Chapitre 6

Quelques propriétés des réels

6.1 introduction

L'histoire de l'invention du corps des réels est certainement la plus passionnante. On peut faire remonter à la Grèce classique, la Grèce d'Euclide l'apparition des nombres réels. Mais il faudra attendre 1870 pour obtenir une construction satisfaisante de $\mathbb{R}$. Étudiant la mesure des longueurs, l'école de Pythagore démontre (-600) qu'il est impossible, une unité étant choisie, de mesurer toute longueur par un quotient d'entiers (diagonale du carré, $\sqrt{2}$). Il faut bien se rendre compte que la présentation du corps des réels avec ses opérations et son ordre n'était pas évidente : on pouvait additionner, diviser certains nombres et pas d'autres. C'est ainsi que Archimède énonce : étant donnés des nombres A,B avec $A < B$ il existe un entier n tel que $nA > B$. Parallèlement à ce problème de proportion, le calcul numérique apporte son lot de questions. Les fractions continues puis les séries sont de bon moyen de représenter les nombres réels ou du moins de donner de bonne approximation : 1596 déjà 35 décimales de π, $\dfrac{4}{\pi} = \cfrac{1+1}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cdots}}}}$. L'apparition de droles de nombres dans des domaines différents : problèmes de rapport, somme de séries, solutions d'équations, les fonctions *log* et exponentielle, a posé la nécessité de leur classification. Mais toute construction devait tenir compte de la pssibilité des opérations et de l'ordre. C'est Cauchy grâce aux limites de suites et puis Dedekind (1872) qui présente une construction algèbrique de $\mathbb{R}$ à l'aide des coupures ($x^2 \geq 2$), puis Cantor construit $\mathbb{R}$ à l'aide des suites de cauchy en mettant les opérations et l'ordre. Néanmoins il n'était pas évident que les différentes constructions aboutissaient au mme ensemble. La définition axiomatique de Hilbert est importante et résoud le problème : il existe un unique ensemble vérifiant
1) c'est un corps commutatif pour les lois $+,\cdot$.
2) c'est un corps totalement ordonné.
3) c'est un groupe ordonné archimèdien pour la loi $+$.
4) c'est un système qu'il n'est pas possible d'agrandir en lui ajoutant des éléments pour obtenir un ensemble vérifiant encore 1-2-3.
Pour finir nous citons l'apparition de la fonction *log*. Pour simplifier les calculs numériques nous voyons des tableaux (Stifel 1544) de ce type :

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \cdots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \cdots & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128 & 256 \end{array}$$

Ainsi pour calculer 8×32 on a que 8 correspond à 3, 32 à 5 et $5+3=8$ 8 qui correspond à 256. On transforme ainsi un produit en somme. $l(xy) = l(x) + l(y)$.

6.2 Majorations, minorations

Proposition 1 (Division euclidienne dans $\mathbb{R}$) *Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists! q \in \mathbb{Z} \quad \exists r \in [0,a[\quad x = qa + r.$$

[Ind] Se rappeler comment $\mathbb{R}$ est défini.

Remarque: Le quotient de la division euclidienne d'un réel x par 1 s'appelle la partie entière de x, en on la note $[x]$ ou $E(x)$, le reste $x - [x]$ est appelé partie fractionnaire de x.

Exercice 1 Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad n \leq x \Longleftrightarrow n \leq [x]$$

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad x < n \leq x + 1 \Longleftrightarrow n = [x] + 1$$

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad x + 1 < n \Longleftrightarrow [x] + 2 \leq n$$

Théorème 1 *Soit A une partie non vide majorée (resp minorée) de $\mathbb{R}$, l'ensemble des majorants (resp minorants) de A possède un plus petit élément (resp un plus grand élément), il est appelé borne supérieure (resp borne inférieure) de A noté $\sup A$ (resp $\inf A$).*

[Ind] Admis.

Proposition 2 (Caractérisation de la borne supérieure) *Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$ et α un réel*

$$\alpha = \sup A \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A \quad x \leq \alpha \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists x \in A \quad \alpha - \varepsilon < x \end{cases}$$

[Ind] Revoir la définition d'une borne supérieure.

Proposition 3 (Caractérisation de la borne inférieure) *Soit A une partie minorée de $\mathbb{R}$ et α un réel*

$$\alpha = \inf A \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A \quad \alpha \leq x \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists x \in A \quad x < \alpha + \varepsilon \end{cases}$$

[Ind] Qu'est une borne inférieure?

Définition 1 *On note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ muni d'une relation d'ordre total qui prolonge la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ par les conditions*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad -\infty < x < +\infty$$

et muni des lois d'addition et de multiplication partielles

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad & x + (+\infty) = +\infty \\ & x + (-\infty) = -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^* \quad & x \times (+\infty) = \begin{cases} +\infty & si\ x > 0 \\ -\infty & si\ x < 0 \end{cases} \\ & x \times (-\infty) = \begin{cases} -\infty & si\ x > 0 \\ +\infty & si\ x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

$$(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$$

$$(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$$

$$(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$$

L'addition de $+\infty$ et $-\infty$ de même que les multiplications par 0 de $+\infty$ ou $-\infty$ n'étant pas définies.

Proposition 4 *Soit A une partie de $\mathbb{R}$, l'ensemble des majorants (resp minorants) de A dans $\overline{\mathbb{R}}$ possède un plus petit élément (resp un plus grand élément), il est appelé borne supérieure (resp borne inférieure) de A dans $\overline{\mathbb{R}}$ et noté $\sup A$ (resp $\min A$.*
On a alors

$$\sup A < +\infty \Longleftrightarrow A \text{ est majoré}$$

$$\inf A > -\infty \Longleftrightarrow A \text{ est minoré}$$

[Ind] Partie directe et réciproque.

Remarque: $\sup \emptyset = -\infty < \inf \emptyset = +\infty$

Exercice 2 Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$A \neq \emptyset \Longleftrightarrow \inf A \leq \sup A$$

$$A \text{ est un singleton } \Longleftrightarrow \inf A = \sup A$$

Exercice 3 Soient A et B des parties non vides de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$A \subset B \implies \inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$$

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B$$

$$\inf(A+B) = \inf A + \inf B$$

Exercice 4 Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\sup(-A) = -\inf A \text{ et } \inf(-A) = -\sup A$$

Exercice 5 Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculer en fonction de α et des bornes supérieures et inférieures de A, la borne supérieure et la borne inférieure de αA.

Définition 2 *soit $x \in \mathbb{R}$. on appelle valeur absolue de x et on note $|x|$, le plus grand des deux réels x et $-x$.*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| = \sup\{-x,x\}$$

Exercice 6 Soient $x,y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |x| \leq y &\Longleftrightarrow x \leq y \text{ et } -x \leq y \\ &\Longleftrightarrow -y \leq x \leq y \end{aligned}$$

Proposition 5 *Soient $x,y \in \mathbb{R}$,*

$$\sup\{x,y\} = \frac{1}{2}\left(x + y + |x - y|\right)$$
$$\inf\{x,y\} = \frac{1}{2}\left(x + y - |x - y|\right)$$

[Ind] Séparer les cas où $\sup\{x,y\} = x$ ou y.

Exercice 7 Calculer, pour $x,y \in \mathbb{R}$, les expressions

$$\frac{1}{2}\left(|x + y| + |x - y|\right) \text{ et } \frac{1}{2}\left(|x + y| - |x - y|\right)$$

6.3 Suites, suites extraites

Proposition 6 *L'ensemble des suites réelles convergentes est une sous-algèbre de l'algèbre des suites réelles et l'application qui, à une suite convergente associe sa limite est un morphisme d'algèbre.*

[Ind] Vérifier que l'ensemble est non vide et stable pour les opérations puis traduire la définition d'un morphisme d'algèbre.

Proposition 7 (Passage à la limite dans une inégalité) *Si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles* **convergentes** *alors*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq v_n \implies \lim_{n\to\infty} u_n \leq \lim_{n\to\infty} v_n.$$

[Ind] Par l'absurde.

Exercice 8 Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n < \lim\limits_{n\to\infty} v_n$ entraîne $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang.

Proposition 8 (Existence d'une limite par encadrement) *Soient (u_n) et (w_n) deux suites* **convergentes vers la même limite l** *et (v_n) une suite réelle,*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq v_n \leq w_n \implies \lim_{n\to\infty} v_n = l$$

[Ind] Utiliser la définition des limites avec les ε.

Théorème 2 *Soit (x_n) une suite croissante de réels. La suite (x_n) est convergente ou divergente vers $+\infty$ et*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Une suite croissante de réels est convergente si et seulement si elle est majorée.

Soit (x_n) une suite décroissante de réels. La suite (x_n) est convergente ou divergente vers $-\infty$ et

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Une suite décroissante de réels est convergente si et seulement si elle est minorée.

[Ind] Écrire la définition du sup.

De cette caractérisation des suites monotones convergentes, on en déduit des résultats importants:

Proposition 9 (Suites adjacentes) *Soient (u_n) une suite croissante et (v_n) une suite décroissante. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ alors les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes. Si, de plus, la suite $(u_n - v_n)$ converge vers 0, elles sont dites adjacentes et elles convergent vers la même limite.*

[Ind] Appliquer le théorème précédent.

Exercice 9 Montrer que deux suites sont adjacentes si et seulement si l'une est croissante, l'autre est décroissante et leur différence converge vers 0.

Exercice 10 Montrer que les deux suites $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\right)$ et $\left(\frac{1}{nn!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\right)$ sont adjacentes.

Théorème 3 (Théorème des segments emboîtés) *Soient (I_n) une suite décroissante (au sens de l'inclusion) de segments de $\mathbb{R}$, alors $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$ et K est un singleton si et seulement si la suite des longueurs de I_n tend vers 0.*

[Ind] Utiliser des suites adjacentes.

Définition 3 *Soit (x_n) une suite de réels, la suite (y_n) est appelée suite extraite de la suite (x_n) si et seulement s'il existe une injection croissante φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = x_{\varphi(n)}$.*

Proposition 10 *Une suite extraite d'une suite convergente est convergente vers la même limite.*

[Ind] Écrire la définition des limites avec les ε.

Exercice 11 Soit (x_n) une suite telle que les suites (x_{2n}), (x_{2n+1}) convergent respectivement vers l et m . Montrer que la suite (x_n) est convergente si et seulement $l = m$.

Exercice 12 Soit (x_n) une suite telle que les suites (x_{2n}), (x_{2n+1}) et (x_{3n}) convergent. Montrer que la suite (x_n) converge.

Théorème 4 (Théorème de Bolzano-Weierstrass) *De toute suite bornée de réels, on peut extraire une suite convergente.*

[Ind] Hors programme.Construire la suite.

Exercice 13 Soit A une partie strictement dénombrable et bornée de $\mathbb{R}$, montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x,y \in A$ tel que $0 < |x - y| \leq \varepsilon$

Exercice 14 Montrer que de toute suite convergente, on peut extraire une suite monotone. En déduire que de toute suite bornée, on peut extraire une suite monotone (et convergente).

6.4 Fonctions continues

Proposition 11 (Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$) *Soit A une partie de E,*

$$A \text{ est un intervalle} \iff \forall x,y \in A \quad [x,y] \subset A$$

[Ind] Quelle est la définition d'un intervalle.

Théorème 5 (Théorème des valeurs intermédiaires) *Soit f une fonction réelle continue définie sur un intervalle I, $f(I)$ est alors un intervalle de* $\mathbb{R}$.

[Ind] Chercher la plus grande racine de $f(x) = \gamma$.

On en déduit le principe de recherche par dichotomie d'un zéro d'une fonction continue définie sur un intervalle s'il existe deux valeurs a et b pour lesquelles $f(a)f(b) < 0$.

Proposition 12 (Caractérisation des fonctions monotones continues) *Soit f une fonction réelle monotone définie sur un intervalle I. La fonction f est continue si et seulement si $f(I)$ est un intervalle.*

[Ind]

Théorème 6 *Soit f une fonction continue définie sur un intervalle fermé borné, $f(I)$ est alors un intervalle fermé borné, en particulier f est bornée et atteint ses bornes.*

[Ind] Par l'absurde.

6.5 Fonctions dérivables

Théorème 7 (Théorème de Rolle) *Soit f une fonction réelle définie sur l'intervalle $[a,b]$ ($a \neq b$) continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Si $f(a) = f(b)$, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

[Ind] Prendre le maximum de f.

La démonstration repose sur la

Proposition 13 *Soit f une fonction réelle dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$. Si la fonction f présente un extremum local en un point $x \in]a,b[$, alors $f'(x) = 0$.*

[Ind] Étudier le taux de variations.

Du théorème de Rolle, on déduit le

Théorème 8 Accroissement finis. *Soit f une fonction réelle définie sur l'intervalle $[a,b]$ ($a \neq b$) continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.*

[Ind] Appliquer Rolle à une fonction auxilliaire.

Une conséquence du théorème des accroissements finis:

Proposition 14 *Soit f une fonction réelle définie sur l'intervalle $[a,b]$ ($a \neq b$) continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.*
a) La fonction f est croissante si et seulement si, pour tout $x \in]a,b[$, $f'(x) \geq 0$.
b) La fonction f est constante si et seulement si, pour tout $x \in]a,b[$, $f'(x) = 0$.
c) La fonction f est décroissante si et seulement si, pour tout $x \in]a,b[$, $f'(x) \leq 0$.

[Ind]

6.6 Fonctions convexes

6.6.1 Caractérisation des fonctions convexes

Définition 4 *Soient a et b deux réels. Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite convexe si :*

$$\forall x,y \in [a,b] \quad \forall t \in [0,1] \quad f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Elle est dite concave si:

$$\forall x,y \in [a,b] \quad \forall t \in [0,1] \quad f((1-t)x + ty) \geq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Remarque Une fonction est convexe si et seulement si son opposée est concave.

Définition 5 Épigraphe d'une fonction. *Soit f une fonction réelle définie sur I. L'épigraphe de f est l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I \text{ et } y \geq f(x)\}$.*

Proposition 15 Sur les graphes. *Une fonction est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe.*

[Ind] Traduire la convexité de l'épigraphe.

Proposition 16 Sur les pentes. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Les quatre propositions sont équivalentes:*

1) f est convexe.

2) $\forall x,y \in [a,b] \quad (x < y) \quad \forall u \in]x,y[\quad \dfrac{f(u)-f(x)}{u-x} \leq \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$.

3) $\forall x,y \in [a,b] \quad (x < y) \quad \forall u \in]x,y[\quad \dfrac{f(y)-f(u)}{y-u} \geq \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$.

4) $\forall x,y \in [a,b] \quad (x < y) \quad \forall u \in]x,y[\quad \dfrac{f(x)-f(u)}{x-u} \leq \dfrac{f(y)-f(u)}{y-u}$.

[Ind] Écrire un point de segment comme barycentre.

Proposition 17 Sur les fonctions pentes des fonctions convexes. *Soit f une fonction numérique définie sur l'intervalle I et pour $x \in I$, soit Φ_x la fonction définie sur $I - \{x\}$ par $\Phi_x(t) = \dfrac{f(x)-f(t)}{x-t}$.*
La fonction f est convexe si et seulement si pour tout $x \in I$, Φ_x est croissante.

[Ind] Utiliser la propostion précédente.

Proposition 18 Sur les tangentes des fonctions convexes dérivables. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable sur $]a,b[$.*

$$f \text{ convexe sur } [a,b] \Longleftrightarrow \forall x_0 \in]a,b[\quad \forall x \in [a,b] \quad f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \leq f(x).$$

[Ind] Faire un dessin puis éecrire la démonstration.

Proposition 19 Sur les fonctions convexes dérivables.

$$f \text{ convexe sur } [a,b] \Longleftrightarrow f' \text{ croissante sur }]a,b[.$$

[Ind]

Proposition 20 Sur les fonctions convexes deux fois dérivables. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur $]a,b[$.*

$$f \text{ convexe sur } [a,b] \Longleftrightarrow f'' \geq 0 \text{ sur }]a,b[.$$

[Ind] Résultat connu.

6.6.2 Quelques propriétés des fonctions convexes

Proposition 21 Sur la continuité et la dérivabilité des fonctions convexes. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ convexe, alors f est continue en tout point x appartenant à l'***intérieur** *de $[a,b]$ ($x \in]a,b[$). De plus f est dérivable à droite et à gauche en x et on a $f'_g(x) \leq f'_d(x)$.*

[Ind] Jouer avec les inégalités pour obtenir ce que l'on veut.

6.6.3 Inégalités de convexité

$\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$	$\ln(1+t) < t$
$\forall t \in \mathbb{R}$	$e^t \geq 1+t$
$\forall t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$	$\frac{2}{\pi}t \leq \sin t \leq t$
$\forall t \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$	$t \leq \tan t \leq \frac{4}{\pi}t$
$(x_1,\cdots,x_n) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^n$	$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_n)$

6.7 Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Il s'agit de réviser des notions de première année. En quelque sorte le b. a. ba nécessaire, sans lui inutile de continuer.

6.7.1 Equivalents :

Définition 6 *Soit deux fonctions f et g définies toute les deux au voisinage d'un point x_0, sauf éventuellement en x_0, on dit que*

$$f \underset{x_0}{\sim} g \text{ si et seulement si } \lim_{x_0} \frac{f}{g} = 1$$

on suppose ici que la fonction g ne s'annule pas dans un voisinage de x_0.

Définition 7 *Soit deux fonctions f et g définies toute les deux au voisinage d'un point x_0, sauf éventuellement en x_0, on dit que*

$$f = \underset{x_0}{o}(g) \text{ si et seulement si } \lim_{x_0} \frac{f}{g} = 0$$

on suppose ici que la fonction g ne s'annule pas dans un voisinage de x_0.

Remarque: En pratique il s'agit en connaissant la fonction f de trouver une fonction plus simple g équivalente à f au voisinage d'un point pour cela on ne considère plus que les termes qui ont "de l'importance" au voisinage de ce point. Bien entendu cette notion est locale et nous ne pouvons en tirer des renseignements qu'au voisinage du point considéré.
Remarque: D'autre part les résultats à connaître sont au voisinage de 0, si on est en un autre point on pose $x = x_0 + h$ et on raisonne avec h au voisinage de 0 ou $y = \dfrac{1}{x}$ au voisinage de x à l'infini.
Remarque: Enfin c'est seulement en connaissant par coeur des équivalents que vous pourrez faire des exercices.

Proposition 22 *On peut faire le produit ou le quotient d'équivalents mais en général pas une somme*

[Ind] Utiliser les écritures classiques du produit ou du quotient.

Proposition 23 ***Au voisinage de*** 0 *:*

$\sin x \sim x$	$\ln(1+x) \sim x$	$shx \sim x$
$\tan x \sim x$	$e^x - 1 \sim x$	$thx \sim x$
$\arcsin x \sim x$	$\cos x \sim 1 - \dfrac{x^2}{2}$	$\arg shx \sim x$
$\arctan x \sim x$	$chx \sim 1 + \dfrac{x^2}{2}$	$\arg thx \sim x$
	$(1+x)^\alpha \sim 1 + \alpha x$	$\arg ch(1+x) \sim \sqrt{2x}$

Au voisinage de $+\infty$ *:*

$chx \sim \frac{1}{2}e^x$	$argshx \sim \ln x$
$shx \sim \frac{1}{2}e^x$	$\arg chx \sim \ln x$

[Ind] Ici le but n'est pas la démonstration mais de savoir ces résultats. Se poser la question des démonstrations peut être amusant.

6.7.2 Développement limité

Comme pour les équivalents on se ramènera au voisinage de 0 :

Définition 8 *On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 si et seulement si :*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

Remarque: ici $o(x^n) = x^n \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Proposition 24 *Le développement limité d'une fonction, s'il existe est unique.*

Le DL_n au voisinage de 0 d'une fonction paire(resp impaire) est paire (resp impair)

[Ind] Qui sont les coefficients d'un D.L.

Proposition 25 théorème de Taylor-Young *Si la fonction f est n fois dérivable en 0 alors f admet un $DL_n(0)$ et*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f'(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

c'est ainsi que nous avons : $a_0 = f(0)$, $a_1 = f'(0), \cdots$

[Ind] Le vérifier.

Proposition 26 *On peut faire la **somme** de deux $DL_n(0)$ termes à termes, pour le **produit** il ne faut garder que les termes de degré inférieur à n. On peut **primitiver** un développement limité (si $f'(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$ alors $f(x) = f(0) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$) On peut **composer** c'est à dire si f et g sont continues en 0 et possèdent des $DL_n(0)$ de partie régulière respectivement P et Q et si $\boxed{f(0) = 0}$ alors pour trouver le $DL_n(0)$ de $g \circ f$ il suffira de substituer $Q(X)$ à X dans $P(X)$ et ne garder que les termes d'ordre $\leq n$. Enfin pour le **quotient** si f, g sont continues en 0 et $\boxed{g(0) \neq 0}$ alors $\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{g(0) + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)} = \frac{1}{g(0)} \frac{1}{1 + \frac{a_1}{g(0)}x + \cdots + \frac{a_n}{g(0)}x^n + o(x^n)}$ en composant les DL avec $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + \cdots + (-1)^n u^n + o(u^n)$ on obtient le DL de $\frac{1}{g}$ puis le quotient $\frac{f}{g}$.*

[Ind] Se ramener à des monômes.

Proposition 27

$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o\left(x^n\right)$
$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + +o\left(x^n\right)$
$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$
$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$
$shx = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$
$chx = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$
$\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + \dfrac{17x^7}{315} + o\left(x^7\right)$
$thx = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} - \dfrac{17x^7}{315} + o\left(x^7\right)$
$(1+x)^\alpha = 1 + \dfrac{\alpha}{1!}x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o\left(x^n\right)$
$\arcsin x = x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^5}{40} + \cdots + \dfrac{1\times 3\times\cdots\times(2p-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2p)}\dfrac{x^{2p+1}}{2p+1} + o\left(x^{2p+1}\right)$
$\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o\left(x^n\right)$
$-\ln(1-x) = x + \dfrac{x^2}{2} + \cdots + \dfrac{x^n}{n} + o\left(x^n\right)$
$\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^p \dfrac{x^{2p+1}}{2p+1} + o\left(x^{2p+2}\right)$

[Ind] Taylor ou série géométrique.

6.8 Exercices

Exercice 15 Montrer si f et g sont des fonctions continues, il en est de même de $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$.

Exercice 16 Valeurs d'adhérence. Soit (u_n) une suite de réels, on dit que le réel λ est une valeur d'adhérence de la suite s'il existe une suite extraite de la suite (u_n) qui converge vers λ.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes: a) λ est une valeur d'adhérence de la suite.
b) Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid |u_n - \lambda| \leq \varepsilon\}$ est infini.
c) Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq n$ et $|u_p - \lambda| \leq \varepsilon$.

Exercice 17 Montrer qu'une suite bornée de réels possède au moins une valeur d'adhérence et qu'elle est convergente si et seulement si elle n'en possède qu'une seule.

Exercice 18 Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit (x_n) une suite de I possédant une valeur d'adhérence λ. Montrer que la suite $(f(x_n))$ possède $f(\lambda)$ comme valeur d'adhérence.

Exercice 19 Soit f une fonction continue telle $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l'$ existent et sont réelles. Montrer que f est une fonction bornée. Ses bornes sont-elles atteintes? Montrer que si $l = l'$ alors l'une au moins des deux bornes est atteinte.

Exercice 20 Soit f une fonction continue sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x+1)-f(x)$ à une limite ℓ quand x tend vers $+\infty$. Étudier la limite de $f(x)/x$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 21 Soit f une fonction numérique croissante sur $]0,+\infty[$ telle que la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = f(x)/x$ est décroissante. Montrer que g est continue. f l'est-elle également?

Exercice 22 Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x + \frac{1}{p}) = f(x)$.

Exercice 23 Soit G un sous groupe additif de $\mathbb{R}$. Montrer que G est soit discret, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $G = \alpha\mathbb{Z}$, soit dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 24 Soit $a \in \mathbb{R}$ et G le sous groupe additif de $\mathbb{R}$ engendré par 1 et a. Montrer que : $a \notin \mathbb{Q}$ équivaut à G est dense dans $\mathbb{R}$.
En déduire que $\{\cos n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1,1]$.

Exercice 25 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui admet 1 et $\sqrt{2}$ comme périodes. Montrer que f est constante.

Exercice 26 Soit f et g deux fonctions continues périodiques de période T et T' respectivement. Montrer que si T/T' est rationnel alors $f + g$ est périodique. Montrer que si T/T' n'est pas rationnel, alors $f + g$ est apériodique.

Exercice 27 Soit f une fonction continue injective sur l'intervalle $[a,b]$ $(a < b)$ et x fixé appartenant à $[a,b]$. On considère la fonction φ définie sur $]x,b]$ par $\varphi(y) = f(y) - f(x)$. Étudier le signe de φ. En déduire que f est strictement monotone.

Exercice 28 Montrer si f est une fonction numérique continue sur $[a,b]$, la fonction g définie par:

$$\forall x \in [a,b] \quad g(x) = \sup_{a \le t \le x} f(t)$$

est continue.

Exercice 29 Soit $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$, $f\ :\ I \to I$ une fonction croissante. Montrer qu'il existe au moins un point x de l'intervalle I tel que $f(x) = x$.

Exercice 30 Que peut-on dire de la réciproque d'une fonction convexe ou concave?

Exercice 31 Trouvez des exemples de fonctions convexes ou concaves:
a) croissantes, b) décroissantes, c) non monotones, d) non continues, e) non dérivables.

Exercice 32 La composée de deux fonctions convexes n'est pas forcément convexe: trouvez au moins un exemple.

Exercice 33 Que peut-on dire d'une fonction convexe définie sur $\mathbb{R}$ et bornée?

Exercice 34 Soit f une fonction convexe sur $[a,b]$. Montrer que:
$\forall x_1,x_2,\ldots,x_n \in [a,b] \quad \forall \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$:

$$f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Quelle inégalité a-t-on si on suppose que f est concave?

Exercice 35 Soient $a_1,a_2,\ldots,a_n$ des réels positifs. Montrer que

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots a_n}{n}.$$

Exercice 36 Soit f une fonction réelle définie sur l'intervalle I. Montrer que

$$f \text{ est convexe} \Longleftrightarrow \left(\forall x,y,z \in I \quad x < y < z \implies \begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{vmatrix} > 0 \right)$$

Exercice 37 [inégalité de Hölder] Soient x et y des réels positifs, p et q des réels positifs tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Montrer que:

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}x^q.$$

En déduire que si $x_1,x_2,\ldots,x_n,y_1,y_2,\ldots,y_n$ sont des réels positifs:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right]^{\frac{1}{q}}.$$

6.9 Travaux Dirigés : Révision sur $\mathbb{R}$

Exercice 38 [calculer les limites suivantes]
$\lim\limits_{0}(\cos x)^{\cot an 2x}$; $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{2x-\pi}}$; $\lim\limits_{0} |\sin x|^{\tan x}$. $\lim\limits_{\infty} (x+1)exp(\frac{1}{x+1})-xexp(\frac{1}{x})$; $\lim\limits_{+\infty} x\left(\frac{1}{e}-\left(\frac{x}{x+1}\right)^x\right)$;
$\lim\limits_{0} \frac{\cos x-\sqrt{\cos 2x}}{\sin^2 x}$ $\lim\limits_{0} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{(x-\sin x)}}$; $\lim\limits_{0}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$;$\lim\limits_{a} \frac{x^a-a^x}{x^x-a^a}$.

Exercice 39 $\diamondsuit$DL3(-1) de $\dfrac{x+1}{x^2+3x+3}$; DL6(0) de $\cos^n x$; Donner des équivalents simples de y_1,y_2,y_3,y_1-y_2,y_1-y_3 en $+\infty$ avec $y_1=\sqrt[3]{x^3+x+1}$; $y_2=\sqrt{x+1}$; $y_3=\sqrt{x^2+1}$.
$\diamondsuit$DL2(0) de $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$; DL3(0) de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$; DL5(0) de $e^x-\sqrt{1+2x}$; DL3$(+\infty)$ de $\arctan\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$; DL2$(\frac{\pi}{4})$de $(1+\tan x)^{\frac{1}{3}}$; DL$(+\infty)$ de $\frac{x^3+2}{x-2}$à la précision $(\frac{1}{x})^2$.; D.L. d'ordre 4 de $\frac{\ln x}{x^2}$ en 1 .
$\diamondsuit$DL4$\left(\frac{\pi}{4}\right)$ de $(\tan x)^{\tan 2x}$.

Exercice 40 [Etudier les fonctions suivantes:]
$f(t)=\frac{t\ln t}{t^2-1}$ et $g(t)=\frac{t^2-2t-1}{t}\exp(-\frac{1}{t})$ (On utilisera dans la mesure du possible les DL)

Exercice 41 Soit $f(x)=(chx)^{\frac{1}{x}}$ pour $x\in\mathbb{R}$. Prolonger f par continuité en 0, étudier les variations de f et construire son graphe.

Exercice 42 Etudier la fonction f définie par $f(x)=x|1+\frac{1}{x}|^{x+1}$. On utilsera des D.L.

Exercice 43 [Le corps $\mathbb{R}$]
Détermination des sous-groupes additifs de R. Soit G un tel sous-groupe de $(\mathbb{R}_+)$ différent de $\{0\}$.
1^0) Montrer que $G\cap\mathbb{R}_*^+$ admet une borne inférieure α dans $\mathbb{R}^+$.
2^0) On suppose $\alpha>0$, montrer que $G=\alpha\mathbb{Z}$.
3^0) On suppose $\alpha=0$, montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.
En déduire que tout sous-groupe additif G de $\mathbb{R}$ est ou bien discret (c'est à dire de la forme $\alpha\mathbb{Z}$) ou bien dense dans $\mathbb{R}$.
4^0) Soit ω un réel et $G_\omega=\left\{a+b\omega,(a,b)\in\mathbb{Z}^2\right\}$
i) Montrer que G_ω est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.
ii) Si $\omega\in\mathbb{Q}$ alors G_ω est discret. On montrera que si $\omega=\frac{p}{q}$ avvec p et q entiers premiers entr'eux, $q>0$ alors $G_\omega=\frac{1}{q}\mathbb{Z}$
iii) Etablir que si $\omega\notin\mathbb{Q}$ alors G_ω est dense dans$\mathbb{R}$. On montrera même que $\{a+b\omega,(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 44 Montrer que tout homomorphisme du groupe $(\mathbb{R},+)$ dans lui-même est dérivable. Déterminer explicitement tous ces homomorphismes. En déduire tous les homomorphismes continues du groupe $(\mathbb{R},+)$ dans le groupe $\left(\mathbb{R}_+^*,\times\right)$.

Exercice 45 [Borne supérieure]
Pour tout entier $n>0$, on définit l'ensemble des réels $E_n=\left\{k+\frac{n}{k},k\in\mathbb{N}^*\right\}$.
1^0) Montrer que E_n admet une borne inférieure et que $\inf E_n=\inf\limits_{1\leq k\leq n}\left(k+\frac{n}{k}\right)$.
2^0) Montrer que pour tout n entier non nul on a : $\inf E_n\geq\sqrt{4n}$, dans quels cas a-t-on l'égalité.

Exercice 46 On désigne par $(a_1,\cdots,a_n)$ une suite croissante et finie de nombres réels. Quelle est la borne inférieure m de l'ensemble des nombres $\sum\limits_{i=1}^{n}|x-a_i|$ où $x\in\mathbb{R}$. On pourra faire le graphe de f fonction définie par $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}|x-a_i|$ et distinguer deux cas selon la parité de n.

Exercice 47 [moyenne de Cesaro]

Soit (s_n) une suite de nombres, montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = s$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{j=0}^{n} s_j}{n+1} = s$ et que la réciproque est fausse.

> indication : savoir la définition des limites par les "ε" ; remarquer $\frac{1}{n+1}\sum\limits_{j=0}^{n} s = s$; savoir que $\left|\sum\limits_{j=0}^{n} a_j\right| \leq \sum\limits_{j=0}^{n} |a_j|$; pour tout nombre A donné la limite de $\frac{A}{n+1}$ quand n tend vers $+\infty$ est 0.
> Pour la réciproque prendre des suites que l'on doit connaître (suite alternée , arithmétique (somme des n premiers entiers), géométrique).

Exercice 48 [les sommes de Fejer]
Soit (a_r) une suite de nombres.
Posons $s_n(t) = \sum\limits_{r=-n}^{n} a_r e^{irt}$ et $\sigma_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{j=0}^{n} s_j(t)$ la moyenne de Cesaro associée à s_n. Montrer que $\sigma_n(t) = \sum\limits_{r=-n}^{n} \dfrac{n+1-|r|}{n+1} a_r e^{irt}$.

> indication : intervertir les "$\sum$" et compter.

Exercice 49 [sur le noyau de Fejer]
Posons $K_n(s) = \sum\limits_{r=-n}^{n} \dfrac{n+1-|r|}{n+1} e^{irs}$ et montrer que si $s \neq 0$ alors $K_n(s) = \frac{1}{n+1}\left(\dfrac{\sin\frac{(n+1)}{2}s}{\sin\frac{s}{2}}\right)^2$ et si $s=0$ alors $K_n(0) = n+1$.

> indication : on remarquera que : $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} e^{i\left(k-\frac{n}{2}\right)s}\right)^2 = \sum\limits_{r=-n}^{n} (n+1-|r|)\, e^{irs}$ en comptant ...sérieusement.

Exercice 50 [et on veut voir!]
Représenter sous Maple K_n pour $n =$ 2,5,...,15.

Exercice 51 [Leibnitz]
On pose $P_n(x) = \left(\left(x^2-1\right)^n\right)^{(n)}$ n^{ème} dérivée du polynôme $\left(x^2-1\right)^n$. Monter que pour $n \geq 1$:
$P_n'(x) = 2(n+1)xP_{n-1}'(x) + \left(x^2-1\right)P_{n-1}''(x) + n(n+1)P_{n-1}(x)$.

> indication : savoir la formule ; un polynôme n'a q'un nombre fini de dérivées non nulles.

Exercice 52 [Dérivons]
A) Encadrement de la fonction $u \to \sqrt{1-u}$ sur [0,1].
a) Soit g la fonction définie sur [0,1] par $g(u) = 1 - \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \sqrt{1-u}$, étudier les variations de g et en déduire un encadrement de $g(u)$ pour $u \in [0,1]$.
b) Soit h la fonction définie sur [0,1] par $h(u) = 1 - \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 - \sqrt{1-u}$, démontrer que : $\forall u \in$ [0,1], $0 \leq \frac{1}{16}u^3 \leq h(u) \leq \frac{3}{8}u^3$.

c) Déduire de ce qui précède un encadrement de $\sqrt{1-u}$ sur [0,1].
B) Soit t un réel, n un entier supérieur à 2 et la suite de fonctions polynômes $(A_n)_{n\geq 2}$ définie par :
$A_n(t) = nt^{n+1} - (n+2)t^n + nt + 2 - n$.
1) Vérifier que 1 est racine de A_n et donner son ordre de multiplicité.
2) Etudier les variations de A_n sur $\mathbb{R}$ en distinguant deux cas selon la parité de n.
3) Déterminer le nombre de racines réelles de A_n et leur ordre de multiplicité.

Exercice 53 [Limites]
1) Montrer que $\forall x \neq 0,\ 0 \leq \left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq \left|\frac{1}{x}\right|$. Déterminer la limite en $+\infty$ de $x \to \sin \frac{1}{x}$.
2) Trouver les limites suivantes : $f(x) = \cos x \exp\left(\frac{1}{1-\sin x}\right)$ en $\frac{\pi}{2}$.
$g(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$ en 0 . $h(x) = x\sqrt{1+\frac{1}{x}} - x$ en $+\infty$. $i(x) = \frac{2x+|2x-7|}{x+\sqrt{x^2+1}}$ en $+\infty$.

Exercice 54 Démonter que $\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) = n^2$ et $\forall a \in R_+^*$, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

6.10 Démonstrations

Proposition 1 Tout dépend de la définition de $\mathbb{R}$ qui n'est pas au programme. Si on définit $\mathbb{R}$ comme le complété de $\mathbb{Q}$ c'est le théorème d'Archimède. $\forall a \in R$ il existe un entier p tel que $p > a$. Si $x = (x_n)$ est une suite de Cauchy de rationnels représentant le réel a alors la suite (x_n) est bornée. Il existe un nombre rationnel $M = \frac{p}{q}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}\, |x_n| \leq M$. La suite $(M - x_n)$ est formée de rationnels positifs et tend vers $M - a$ qui est donc positif. Ainsi $M \geq a$ ou $\frac{m}{q} \geq a$ et $m \geq a$. Par suite $p = m + 1$ vérifie $p > a$. On en déduit que $\forall a,b \in \mathbb{R}$ tels que $a > 0$ il existe un entier p tel que $pa > b$ en remplaçant a par $\frac{b}{a}$. Puis le résultat.

Théorème 1 Admis.

Proposition 2 En effet la premiére assertion exprime que α est un majorant et la seconde que pour tout $\varepsilon > 0$ $M - \varepsilon$ n'est pas majorant donc α est bien le plus petit majorant.

Proposition 3 Cela exprime que α est le plus grand des minorants.

Proposition 4 Si $\sup A < +\infty$ alors $\sup A \in \mathbb{R}$ et A est majoré par $\sup A$ ($\forall x \in A$ $x \leq \sup A$. Si A est majoré alors l'ensemble des majorants n'est pas vide et possède donc un plus petit élément d'où $\sup A \in \mathbb{R}$. De même pour la borne inférieure.

Proposition 5 En effet si $x \leq y$ alors $x + y + |x - y| = x + y - x + y = 2y$ et si $x \geq y$ alors $x + y + |x - y| = x + y + x - y = 2x$. De même pour l'inf.

Proposition 6 Nous allons utiliser la proposition suivante pour éviter d'écrire les ε. Cet ensemble E n'est pas vide, la suite nulle est dedans. Soient des suites (x_n) et (y_n) convergentes vers ℓ et ℓ' on a $0 \leq |u_n + v_n - \ell - \ell'| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'|$. Par encadrement l'expression de droite tend vers 0 donc celle de gauche aussi et $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$.
Si $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $|\lambda x_n - \lambda\ell| = |\lambda|\,|x_n - \ell|$ or $|x_n - \ell|$ tend vers 0 quand n tend vers ∞ donc il en est de même de $|\lambda x_n - \lambda\ell|$.
Pour le produit : $|x_n y_n - \ell\ell'| = |(x_n - \ell)y_n + (y_n - \ell')\ell|$ qui est majorée par $|x_n - \ell|\,|y_n| + |y_n - \ell'|\,|\ell|$. La suite (y_n) ést bornée car convergente, par comparaison on obtient que $\lim_{n\to+\infty} |x_n y_n - \ell\ell'| = 0$.
Ceci prouve que E est une sous-algbre. De plus dire que l'application φ qui à une suite convergente associe sa limite est un morphisme d'algèbre c'est dire que la limite de la somme est la somme des limites, la limite de λx_n est λ la limite, et que la limite d'un produit de suites est le produit des limites, ce que l'on a montré.

Proposition 7 On peut se ramener par différence à montrer que si $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $x_n \geq 0$ alors la limite ℓ est positive. Si $\ell < 0$ alors en faisant $\varepsilon = -2\ell$ dans $\forall\varepsilon > 0\, \exists n_0 \,:\, \forall n \in N \,:\, n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - \ell| \leq \varepsilon$ donnerait $\forall n \geq n_0 \,:\, |x_n - \ell| \leq -2\ell$ ou $x_n \leq \ell - 2\ell$ c'est à dire $x_n < 0$ ce qui contredit l'hypothèse.

Proposition 8 Avec les hypothèses la quantité $|v_n - \ell| \leq \sup |w_n - \ell|\,, |u_n - \ell|$. Soit $\varepsilon > 0$ on a $\exists n_0 \,:\, \forall n \in N \,:\, n \geq n_0 \Rightarrow |w_n - \ell| \leq \varepsilon$ et $\exists n_1 \,:\, \forall n \in N \,:\, n \geq n_1 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon$ donc $\forall\varepsilon > 0\, \exists n_2 = \sup n_0,n_1 \,:\, \forall n \in N \,:\, n \geq n_2 \Rightarrow |v_n - \ell| \leq \varepsilon$ ce qui prouve que (v_n) tend vers ℓ.

Théorème 2 Soit (x_n) une suite croissante ou bien elle est majorée et nous posons $\ell = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Par définition $\forall\varepsilon\ \exists p \in \mathbb{N} \,:\, \ell - \varepsilon \leq x_p \leq \ell$ mais la suite est croissante donc $\forall n \geq p$ $x_p \leq x_n \leq \ell$ ou $0 \leq \ell - x_n \leq \varepsilon$ ce qui donne que la site tend vers ℓ. Si la suite n'est pas majorée alors $\forall\lambda \in \mathbb{R}$ il existe un terme de la suite disons x_p tel que $x_p \geq \lambda$ mais alors $\forall n \geq p$ on a $x_n \geq x_p \geq \lambda$ c'est à dire que la suite (x_n) tend vers $+\infty$.

Proposition 9 On a que la suite (u_n) est croissante et majorée car $\forall n \,:\, u_n \leq v_n \leq v_0$ donc convergente vers ℓ. La suite (v_n) est décroissante et minorée car $u_0 \leq u_n \leq v_n$ donc convergente vers ℓ'. Or $u_n - v_n$ tend vers 0 donc en passant à la limite on a $\ell - \ell' = 0$ ce qui donne le résultat.

Théorème 3 Posons $I_n = [a_n,b_n]$. Comme (I_n) est décroissante on a que (a_n) est croissante et (b_n) décroissante et $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n$. Ainsi par application de la proposition sur le suites adjacentes (a_n) converge vers a et (b_n) converge vers b avec $a \leq b$. Il en résulte que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est égal à $[a,b]$ qui n'est pas vide. Si la longueur des I_n tend vers 0 alors $b_n - a_n$ tend vers 0 et $a = b$ donc K est un singleton. Si K est un singleton c'est donc que $a = b$ et donc $b_n - a_n$, longueur de I_n tend vers 0.

Proposition 10 Si (u_n) est une suite convergente vers ℓ, alors $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Or φ est une injection croissante donc il existe $i_0 \geq n_0$ et $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists i_0 \in \mathbb{N} \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad i \geq i_0 \implies \left|u_{\varphi(i)} - \ell\right| \leq \varepsilon$.

Théorème 4 Soit (x_n) une suite bornée de réels. Notons $X_n = \{x_p \mid p \geq n\}$ et $\alpha_n = \inf X_n$ qui est bien définie car la suite est minorée. La suite (α_n) est croissante, d'autre part elle est majorée puisque la suite (x_n) est majorée. Soit α la limite de la suite (α_n). Construisons par récurrence une suite strictement croissante d'entiers $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|x_{p_k} - \alpha| \leq \dfrac{1}{k+1}$.
La borne supérieure de l'ensemble des valeurs α_n est α. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ telle que $\alpha - 1 \leq \alpha_{n_0} \leq \alpha$. Il existe aussi $p_0 \geq n_0$ tel que $\alpha_{n_0} \leq x_{p_0} \leq \alpha_{n0} + 1$ ainsi, on a bien $-1 \leq x_{p_0} - \alpha \leq 1$.
Soit $m \in \mathbb{N}$. Supposons avoir construit une suite strictement croissante d'entiers $p_0, \ldots ,p_m$ telle que, pour tout $k \in [0,m]$, $|x_{p_k} - \alpha| \leq \dfrac{1}{k+1}$. Il existe $n_{m+1} \in \mathbb{N}$ telle que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_{m+1} , $\alpha - \dfrac{1}{m+2} \leq \alpha_n \leq \alpha$. Ainsi, en considérant l'entier $n'_{m+1} = \sup\{n_{m+1},p_m + 1\}$, on trouve qu'il existe un entier $p_{m+1} \geq n'_{m+1}$ tel que $\alpha_{n'_{m+1}} \leq x_{p_{m+1}} \leq \alpha_{n'_{m+1}} + \dfrac{1}{m+2}$. On a alors $\left|\alpha - x_{p_{m+1}}\right| \leq \dfrac{1}{m+2}$ et $p_{m+1} \geq p_m + 1 > p_m$.
On construit ainsi une suite $(x_{p_k})_{k\in\mathbb{N}}$ extraite de la suite (x_n) et qui converge vers α.

Proposition 11 Prenons un intervalle du type $A =]a,b[= \ x \in \mathbb{R} : a < x < b$. alors $\forall x,y \in A$ les éléments $z : x \leq z \leq y$ vérifie $a < z < b$ et donc sont dans A d'où $[x,y] \subset A$. Réciproquement dans $\overline{\mathbb{R}}$ posons $a = \inf A$ et $b = \sup A$ alors si $a < z < b$ il existe, par définition des bornes sup et inf, $z,t \in A$ tel que $z \in [z,t]$ donc $z \in A$ et $]a,b[\subset A$ enfin si $z \in A$ alors évidement $a < z < b$ par définition de a,b. Donc $A =]a,b[$.

Théorème 5 Posons $m = \inf f(I)$ et $M) \sup f(I)$. Si $m = M$ c'est vrai. Sinon soit γ te que: $m < \gamma < M$ il existe alors a,b dans I tels que: $m \leq f(a) < \gamma < f(b) \leq M$. Supposons par exemple $a < b$. Soit $\mathcal{C} = \ \S \in [\dashv,\lfloor] : \{(\S) \leq \gamma$ et posons $c = \sup \mathcal{C}$. Il existe une suite (x_n) telle que $\lim x_n = c$, la continuité de f donne $\lim f(x_n) = f(c)$ et par suite $f(c) \leq \gamma$ car $f(x_n) \leq \gamma$. D'autre part $c = \sup \mathcal{C}$ donc $f(x) > \gamma$ et $\forall x \in]c,b[$ on a $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c) \geq \gamma$. Ainsi $f(c) = \gamma$.

Proposition 12 D'une part on a que si f est une fonction continue sur un intervalle I alors $f(I)$ est un intervalle par le théorème des valeurs intermédiaires. D'autre part toute fonction disons croissante possède une limite à gauche et à droite en tout point a de I et $f(a^-) \leq f(a) \leq f(a^+)$. En effet pour $a \in I$ soit $X = \ x \in I : x < a$ et $M = \sup f(X)$ alors $\forall \varepsilon$ il existe $u \in I : u < a$ et $M - \varepsilon \leq f(u) \leq M$ la croissance de f donne alors que $\forall v \in]u,a[$ on a $M - \varepsilon \leq f(v) \leq M$ donc $M = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a^-)$ et donc f admet une limite à gauche qui vérifie $f(a^-) \leq f(a)$. De même à droite. Maintenant si $f(I)$ est un intervalle la croissance de f donne que $f(a^-) = f(a) = f(a^+)$ donc f est continue en a.

Théorème 6 Posons $I = [a,b]$.Si f n'était pas bornée, il existerait pour chaque $n \in \mathbb{N}$, un point x_n de I vérifiant $|f(x_n)| \geq n$. De la suite (x_n) on pourrait extraire une suite $(x_{\varphi(n)})$ convergent vers x élément de I, f étant continue on aurait $(f(x_n))$ qui convergerait vers $f(x)$ ce qui est impossible car $(f(x_n))$ n'est pas bornée. Donc f est bornée. Posons $M = \sup\limits_I f$ et $m = \inf\limits_I f$ Si f ne prenait pas la valeur M alors la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{M - f(x)}$ serait continue sur I donc bornée et il existerait $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in I : |M - f(x)| \geq \alpha$ ce qui donnerait $\forall x \in I : f(x) \leq M - \alpha$ ce qui contredit le fait que M soit la borne supérieure. De même avec m.

Théorème 7 Si f est constante alors $f'(x) = 0$ si $x \in]a,b[$ et le résultat est vrai. Sinon f prend des valeurs différentes de $f(a)$ et de $f(b)$, disons des valeurs supérieures. Soit $M = \sup_I f = f(c)$. Ainsi $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ est positif pour $x \leq c$ et négatif si $x \geq c$ donc sa limite qui existe c'est $f'(c)$ est nulle.

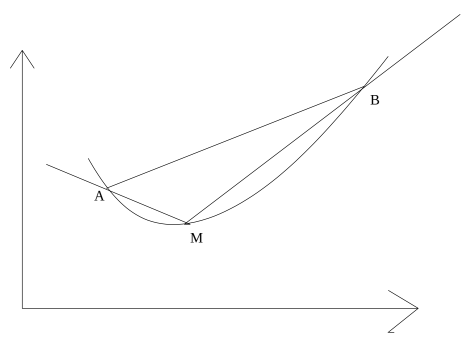
Proposition 13 Nous l'avons fait on regarde le taux de variations : Supposons qu'il s'agisse d'un maximum, le rapport $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ est positif pour $x \leq c$ et négatif si $x \geq c$ donc sa limite $f'(c)$ est positive et négative donc nulle.

Théorème 8 On considère les points $A = (a,f(a)$, $B = (b,f(b)$ et, pour $x \in I$, $M(x) = (x,f(x)$ de $\mathbb{R}^2$, la fonction $x \mapsto \det(\overrightarrow{AM(x)},\overrightarrow{AB})$ vérifie les hypothèses du théorème de Rolle et, pour $x \in I$, $\varphi'(x) = \begin{vmatrix} 1 & b - a \\ f'(x) & f(b) - f(a) \end{vmatrix}$.

Proposition 14 Faisons a) les autres sont identiques. Si f est croissante en regardant le taux de variations $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ est positif pour tout x donc sa limite $f'(c)$ est positif. Réciproquement soit $x \leq y \in [a,b]$ le théorème des accrooissements finis donne il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(y) - f(x)) = f'(c)(y - x)$ ainsi si $f'(c) \geq 0$ on a $f(y) \geq f(x)$ et f est croissante.

Proposition 15 Dire que l'épigraphe $\mathcal{E}$est convexe c'est dire que $\forall X,Y \in \mathcal{E}$ le segment $[X,Y]$ est dans $\mathcal{E}$. Mais un point du segment s'écrit $Z = (1-t)X + tY$ avec $t \in [0,1]$. Posons $X = (x_1,y_1)$ et $Y = (x_2,y_2)$ on a si $y_1 \geq f(x_1)$ et $y_2 \geq f(x_2)$ que $(1 - t)y_1 + ty_2 \geq f((1 - t)x_1 + tx_2)$. En outre $(1 - t)f(x_1) + tf(x_2) \geq f((1 - t)x_1 + tx_2)$. Ainsi si l'épigraphe est convexe la fonction est convexe. Maintenant si la fonction est convexe, en reprenant les notations ci-dessus on a $(1 - t)y_1 + ty_2 \geq (1 - t)f(x_1) + tf(x_2) \geq f((1 - t)x_1 + tx_2)$ et donc le segment (X,Y) est dans l'épigraphe.

Proposition 16 Si f est convexe on a $\dfrac{f(u) - f(x)}{u - x} = \dfrac{f((1 - t)x + ty) - f(x)}{u - x} \leq \dfrac{(1 - t)f(x) + tf(y) - f(x)}{(1 - t)x + ty - x} = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$. Réciproquement si $\dfrac{f(u) - f(x)}{u - x} \leq \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$ alors $f(u) \leq \frac{u-x}{y-x} f(y) + (1 - \frac{u-x}{y-x})f(x)$ ce qui, en posant $u = (1 - t)x + ty$ donne $f((1 - t)x + ty) \leq (1 - t)f(x) + tf(y)$ c'est à dire f est convexe. 3) et 4) se montrent pareillement. Il s'agit des inégalités entre les pentes de AB,AM,MB.



Proposition 17 Dire que Φ_x est croissante c'est écrire : si $t \leq t'$ $\dfrac{f(t) - f(x)}{t - x} \leq \dfrac{f(t') - f(x)}{t' - x}$ C'est l'inégalité 2) si $x < t < t'$ et l'inégalité 3) si $t < t' < x$ et l'inégalité 4) si $t < x < t'$. Réciproquement il faut montrer que $f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$. Si $x = y$ ou $t = 0,1$ c'est vrai. Ainsi on peut supposer $x < y$ et $0 < t < 1$ donc $u = tx + (1-t)y$ vérifie $x < u < y$ et la crioissance de $z \longmapsto \dfrac{f(z) - f(y)}{z - y}$ sur I/y donne $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \dfrac{f(u) - f(y)}{u - y} = \dfrac{f(y) - f(u)}{y - u}$. Or $y - u > 0$ ce qui donne $\dfrac{y - u}{x - y}\,(f(x) - f(y)\,) \leq f(y) - f(u)$ d'où $f(u) \leq f(y) - \dfrac{y - u}{x - y}\,(f(x) - f(y)\,) = \dfrac{u - y}{x - y} f(x) + \left(1 - \dfrac{u - y}{x - y}\right) f(y)$ comme $t = \dfrac{u - y}{x - y}$ on obtient le résultat.

Proposition 18 Si f est convexe $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq \dfrac{f(z)-f(x_0)}{z-x_0}$ pour tout $z\ :\ x_0 < z < x$. En faisant tendre z vers x_0 on obtient le résultat si $x \geq x_0$. Dans l'autre cas $x \leq x_0$ on utilise l'autre inégalité. Pour la réciproque On a $f(x) \geq f(y) + (x-y)f'(y)$ donc si $x < y$ alors $x - y < 0$ et $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq f'(y)$. Mais nous avons aussi $f(y) \geq f(x) + (y-x)f'(x)$ et comme $y - x > 0$ on obtient $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq f'(x)$ ce qui montre que si $x < y$ alors $f'(x) \leq f'(y)$. f' est croissante. Ce qui montre la convexité de f grâce à la proposition suivante.

Proposition 19 En utilisant si $x_0 < y_0 < x$ les inégalités $f'(x_0) \leq \dfrac{f(x)-f(x_0}{x-x_0} \leq \dfrac{f(x)-f(y_0}{x-y_0}$ puis en faisant tendre x vers y_0 on obtient si $x_0 \leq y_0$: $f'(x_0) \leq f'(y_0)$. Ainsi f' est croissante. Réciproquement si f n'est pas convexe alors il existerait des points a,b,c tels que (*) $a < b < c$ et $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$ ce qui donne $\sup\limits_{a\leq x\leq b} f'(x) \geq \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b} \geq \inf\limits_{b\leq x\leq c} f'(x)$. Les inégalités (*) entraîne l'existence d'un point $u \in [a,b]$ et d'un point $c \in [b,c]$ tels que $f'(u) > f'(v)$ ce qui contredit la croissance de la fonction f'.

Proposition 20 On sait que sous ces hypothèses f' est croissante si et seulement si sa dérivée f'' est positive.

Proposition 21 Posons $F_u(t) = \dfrac{f(t)-f(u)}{t-u}$ on sait que si f est convexe alors F_u est croissante pour tout u de $I = [a,b]$ sur I/u. Si u est intérieur à I alors F_u est majorée par $F_u(w)$ pour $t < w$ et $w \in I$. Elle admet donc une limite à gauche au point u, $F_u(u^-)$ satisfaisant $F_u(v) \leq F_u(u^-) \leq F_u(w)$ pour tous $u,v \in I\ :\ v < u < w$. Ainsi la dérivée à gauche $f'_g(u)$ existe et vérifie $\dfrac{f(v)-f(u)}{v-u} \leq f'_g(u) \leq \dfrac{f(w)-f(u)}{w-u}$ pour tous $u,w \in I\ :\ v < u < w$. Pour $t > u$ la fonction croissante F_u est minorée par $f'_g(u)$ et admet une limite à droite au point u, $F_u(u^+$ vérifiant $f'_g(u) \leq F_u(u^+) \leq F_u(w)$ pour $w > u$. Donc la dérivée à droite existe et vérifie : $f'_g(u) \leq f'_d(u) \leq \dfrac{f(w)-f(u)}{w-u}$ pour $w \in I\ :\ w > u$. En changeant de notations on a si $v > u$: $f'_g(u) \leq f'_d(u) \leq \dfrac{f(v)-f(u)}{v-u} \leq f'_g(v) \leq f'_d(v)$. Les fonctions f'_g et f'_d sont croissantes et leurs existences prouvent que f est continue.

Proposition 22 Pour le produit on écrit $|f_1(t)g_1(t) - f_2(t)g_2(t)| \leq |f_1(t) - f_2(t)|\,|g_1(t)| + |g_1(t) - g_2(t)|\,|f_2(t)|$. Ainsi $\forall\varepsilon$ il existe η tel que $|t - t_0| \leq \eta$ implique $|f_1(t)g_1(t) - f_2(t)g_2(t)| \leq \varepsilon\,|f_2(t)|\,|g_1(t)| + \varepsilon\,|g_1(t)|\,|f_2(t)|$. De même pour le quotient en utilisant l'égalité : $\left|\dfrac{1}{f} - \dfrac{1}{g}\right| = \dfrac{|f-g|}{fg}$.
Pour la somme il est claire que sans précaution on peut trouver zéro.

Proposition 23 Prenons par exemple la première soit $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Tout dépend comment a-t-on défini la fonction sin. Si c'est géométriquement il y a une démonstration géométrique : en comparant l'aire de deux triangles et d'un secteur angulaire on obtient : $\cos x \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq \dfrac{1}{\cos x}$. Le taux de variations en 0 suppose connue la dérivée de sin. De toute façon la meilleure définition des fonctions trigonométriques est celle par les séries exponentielles et ainsi on a les développements limités.
Pour la seconde si la fonction ln est définie comme primitive de la fonction $\dfrac{1}{x}$ on sait alors qu'elle est dérivable et le taux de variations donne la limite de $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.
Si la fonction exponentielle est la fonction inverse du ln on connait sa dérivée et c'est le taux de variations. Mais encore une fois la fonction exponentielle est la somme d'une série.
Pour les fonctions inverses comme arcsin, si on pose $\arcsin x = y$ on a $x = \sin y$. Si x est au voisinage de 0, y aussi et $x = \sin y \sim y$ ce qui donne $\arcsin x \sim x$....

Proposition 24 Dans un développement limité, disons en 0. On a que $a_0 = f(0)$ et plus généralement $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. D'où l'unicité. Pour une fonction paire en écrivant

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

et

$$f(-x) = a_0 + a_1(-x) + \cdots + a_n x^n + o((-1)^n x^n)$$

, puis en faisant la différence qui est nulle :

$$0 = 2a_0 + 2a_2 x + \cdots + 2a_{2n'} x^{2n'} + o(x^n)$$

. En utilisant l'unicité d'un D.L., ici 0 on en déduit que $\forall n \, : \, a_{2n} = 0$.

Proposition 25 Si la fonction est n fois dérivable alors on peut écrire la formule de Taylor-young propostion 28 ce qui donne bien le développement limité d'ordre n.

Proposition 26 Pour la somme on peut se ramener à des monômes et il suffit de se servir de $t^{-n}(f_1(t) + g_1(t) - f_2(t) - g_2(t)) = t^{-n}(f_1(t) - f_2(t)) + t^{-n}(g_1(t) - g_2(t))$.
Pour le produit on écrit : $t^{-n}(f_1(t)g_1(t) - f_2(t)g_2(t)) = t^{-n}(f_1(t) - f_2(t))\, g_1(t) + t^{-n}(g_1(t) - g_2(t))\, f_2(t)$, chacun des seconds membres apparaît comme une somme de deux termes qui tendent vers zéro quand t tend vers zéro.
Primitiver. On peut toujours intégrer la partie polynômiale. Le petit o s'écrit $x^n \varepsilon x$ avec ε continue au voisinage de 0. En écrivant pour tout ε il existe η tel que si $|x| \leq \eta$ on a $\left|\int_0^x o(t^n)\right| \leq \left|\dfrac{t^{n+1}}{n+1}\right| \varepsilon$ on obtient bien un $o(x^{n+1})$.
Pour la composée on obtient $g(f(x)) = Q(P(x) + o(x^n)) + o(x^n)$. Dans $Q(P(x) + o(x^n))$ on ne pourra garder que les termes de degré inférieur à n.
Le quotient est montré par composition.

Proposition 27 La première est la $n^{\text{ème}}$ somme partielle de la suite géométrique car le reste est $\left|\dfrac{-x^{n+1}}{1-x}\right| \leq |x^n|\, \varepsilon(x)$. De celle-là on trouve $\ln(1+x)$ puis $\ln(1-x)$ et $\dfrac{1}{1+x^2}$ et enfin par intégration arctan. Pour l'exponentielle, c'est la formule de Taylor, d'où les factoriels et on en déduit les fonctions hyperboliques. En utilisant Taylor pour e^{ix} on obtient les fonctions trigonomt́riques. Pour $(1+x)^\alpha$ on utilise une équation différentielle ou Taylor.

6.11 Exercices

6.11.1 Indications

Exercice 1 Écrire les définitions.

Exercice 2 Si A est vide utiliser la remarque précédente. Sinon montrer que $\inf A \leq \sup A$.

Exercice 3 Plus il y a de monde plus on a de chance de trouver des petits et des grands ! Pour la seconde et la troisième assertion procéder par double inégalité.

Exercice 4 Procéder par double inégalité par exemple en utilisant la caractérisation de la borne supérieure.

Exercice 5 Rappel $\alpha A = \{y \in \mathbb{R} \,:\, \exists x \in A \,:\, y = \alpha x\}$.

Exercice 6 Différentier le cas où $|x| = x$ et le cas $|x| = -x$.

Exercice 7 Séparer les cas selon que $x \leq y$ ou $x \geq y$.

Exercice 8 Écrire les définitions des limites avec les ε.

Exercice 9 Reprendre la démonstration précédente.

Exercice 10 Le vérifier.

Exercice 11 Pour la partie directe ce sont des suites extraites, pour la réciproque écrire la définition avec les ε de la limite que l'on veut et de ce que l'on a.

Exercice 12 Une suite extraite d'une suite convergente converge vers la même lmite.

Exercice 13 Une partie dénombrable est une suite.

Exercice 14 Construire φ injection croissante pour obtenir une suite extraite croissante.

Exercice 15 Se placer en un point x_0 et séparer les cas. Utiliser le critère avec les ε.

Exercice 16 pruve $a \Rightarrow b \Rightarrow c \Rightarrow a$.

Exercice 17 La première partie c'est Bolzano-Weierstrass. Pour la partie directe la limite est unique. Pour la réciproque prendre la contraposée en utilisant la divergence construire au moins deux valeurs d'adhérence distinctes.

Exercice 18 Prendre des suites extraites.

Exercice 19 Se débarasser d'une section commençante et d'une section finissante. Prendre un contre-exemple. Faire un dessin, si la fonction n'est pas constante se ramener à un compact.

Exercice 20 Se ramener à $\ell = 0$.Écrire l'hypothèse, faire intervenir la partie entière de x.

Exercice 21 Avec les hypothèses majorer $g(x) - g(y)$. Écrire f en fonction de g.

Exercice 22 Considérer la fonction $g_p \,:\, x \longmapsto f(x + \frac{1}{p}) - f(x)$ et montrer que g_p ne peut pas garder un signe constant.

Exercice 23 Considérer $\alpha = \inf G \cap \mathbb{R}_+^*$ et montrer que $\alpha = 0$ implique que G est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 24 Le sous groupe $\{n + ma, (n,m) \in \mathbb{Z}^2\}$ est ou bien monogène et alors $a \in \mathbb{Q}$ ou bien dense et alors $a \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$, pour cette dernière prendre la contraposée.
Pour la suite $\cos n$ il suffit de remarquer que la suite $m + 2n\pi$ est dense dans $\mathbb{R}$ puis utiliser la continuité de cos.

Exercice 25 Le groupe G des périodes de f n'est pas monogène car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, G est fermé et donc f est constante.

Exercice 26 Dans le second cas, on raisonnera par l'absurde et on montrera que si S est une période de $f+g$ alors les fonctions $x \to f(x+S) - f(x)$ et $x \to g(x) - g(x+S)$ sont constantes.

Exercice 27 Si le signe n'était pas constant....

Exercice 28 Il y a de la continuité uniforme.

Exercice 29 Étudier la fonction $\varphi(x) = f(x) - x$.

Exercice 30 Penser au graphe.

Exercice 31 Dessiner, puis trouver.

Exercice 32 Chercher et trouver.

Exercice 33 Sur un dessin c'est clair. Minorer $f(t)$ par une fonction affine puis faire tendre t vers l'infinie.

Exercice 34 Le faire deux par deux en prenant les barycentres partiels.

Exercice 35 La fonction ln est concave et $\displaystyle\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$.

Exercice 36 En développant se ramener à une proposition connue.

Exercice 37 Concavité du ln puis l'exponentielle. Puis le cas où $\sum x_i = \sum y_i = 1$, puis par homogénéité $x_i' = \dfrac{x_i}{\left(\sum x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}$.

6.11.2 Corrigés

Exercice 38 $\lim\limits_{0}(\cos x)^{\cot an 2x} = \lim\limits_{0} e^{co\tan 2x \ln\cos x} = \lim\limits_{0} e^{\frac{1}{\tan 2x}\ln\left(1-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)\right)} = \lim\limits_{0} e^{\frac{1}{2x}\left(-\frac{x^2}{2}\right)} =$
1

$\lim\limits_{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{2x-\pi}} = \lim\limits_{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{1}{2x-\pi}\ln\sin x} = \lim\limits_{0} e^{\frac{1}{2t}\ln\cos t} = \lim\limits_{0} e^{\frac{1}{2t}\ln\left(1-\frac{t^2}{2}\right)} = 1$

$\lim\limits_{0}\ |\sin x|^{\tan x} = \lim\limits_{0}\ e^{\tan x\ln|\sin x|} = \lim\limits_{0}\ e^{x\ln x} = 1$

$\lim\limits_{\infty}\ (x+1)exp(\frac{1}{x+1}) - xexp(\frac{1}{x}) = \lim\limits_{\infty}\ (x+1)exp(\frac{1}{x+1})\left(1-\dfrac{x}{x+1}exp(\frac{1}{x(x+1)})\right)$

$= \lim\limits_{\infty}\ (x+1)\left(exp(\frac{1}{x+1})\right)\left(1-\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)\left(1+\dfrac{1}{x\,(x+1)}\right)\right) = 1$

$\lim\limits_{+\infty} x\left(\frac{1}{e}-\left(\frac{x}{x+1}\right)^x\right) = \lim\limits_{+\infty} x\left(\frac{1}{e}-e^{x\ln\frac{x}{x+1}}\right) = \lim\limits_{+\infty} x\left(\frac{1}{e}-e^{x\ln\left(1-\frac{1}{x+1}\right)}\right) = \lim\limits_{+\infty} x\left(\frac{1}{e}-e^{-\frac{x}{x+1}}\right) =$
$\lim\limits_{+\infty} x\left(\frac{1}{e}-e^{-1+\frac{1}{x+1}}\right)$

$= \lim\limits_{+\infty} x\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{e}e^{\frac{1}{x+1}}\right) = \lim\limits_{+\infty} x\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)\right) = \frac{1}{e}$

$\lim\limits_{0}\frac{\cos x-\sqrt{\cos 2x}}{\sin^2 x} = \lim\limits_{0}\frac{1-\frac{x^2}{2}-\left(1-2x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{x^2} = \lim\limits_{0}\frac{1-\frac{x^2}{2}-1+x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{0}\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^{\dfrac{\sin x}{(x-\sin x)}} = \lim\limits_{0} e^{\dfrac{\sin x}{x-\sin x}\ln\dfrac{x}{\sin x}} = \lim\limits_{0} e^{\dfrac{\sin x}{x-\sin x}\left(\dfrac{x}{\sin x}-1\right)} = e$

$\lim\limits_{0}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{0} e^{\frac{1}{x}\ln(\sin x+\cos x)} = \lim\limits_{0} e^{\frac{1}{x}(\sin x+\cos x-1)} = \lim\limits_{0} e^{\frac{1}{x}x} = e$

$\lim\limits_{a}\dfrac{x^a-a^x}{x^x-a^a}$: $x^a-a^x = ((1+t)\,a)^a - a^{(1+t)a} = a^a\left((1+t)^a - a^{ta}\right) = a^a\left(a\,(1-\ln a)\,t+o\,(t)\right)$
avec $x=(1+t)\,a$
et $x^x = ((1+t)\,a)^{(1+t)a} = a^a a^{at}\,(1+t)^{(1+t)a} = a^a\,(1+(a\ln a)\,t+o\,(t))\left(e^{(1+t)a\ln(1+t)}\right)$
$= a^a\,(1+(a\ln a)\,t+o\,(t))\left(e^{at+o(t)}\right) = a^a\,(1+(a+a\ln a)\,t+o\,(t))$ et donc $x^x-a^a = a^a\,(a\,(1+\ln a)\,t+o\,(t))$
et $\dfrac{x^x-a^x}{x^x-a^a} = \dfrac{(1-\ln a)\,t+o\,(t)}{(1+\ln a)\,t+o\,(t)}$. Si $\ln a\neq\pm1; a\neq e$ et $\frac{1}{e}$ on a $\lim\limits_{a}\dfrac{x^a-a^x}{x^x-a^a} = \dfrac{1-\ln a}{1+\ln a}$. Pour les cas particuliers on a si $a=e$: $\lim\limits_{a}\dfrac{x^a-a^x}{x^x-a^a} = 0$ et si $a=\frac{1}{e}$ alors $\lim\limits_{a}\dfrac{x^a-a^x}{x^x-a^a} = +\infty$ car $\dfrac{x^a-a^x}{x^x-a^a}\sim\dfrac{a^a 2at}{a^a\frac{a}{2}t^2}\sim\frac{4}{t}$.

Exercice 39 Posons $x+1=t$ on a $\dfrac{x+1}{x^2+3x+3} = \dfrac{t}{(t-1)^2+3\,(t-1)+3} = \dfrac{t}{t^2-2t+1+3t-3+3} =$
$\dfrac{t}{t^2+t+1}$
$= t\left(1-t+o\left(t^2\right)\right) = t-t^2+o\left(t^3\right)$.

$\cos^n x$.

$y_1\sim\sqrt{x}; y_2\sim\sqrt{x}; y_3\sim x$ et $y_1-y_2\sim\sqrt{x}; y_1-y_3 = \sqrt[3]{1+x+x^3}-\sqrt{1+x^2}\sim\frac{1}{3}x$.

$\sqrt{1+\ \sqrt{1+x}} = \left(1+(1+x)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o\left(x^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{4}x-\frac{1}{16}x^2+o\left(x^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}$
$= \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}x^2-\frac{1}{32}x^2+o\left(x^2\right)\right) = \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{8}x-\frac{5}{128}x^2+o\left(x^2\right)\right)$.

$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e^{\frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+o\left(x^4\right)\right)} = e^{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\left(x^3\right)} = e\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{48}\right.$
$= e\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{11}{24}x^2-\frac{7}{16}x^3+o\left(x^3\right)\right)$.

$e^x-\sqrt{1+2x} = x^2-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x^4-\frac{13}{15}x^5+o\left(x^5\right)$.

$\arctan\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} =$.

$(1+\tan x)^{\frac{1}{3}}$ en posant $u = x - \frac{\pi}{4}$ on obtient $(1+\tan x)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(1 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 + o\left(x^3\right)\right)$.

$\dfrac{x^3+2}{x-2} = \left(x^3+2\right)\frac{1}{x}\left(1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{8}{x^3} + \dfrac{16}{x^4} + o\left(\dfrac{1}{x^4}\right)\right) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{x^2} + x^2 + 2x + 4 + \dfrac{8}{x} + \dfrac{16}{x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$
$= x^2 + 2x + 4 + \dfrac{10}{x} + \dfrac{20}{x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

$\dfrac{\ln x}{x^2} =$.

$f(x) = (\tan x)^{\tan 2x}$ définie une fonction f sur $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[\cup\left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $f\left(\dfrac{\pi}{4} + h\right) = \left(\dfrac{1+\tanh}{1-\tanh}\right)^{-\dfrac{1}{\tan 2h}} = g(h)$. On a $\ln g(h) = -\dfrac{1}{\tan 2h}\ln\dfrac{1+\tanh}{1-\tanh}$ qui admet un D.L. en O. On a $\ln\dfrac{1+\tanh}{1-\tanh} \sim 2h$ et $\left(\ln\dfrac{1+\tanh}{1-\tanh}\right)' = \dfrac{2}{\cos 2h} = \dfrac{2}{1 - 2h^2 + \frac{2}{3}h^4 + o\left(h^4\right)} = 2\left(1 + 2h^2 + \frac{10}{3}h^4 + o\left(h^4\right)\right)$ d'où $\ln\dfrac{1+\tanh}{1-\tanh} = 2\left(h + \frac{2}{3}h^3 + \frac{2}{3}h^5 + o\left(h^5\right)\right)$ car en 0 nous avvons 0. Ce qui donne $-\ln g(h) = \dfrac{2\left(1 + \frac{2}{3}h^2 + \frac{2}{3}h^4 + o\left(h^4\right)\right)}{2 + \frac{8}{3}h^2 + \frac{64}{15}h^4 + o\left(h^4\right)} = 1 - \frac{2}{3}h^2 - \frac{26}{45}h^4 + o\left(h^4\right)$ et $g(h) = \frac{1}{e}\left(1 + \frac{2}{3}h^2 + \frac{4}{5}h^4 + o\left(h^4\right)\right)$.

$\diamondsuit$DL5(0) de f^{-1} où f est définie par : $\begin{cases} \dfrac{e^{x^2}-1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ pour cela il faudra montrer que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On a que f est impaire et $f(x) \sim x$ au voisinage de 0 et $f'(0) = 1$. Sur $\mathbb{R}^*$ on a $f'(x) = \dfrac{\left(2x^2-1\right)e^{x^2}+1}{x^2}$ et f' est du signe de $g : t \longmapsto (2t-1)e^t + 1$, sur $\mathbb{R}^+$ on a $g'(t) = (2t+1)e^t > 0$ sur $\mathbb{R}^+$ et $g(t) > g(0) = 0$ sur $\mathbb{R}^+$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel $f'(x) > 0$ ainsi f est un difféomorphisme. Le fait que f soit impaire et $f(x) \sim \dfrac{e^{x^2}}{x} \overset{+\infty}{\to} +\infty$. donne que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Faisons un dl de l'exp : $y = f(x) = x + \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^5}{6} + o\left(x^5\right)$. Or $y \sim x$ donc $x^3 = y^3 + o\left(y^3\right)$ ce qui donne $x = y - \dfrac{y^3}{2} + o\left(y^3\right) = y\left(1 - \dfrac{y^2}{2} + \left(y^2\right)\right)$ et $x^3 = y^3\left(1 - \dfrac{y^2}{2} + o\left(y^2\right)\right)^3 = y^3\left(1 - \dfrac{3y^2}{2} + o\left(y^2\right)\right)$. On a $x^5 = y^5 + o\left(y^5\right)$ et en reportant $x = y - \dfrac{y^3}{2}\left(1 - \dfrac{3y^2}{2}\right) - \dfrac{y^5}{6} + o\left(y^5\right) = y - \dfrac{y^3}{2} + \dfrac{7y^5}{12} + o\left(y^5\right)$ et $f^{-1}(y) = y - \frac{1}{2}y^3 + \frac{7}{12}y^5 + o\left(y^5\right)$.

Exercice 40 $f'(t) = \dfrac{t^2+1}{\left(t^2-1\right)^2}\left(\dfrac{t^2-1}{t^2+1} - \ln t\right)$ et nous étudions le signe de $\left(\dfrac{t^2-1}{t^2+1} - \ln t\right)$ dont la dérivée est $\dfrac{4t^2 - t^4 - 2t^2 - 1}{t\left(t^2+1\right)^2} = -\dfrac{\left(t^2-1\right)^2}{t\left(t^2+1\right)^2}$ qui reste négatif sur $\mathbb{R}^{+*}$. Ainsi $\left(\dfrac{t^2-1}{t^2+1} - \ln t\right)$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ de $+\infty$ à -∞ et s'annulant en 1, et donc la dérivée de f est positive sur $]0,1[$ et positive sur $]1, +\infty[$ la fonction f est donc croissante sur $]0,1[$ de 0 à $\frac{1}{2} = \lim\limits_{1} f$ et décroissante sur $]1, +\infty[$ de $\frac{1}{2}$ à 0.
En 1 on a : en posant $u = t - 1$: $f(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{u^2}{6} - \frac{1}{12}u^3 + o\left(u^3\right)\right)$. D'où la courbe.

$e^{\frac{1}{t}}g'(t) = \dfrac{t^3 + t^2 - t - 1}{t^3} = \dfrac{(t-1)(t+1)^2}{t^3}$ et g est croissante sur $]-\infty,0[$ de 0 à $+\infty$ puis décroissante sur $]0,1[$ de 0 à $-\frac{2}{e}$ et croissante sur $]1, +\infty[$ de $-\frac{2}{e}$ à 0. D'où la courbe.

Exercice 41 $f(x) = e^{\dfrac{1}{x}\ln chx}$ en 0 on a $f(x) = e^{\dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{x^2}{2}+o\left(x^3\right)\right)} = e^{\dfrac{x}{2}+o\left(x^2\right)} = 1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+o\left(x^2\right)$ et en $+\infty$ on a $chx \sim \frac{1}{2}e^x$; $\ln chx \sim x$ et $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{x}\ln chx = 1$ soit $\lim\limits_{+\infty} f = e$. D'autre part pour tout x de $\mathbb{R}$ on a $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$ et $\lim\limits_{-\infty} f = \dfrac{1}{e}$. Pour les variations $f'(x) = f(x)\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\ln chx}{x}\right) = \dfrac{f(x)}{x^2}(xthx - \ln chx)$ si $g(x) = xthx - \ln chx$ alrs $g'(x) = \dfrac{x}{ch^2x}$. et g décroit en passant au minimum en 0 et est donc positive sur $\mathbb{R}$ et donc aussi f' et f est croissante de $\frac{1}{e}$ à e. En 0 on a un point d'inflexion.

Exercice 42 f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1{,}0\}$.
En -1 : en posant $x = -1+t$ on a $\ln|f()| = t\ln|t| + (1-t)\ln|1-t| = t\ln|t| + o(t\ln|t|)$ et $|f(x)| = 1 + t\ln|t| + o(t\ln|t|)$ et come $f(x) < 0$ si $x < 0$ on a $f(x) = -1 - t\ln|t| + o(t\ln|t|)$, on prolongera donc en posant $f(-1) = -1$ et f n'est pas dérivable en -1 car $\dfrac{f(x)+1}{x+1} \sim -\ln(x+1)$.
En 0 on a $\ln|f(x)| = -x\ln|x| + (x+1)\ln(x+1) = -x\ln|x| + o(x\ln|x|)$ et $|f(x)| = 1 - x\ln|x| + o(x\ln|x|)$ ainsi si $x > 0$ on a $f(x) = 1 - x\ln x + o(x\ln x)$ et si $x < 0$ on a $f(x) = -1 + x\ln|x| + o(x\ln|x|)$ et $\lim\limits_{0^+} f = 1$ et $\lim\limits_{0^-} f = -1$ pour $x > 0$ on a $\dfrac{f(x)-1}{x} \sim -\ln x$ et si $x < 0$ alors $\dfrac{f(x)+1}{x} \sim \ln|x|$.
En $\pm\infty$ on a $\ln|f(x)| = \ln|x| + (x+1)\ln\left|x+\dfrac{1}{x}\right| = \ln|x| + (x+1)\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{3x^3} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)\right)$ $= \ln|x| + 1 + \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{6x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. Ainsi $f(x) = ex\left(1 + \dfrac{1}{2x} + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{6}\right)\dfrac{1}{x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right) = ex + \frac{1}{2}e - \dfrac{1}{24x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ il y a une asymptote $y = ex + \frac{1}{2}e$ et la position est donnée $\left(f(x) - ex - \frac{e}{2}\right) \sim -\dfrac{e}{24x}$.
Pour les variations on a $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \ln|x+1| - \ln|x| = \ln\left|\dfrac{x+1}{x}\right| > 0$ si et seulement si $-\frac{1}{2} < x < 0$ donc f est croissante sur $]-\infty,-1[$ de $-\infty$ à-1 et croisante sur $\left]-1,-\frac{1}{2}\right[$ de -1 à $-\frac{1}{2}$ puis décroissante sur $\left]-\frac{1}{2},0\right[$ de $-\frac{1}{2}$ à -1 et croissante sur $]0,+\infty[$ de $+1$ à $+\infty$.