P(A), P \in K[X]\}$ est engendré par la famille $\{I_2, A\}$ et en donner une base.

c) On suppose $\beta \neq 0$, trouver les éléments inversibles de F .

4.1.4 Étude des noyaux d'endomorphismes

Proposition 6 Si u et v sont deux endomorphismes de E qui commutent, $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ sont stables par v .

[Ind] Vérifier...

Exercice 8 Soit $P \in K[X]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\text{Ker } P(u)$ et $\text{Im } P(u)$ sont stables par u .

Exercice 9 Si les deux endomorphismes u et v commutent, les sous-espaces propres de u sont stables par v .

Proposition 7 Soient P et Q deux éléments de $K[X]$ et u un endomorphisme de E . Si P divise Q alors $\text{Ker } P(u) \subset \text{Ker } Q(u)$.

[Ind] Que signifie: P divise Q ?

Proposition 8 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in K[X]$. Si λ est une valeur propre de u alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$.

[Ind] Calculer...

Proposition 9 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in K[X]$. Si $P(u) = 0$ alors toute valeur propre de u est un zéro de P .

[Ind] Appliquer la proposition précédente.

4.2 Diagonalisation

E désigne désormais un K ev de dimension finie n .

4.2.1 Somme directe de sous-espaces stables

Théorème 1 Soient F_1, F_2, \dots, F_p des sous-espaces de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$.

Notons n_1, n_2, \dots, n_p leurs dimensions respectives, $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_p$ des bases de F_1, F_2, \dots, F_p respectivement et $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_p$ la base de E adaptée à la décomposition.

Soit u un endomorphisme de E . Les sous-espaces F_1, F_2, \dots, F_p sont stables par u si et seulement si la matrice de u dans la base \mathcal{B} est une matrice diagonale par blocs n_1, n_2, \dots, n_p , c'est dire qu'il existe des matrices carrés A_1, A_2, \dots, A_p de taille respective n_1, n_2, \dots, n_p telles que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix}$$

Le déterminant de u est alors $\det u = \det A_1 \times \det A_2 \times \cdots \times \det A_p$.

[Ind] Se rapporter au chapitre 3 (matrices diagonales par blocs)

4.2.2 Polynôme caractéristique

Définition 7 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, le polynôme caractéristique de u est $p_u(X) = \det(u - XId_E)$. Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$, le polynôme caractéristique de A est $p_A(X) = \det(A - XI_n)$.

Remarque: On trouve parfois la définition $P_A(X) = \det(XI_n - A)$ qui ne diffère de la définition précédente que par le produit par $(-1)^n$.

Proposition 10 Soit \mathcal{B} une base de E .

$$p_u(X) = \det(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) - XI_n) = p_{\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)}.$$

[Ind] Comment calcule-t-on le déterminant d'un endomorphisme?

Proposition 11 Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

[Ind] Elles représentent un même endomorphisme.

La réciproque est fautive. En effet $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et la matrice nulle $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ possède le même polynôme caractéristique : X^2 .

Exercice 10 Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $p_A = p_{\iota A}$.

Proposition 12 Si la s.e.v. F est stable par l'endomorphisme u , en notant v la restriction de u à F ($v = u|_F$), p_v divise p_u .

[Ind] Chercher une base adaptée.

Exercice 11 Si $E = F \oplus G$ et si F et G sont stables par u , en notant $v = u|_F$ et $w = u|_G$, on a $p_u = p_v p_w$.

Calcul du polynôme caractéristique

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Notons C_1, C_2, \dots, C_n les colonnes de A et $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ celles de I_n .

$$p_A(X) = \det(C_1 - X\Gamma_1, \dots, C_n - X\Gamma_n).$$

En développant le déterminant et en ordonnant suivant les puissances de X , on trouve que

$$p_A(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \text{Tr}(A) X^{n-1} + \dots - \text{Tr}(\tilde{A}) X + \det A$$

où \tilde{A} est la matrice complémentaire de A (transposée de la matrice des cofacteurs de A).

Proposition 13 Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure dont les éléments diagonaux sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Le polynôme caractéristique de A est : $(\lambda_1 - X) \cdots (\lambda_n - X)$.

[Ind] Calculer...

Exercice 12 Matrice compagnon Soient a_0, \dots, a_{n-1} des scalaires et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Montrer que le polynôme caractéristique de A est

$$p_A(X) = (-1)^n (X^n - a_{n-1} X^{n-1} - \dots - a_0).$$

4.2.3 Polynôme caractéristique et valeurs propres

Proposition 14 λ est une valeur propre de u si et seulement si $p_u(\lambda) = 0$.

[Ind] Qu'indique la nullité d'un déterminant?

Définition 8 Multiplicité d'une valeur propre. L'ordre de λ comme zéro de p_u est appelé multiplicité de λ .

Proposition 15 Soit λ une valeur propre de multiplicité m . On a $\dim E_\lambda \leq m$.

[Ind] Le sous-espace E_λ est stable par u .

Remarque: Si λ est une valeur propre simple de u , on a $\dim E_\lambda = 1$. La réciproque est fautive.

Proposition 16 Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A possède n valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (comptées avec leur ordre de multiplicité) et

$$\begin{aligned} \text{Tr } A &= \lambda_1 + \dots + \lambda_n \\ \det A &= \lambda_1 \cdots \lambda_n \end{aligned}$$

[Ind] Appliquer le théorème de D'Alembert et les relations coefficients-racines

Théorème 2 (Théorème de Cayley Hamilton) Toute matrice A de $\mathcal{M}_n(K)$ annule son polynôme caractéristique, autrement dit le polynôme caractéristique est annulateur de A .

[Ind] Admis.

Exercice 13 Soit $\alpha \in K$. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \cdots & \alpha \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha & \cdots & \alpha \end{pmatrix}$$

4.2.4 Compléments sur les polynômes

Définition 9 On appelle idéal de $K[X]$, un s.e.v I de $K[X]$ qui vérifie:

$$\forall P \in I \quad \forall Q \in K[X] \quad PQ \in I$$

Exemple fondamental: Si P_0 est un élément de $K[X]$, l'ensemble $P_0K[X]$ des multiples de P_0 est un idéal de $K[X]$.

Proposition 17 Soit F une partie de $K[X]$ non vide et non réduite à $\{0\}$. Il existe un polynôme P non nul dans F vérifiant

$$\forall Q \in F \quad Q \neq 0 \implies d^\circ P \leq d^\circ Q$$

[Ind] Considérer l'ensemble des degrés des polynômes non nuls appartenant à F .

Proposition 18 Soit I un idéal de $K[X]$, il existe $P_0 \in K[X]$ tel que $I = P_0K[X]$.

[Ind] Appliquer la proposition précédente. Effectuer la division euclidienne d'un polynôme appartenant à I par le polynôme P_0 trouvé.

Remarque: Avec les notations de la proposition précédente, il existe un unique polynôme Π_0 qui vérifie les conditions suivantes: $I = \Pi_0K[X]$, $\Pi_0 = 0$ si $I = \{0\}$ et le coefficient dominant de Π_0 est égal à 1 si $I \neq \{0\}$. Un tel polynôme est appelé le générateur de l'idéal.

Exercice 14 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E Montrer que l'ensemble des polynômes P qui vérifie $P(u) = 0$ est un idéal.

Proposition 19 Soient P et Q deux éléments de $K[X]$, P divise Q , c'est à dire Q est un multiple de P si et seulement si $QK[X] \subset PK[X]$.

[Ind] Que signifie P divise Q ?

Proposition 20 Une intersection d'une famille quelconque (non vide) d'idéaux de $K[X]$ est un idéal.

[Ind] Appliquer la définition.

Proposition 21 Soient P_1, \dots, P_n des éléments de $K[X]$. Il existe un polynôme M tel que l'ensemble des multiples communs aux polynômes P_1, \dots, P_n soit égal à l'idéal $MK[X]$. Le générateur de cet idéal est appelé plus petit commun multiple (PPCM) de la famille P_1, \dots, P_n

[Ind] Prendre l'intersection des idéaux $P_1K[X], \dots, P_nK[X]$.

Proposition 22 Soit A une partie de $K[X]$, il existe un plus petit idéal (au sens de l'inclusion) contenant A et appelé idéal engendré par A .

[Ind] Prendre l'intersection des idéaux qui contiennent A .

Proposition 23 Soient P et Q deux éléments de $K[X]$. L'idéal engendré par la partie $\{P, Q\}$ est égal à $PK[X] + QK[X]$ et son générateur D est appelé plus grand commun diviseur (PGCD) de P et Q : tout diviseur commun à P et Q est un diviseur de D

[Ind] Traduire la divisibilité en termes d'idéaux.

Définition 10 Deux polynômes sont appelés polynômes premiers entre eux si et seulement si leur PGCD est égal à 1: ils n'ont pas d'autres diviseurs communs que les constantes.

Théorème 3 Identité de Bezout Soient P et Q deux éléments de $K[X]$ et D leur PGCD. Il existe deux polynômes U et V tels que $UP + VQ = D$ et on a l'équivalence

$$D = 1 \iff \exists U, V \in K[X] \quad UP + VQ = 1$$

[Ind] Comment s'écrivent les éléments de l'idéal engendré par P et Q ?

Exercice 15 Soient A et B deux polynômes premiers entre eux. Montrer que, pour tout polynôme C , la propriété A divise le produit BC entraîne que A divise C (théorème de Gauss).

Exercice 16 Si un polynôme A est premier avec des polynômes B_1, \dots, B_n , alors il est premier avec le produit $B_1 \cdots B_n$.

Exercice 17 Soient α et β deux scalaires distincts. Montrer que, pour tout entier n et m , les polynômes $(X - \alpha)^n$ et $(X - \beta)^m$ sont premiers entre eux.

Exercice 18 En s'appuyant sur le théorème de décomposition de Lagrange, trouver une méthode pour découvrir le PGCD et le PPCM de deux polynômes à coefficients complexes puis ceux de deux polynômes à coefficients réels.

4.2.5 Théorème de décomposition des noyaux

Ce paragraphe est hors programme, nous utiliserons ces résultats pour la démonstration du théorème de diagonalisation.

Théorème 4 Théorème de décomposition des noyaux. Soit u un endomorphisme de E et P, Q deux polynômes à coefficients dans K .

a) Si D est le P.G.C.D. de P et Q ,

$$\text{Ker } D(u) = \text{Ker } P(u) \cap \text{Ker } Q(u)$$

b) Si P et Q sont premiers entre eux, alors

$$\text{Ker}(PQ)(u) = \text{Ker } P(u) \oplus \text{Ker } Q(u).$$

[Ind] Travailler par double inclusion et utiliser l'identité de Bezout: il existe deux polynômes A et B tels que $D(u) = A(u) \circ P(u) + B(u) \circ Q(u)$.

Proposition 24 Généralisation du théorème sur la décomposition des noyaux. Soit u un endomorphisme de E . Si P_1, P_2, \dots, P_n sont des polynômes à coefficients dans K premiers entre eux deux à deux,

$$\text{Ker}(P_1 \cdots P_n)(u) = \bigoplus_{k=1}^n \text{Ker } P_k(u).$$

[Ind] Faire une démonstration par récurrence.

Exercice 19 Retrouver, à l'aide du théorème sur la décomposition des noyaux, les propriétés suivantes:

a) Si p est un projecteur, $E = \text{Ker } p \oplus \text{Ker}(Id_E - p)$.

b) Si s est une symétrie, $E = \text{Ker}(s - Id_E) \oplus \text{Ker}(s + Id_E)$.

Revenons maintenant, pour un endomorphisme donné u , à notre morphisme $K[X] \rightarrow \mathcal{L}(E)$ qui à un polynôme P associe l'endomorphisme $P(u)$. Son noyau est donc un idéal de $K[X]$ et donc est principal. Si cet idéal n'est pas réduit à $\{0\}$, il existe un polynôme unitaire unique appelé polynôme minimal de u , notons le A tel que $A(u) = 0$ et si P est un polynôme tel que $P(u) = 0$ alors P est multiple de A . Enfin pour l'image c'est à dire l'ensemble des $P(u)$ où P décrit $K[X]$. Soit un tel élément $P(u)$, divisons P par A on obtient $P = QA + R$ avec $\deg R < \deg A$. Mais alors $P(u) = Q(u) \circ A(u) + R(u) = R(u)$ puisque $A(u) = 0$. Ainsi l'image est formé des éléments

$R(u)$ où R est un polynôme de degré strictement inférieur à $\deg R$. En temps que sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ il est de dimension $\deg A$.

Définition 11 Soit u un endomorphisme de E , on appelle polynôme annulateur de u tout polynôme P tel que $P(u) = 0$. L'ensemble formé des polynômes annulateurs forme un idéal de $K[X]$. Si cet idéal n'est pas réduit à $\{0\}$, tout générateur de cet idéal est appelé **polynôme minimal**, M . Dans l'application $K[X] \rightarrow \mathcal{L}(E)$ qui à un polynôme P associe l'endomorphisme $P(u)$ le noyau est l'idéal annulateur et l'image est de dimension finie $\deg M$.

Remarque: Si l'espace vectoriel E est de dimension finie alors l'idéal annulateur n'est jamais réduit à $\{0\}$. En effet dans ce cas $\dim \mathcal{L}(E)$ est n^2 si $\dim E = n$ et les éléments $i, u, u^2, \dots, u^{n^2}$

sont donc liés il existe donc une combinaison linéaire non triviale $\sum_{k=1}^{n^2} a_k u^k = 0$. Il existe donc un polynôme Q de degré inférieur à n^2 tel que $Q(u) = 0$.

4.2.6 Application de la décomposition des noyaux

Equations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants

Soient a_0, \dots, a_{p-1} des complexes. Cherchons les solutions définies sur \mathbb{R} de l'équation différentielle :

$$y^{(p)} + a_{p-1}y^{(p-1)} + \dots + a_0y = 0.$$

Proposition 25 Soit P le polynôme $X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_0$ et r_1, \dots, r_n les racines distinctes de P de multiplicité m_1, \dots, m_n . L'ensemble S des solutions de l'équation

$$y^{(p)} + a_{p-1}y^{(p-1)} + \dots + a_0y = 0.$$

est un s.e.v. de $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. En notant D l'opérateur de dérivation de E , on a

$$S = \bigoplus_{k=1}^n \text{Ker}(D - r_k \text{Id})^{m_k}.$$

[Ind] Le polynôme P s'écrit $P(X) = \prod_{k=1}^n (X - r_k)^{m_k}$ et les polynômes $(X - r_1)^{m_1}, \dots, (X - r_n)^{m_n}$ sont premiers entre eux deux à deux.

Proposition 26 Soit r un nombre complexe et notons $S_r^{(m)}$ le noyau de l'endomorphisme $(D - r \text{Id})^m$. On a

$$S_r^{(m)} = e_r S_0^{(m)} = e_r \mathbb{C}_{p-1}[X]$$

en notant e_r la fonction qui, au réel x , associe e^{rx} .

[Ind] Si y appartient à $S_r^{(m)}$, appliquer la formule de Leibniz à l'expression $D^m(ye^{-rx})$.

Exercice 20 Trouver l'ensemble des solutions définies sur \mathbb{R} de l'équation différentielle

$$y^{(3)} - 4y'' + 5y' - 2y = 0.$$

4.2.7 Endomorphismes diagonalisables

Théorème 5 Caractérisation des endomorphismes diagonalisables. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes:

- 1) Il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u .
- 2) Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.
- 3) $\bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i} = E$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ désignent les valeurs propres distinctes de u .

4) Le polynôme caractéristique de u est scindé (i.e. la somme des multiplicités des valeurs propres de u est égale à n) et pour toute valeur propre λ de u , la multiplicité de λ est égale à la dimension de E_λ .

5) u annule un polynôme scindé dont toutes les racines sont simples.

On dit alors que u est diagonalisable.

[Ind] Montrer que (1) \implies (3) \implies (4) \implies (1). Montrer que (1) \implies (5).

Pour montrer que (5) entraîne (1), on peut utiliser les polynômes d'interpolation élémentaires de Lagrange: si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des scalaires distincts tels que $P = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_p)$ annule u , on pose, pour tout $i \in [1, p]$, $L_i(X) = \frac{P(X)}{(X - \lambda_i)P'(\lambda_i)}$. Montrer que $L_1 + \cdots + L_p = 1$ puis que, pour tout $x \in E$ et tout $i \in [1, p]$, $L_i(u)(x) \in E_{\lambda_i}$. Ou bien utiliser le théorème de décomposition des noyaux

Proposition 27 Soit u un endomorphisme diagonalisable et F un sous-espace stable par u . La restriction v de u à F est diagonalisable.

[Ind] Utiliser la caractérisation à l'aide des polynômes scindés à racines simples.

Exercice 21 Soit u un endomorphisme diagonalisable. Quelle est la nature des sous-espaces stables par u .

Exercice 22 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable et $P \in K[X]$. Montrer que $P(u)$ est diagonalisable et trouver ses valeurs propres.

Exercice 23 Soit u un endomorphisme diagonalisable, montrer que tout s.e.v. stable par u possède un supplémentaire stable par u .

Exercice 24 Soit a_1, \dots, a_n des complexes et

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

Montrer que A est diagonalisable et en déduire son déterminant.

Proposition 28 Si la dimension de E est n et si u admet n valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable.

[Ind] Montrer que E est somme des sous-espaces propres.

Exercice 25 Soit u un endomorphisme de E possédant n valeurs propres distinctes. Montrer que le commutant de u : $C(u) = \{v \in \mathcal{L}(E), v \circ u = u \circ v\}$ est égal à $K[u]$.

4.3 Trigonalisation

4.3.1 Cas général

Théorème 6 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes:

- 1) Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure
- 2) Le polynôme caractéristique de u est scindé.

On dit alors que u est trigonalisable.

[Ind] Effectuer une démonstration par récurrence sur la dimension de E .

Proposition 29 Tout endomorphisme d'un \mathbb{C} -ev est trigonalisable.

[Ind] Appliquer le théorème de D'Alembert.

Remarque: Le théorème ne donne pas une méthode performante pour réduire un endomorphisme. Cependant, l'existence de ce théorème permet de résoudre des problèmes en relation avec des manipulations de valeurs propres.

Exercice 26 Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{C} -ev E de dimension n dont les valeurs propres sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Trouver le polynôme caractéristique de $P(u)$ où $P \in \mathbb{C}[X]$. La propriété est-elle encore vraie lorsque le corps de base est \mathbb{R} ?

Exercice 27 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \text{Trace } A^k = \sum_{p=1}^n \lambda_p^k.$$

En déduire qu'une matrice carrée complexe de taille n est nilpotente si et seulement si $\text{Trace } A^k = 0$ pour tout $k \in [1, n]$.

4.3.2 Cas particulier: dimension 2 ou 3

Donnons une méthode pratique de mise sous forme triangulaire d'une matrice A carrée de taille 2 ou de taille 3 non diagonalisable.

Notons u l'endomorphisme associé à A dans la base canonique de E ($E = \mathbb{C}^2$ ou $E = \mathbb{C}^3$).

Le premier cas est aisé à résoudre. La matrice possède une valeur propre double et en prenant une base de \mathbb{C}^2 dont le premier vecteur est un vecteur propre de la matrice, la matrice dans cette base de l'endomorphisme u est triangulaire supérieure.

Examinons le cas de la dimension 3.

a) A possède 2 valeurs propres distinctes λ et μ de multiplicité respective 1 et 2.

On prend alors une base dont les deux premiers vecteurs sont respectivement un vecteur propre relatif à la valeur propre λ et un vecteur propre relatif à la valeur propre μ . Dans une telle base, la matrice de u est de la forme:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & * \\ 0 & \mu & * \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

b) A possède une valeur propre μ de multiplicité 3.

Si $\dim E_\mu = 2$, on prend une base de \mathbb{C}^3 dont les deux premiers vecteurs forment une base de E_μ . Dans une telle base, la matrice de u est de la forme:

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 & * \\ 0 & \mu & * \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

Le cas où $\dim E_\mu = 1$ est le plus difficile à traiter. Notons $v = u - \mu \text{Id}$. On pourra remarquer à chaque fois, mais c'est une conséquence du théorème de Cayley-Hamilton, que $v^3 = 0$.

Montrons tout d'abord que $v^2 \neq 0$: si $v^2 = 0$, alors $\text{Im } v \subset \ker v$ ce qui implique $\dim \text{Im } v \leq 1$, en contradiction avec le théorème du rang.

Puisque $v^2 \neq 0$, il existe $e \in E$ tel que $v^2(e) \neq 0$.

La famille $\{e, v(e), v^2(e)\}$ est alors une famille libre de E . Soient α, β et γ des complexes tels que

$$\alpha e + \beta v(e) + \gamma v^2(e) = 0.$$

En appliquant v et v^2 à cette égalité, on trouve alors le système

$$\begin{cases} \alpha e + \beta v(e) + \gamma v^2(e) & = 0 \\ \alpha v(e) + \beta v^2(e) & = 0 \\ \alpha v^2(e) & = 0 \end{cases}$$

que l'on peut alors résoudre, on en déduit progressivement $\alpha = 0$, puis $\beta = 0$ et $\gamma = 0$.

Notons $e_1 = v^2(e)$, $e_2 = v(e)$ et $e_3 = e$.

On a $v(e_1) = v^3(e) = 0$ donc $u(e_1) = \mu e_1$, $v(e_2) = v^2(e) = e_1$ et ainsi $u(e_2) = e_1 + \mu e_2$ et enfin de l'égalité $v(e_3) = e_2$, on déduit $u(e_3) = e_2 + \mu e_2$.

Dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$, la matrice de u est égale à

$$\begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

4.4 Applications de la réduction

4.4.1 Suites définies par une relation de récurrence linéaire à coefficients constants

Soient a_0, \dots, a_{p-1} des complexes. Cherchons les suites (u_n) qui vérifient la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \dots + a_0u_n.$$

Proposition 30 *L'ensemble S des solutions est un s.e.v. de $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de dimension p .*

[Ind] L'application φ définie de S dans \mathbb{C}^p par $\varphi((u_n)) = (u_0, \dots, u_{p-1})$ est un isomorphisme.

Notons T l'endomorphisme de E qui à une suite (u_n) associe la suite (v_n) définie par $v_n = u_{n+1}$ pour tout entier n .

Résoudre l'équation revient donc à chercher le noyau de l'endomorphisme $P(T)$ où P est le polynôme $X^p - a_{p-1}X^{p-1} - \dots - a_0$.

En appliquant le théorème de D'Alembert sur les racines d'un polynôme, on trouve que P peut s'écrire sous la forme

$$P(X) = \prod_{i=1}^q (X - r_i)^{m_i}$$

où r_1, \dots, r_q sont des complexes distincts et m_1, \dots, m_q des entiers naturels non nuls.

Déterminons, pour un complexe r et un entier m le noyau S_r de l'endomorphisme $(T - r\text{Id})^m$.

Si $r = 0$, on trouve l'ensemble des suites nulles à partir du rang m .

Si $r \neq 0$, on remarque que la suite v définie pour tout n par $v_n = r^n$ appartient à S_r .

Soit u une suite, on peut construire une suite w en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{u_n}{r^n}$. On a alors, pour tout entier naturel n

$$\begin{aligned} (T - r\text{Id})^m(u)_n &= (T - r\text{Id})^m(vw)_n \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} T^k(vw)_n (-r)^{m-k} \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} T^k(w)_n r^{n+k} (-r)^{m-k} \\ &= r^{m+n} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} T^k(w)_n (-1)^{m-k} \\ &= r^{m+n} (T - \text{Id})^m(w)_n \end{aligned}$$

ainsi $S_r = v.S_1$. Notons $\Delta = T - \text{Id}$

Proposition 31 *Ker Δ^m est le sous espace vectoriel de E engendré par la famille libre de suites $u^{(0)}, \dots, u^{(m-1)}$ où la suite $u^{(k)}$ est définie pour tout n par $u_n^{(k)} = \binom{n}{k}$.*

[Ind] La famille de polynômes (P_k) où $P_0 = 1$ et où P_k est défini, pour tout entier $k > 1$ par

$$P_k(X) = \binom{X}{k} = \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$$

forme une base de $\mathbb{C}[X]$.

Procéder par récurrence sur l'entier m .

Proposition 32 $S = \bigoplus_{i=1}^q \text{Ker}(T - r_i Id)^{m_i}$.

[Ind] Vérifier que la somme des noyaux est directe et calculer la dimension de cette somme.

En résumé, on a

Théorème 7 Soient a_0, \dots, a_{p-1} des complexes. L'ensemble S des suites (u_n) qui vérifient la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \cdots + a_0u_n$$

est un s.e.v. de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de dimension p .

On appelle $P(X) = X^p - (a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_0)$ le polynôme caractéristique de cette relation et si r_1, \dots, r_q sont les racines de P d'ordre respectifs m_1, \dots, m_q , une base de S est constituée de la famille $(u_{i,j})_{\substack{i \in [1,q] \\ j \in [0, m_i-1]}}$, ces suites étant définies par

$$\forall i \in [1,q] \quad \forall j \in [1, m_i - 1] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (u_{i,j})_n = n^j r_i^n$$

[Ind] Regrouper les informations déjà démontrées

Exercice 28 Trouver l'ensemble des suites (u_n) vérifiant, pour tout entier n :

$$u_{n+3} - 4u_{n+2} + 5u_{n+1} - 2u_n = 0$$

4.4.2 Systèmes linéaires d'ordre 1 à coefficients constants

Théorème de Cauchy-Lipschitz (cas linéaire)

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie $n > 0$ et u un endomorphisme de E . On appelle solution de l'équation différentielle $\vec{X}' = u(\vec{X})$ une fonction vectorielle \vec{X} dérivable définie sur un intervalle ouvert non vide I de \mathbb{R} à valeurs dans E vérifiant: pour tout $t \in I$, $\vec{X}'(t) = u(\vec{X}(t))$.

En choisissant une base \mathcal{B} de E , on transforme l'équation différentielle précédente en un système d'équations différentielles où les fonctions inconnues sont les composantes (x_1, \dots, x_n) de la fonction vectorielle \vec{X} , en notant A la matrice de u dans la base \mathcal{B} , on est amené à étudier l'équation différentielle $X' = AX$ dont une solution est une fonction X dérivable définie sur un intervalle ouvert non vide I de \mathbb{R} à valeurs dans K^n et vérifiant: pour tout $t \in I$, $X'(t) = AX(t)$.

Remarque: Réciproquement, lorsqu'on étudie un système d'équations $X' = AX$, on peut le transformer en un problème vectoriel en introduisant l'endomorphisme \tilde{A} canoniquement associé à la matrice A .

Théorème 8 Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie $n > 0$ et u un endomorphisme de E . Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et tout $\vec{X}_0 \in E$, il existe une unique solution \vec{X} définie sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $\vec{X}' = u(\vec{X})$ vérifiant $\vec{X}(t_0) = \vec{X}_0$.

[Ind] Admis

A partir de ce théorème, on peut déterminer la structure des solutions définies sur \mathbb{R} de ce type d'équation:

Théorème 9 Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie $n > 0$ et u un endomorphisme de E . L'ensemble \mathcal{S} des solutions définies sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $\vec{X}' = u(\vec{X})$ est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}, E)$ de dimension n .

Si t_0 est un réel et $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ est une base de E , la famille $\{\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_n\}$ des solutions définies sur \mathbb{R} et vérifiant, pour tout $i \in [1, n]$, $\vec{X}_i(t_0) = \vec{e}_i$ est une base de \mathcal{S} .

Soit $\{\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_n\}$ une base de \mathcal{S} . Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, la famille $\{\vec{X}_1(t_0), \dots, \vec{X}_n(t_0)\}$ est une base de K^n .

[Ind] Appliquer les résultats de ce chapitre.

Exercice 29 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Déterminer une base de l'ensemble des solutions définies sur \mathbb{R} de l'équation $X' = AX$.

Cas où u est diagonalisable

Proposition 33 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable et soit $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ une base de E constituée de vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Si, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et pour $i \in [1, n]$, on note α_i la fonction définie sur \mathbb{R} par $\alpha_i(t) = e^{\lambda_i(t-t_0)}$ alors la famille $\alpha_1 \vec{e}_1, \dots, \alpha_n \vec{e}_n$ est une base de l'ensemble des solutions définies sur \mathbb{R} de l'équation $\vec{X}' = u(\vec{X})$.

[Ind] Faire un changement de base.

Lorsque u est un endomorphisme d'un espace vectoriel réel dont la matrice A dans une base \mathcal{B} de E est une matrice réelle, diagonalisable dans \mathbb{C} , les valeurs propres complexes non réelles de A sont associées deux à deux par conjugaison, et si λ est une de ces valeurs propres et E_λ le sous-espace propre (de \mathbb{C}^n) associé, alors $E_{\bar{\lambda}} = \{\bar{x}, x \in E_\lambda\}$. On remarque alors que si $\{f_1, \dots, f_m\}$ est une base de E_λ , alors la famille $\{\Re(f_1), \text{Im}(f_1), \dots, \Re(f_m), \text{Im}(f_m)\}$ est une base de $E_\lambda \oplus E_{\bar{\lambda}}$ constituée de vecteurs réels. Notons r_1, \dots, r_p les valeurs propres réelles distinctes

de A d'ordre n_1, \dots, n_p et pour tout $k \in [1, p]$, $\{e_{k,1}, \dots, e_{k,n_k}\}$ une base de vecteurs réels du sous-espace vectoriel E_{r_k} ; notons les paires de valeurs propres complexes non réelles distinctes de A $\{\lambda_1, \bar{\lambda}_1\}, \dots, \{\lambda_q, \bar{\lambda}_q\}$ et pour $l \in [1, q]$, $\{f_{l,1}, \dots, f_{l,m_l}\}$ une base de vecteurs (complexes) du sous-espace vectoriel E_{λ_l} .

Une base de solutions réelles de l'équation $X' = AX$ est alors, pour $t_0 \in \mathbb{R}$:

$$(t \mapsto e^{r_k(t-t_0)} e_{k,k'})_{k \in [1, p], k' \in [1, n_k]},$$

$$(t \mapsto \Re(e^{\lambda_l(t-t_0)} f_{l,l'}))_{l \in [1, q], l' \in [1, m_l]},$$

$$(t \mapsto \text{Im}(e^{\lambda_l(t-t_0)} f_{l,l'}))_{l \in [1, q], l' \in [1, m_l]}$$

Ces fonctions vectorielles colonnes sont alors les composantes dans la base \mathcal{B} de fonctions vectorielles à valeurs dans E formant une base de \mathcal{S}

Exercice 30 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$. Déterminer une base de solutions réelles de l'équation

différentielle $X' = AX$. Quelle interprétation géométrique peut-on donner à ce système d'équations différentielles?

Exercice 31 Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et $\vec{\omega}$ un vecteur non nul de E . Déterminer une base de solutions de l'équation différentielle $\vec{X}' = \vec{\omega} \wedge \vec{X}$.

4.5 Exercices

Exercice 32 Soit E un espace vectoriel de dimension n , u un endomorphisme de E diagonalisable et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ ses valeurs propres distinctes. On note I l'identité de E .

On considère la suite $(L_i)_{1 \leq i \leq p}$ des polynômes d'interpolation de Lagrange définie par:

$$\forall i \in \{1, \dots, p\} \quad L_i(X) = \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^p (X - \alpha_j)}{\prod_{j=1, j \neq i}^p (\alpha_i - \alpha_j)}$$

Pour $i \in \{1, \dots, p\}$, on pose: $\Pi_i = L_i(u)$. Montrer que $(\Pi_i)_{i \in [1, p]}$ forme une famille de projecteurs associés et déterminer leurs noyaux et leurs images.

En déduire que les projections sur les s.e.v. propres sont des polynômes en u .

Exercice 33 Montrer que l'inverse d'un automorphisme diagonalisable est diagonalisable. Quel est son polynôme caractéristique?

Exercice 34 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et φ l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ défini, pour $v \in \mathcal{L}(E)$ par $\varphi(v) = u \circ v$. Montrer que φ est diagonalisable si et seulement si u est l'est également.

Exercice 35 Soit $A = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} a & b \operatorname{sh} a \\ \frac{1}{b} \operatorname{sh} a & \operatorname{ch} a \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable. Calculer A^n pour $n \in \mathbf{Z}$

Exercice 36 Déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables, et les diagonaliser, le cas échéant.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 37 Diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$ ($a \in \mathbb{C}^*$)

Exercice 38 Calculer la puissance $n^{\text{ième}}$ de la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 & 0 \\ -12 & -7 & 0 & 0 \\ 20 & 11 & -6 & -12 \\ -12 & -6 & 6 & 11 \end{pmatrix}$$

Exercice 39 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que si $A^n = I_n$, alors A est diagonalisable.

Exercice 40 Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables tels que $uv = vu$. Montrer qu'il existe une base constituée de vecteurs propres communs à u et v .

Exercice 41 Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les matrices AB et BA ont même polynôme caractéristique.

Exercice 42 Soient a_1, a_2, \dots, a_n des complexes. Calculer:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

Exercice 43 Trouver une matrice triangulaire semblable à

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculer A^n , pour $n \in \mathbf{Z}$

Exercice 44 Trouver les matrices qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$.

Exercice 45 Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Montrer que A n'est pas diagonalisable, mais qu'il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.

Exercice 46 Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

et

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 47 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ et $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par: $a_{ij} = b_j + \delta_{ij}a_i$. Former le polynôme caractéristique de A . Montrer que si, pour tout i , $b_i > 0$ et que a_1, \dots, a_n sont deux à deux distincts, alors A est diagonalisable.

Exercice 48 Résoudre les systèmes:

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = y + z \\ z' = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x + 2y + z \\ y' = 2x + 3y - z \\ z' = 5x + 6y - 7z \end{cases}$$

Exercice 49 Résoudre le système:

$$\begin{cases} x'' + 3y' - 4x + 6y = 0 \\ y'' + x' - 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

4.6 Travaux Dirigés : Réduction

Exercice 50 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ chercher le polynôme caractéristique de A , en déduire les valeurs propres de A . A est-elle diagonalisable? si oui, écrire la matrice de passage P de la base canonique à la base de vecteurs propres, vérifier que $D = P^{-1}AP$.

Même question avec $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (pour B on montrera que l'on pouvait conclure dès la connaissance des valeurs propres.)

Même question avec $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 51 Dans E K -espace vectoriel de dimension finie n on considère des endomorphismes u et v qui ont chacun n valeurs propres dans K distinctes deux à deux. Montrer que :

$$u \circ v = v \circ u \Leftrightarrow u \text{ et } v \text{ ont mêmes vecteurs propres.}$$

Exercice 52 Soit la matrice circulante : $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$ avec $a_i \in \mathbb{C}$.

1°) Montrer que si ω est racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité alors le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \vdots \\ \omega^{n-1} \end{pmatrix}$ est propre.

2°) En déduire le déterminant de cette matrice.

Exercice 53 [Réduction d'une matrice antisymétrique.]

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$ une matrice antisymétrique de $M_3(\mathbb{R})$. On note f l'endomorphisme

ayant pour matrice A dans la base canonique orthonormée de \mathbb{R}^3 .

- 1°) Préciser les valeurs propres réelles ou complexes de A .
- 2°) On suppose a, b, c non tous nuls. Démontrer que $\ker f$ est une droite vectorielle dont on précisera une base Ω . Soit u un vecteur de \mathbb{R}^3 , montrer qu'en choisissant bien Ω , on a $f(u) = u \wedge \Omega$, où \wedge désigne le produit vectoriel.

3°) Donner l'équation du plan orthogonal à Ω , démontrer que ce plan est stable par f . En déduire qu'il existe une base orthonormée (Ω', v, w) dans laquelle la matrice de f a la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix}. \text{ On précisera } \alpha. \text{ Par contre il est inutile d'expliciter la base.}$$

4°) Application : Réduire sous la forme précédente la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ en précisant la matrice de passage.

Exercice 54 Soit E l'ensemble des matrices de la forme $M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a + c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$ où a, b, c

sont des réels.

- 1°) Montrer que E a une structure d'espace vectoriel, en donner la dimension et une base.
- 2°) Calculer le déterminant de $M(a, b, c)$. Discuter suivant a, b, c l'existence d'une matrice inverse.
- 3°) Dans le cas où $M(a, b, c)$ est régulière (inversible), calculer son inverse, $M(a, b, c)$ est-elle inversible dans E ?
- 4°) Montrer que l'on peut obtenir le polynôme caractéristique sans refaire les calculs. En déduire, en fonction de a, b, c les valeurs propres de $M(a, b, c)$.
- 5°) On pose $a = 2, b = \sqrt{2}, c = 1$ et on note A la matrice de E correspondante. Montrer sans calcul que les espaces propres sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 . En déduire la relation $A^2 - 6A + 5I = 0$.
- 6°) Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 6X + 5$. En déduire l'expression de A^n en fonction de A et de la matrice I . (I est la matrice unité)

Exercice 55 Résoudre dans \mathbb{C} :
$$\left\{ \begin{array}{l} (1 + \lambda^2)x_1 + \lambda x_2 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \lambda x_{i-1} + (1 + \lambda^2)x_i + \lambda x_{i+1} = 0 \quad (2 \leq i \leq n-1) \\ \dots\dots\dots \\ \lambda x_{n-1} + (1 + \lambda^2)x_n = 0 \end{array} \right.$$

On pourra poser $\mu = \lambda + \frac{1}{\lambda}$ si $\lambda \neq 0$.

Exercice 56 Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie, $u \in L(E)$, et F un sous-espace de E stable par u .

Montrer que: Si u est diagonalisable ALORS $v = u|_F$ est diagonalisable.

Exercice 57 Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{C} , f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$.

1°) Montrer que tout sous-espace propre pour f est stable par g .

2°) Montrer qu'il existe un vecteur propre non nul commun à f et g .

3°) f et g étant supposés diagonalisables, montrer qu'il existe une base de vecteurs propres communs à f et g .

(2 se démontre par récurrence sur la dimension de E).

Exercice 58 Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension 3 tel que :

$$f^2 \neq 0, f^3 = 0$$

Montrer que l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f est le sous-espace de $L(E)$ engendré par i, f, f^2 .

Exercice 59 Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice ayant toutes ses valeurs propres distinctes. Trouver la dimension et une base de $C(A) = \{M \in M_n(\mathbb{C}); AM = MA\}$.

Exercice 60 Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et $u \in L(E)$ tel que $u^2 = u$. Trouver les sous-espaces de E stables par u .

Exercice 61 Soient f, v, u trois endomorphismes d'un \mathbb{R} -espace vectoriel et (λ, μ) un couple de réels tels que :

$$f = \lambda u + \mu v, f^2 = \lambda^2 u + \mu^2 v, f^3 = \lambda^3 u + \mu^3 v$$

Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 62 Déterminer les puissances et les racines carrées de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 63 Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

Exercice 64 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$.

1°) Trouver trois vecteurs V_1, V_2, V_3 de \mathbb{R}^3 tels que: $AV_1 = -V_1, AV_2 = V_1 - V_2, AV_3 = V_2 - V_3$.

2°) Calculer $A^n, n \in \mathbb{N}$.

3°) Calculer $\exp(xA) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n A^n}{n!}$.

Exercice 65 Trouver une matrice $M \in M_4(\mathbb{C})$ telle que $M^2 = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 66 Déterminer toutes les matrices qui commutent avec: $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 67 Triangulariser la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & -6 \\ 0 & 5 & 0 & 4 \\ -2 & 7 & -1 & 11 \\ 0 & -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 68 Pour quelle valeur de t_0 la matrice $M(t)$ admet-elle la valeur propre 2?

$$M(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ t & 1 & 1 \\ 0 & t+1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres.

Exercice 69 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$.

Déterminer les valeurs propres de A . Préciser une décomposition diagonale de A : $A = P_0 D_0 P_0^{-1}$ (on classera les valeurs propres par ordre de valeurs croissantes et on choisira pour P_0 une matrice dont les vecteurs colonnes ont une première composante égale à 1).

Exercice 70 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I$, montrer que $\det A > 0$.

Exercice 71 Soit $f : \mathbb{C}_n[X] \rightarrow \mathbb{C}_n[X]$ définie par $f(P) = (X^2 - 1)P'(X) - (nX - a)P(X)$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$. Trouver sa matrice dans la base canonique. Déterminer ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

Exercice 72 Les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables?

Exercice 73 Trouver toutes les matrices X telles que $X^2 = \begin{pmatrix} -7 & 5 & -6 \\ -19 & 10 & -12 \\ -13 & 5 & -6 \end{pmatrix}$.

Exercice 74 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ sans racine réelle et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $AP(A) = 0$, montrer que le rang de A est pair. Résoudre $X^3 + X = 0$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

4.7 Démonstrations

Proposition 1 Les deux propriétés sont équivalentes. Montrons la première par récurrence.

La propriété est vraie si $p = 1$.

Supposons la propriété à l'ordre p et soit $\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1}$ des valeurs propres distinctes de l'endomorphisme u . Soient x_1, \dots, x_{p+1} des éléments des sous-espaces propres associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1}$. Supposons que

$$x + 1 + \dots + x_{p+1} = 0,$$

on a donc

$$u(x_1) + \dots + u(x_{p+1}) = 0$$

c'est à dire

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{p+1} x_{p+1} = 0$$

Multiplions la première égalité par λ_{p+1} et retranchons-la à la dernière, on obtient

$$(\lambda_1 - \lambda_{p+1})x_1 + \dots + (\lambda_p - \lambda_{p+1})x_p = 0.$$

Puisque les p premiers sous-espaces propres sont en somme directe, on peut dire que

$$(\lambda_1 - \lambda_{p+1})x_1 = \dots = (\lambda_p - \lambda_{p+1})x_p = 0$$

ce qui implique, toutes les valeurs propres étant distinctes que

$$x_1 = \dots = x_p = 0$$

et donc $x_{p+1} = 0$. Les $p + 1$ sous-espaces propres sont bien en somme directe et on conclut la proposition en appliquant le principe de récurrence.

Proposition 2 L'application Φ_a est linéaire car $\mathcal{L}(E)$ est un algèbre, d'autre part, si u et v sont des endomorphismes de E , $\Phi_a(uv) = auva^{-1} = aua^{-1}ava^{-1} = \Phi_a(u)\Phi_a(v)$, on en conclut que Φ_a est un morphisme d'algèbre. On constate que $\Phi_a \circ \Phi_{a^{-1}} = \Phi_{a^{-1}} \circ \Phi_a = Id_{\mathcal{L}E}$ donc Φ_a est un automorphisme.

Proposition 3 Il suffit de montrer l'égalité entre les sous-espaces vectoriels proposés pour montrer l'égalité des spectres d'après la définition des valeurs propres.

Soit x un élément de E , $x \in \text{Ker}(aua^{-1} - \lambda Id_E)$ équivaut $ua^{-1}(x) = \lambda a^{-1}(x)$ donc équivaut à $a^{-1}(x)$ appartient à $\text{Ker}(u - \lambda Id_E)$ ce qui signifie $x \in a(\text{Ker}(u - \lambda Id_E))$.

Proposition 4 L'application \mathcal{M}_B est un isomorphisme d'algèbre donc, pour tout entier positif n et tout scalaire a_n , $\mathcal{M}_B(a_n u^n) = a_n (\mathcal{M}_B(u))^n = a_n A^n$. On finit la démonstration en utilisant la linéarité de l'application \mathcal{M}_B .

Proposition 5 Soit P et Q deux polynômes, il existe deux suites de scalaires nulles à partir d'un certain rang (a_n) et (b_n) telles que $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ et $Q = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n$.

On a alors, pour tout scalaire λ :

$$\begin{aligned} (P + \lambda Q)(u) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + \lambda b_n) u^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} b_n u^n \\ &= P(u) + \lambda Q(u) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 (P.Q)(u) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) u^n \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n (a_k u^k) \circ (b_{n-k} u^{n-k}) \right) \\
 &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n \right) \circ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n u^n \right) \\
 &= P(u) \circ Q(u)
 \end{aligned}$$

Proposition 6 On a $u(v(\text{Ker } u)) = (u \circ v)(\text{Ker } u) = v(u(\text{Ker } u)) = \{0\}$ donc $\text{Ker } u$ est stable par v . par D'autre part $(v(\text{Im } u)) = v \circ u(E) = u(v(E)) \subset \text{Im } u$.

Proposition 7 Il existe un polynôme R tel que $Q = PR$, on a donc $Q(u) = R(u) \circ P(u)$ et donc $\text{Ker } P(u) \subset \text{Ker } Q(u)$.

Proposition 8 Soit x un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ , on vérifie par récurrence que pour tout entier naturel k : $u^k(x) = \lambda^k x$, puis que P s'écrivant $\sum_{k=0}^n a_k X^k$:

$$P(u)(x) = \sum_{k=0}^n a_k u^k(x) = \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k x = P(\lambda)x$$

Proposition 9 On applique la proposition précédente en remarquant que la seule valeur propre de l'endomorphisme nul est 0

Théorème 1 Un sous-espace F_i de dimension finie est stable par u si et seulement si u laisse stable une base \mathcal{B}_i si et seulement si $u|_{F_i}$ est un endomorphisme si et seulement si la matrice de u dans la base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_p$ est diagonale par blocs.

Proposition 10 Le déterminant d'un endomorphisme est le déterminant de n'importe quelle matrice représentant l'endomorphisme.

Proposition 11 Deux matrices A, B sont semblables si et seulement si il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$ et donc $P_B(X) = \det(B - XI) = \det(P^{-1}AP - XP^{-1}IP) = \det P^{-1}(A - XI)P = \det P^{-1} \det(A - XI) \det P = \det(A - XI) = P_A(X)$.

Proposition 12 Prenons une base \mathcal{B}_1 de F que l'on complète grâce à \mathcal{B}_2 en une base \mathcal{B} de E . La matrice de u dans \mathcal{B} est de la forme: $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de u donc de M est :

$$p_u(X) = \begin{vmatrix} A - XI_F & B \\ 0 & C - XI \end{vmatrix}$$

ce qui donne grâce au déterminant par blocs: $p_u(X) = p_v(X) \times \det(C - XI)$. Donc p_v divise p_u .

Proposition 13 Le polynôme caractéristique est $\begin{vmatrix} \lambda_1 - X & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_2 - X & \ddots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1n} \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n - X \end{vmatrix}$ en développant

le déterminant ou en se souvenant que le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des termes diagonaux on obtient le résultat.

Proposition 14 Un scalaire λ est valeur propre si et seulement si $\ker(u - \lambda id)$ n'est pas réduit à 0 c'est à dire si et seulement si $u - \lambda id$ n'est pas injectif donc pas inversible donc si et seulement si $\det(u - \lambda id) = 0$ c'est à dire si et seulement si λ est racine du polynôme caractéristique.

Proposition 15 Le sous espace propre E_λ est stable par u , donc si v est la restriction de u à E_λ on a p_v divise p_u . Mais v est une homothétie donc $p_v(X) = (\lambda - X)^\alpha$ où α est la dimension de E_λ . Comme p_v divise p_u on a $\alpha \leq m$.

Proposition 16 Dans \mathbb{C} tout polynôme de degré n possède n racines comptées avec leur ordre de multiplicité d'après le théorème de D'Alembert. Nous savons que $P_A(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \text{Tr}(A) X^{n-1} + \dots - \text{Tr}(\tilde{A}) X + \det A = (-1)^n \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$. D'où $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{Tr}(A)$ et $\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det A$.

Théorème 2 Admis.

Proposition 17 Soit \mathcal{D} l'ensemble des degrés des polynômes non nuls appartenant à F . Cet ensemble est une partie non vide de \mathbb{N} , il possède donc un plus petit élément d . On prend alors P appartenant à F de degré d .

Proposition 18 Supposons $I \neq \{0\}$ et P_0 un polynôme appartenant à I de plus bas degré positif d .

Si P appartient à I , on peut effectuer la division euclidienne de P par P_0 , il existe donc deux polynômes Q et R tels que $P = QP_0 + R$, le degré de R étant strictement inférieur à celui de P_0 . Le polynôme $P - QP_0$ appartient à I et son degré est inférieur à d . On en déduit que $R = 0$.

Proposition 19 Si P divise Q , il existe un polynôme R tel que $Q = PR$, on en déduit que tout multiple de Q est un multiple de P . Réciproquement, si tout multiple de Q est un multiple de P , Q lui-même est un multiple de P .

Proposition 20 Une intersection d'une famille non vide d'idéaux $((F_i)_{i \in I})$ est déjà un sous groupe. Soit $P \in \bigcap_{i \in I} F_i$. Pour tout polynôme Q , le polynôme PQ appartient à F_i pour tout $i \in I$ car P appartient à l'idéal F_i , ainsi QP appartient à l'intersection de la famille qui est donc un idéal.

Proposition 21 Un multiple commun aux polynômes P_1, \dots, P_n appartient à $\bigcap_{i=1}^n P_i K[X]$ qui est un idéal. Ainsi, le générateur de cet idéal est un polynôme qui divise tout multiple commun à la famille P_1, \dots, P_n .

Proposition 22 L'ensemble des idéaux contenant A n'est pas vide car $K[X]$ est un idéal. L'intersection de tous les idéaux contenant A est donc un idéal et est le plus petit idéal contenant A .

Proposition 23 On remarque que tout idéal contenant P et Q contient alors l'ensemble $I = PK[X] + QK[X]$. Comme on vérifie aisément que ce dernier ensemble est un idéal, c'est donc l'idéal engendré par P et Q . Tout diviseur commun R à P et Q est tel que P et Q appartiennent à $RK[X]$, ainsi $I \subset RK[X]$ et le générateur D de I est donc un multiple de R .

Théorème 3 Le PGCD de P et Q appartient à l'idéal engendré par P et Q qui est égal à $PK[X] + QK[X]$ et donc il existe deux polynômes U et V tels que $UP + VQ = 1$.

S'il existe deux polynômes U et V tel que $UP + VQ = 1$ alors 1 appartient à l'idéal I engendré par P et Q et donc $1K[X] = K[X] \subset I$. On en déduit que 1 est le générateur de I , les polynômes P et Q sont donc premiers entre eux.

Théorème 4 a) Le polynôme D divise P et Q donc $\text{Ker } D(u)$ est inclus dans $\text{Ker } P(u)$ et dans $\text{Ker } Q(u)$ ainsi $\text{Ker } D(u) \subset \text{Ker } P(u) \cap \text{Ker } Q(u)$. Puisqu'il existe deux polynômes A et B tel que $D = AP + BQ$, tout vecteur annulant $P(u)$ et $Q(u)$ annule $D(u) = A(u) \circ P(u) + B(u) \circ Q(u)$, on en conclut que $\text{Ker } P(u) \cap \text{Ker } Q(u) \subset \text{Ker } D(u)$.

b) Les polynômes P et Q divisent PQ donc les noyaux de $P(u)$ et $Q(u)$ sont contenus dans le noyau de $PQ(u)$, ainsi $\text{Ker } P(u) + \text{Ker } Q(u) \subset \text{Ker}(PQ)(u)$.

Puisque P et Q sont premiers entre eux, il existe deux polynômes A et B tels que $\text{Id}_E = A(u) \circ P(u) + B(u) \circ Q(u)$.

Soit $x \in \text{Ker}(PQ)(u)$, on a donc $x = A(u) \circ P(u)(x) + B(u) \circ Q(u)(x)$, posons $y = A(u) \circ P(u)(x)$ et $z = B(u) \circ Q(u)(x)$.

On a $P(u)(z) = P(u)(B(u) \circ Q(u)(x)) = B(u) \circ (PQ)(u)(x) = 0$ et $Q(u)(y) = A(u)(A(u) \circ P(u)(x)) = A(u) \circ (PQ)(u)(x) = 0$, ainsi y appartient à $\text{Ker } Q(u)$ et z appartient à $\text{Ker } P(u)$, ce qui entraîne $x \in \text{Ker } P(u) + \text{Ker } Q(u)$.

On a donc démontré finalement que $\text{Ker}(PQ)(u) = \text{Ker } P(u) + \text{Ker } Q(u)$.

Reste à montrer que la somme est directe, ce qui se vérifie en remarquant que $\text{Ker } P(u) \cap \text{Ker } Q(u) = \text{Ker } Id_E = \{0\}$ car le PGCD de P et Q est égal à 1.

Proposition 24 La propriété est vraie pour $n = 2$. Supposons-la vraie pour l'entier $n \geq 2$. Soient P_1, \dots, P_n, P_{n+1} des polynômes premiers entre eux deux à deux. P_{n+1} étant premier avec tous les polynômes P_1, \dots, P_n , il est premier avec le produit $P_1 \cdots P_n$, ainsi $\text{Ker}(P_1 \cdots P_n)P_{n+1}(u) = \text{Ker}(P_1 \cdots P_n)(u) \oplus \text{Ker } P_{n+1}(u)$ et puisque $\text{Ker}(P_1 \cdots P_n)(u) = \text{Ker } P_1(u) \oplus \cdots \oplus \text{Ker } P_n(u)$, on a bien $\text{Ker}(P_1 \cdots P_n P_{n+1})(u) = \bigoplus_{k=1}^{n+1} \text{Ker } P_k(u)$. La propriété est donc vraie pour l'entier $n + 1$, ce qui permet de conclure cette démonstration par récurrence.

Proposition 25 L'ensemble S étant le noyau de $P(D)$, on en déduit que S est bien un s.e.v. de E et puisque les polynômes $(X - r_1)^{m_1}, \dots, (X - r_n)^{m_n}$ sont premiers entre eux deux à deux, que $S = \bigoplus_{k=1}^n \text{Ker}(D - r_k Id)^{m_k}$.

Proposition 26 Soit y appartenant à E , on a

$$\begin{aligned} D^m(ye^{-rx}) &= \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} y^{(k)} (-r)^{m-k} e^{-rx} \\ &= e^{-rx} (D - rId)^m(y) \end{aligned}$$

Ainsi, puisque, pour tout réel x , $e^{-rx} \neq 0$, les assertions $ye^{-r\cdot}$ appartient à $S_0^{(m)}$ et y appartient à $S_r^{(m)}$ sont équivalentes.

On termine alors la démonstration en remarquant que le noyau $S_0^{(m)}$ de D^m est bien l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à $m - 1$.

Théorème 5 Il existe une base propre \iff Il existe une base \mathcal{B} telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale \iff Il existe $P \in GL_n(K)$ telle que $P^{-1}AP$ est diagonale où A est la matrice de u dans une base quelconque (i.e. La matrice est semblable à une matrice diagonale) $\iff E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ avec chaque F_i est stable par u et pour tout i la restriction de u à F_i est une homothétie de rapport λ_i . En effet Si on a une telle décomposition une base adaptée est une base propre. Si on a une base

propre, en rangeant cette base par les différentes valeurs propres cela donne $\bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i} = E \iff$ Le

polynôme caractéristique est scindé et $\forall i \in [1..p] : \dim E_{\lambda_i} = \mu_i$ où μ_i est l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i et $\text{Sp}(u) = \lambda_1, \dots, \lambda_p$. S'il en est ainsi alors $\dim \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^p \mu_i = n$

et donc nous avons la condition précédente. Pour la partie directe on montre la contraposée :

s'il existe i_0 tel que $\dim E_{\lambda_{i_0}} < \mu_{i_0}$ alors $\dim \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i} < n \iff u$ annule un polynôme scindé

à racines simples. en effet S'il en est ainsi soit $P(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_p)$ alors les $(X - \lambda_i)$ étant premiers le théorème de décomposition des noyaux donne $\ker P(u) = E =$

$\bigoplus_{i=1}^p \ker(u - \lambda_i Id)$ décomposition de E en sous espace stables sur lesquels u est une homothétie. Si

u est diagonalisable soit $M(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_p)$ et montrons que ce polynôme est

annulateur. Écrivons pour $x \in E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}$ on a $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_p$ et donc $u(x_i) = \lambda_i x_i$. Ainsi

$$M(u)(x) = (u - \lambda_1 id) \circ (u - \lambda_2 id) \circ \dots \circ (u - \lambda_p id)(x_1 + \dots + x_p) = \sum_{i=1}^p \prod_{j \neq i} (u - \lambda_j id) \circ (u - \lambda_i id)(x_i) = 0.$$

Proposition 27 Si u est diagonalisable alors il existe un polynôme M scindé à racines simples qui annule l'endomorphisme c'est à dire $\forall x \in E : M(u)(x) = 0$ on aura donc aussi $\forall x \in F : M(u)(x) = M(v)(x) = 0$ donc v est diagonalisable.

Proposition 28 Si les valeurs propres sont simples alors $1 \leq \dim E_{\lambda_i} \leq 1$ donc $\dim E_{\lambda_i} = 1$ et donc E est somme directe des sous-espaces propres.

Théorème 6 Si $\dim E = 1$ le résultat est vrai car u est alors une homothétie, u est même diagonal. Supposons que tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à p dont le polynôme caractéristique est scindé soit triangularisable. Donnons nous un endomorphisme d'un espace vectoriel de de dimension $p + 1$ à polynôme caractéristique scindé. u possède donc au moins un vecteur propre ε_1 , prenons un hyperplan H supplémentaire de $K\varepsilon_1$ et

$\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{p+1}$ une base de cet hyperplan. La matrice de u dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} \lambda & b_2 & \dots & b_n \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Soit l'endomorphisme v de H de matrice B . On a $p_u(X) = (\lambda - X)p_v(X)$ ce qui prouve que v a un polynôme caractéristique scindé. Par hypothèse de récurrence il existe une base (e_2, \dots, e_{p+1}) de H dans laquelle la matrice de v est triangulaire. Nous avons $u(e_i) = b_i \varepsilon_1 + v(e_i)$ et donc la matrice de u dans $(\varepsilon_1, e_2, \dots, e_{p+1})$ est triangulaire. Le théorème de récurrence permet de conclure.

Proposition 29 Tout simplement parce que dans \mathbb{C} tout polynôme se décompose en produit du premier degré.

Proposition 30 L'application φ définie de S dans \mathbb{C}^p par $\varphi((u_n)) = (u_0, \dots, u_{p-1})$ est bien linéaire car $\varphi((u_n) + \lambda(v_n)) = (u_0 + \lambda v_0, \dots, u_{p-1} + \lambda v_{p-1}) = \varphi((u_n)) + \lambda \varphi((v_n))$, φ est bijective car la donnée de $(\mu_0, \dots, \mu_{p-1})$ détermine entièrement une suite (u_n) ayant pour premier termes les μ_i . Par transfert de structure on en déduit que S est un \mathbb{C} espace vectoriel de dimension p .

Proposition 31 La famille de polynômes (P_k) où $P_0 = 1$ et où P_k est défini, pour tout entier $k > 1$ par

$$P_k(X) = \binom{X}{k} = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}$$

forme une base de $\mathbb{C}[X]$, il suffit de vérifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le degré de P_k est k . On en déduit alors que la famille de suites $(u^{(k)})$ est une famille libre, en effet:

$$\forall k, n \in \mathbb{N} \quad P_k(n) = u_n^{(k)}$$

donc, si a_0, \dots, a_m sont des scalaires tels que

$$a_0 u^{(0)} + \dots + a_m u^{(m)} = 0$$

alors le polynôme $\sum_{k=0}^m a_k P_k$ possède une infinité de zéros, il est donc égal à 0, ce qui signifie que, pour tout $k \in [0, m]$ $a_k = 0$.

Montrons maintenant la proposition par récurrence.

La propriété est vraie pour $m = 0$. Supposons la vraie pour l'entier m .

Soit $u \in E$

$$u \in \text{Ker } \Delta^{m+1} \iff \Delta(u) \in \text{Ker } \Delta^m$$

donc

$$\text{Ker } \Delta^{m+1} = \Delta^{-1}(\text{Ker } \Delta^m).$$

Pour trouver une base de $\text{Ker } \Delta^{m+1}$, il suffit donc d'ajouter à une base de $\text{Ker } \Delta$, une famille d'antécédents d'une base de $\text{Ker } \Delta^m$.

Or, on vérifie sans difficulté, que:

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \Delta(u^{(k)}) = u^{(k-1)}.$$

ainsi $\text{Ker } \Delta^{m+1}$ possède comme base la famille $\{u^{(0)}, \dots, u^{(m)}\}$.

Proposition 32 Pour tout $i \in [1, q]$, $(X - r_i)^{m_i}$ divise $P(X)$ donc $\text{Ker}(T - r_i \text{Id})^{m_i} \subset \text{Ker } P(T) = S$. Ainsi $\sum_{i=1}^q \text{Ker}(T - r_i \text{Id})^{m_i} \subset S$. Montrons alors que la somme est directe. Pour cela, il suffit de montrer que la collection de bases prises dans chaque sous-espace est une famille libre.

Notons φ l'application définie de S dans \mathbb{C}^p par $\varphi((u_n)) = (u_0, \dots, u_{p-1})$, puisque φ est un isomorphisme, il suffit de vérifier que la propriété sur les images par φ des sous-espaces vectoriels.

Distinguons deux cas: a) Pour tout $i \in [1, q]$, $r_i \neq 0$. Prenons comme base de $\text{Ker}(T - r_i \text{Id})^{m_i}$, la famille $\mathcal{B}_i = \{(r_i^n), \dots, (m_i - 1)! \binom{n}{p_i - 1} r_i^{n - m_i - 1}\}$.

Notons A la transposée de la matrice dans la base canonique de \mathbb{C}^p de l'image par φ de la famille $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_q$.

Les m_1 premières lignes de A sont $(1, r_1, r_1^2, \dots, r_1^{p-1})$, $(0, 1, 2r_1, \dots, (p-1)r_1^{p-2})$, ... Les m_2 lignes suivantes sont $(1, r_2, r_2^2, \dots, r_2^{p-1})$, $(0, 1, 2r_2, \dots, (p-1)r_2^{p-2})$, etc... et on obtient ainsi q blocs de lignes constitués de cette façon. On remarque que l'on passe dans un bloc d'une ligne à la suivante en dérivant terme à terme par rapport à la racine. Montrons A est inversible et étudions pour cela l'équation $AC = 0$ où $C = {}^t(x_0, \dots, x_p)$.

En notant Q le polynôme $x_0 + x_1 X + \dots + x_{p-1} X^{p-1}$, on constate que les m_1 premières composantes du produit AC sont $Q(r_1); Q'(r_1), \dots, Q^{(m_1-1)}(r_1)$. Comme le phénomène se répète q fois, on trouve en définitive que

$$AC = \begin{pmatrix} Q(r_1) \\ Q'(r_1) \\ \vdots \\ Q^{(m_1-1)}(r_1) \\ Q(r_2) \\ \vdots \\ Q^{(m_2-1)}(r_2) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Résoudre l'équation $AC = 0$ où C est l'inconnue revient donc à trouver un polynôme Q qui vérifie

$$\forall i \in [1, q] \quad \forall j \in [0, m_i - 1] \quad Q^{(j)}(r_i) = 0$$

Le polynôme Q est donc divisible par $\prod_{i=1}^q (X - r_i)^{m_i}$ donc si $Q \neq 0$, le degré de P est supérieur ou égal à $p_1 + \dots + m_q = p$. Puisque le degré de P est inférieur ou égal à $p - 1$, on en déduit que $Q = 0$ donc que $C = 0$. La matrice A est donc inversible et donc $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_q$ est une famille libre de S . Puisque le nombre d'éléments de cette famille est p , on obtient alors la conclusion cherchée. b) Si l'une des racines est nulle, on peut supposer que c'est r_1 , on prend alors comme base de $\text{Ker } T_1^p$ la famille $(j! \delta_{jn})_{n \in \mathbb{N}}$ pour j variant de 1 à $m_1 - 1$, en notant comme précédemment A la transposée de la matrice dans la base canonique de K^p de la famille $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_q$, on trouve cette fois que

$$AC = \begin{pmatrix} Q(0) \\ Q'(0) \\ \vdots \\ Q^{(m_1-1)}(0) \\ Q(r_2) \\ \vdots \\ Q^{(m_2-1)}(r_2) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

La suite du raisonnement est alors la même, la nullité de r_1 n'intervenant que dans l'écriture de la famille \mathcal{B}_1 .

Théorème 7 Tout a été montré ci-dessus.

Proposition 33 Voir le chapitre équations différentielles.

4.8 Exercices

4.8.1 Indications

- Exercice 1** F est de dimension finie s'il est inclus dans un espace de dimension finie.
- Exercice 2** Chercher le degré de l'image d'un polynôme P
- Exercice 3** La dérivation est un endomorphisme de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, quelles sont ses valeurs propres?
- Exercice 4** Est-ce un morphisme de groupe, est-elle injective? surjective?
- Exercice 5** Appliquer la définition.
- Exercice 6** On a $P(T)((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (u_n + u_{n+1} - u_{n+2})_{n \in \mathbb{N}}$
- Exercice 7** a) simple calcul
 b) Utiliser la division euclidienne d'un polynôme par le polynôme $X^2 - \alpha X + \beta$.
 c) Chercher l'inverse d'un élément inversible de F parmi les éléments de F .
- Exercice 8** Appliquer la proposition précédente.
- Exercice 9** Appliquer la proposition précédente.
- Exercice 10** Écrire les définitions et utiliser qu'une matrice et sa transposée ont même déterminant.
- Exercice 11** Reprendre la démonstration précédente.
- Exercice 12** Développer par rapport à la première ligne, trouver une relation de récurrence, vérifier que la forme proposée convient.
- Exercice 13** Le rang donne la dimension du noyau donc la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0. Essayer de trouver ce qui vous manque.
- Exercice 15** Adapter la démonstration dans \mathbb{Z}
- Exercice 16** Par contraposée en utilisant Gauss.
- Exercice 17** Quel serait un facteur commun.
- Exercice 18** Chercher les facteurs communs.
- Exercice 19** Trouver des polynômes annulateurs.
- Exercice 20** Appliquer le cours.
- Exercice 21** Attention en général l'intersection d'un sous-espace avec une somme directe n'est pas la somme directe des intersections sauf si on fait des hypothèses supplémentaires.
- Exercice 22** Utiliser un polynôme annulateur scindé à racines simples, puis utiliser les éléments propres de u .
- Exercice 23** Utiliser les sommes directes et l'exercice 21.
- Exercice 24** Considérer les vecteurs ${}^t(1 \ \omega \ \omega^2 \ \dots \ \omega^{n-1})$ où ω est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité.
- Exercice 25** Utiliser le morphisme intérieur $M \mapsto P^{-1}MP$ où P est une matrice "diagonalisant" la matrice A de u .
- Exercice 26** Prendre une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire, où sont les valeurs propres?
- Exercice 27** Que vaut la diagonale de A^k dans le cas où A est triangulaire.

Exercice 28 Appliquer le cours.

Exercice 29 Appliquer le théorème précédent.

Exercice 30 Diagonaliser.

Exercice 31 Écrire la matrice.

Exercice 32 Vérifier les conditions pour que ce soit une famille de projecteurs associés, penser à commuter.

Exercice 33 Partir de la relation $u(x) = \lambda x$ pour trouver les éléments propres de u^{-1} .

Exercice 34 Utiliser l'existence d'un polynôme annulateur à racines simples.

Exercice 35 On pourra utiliser que $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$.

Exercice 36 Quelles sont les matrices semblables à la matrice identité? La seconde s'écrit $3I + J$ où J est la matrice dont tous les termes sont égaux à 1. Pour la troisième calculer le polynôme caractéristique....

Exercice 37 Allez-y.

Exercice 38 Regarder si la matrice est diagonalisable.

Exercice 39 Mais on a un polynôme....

Exercice 40 Montrer d'abord que tout sous-espace propre de l'un est stable par l'autre, puis faire une preuve par récurrence.

Exercice 41 On pourra commencer par le cas où A est inversible; dans le cas général, remplacer A par $A + \varepsilon I_n$.

Exercice 42 Faire apparaître des zéros.

Exercice 43 Prendre un maximum de vecteurs propres puis compléter par une matrice triangulaire.

Exercice 44 Diagonaliser puis utiliser un automorphisme intérieur.

Exercice 45 Triangulariser.

Exercice 46 Allez y.

Exercice 47 Faire apparaître des zéros pour calculer le polynôme caractéristique.

Exercice 48 Diagonaliser ou triangulariser.

Exercice 49 Diagonaliser ou triangulariser.

4.8.2 Corrigés

Exercice 1 Puisque u est un automorphisme, la dimension de $(u(F))$ est celle de F , si F est stable par u , $u(F)$ et F sont des sous-espaces vectoriels emboîtés de même dimension finie, ils sont donc égaux.

Prenons $F = K[X^2]$ et $u \in \mathcal{L}(K[X])$ défini par la famille des images de la base canonique : $u(X) = X^2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u(X^{2n}) = X^{2n+2}$, $u(X^{2n+3}) = X^{2n+1}$, l'image de la base canonique étant une base de $K[X]$, u est un automorphisme, F est stable par u et $u(F) \neq F$.

Exercice 2 a) Si $P \neq 0$, on a $\deg(u(P)) = \deg(P) + 1$, il ne peut donc pas exister de vecteurs propres.

b) Si P est de degré $n > 0$, l'image de P est de degré n , mais son coefficient dominant est celui de P multiplié par n , les seules valeurs propres possibles sont donc les entiers positifs. Pour $n \in \mathbb{N}$, on tente alors de résoudre l'équation $XP' = nP$. Le polynôme P doit donc être de degré n , on pose alors $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et on égale les coefficients de même degré dans les polynômes XP' et nP , on trouve alors que pour tout entier k strictement inférieur à n , on a $a_k = 0$ et puisque, le polynôme X^n est bien un vecteur propre, on constate alors que le spectre de l'endomorphisme est \mathbb{N} et que le sous-espace propre associé à un entier positif n est le sous-espace vectoriel engendré par X^n .

c) Si P est de degré $n > 0$, le polynôme image est de degré inférieur ou égal à $n + 1$ et le coefficient du terme de degré $n + 1$ est égal à celui de P multiplié par $n - 1$. Ainsi, seuls les polynômes de degré 1 sont susceptibles d'être des vecteurs propres. On pose alors $P = aX + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$), l'image de P est $-bX - a$ et on cherche les valeurs de λ pour lesquelles l'équation $-bX - a = \lambda(aX + b)$ possède au moins une solution non nulle. On a donc $\lambda a + b = 0$ et $a + \lambda b = 0$. On obtient un système de deux équations à deux inconnues a et b et le déterminant de ce système est $\lambda^2 - 1$, ainsi les valeurs propres sont -1 et 1 et les sous-espaces propres associés sont respectivement $\mathbb{R} \cdot (X + 1)$ et $\mathbb{R} \cdot (X - 1)$.

Exercice 3 Les fonctions (φ_n) sont des fonctions non nulles, vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes de l'endomorphisme u de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui à une fonction f associe f' , on en conclut que la famille (φ_n) est libre.

Exercice 4 Supposons E non nul. Soient a et b deux automorphismes de E . Pour tout endomorphisme u de E , on a : $\Phi_{ab}(u) = (ab)u(ab)^{-1} = a(bub^{-1})a^{-1} = \Phi_a \circ \Phi_b(u)$, Φ est donc un morphisme de groupe. Cherchons son noyau; si a vérifie, pour tout endomorphisme u , $\Phi_a(u) = u$ alors on a $au = ua$, on en déduit que a est une homothétie, donc le noyau n'est pas réduit à Id_E et Φ n'est pas injective.

Soit $a \in \mathcal{GL}(E)$, l'application Ψ_a qui à un endomorphisme u de E associe au est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ (ce n'est pas un morphisme d'algèbre), s'il existait b tel que $\Phi_b = \Psi_a$, alors $\Phi_b(a^{-1}) = Id_E$, on en déduit alors $a^{-1} = Id_E$, ainsi Ψ_{2Id_E} n'appartient pas à l'image de Φ qui n'est donc pas surjective.

Exercice 5 L'ensemble des endomorphismes qui sont des polynômes de D est l'espace vectoriel engendré par la famille $(Id_E, D, D \circ D, \dots)$. Si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, pour tout élément y de E , $P(D)(y) = \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}$ où $y^{(k)}$ désigne la dérivée $k^{\text{ième}}$ de y .

Exercice 6 Le noyau de $P(T)$ est l'ensemble des suites réelles vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, c'est donc l'espace vectoriel engendré par les deux suites géométriques de raison $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 7

Exercice 8

Exercice 9

Exercice 10

Exercice 11

Exercice 12

Exercice 13

Exercice 15

Exercice 16

Exercice 17

Exercice 18

Exercice 19

Exercice 20

Exercice 21

Exercice 22

Exercice 23

Exercice 24

Exercice 25

Exercice 26

Exercice 27

Exercice 28

Exercice 29

Exercice 30

Exercice 31

Exercice 32

Exercice 33

Exercice 34

Exercice 35

Exercice 36

Exercice 37

Exercice 38

Exercice 39

Exercice 40

Exercice 41

Exercice 42

Exercice 43

Exercice 44

Exercice 45

Exercice 46

Exercice 47**Exercice 48****Exercice 49**

Exercice 50 $P_A(X) = (-X)(X^2 + 3)$ en faisant par exemple la somme des colonnes pour mettre $(-X)$ en facteur et puis une combinaison des lignes pour faire apparaître des 0. Dans \mathbb{R} la matrice n'est pas diagonalisable. $\text{Ker}(A)$ est engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et le sous-espace propre

associé à la valeur propre $i\sqrt{3}$ est engendré par $\begin{pmatrix} j^2 \\ j \\ 1 \end{pmatrix}$ et pour $-i\sqrt{3}$ c'est $\begin{pmatrix} j \\ j^2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nous avons

donc la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice inverse $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & j & 1 \end{pmatrix}$.

Il est d'usage de vérifier que les calculs sont justes ! $P^{-1}AP = D$ avec $D = \text{diag}(0, j - j^2, j^2 - j)$.

$P_B(X) = -(X - 1)^3$ Il n'y a qu'une seule valeur propre et donc B n'est pas diagonalisable car sinon elle serait semblable à la matrice Id or toute matrice semblable à Id sont égales à Id : $P^{-1}IdP = Id$. Le sous-espace propre associé à 1 est un plan $x + y - z = 0$. Nous pouvons

trigonaliser B sous la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$P_C(X) = (2 - X)^2(4 - X)$. $V(2)$ est un plan de base $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V(4)$ une droite

engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'où la matrice de passage et son inverse $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et

la vérification $P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 51 C'est une question de cours ! Pour la réciproque \Leftarrow il existe une base propre dans laquelle $A = \mathcal{M}(u)$ et $B = \mathcal{M}(v)$ sont diagonales donc $AB = BA$ et par suite $u \circ v = v \circ u$. Pour la partie directe on a si x est un vecteur propre associé à λ_1 pour u : $u(x) = \lambda_1 x$ et $\lambda_1 v(x) = v \circ u(x) = u \circ v(x)$ ou $u(v(x)) = \lambda_1 v(x)$ ce qui donne $v(x)$ est un vecteur propre pour u associé à λ_1 qui est une droite donc il existe α_1 tel que $v(x) = \alpha_1 x$ et donc x est un vecteur propre de v . En faisant de même pour y vecteur propre de v associé à μ_1 on obtient que u et v ont même vecteurs propres.

Exercice 52 Il s'agit d'une vérification $Ae_\omega = \begin{pmatrix} a_1 + \omega a_2 + \dots + \omega^{n-1} a_n \\ a_n + \omega a_1 + \dots + \omega^{n-1} a_{n-1} \\ \vdots \\ a_2 + \omega a_3 + \dots + \omega^{n-1} a_1 \end{pmatrix} = (a_1 + \omega a_2 + \dots + \omega^{n-1} a_n) \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \vdots \\ \omega^{n-1} \end{pmatrix}$

en utilisant que $\omega^n = 1$. Il existe donc une base propre car il y a n racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité distincte donc n vecteurs propres distincts, dans cette base la matrice est diagonale (enfin l'endomorphisme....) et le déterminant est le produit des valeurs propres $\Delta = \prod_{\omega^n=1} (a_1 + \omega a_2 + \dots + \omega^{n-1} a_n)$.

Exercice 53 C'est un exercice facile, il en faut $P_A(X) = -X(X^2 + (a^2 + b^2 + c^2))$ si on suppose la matrice non nulle il y a trois valeurs propres : $0, \pm i\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. $\text{ker } f$ est la droite engendrée par $\Omega = \begin{pmatrix} c \\ -b \\ a \end{pmatrix}$ on a par simple vérification : $f(u) = \begin{pmatrix} au_2 + bu_3 \\ -au_1 + cu_3 \\ -bu_1 - cu_2 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} c \\ -b \\ a \end{pmatrix} = \vec{u} \wedge \vec{\Omega}. \text{ Le plan } P = \Omega^\perp \text{ a pour équation } cx - by + az = 0. \text{ Soit } x = (x_1, x_2, x_3) \text{ un point de } P \text{ et } u(x) = (ax_2 + bx_3, -ax_1 + cx_3, -bx_1 - cx_2) \text{ et on a } c(ax_2 + bx_3) - b(ax_1 + cx_3) + a(-bx_1 - cx_2) = 0. \text{ En fait pour tout } x \text{ de } E \text{ on a } u(x) \in P \text{ car } P = \text{Im}u. \text{ Soit } \vec{e}_1 = \frac{\Omega}{\|\Omega\|}, \vec{e}_2 \text{ un vecteur normé de } P \text{ et } \vec{e}_3 = \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 \text{ on a } f(e_2) = e_2 \wedge \Omega = \|\Omega\| e_3; f(e_3) = e_3 \wedge \Omega = \|\Omega\| (e_2 \wedge e_1) \wedge e_1 = \|\Omega\| e_3 \wedge e_1 = \|\Omega\| e_2. \text{ La matrice s'écrit dans cette base } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\alpha = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Dans l'application on a $\Omega = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, -1)$ puis $P = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$ enfin $e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, -1)$ et avec $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ on obtient

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 54 On écrit $M(a, b, c) = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = aI + bJ + cK$. On a ainsi directement que E est un sous-espace vectoriel de dimension 3 de base (I, J, K) .

$\det(M) = (a - c) \left((a + c)^2 - 2b^2 \right) = (a - c) (a + \sqrt{2}b + c) (a - \sqrt{2}b + c)$ en faisant $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$ puis $L_3 \leftarrow L_1 + L_3$. La matrice M sera inversible si et seulement si $a \neq c$ et $a + \sqrt{2}b + c \neq 0, a - \sqrt{2}b + c \neq 0$.

La matrice inverse a pour expression $\frac{1}{\Delta} (a^2 + ac - b^2) I + (bc - ab) J + (b^2 - ac - c^2) K$ qui est bien dans E . En calculant les produits de la base on montre que E est une sous-algèbre et le fait que l'inverse soit dans E signifie que la sous-algèbre est pleine.

$$P_M(X) = -(X - (a - c)) (X - (a\sqrt{2}b + c)) (X - (a - \sqrt{2}b + c)) \text{ et } sp(M) = \{a - c, a + \sqrt{2}b + c, a - \sqrt{2}b + c\}$$

Dans ces conditions $sp(M) = \{1, 1, 5\}$ et la matrice $M - I = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 1

donc le sous-espace propre est de dimension 2. La matrice est diagonalisable et $V(1) \oplus V(5) = \mathbb{R}^3$. Pour obtenir la relation il suffit de vérifier que $D^2 - 6D + 5I = 0$ avec $D = \text{diag}(1, 1, 5)$ car $PD^2P^{-1} - 6PDP^{-1} + 5I = PDP^{-1}PDP^{-1} - 6A + 5I = A^2 - 6A + 5I = 0$.

La division euclidienne de X^n par $X^2 - 6X + 5$ donne $X^n = (X - 1)(X - 5)Q + aX + b$ avec $1 = a + b$ et $5^n = 5a + b$ d'où $a = \frac{5^n - 1}{4}$ et $b = \frac{3 - 5^n}{4}$ d'où $A^n = \frac{5^n - 1}{4}A + \frac{3 - 5^n}{4}I$.

Exercice 55 Si $\lambda = 0$ alors le système admet une unique solution $(0, 0, \dots, 0)$. Sinon on pose

$$\mu = \lambda + \frac{1}{\lambda} \text{ et le système s'écrit } \begin{cases} \mu x_1 + x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_{i-1} + \mu x_i + x_{i+1} = 0 \\ \vdots \\ x_{n-1} + \mu x_n = 0 \end{cases} \text{ ainsi } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ est vecteur propre}$$

associé à la valeur propre $-\mu$ de la matrice presque circulane $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ le vecteur

$$V_\theta = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \sin 2\theta \\ \vdots \\ \sin n\theta \end{pmatrix} \text{ vérifie } JV_\theta = \begin{pmatrix} \sin 2\theta \\ \sin \theta + \sin 3\theta \\ \vdots \\ \sin(n-2)\theta + \sin n\theta \\ \sin(n-1)\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos \theta \sin \theta \\ 2 \cos \theta \sin 2\theta \\ \vdots \\ 2 \cos \theta \sin(n-1)\theta \\ 2 \cos \theta \sin n\theta - \sin(n+1)\theta \end{pmatrix}$$

en utilisant $\sin(k-1)\theta + \sin(k+1)\theta = 2 \cos \theta \sin k\theta$ or en posant $\theta_k = \frac{k\pi}{n+1}$ ($1 \leq k \leq n$) on a $\sin(n+1)\theta = 0$ et $JV_\theta = 2 \cos \theta V_\theta$. Ainsi $V_k \neq 0$ et J admet n valeurs propres distinctes $\left(2 \cos \frac{k\pi}{n+1}\right)_k$. Conclusion Si $\mu = \lambda + \frac{1}{\lambda} \neq -2 \cos \frac{k\pi}{n+1}$ il y a une unique solution $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ par contre si il existe k tel que $\mu = -2 \cos \frac{k\pi}{n+1}$ ou $\lambda^2 + 2 \cos \frac{k\pi}{n+1} \lambda + 1 = 0$ alors le système admet une droite vectorielle engendrée par $\left(\sin \frac{k\pi}{n+1}, \sin \frac{2k\pi}{n+1}, \dots, \sin \frac{nk\pi}{n+1}\right)$.

Exercice 56 Soit $B=(e_i)$ une base de E formé de vecteurs propres, $((e'_i))_{1 \leq i \leq p}$ une base de F que l'on complète par des vecteurs de B en les réindexant au besoin en e_{p+1}, \dots, e_n . On a

$$\mathcal{M}_B(u) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \text{ avec } D \text{ diagonale, } \mathcal{M}_B(u) = \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{pmatrix} \text{ avec } \mathcal{M}_{B,B'} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ Q & I_{n-p} \end{pmatrix}$$

d'où $\begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ Q & I_{n-p} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ Q & I_{n-p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ -QP^{-1} & I_{n-p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AP & 0 \\ DQ & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{-1}AP & 0 \\ -QP^{-1}AP + DQ & D \end{pmatrix}$ ce qui prouve que $P^{-1}AP = \Delta_1$.

Exercice 57 Si λ est valeur propre de f alors pour tout x de $\ker(f - \lambda i)$ on a $f(x) = \lambda x$ d'où $g(f(x)) = f(g(x)) = \lambda g(x)$ et donc $g(x) \in \ker(f - \lambda i)$.

Pour $n = 1$ c'est clair, supposons la propriété vraie pour n et soit f, g des endomorphismes de E_{n+1} . L'endomorphisme f admet au moins une valeur propre λ (dans le champs complexe) soit $V_\lambda = \ker(f - \lambda i)$

Ou bien $\dim V_\lambda = n + 1$ et $f = \lambda i$ alors tout vecteur propre de g est propre pour f .

Ou bien $\dim V_\lambda \leq n$ et $f(V_\lambda) = V_\lambda$ et $g(V_\lambda) \subset V_\lambda$ ceci permet de considérer les endomorphismes de V_λ : $f_1 = f|_{V_\lambda}$ et $g_1 = g|_{V_\lambda}$ on a $f_1 \circ g_1 = g_1 \circ f_1$, par l'hypothèse de récurrence f_1 et g_1 ont un vecteur propre en commun et donc f, g aussi.

$E = \bigoplus_{i=1}^p E_f(\lambda_i)$ et $E_f(\lambda_i)$ est stable par g soit $g_i = g|_{E_f(\lambda_i)}$. g_i est un endomorphisme de $E_f(\lambda_i)$. On a que g est ddiagonalisable et donc g_i aussi. Il existe donc B_i base de $E_f(\lambda_i)$ formée de vecteurs propres de g et $\prod_i B_i$ convient.

Exercice 58 Avec ces hypothèses il existe x_0 un vecteur de E tel que $f^2(x_0) \neq 0$ et $f^3(x_0) = 0$ considérons le triplet $(x_0, f(x_0), f^2(x_0)) = B$. C'est une base car cette famille est libre: $ax_0 + bf(x_0) + cf^2(x_0) = 0$ donne en composant par f^2 : $af^2(x_0) = 0$ donc $a = 0$ puis en composant par

f : $bf^2(x_0) = 0$ d'où $b = 0$ puis $c = 0$. Dans cette base la matrice de f s'écrit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour le commutateur de f on travaille dans cette base une matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = M$ vérifie

$MA = AM$ donne $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a' & 0 & 0 \\ a'' & a' & a \end{pmatrix} = aI + a'A + a''A^2$ on obtient une sous-algèbre de dimension 3.

Exercice 59 Il est facile mais important de montrer que $C(A)$ est une sous-algèbre de $M_n(\mathbb{C})$. Si $P \in GL_n(\mathbb{C})$ l'application $\varphi: M \mapsto P^{-1}MP$ est un automorphisme appelé automorphisme intérieur de l'algèbre $M_n(\mathbb{C})$. Ainsi $MA = AM$ est équivalent à $\varphi(A)\varphi(M) = \varphi(M)\varphi(A)$ soit

pour une application φ telle que $\varphi(A)$ est diagonale de diagonale les valeurs propres distinctes (α_i) on obtient pour tout i, j $\alpha_i m'_{ij} = \alpha_j m'_{ij}$ soit $m'_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Ainsi $\varphi(M)$ est diagonale et $C(A)$ est de dimension n . Maintenant on a des candidats dans le commutant à savoir les puissances de A et $(I, A, A^2, \dots, A^{n-1})$ est une base de $C(A)$ en effet pour démontrer la liberté de cette famille il suffit de passer par φ .

Exercice 60 On a $u \circ (u - i) = 0$. Les polynômes X et $X - 1$ sont premiers entr'eux et donc on a $E = \ker u \oplus \ker (u - i)$. L'endomorphisme est une projection. En général l'intersection d'une somme n'est pas la somme des intersections. Ici $v|_F$ est aussi une projection de F , il en résulte que $F = \ker v \oplus \ker (v - i)$ mais $\ker v = \ker u \cap F$ et $\ker (v - i) = \ker (u - i) \cap F$. Donc un sous-espace stable est de la forme $F = F_1 \cap F_2$ avec $F_1 \subset \ker u$ et $F_2 \subset \ker (u - i)$.

Exercice 61 En supposant λ, μ non nuls et $\lambda \neq \mu$ on cherche α, β, γ des réels tels que $\alpha f + \beta f^2 + \gamma f^3 = 0$, nous faisons comme si le couple (u, v) était libre, peut-être du moment que l'on trouve des candidats...cela donne $\begin{cases} \alpha + \beta\lambda + \gamma\lambda^2 = 0 \\ \alpha + \beta\mu + \gamma\mu^2 = 0 \end{cases}$ ou $\beta = -\gamma(\lambda + \mu)$ et $\alpha = \gamma(\lambda + \mu)\lambda - \gamma\lambda^2 = \gamma\mu\lambda$. et donc $\lambda\mu f - (\lambda + \mu)f^2 + f^3 = 0$ cette expression se factorise par $f \circ (f - \lambda i) \circ (f - \mu i) = 0$. L'endomorphisme f annule un polynôme à racines simples et est donc diagonalisable. Si $\lambda = \mu$ alors $f \circ (f - \lambda i) = 0$ même conclusion et enfin si $\lambda = 0$ et $\mu \neq 0$ on obtient le polynôme $f \circ (f - \mu i) = 0$ et donc dans tous les cas f est diagonalisable.

Exercice 62 On peut écrire $A = I + 2J + 3J^2$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ on a $J^3 = 0$ et

$\{M = aI + bJ + cJ^2\}$ est la sous-algèbre engendrée par J . Toute matrice de cette sous-algèbre pour $a \neq 0$ est inversible avec $M^{-1} = \frac{1}{a}I - \frac{b}{a^2}J + \frac{b^2 - ac}{a^3}J^2$, la sous-algèbre est pleine. Ainsi $A^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (2J + 3J^2)^k$ mais pour $k \geq 3$ on a $(2J + 3J^2)^k = J^k (2I + 3J)^k = 0$. Pour $n \geq 2$: $A^n = I + n(2J + 3J^2) + \frac{n(n-1)}{2}(2J + 3J^2)^2$. Pour les racines carrées, pour celles qui sont dans la sous-algèbre on les cherche sous la forme $M = aI + bJ + cJ^2$ et $M^2 = A$ donne $\begin{cases} a^2 = 1 \\ ab = 1 \\ b^2 + 2ac = 3 \end{cases}$ ce qui donne $a = b = c = \varepsilon$ avec $\varepsilon = \pm 1$.

Exercice 63 En utilisant les matrices par blocs on a l'égalité.

Exercice 64 Le polynôme caractéristique de A est $P_A(X) = -(X+1)^3$ et $A+I = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

avec $rg(A) = 2$ on peut choisir un vecteur propre de A : $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $A(V_1) = -V_1$. Pour

$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ on a $(A+I)V_2 = V_1$ et pour $V_3 = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ on a $(A+I)V_3 = V_2$. La matrice A

est semblable à $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Soit $B = A + I$ on a $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & -a \\ 0 & a & a \end{pmatrix}$ et $B^3 = 0$. Ainsi $A = B - I$ et $A^n =$

$(-1)^n \left(I - nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2 \right)$. Un calcul simple donne $\exp(X) = e^x \begin{pmatrix} 1 & ax & ax \\ -x & 1 - ax^2 & -ax^2 \\ x & ax^2 & 1 + ax^2 \end{pmatrix}$.

Exercice 65 C'est un cas particulier de la matrice de taille $n - n$ avec des 1 partout sauf sur la diagonale. Elle est intéressante car elle permet de répondre à d'autres matrices du

type $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = I + M$, ou $\begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix} = aI + bM$ M est diagonalisable.

Le polynôme caractéristique $P_M(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -X & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -X & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -X \end{vmatrix}$. En sommant toutes les co-

lonnes pour la taille n on obtient $(-X + n + 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & -X \end{vmatrix}$. Puis en retranchant aux

lignes la première ligne on obtient $(-X + n + 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -X - 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -X - 1 \end{vmatrix}$ ce qui donne

$P_M(X) = (-1)^n (X - (n - 1))(X + 1)^{n-1}$. De plus la méthode choisit pour calculer le polynôme caractéristique donne les vecteurs propres en effet $u = e_1 + e_2 + \dots + e_n$ engendre V_{n+1} et pour $1 \leq i \leq n : v_i = e_1 - e_i$ sont $n - 1$ vecteurs indépendants de V_{-1} . Dans notre cas de

$n = 4$ on a $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ en inversant les e_i en

fonction des vecteurs propres et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Les racines de M sont au nombre

de 8 avec $E_i = \text{diag}(\pm\sqrt{3}, \pm i, \pm i, \pm i)$ puis $R_i = PE_iP^{-1}$.

Exercice 66

Exercice 67 On a $P_A(X) = (X - 1)^4$ et $A - I = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ -2 & 7 & -2 & 11 \\ 0 & -4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ qui est de rang 3.

$\dim V(1) = 1$ on a $A(e_1 - e_3) = e_1 - e_3$ soit $u = e_1 - e_3$.

Cherchons ensuite un vecteur v tel que $A(v) = v + u$ ou $(A - I)v = u$ ou $(A - I)^2 v = 0$, on peut prendre $v = \frac{1}{2}e_3$.

Cherchons w tel que $Aw = w + v$ ou $(A - I)w = v$, ainsi $w = -\frac{1}{6}e_2 + \frac{1}{12}e_3 + \frac{1}{6}e_4$ convient et enfin t tel que $A(t) = t + w$ ou $(A - I)t = w$ on trouve $t = \frac{83}{72}e_2 - \frac{371}{144}e_3 - \frac{86}{72}e_4$. Dans la base

(u, v, w, t) avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{83}{72} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & -\frac{371}{144} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{86}{72} \end{pmatrix}$ alors $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Une autre méthode $f_1 = e_1 - e_3$ est une base de $V(1)$, on la complète par exemple par

$f_2 = e_2, f_3 = e_3, f_4 = e_4$. La matrice est semblable à $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ et on re-

commence avec $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. On prend $g_1 = f_1, g_2 = f_3, g_3 = f_2, g_4 = f_4$ et on trouve

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \end{pmatrix} \text{ avec } h_1 = g_1, h_2 = g_2, h_3 = g_3 - g_4, h_4 = g_4 \text{ on obtient } M_3 =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 68**Exercice 69**

Exercice 70 Si λ est valeur propre alors $\lambda^3 - \lambda - 1 = 0$ et le déterminant est le produit des valeurs propres, les variations de ce polynôme donnent que P a une seule racine réelle supérieure à $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Exercice 71 La dérivation étant linéaire on a que f est linéaire. Si $\deg(P) = n$ de coefficient dominant α , $f(P)$ est a priori de degré $n + 1$ mais le coefficient de X^{n+1} est $n\alpha - n\alpha$ et donc $f(P) \in \mathbb{C}_n[X]$. L'image de la base canonique est donnée par $f(X^k) = (k - n)X^{k+1} + aX^k -$

$$kX^{k-1} \text{ si } k \geq 1 \text{ et } f(1) = a - nX \text{ d'où } A = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -n & \ddots & -2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -(n-1) & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & a \end{pmatrix} \text{ Maintenant } \lambda$$

est valeur propre si il existe un polynôme P non nul tel que $(X^2 - 1)P' - (nX - a + \lambda)P = 0$

ce qui donne $P(X) = k \exp\left(\int \frac{nx - a + \lambda}{x^2 - 1}\right) = k|x - 1|^{\frac{n-a+\lambda}{2}}|x + 1|^{\frac{n+a+\lambda}{2}}$ en écrivant $\frac{nx - a + \lambda}{x^2 - 1} = \frac{n-a+\lambda}{2(x-1)} - \frac{-n-a+\lambda}{2(x+1)}$. Pour que $\frac{n-a+\lambda}{2}$ et $\frac{n+a+\lambda}{2}$ soient entiers il faut que $\lambda = 2p + a - n$ avec $p \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ on a ainsi $(n + 1)$ valeurs propres distinctes pour les vecteurs propres $(x - 1)^p (x + 1)^{n-p}$.

Exercice 72 Oui elles sont toutes les deux semblables à $\text{diag}(4, 2, 2)$ nous avons le même polynôme caractéristique $P_A(X) = P_B(X) = (X - 2)^2(X - 4)$ et des bases propres.

Exercice 73 $P_A(X) = -X(X^2 + 3X - 11)$ et $\text{sp}(A) = \left\{0, \frac{-3 \pm \sqrt{53}}{2}\right\}$ la matrice A est diagonalisable. S'il existe X tel que $X^2 = A$ alors X, A commutent donc les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre, dans une base propre de A la matrice X' semblable à X sera diagonale du type $(0, \mu_1, \mu_2)$ avec $\mu_1^2 = \lambda_1$ et $\mu_2^2 = \lambda_2$ sur \mathbb{R} il n'y a pas de solution car $\lambda_2 < 0$ mais sur \mathbb{C} il y a quatre solutions et $X = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & 0 & i\varepsilon_2 \sqrt{-\lambda_2} \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $\varepsilon_1 = \pm 1$ et $\varepsilon_2 = \pm 1$.

Exercice 74 D'après le théorème des noyaux $\mathbb{R}^n = \ker A \oplus \ker P(A)$ et donc $Rg(A) = n - \dim \ker A = \dim \ker(P(A))$. Si $u : E_n \rightarrow E_n$ avec $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(u) = \emptyset$ alors n est pair. En effet si n était impair le polynôme caractéristique $P_C(X) = (-X)^n + \dots$ et $\lim_{+\infty} P_C(X) = +\infty$, $\lim_{-\infty} P_C(X) = -\infty$ le théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence d'un zéro réel, ce qui n'est pas. Nous appliquons cela à $a|_{\ker(P(A))}$.

$X^3 + X = X(X^2 + 1)$ et $Rg(X) = 2$ ou 0 et $X = 0$ ou $Rg(X) = 2$. Ainsi $\mathbb{R}^3 = \ker(X) \oplus P$ où P est le plan $\ker(X^2 + I)$. La matrice X s'écrit $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ avec A matrice 2×2

diagonalisable dans \mathbb{C} , de valeurs propres i et $-i$, c'est le cas de $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et comme deux matrices diagonalisables ayant même valeurs propres sont semblables on a que X est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Réciproquement elle convient.