Chapitre 3

Calcul matriciel

3.1 Matrices décomposées en blocs

Nous considérerons, par ordre de généralité croissante, les matrices diagonales, triangulaires, diagonales par blocs, triangulaires par blocs et enfin, pour terminer, la théorie générale

3.1.1 Matrices diagonales

Définition 1 *Soit* $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in K^n$*, la matrice diagonale notée* $\mathrm{Diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ *est la matrice*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

L'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(K)$ *se note* $D_n(K)$

Remarque: $\mathrm{Diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = (\delta_{ij}\lambda_i)_{i,j\in[1,n]} = (\delta_{ij}\lambda_j)_{i,j\in[1,n]}$.

Proposition 1 *Soit* E *un* K*-espace vectoriel de dimension* n *et* $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ *une base de* E*. Un endomorphisme* u *possède, dans* $\mathcal{B}$*, une matrice diagonale si et seulement si*

$$\forall i \in [1,n] \quad u([e_i]) \subset [e_i].$$

[Ind] Appliquer la définition de la matrice dans une base donnée d'un endomorphisme.

Théorème 1 $D_n(K)$ *est une sous-algèbre pleine commutative de* $\mathcal{M}_n(K)$ *de dimension* n*.*
Une matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ *a pour déterminant* $\lambda_1\cdots\lambda_n$*. Elle est inversible si et seulement si pour tout* $i \in [1,n] \quad \lambda_i \neq 0$*. Son inverse est alors la matrice diagonale* $\mathrm{Diag}(\lambda_1^{-1},\ldots,\lambda_n^{-1})$*.*

[Ind] Calculer le produit de deux matrices diagonales. Calculer le déterminant en le développant suivant la première colonne et conclure en effectuant une démonstration par récurrence.

3.1.2 Matrices triangulaires

Définition 2 *La matrice* $A = (a_{ij})_{i,j\in[1,n]} \in \mathcal{M}_n(K)$ *est:*
- triangulaire supérieure si $\quad \forall i,j \in [1,n] \quad j < i \implies a_{ij} = 0$.
- triangulaire inférieure si $\quad \forall i,j \in [1,n] \quad i < j \implies a_{ij} = 0$.

Proposition 2 *Soit* E *un* K*ev de dimension* n *et* $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ *une base de* E*. Un endomorphisme* u *possède, dans* $\mathcal{B}$*, une matrice triangulaire supérieure si et seulement si*

$$\forall k \in [1,n] \quad u([e_1,\ldots,e_k]) \subset [e_1,\ldots,e_k].$$

[Ind] Appliquer la définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base donnée.

Proposition 3 *Soit E un Kev de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Si l'endomorphisme u possède, dans la base $\mathcal{B}$, une matrice triangulaire supérieure, alors la matrice de u dans la base $(e_n, \dots, e_1)$ est triangulaire inférieure.*

[Ind] Calculer...

Théorème 2 *L'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(K)$ est une sous-algèbre pleine (non commutative si $n \geq 2$) de $\mathcal{M}_n(K)$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.*
Une matrice $A = (a_{ij})_{i,j \in [1,n]} \in \mathcal{M}_n(K)$ triangulaire supérieure a pour déterminant le produit des éléments diagonaux $a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$. Elle est inversible si et seulement si pour tout $i \in [1,n] \quad a_{ii} \neq 0$. Son inverse est alors une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont, terme à terme, les inverses des éléments diagonaux de la matrice A.

[Ind] Appliquer la proposition précédente en se ramenant aux endomorphismes de K^n associés aux matrices considérées

Remarque: Si $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \bigotimes \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \bigotimes \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$ alors

$$AB = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & & \bigotimes \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$$

3.1.3 Matrices diagonales par blocs

Définition 3 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $n_1, \dots, n_p \in \mathbb{N}^*$ tels que $n_1 + \cdots n_p = n$. A est diagonale par blocs $n_1, \dots, n_p$ s'il existe des matrices carrées $A_1, \dots, A_p$ de tailles respectives $n_1, \dots, n_p$ (appelées blocs diagonaux) telles que*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_p \end{pmatrix}$$

Proposition 4 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Notons $s_1 = 0$ et pour tout $k \in [2,p]$, $s_k = n_1 + \cdots + n_{k-1}$ et enfin, pour tout $k \in [1,p]$, $E_k = [e_{s_k+1}, \cdots, e_{s_k+n_k}]$. La matrice de l'endomorphisme u est diagonale par blocs $n_1, \dots, n_p$ si et seulement si*

$$\forall k \in [1,p] \quad u(E_k) \subset E_k.$$

[Ind] Appliquer la définition de la matrice dans une base donnée d'un endomorphisme.

Théorème 3 *Soient $A_1 \in \mathcal{M}_p(K)$, $A_2 \in \mathcal{M}_q(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{pq}(K)$.*

$$\begin{vmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{vmatrix} = \det A_1 . \det A_2$$

[Ind] L'application qui, à une matrice $A_1 \in \mathcal{M}_p(K)$, associe $\begin{matrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{matrix}$ est une forme p-linéaire alternée des colonnes de A_1.

Proposition 5 *Le déterminant d'une matrice diagonale par blocs $n_1, \dots, n_p$, dont les blocs diagonaux sont $A_1, \dots, A_p$, est égal au produit des déterminants de ses blocs diagonaux.*

[Ind] Appliquer le théorème précédent.

Théorème 4 *L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(K)$, diagonales par blocs $n_1,\ldots,n_p$ est une sous-algèbre pleine de $\mathcal{M}_n(k)$ de dimension $n_1^2+\cdots+n_p^2$.*
Une matrice A, diagonale par blocs, est inversible si et seulement si ses blocs diagonaux sont inversibles. Son inverse est alors la matrice diagonale par blocs dont les éléments diagonaux sont, terme à terme, les inverses des blocs diagonaux de A.

[Ind] Utiliser les endomorphismes de K^n associés aux matrices considérées.

3.1.4 Matrices triangulaires par blocs

Définition 4 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $n_1,\ldots,n_p \in \mathbb{N}^*$ tels que $n_1+\cdots n_p = n$. A est triangulaire supérieure par blocs $n_1,\ldots,n_p$ s'il existe des matrices carrées $A_1,\ldots,A_p$ de tailles respectives $n_1,\ldots,n_p$ (appelées blocs diagonaux) et une famille de matrices $(B_{kl})_{\substack{k\in[1,p-1]\\ l\in[k+1,p]}}$ vérifiant, pour tout $k \in [1,p-1]$ et tout $l \in [k+1,p]$, $B_{kl} \in \mathcal{M}_{n_k n_l}$, telles que*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_{12} & \cdots & B_{1,p} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & B_{p-1,p} \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix}$$

Proposition 6 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ une base de E. Notons $s_1 = 0$ et pour tout $k \in [2,p]$, $s_k = n_1+\cdots+n_{k-1}$ et enfin, pour tout $k \in [1,p]$, $F_k = [e_1,\cdots,e_{s_k+n_k}]$. La matrice de l'endomorphisme u est triangulaire supérieure par blocs $n_1,\ldots,n_p$ si et seulement si*

$$\forall k \in [1,p] \quad u(F_k) \subset F_k.$$

[Ind] Appliquer la définition de la matrice dans une base donnée d'un endomorphisme.

Proposition 7 *Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs $n_1,\ldots,n_p$, dont les blocs diagonaux sont $A_1,\ldots,A_p$, est égal au produit des déterminants de ses blocs diagonaux.*

[Ind] Utiliser le théorème sur le déterminant des matrices du type $\begin{matrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{matrix}$.

Théorème 5 *L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(K)$, triangulaires par blocs $n_1,\ldots,n_p$, est une sous-algèbre pleine de $\mathcal{M}_n(k)$ de dimension $n_1(n_1+\cdots+n_p)+n_2(n_2\cdots+n_p)+\cdots n_p^2$.*
Une matrice A, triangulaire supérieure par blocs, est inversible si et seulement si ses blocs diagonaux sont inversibles. Son inverse est alors une matrice triangulaire supérieure par blocs.

[Ind] Utiliser des endomorphismes de K^n associés aux matrices considérées.

L'étude des matrices décomposées en blocs va permettre d'étudier la structure de l'inverse d'une matrice inversible triangulaire supérieure par blocs

3.1.5 Matrices décomposées en blocs

Définition 5 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $n_1,\ldots,n_p \in \mathbb{N}^*$ tels que $n_1+\cdots n_p = n$. A est décomposée en blocs $n_1,\ldots,n_p$ s'il existe une famille de matrices $(A_{kl})_{k,l\in[1,p]}$ vérifiant, pour tout $k,l \in [1,p]$, $A_{kl} \in \mathcal{M}_{n_k n_l}$, telles que*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{p1} & \cdots & A_{pp} \end{pmatrix}$$

Remarque: Les matrices situées sur la diagonale d'une matrice décomposée en blocs sont carrées.

Notations.

Soient $E_1,\dots,E_p$ des s.e.v. d'un Kev E de dimension n tels que $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$. Notons, pour tout $i \in [1,p]$, $n_i = \dim E_i$ et choisissons une base $\mathcal{B}_i$ de E_i.
La base $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1,\dots,\mathcal{B}_p)$ est une base de E.
Soit $(\pi_1,\dots,\pi_p)$ la famille de projecteurs associés à la décomposition de E en somme directe de $E_1,\dots,E_p$.
Pour tout endomorphisme u de E, notons, pour $i,j \in [1,p]$, $u_{ij} = \pi_i \circ u \circ \pi_j$.
On a, pour tout $i,j \in [1,p]$, $u_{ij}(E_j) \subset E_i$, nous pouvons donc considérer l'application linéaire $\tilde{u}_{ij}$ qui est la restriction de u_{ij} à E_j au départ et E_i à l'arrivée.

Proposition 8 *L'application Φ qui, à $u \in \mathcal{L}(E)$, associe la famille $(\tilde{u}_{ij})_{i,j\in[1,p]}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\mathcal{L}(E)$ et $\prod\limits_{i,j\in[1,p]} \mathcal{L}(E_j,E_i)$.*

[Ind] Une application linéaire est un isomorphisme si elle possède une application réciproque.

Proposition 9 *Soient $u,v \in \mathcal{L}(E)$.*

$$\Phi(u \circ v) = (\sum_{k=1}^{p} \tilde{u}_{ik} \circ \tilde{v}_{kj})_{i,j\in[1,p]}$$

[Ind] Essayer d'introduire les projecteurs p_k.

Proposition 10 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\Phi(u) = (\tilde{u}_{ij})_{i,j\in[1,p]} \in \prod\limits_{i,j\in[1,p]} \mathcal{L}(E_j,E_i)$ la famille associée. Notons, pour tout $i,j \in [1,p]$, $A_{i,j} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_j,\mathcal{B}_i}(\tilde{u}_{ij})$. On a*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{p1} & \cdots & A_{pp} \end{pmatrix}$$

[Ind] Calculer l'image d'un vecteur de la base $\mathcal{B}_j$ par l'application $\tilde{u}_{ij}$.

On en déduit

Proposition 11 *Soient A et B deux matrices carrées de taille n, décomposées en blocs de mêmes tailles ($A = (A_{ij})_{i,j\in[1,p]}$, $B = (B_{ij})_{i,j\in[1,p]}$) et $\lambda \in K$.*

$$A + \lambda.B = (A_{ij} + \lambda.B_{ij})_{i,j\in[1,p]}$$

$$A \times B = (\sum_{k=1}^{p} A_{ik} \times B_{kj})_{i,j\in[1,p]}$$

[Ind] Utiliser les propositions précédentes

Proposition 12 *L'inverse d'une matrice A inversible, triangulaire supérieure par blocs, est une matrice triangulaire supérieure par blocs dont les éléments diagonaux sont, terme à terme, les inverses des blocs diagonaux de A.*

[Ind] Quel est le produit de deux matrices triangulaires supérieures par blocs (de même tailles)?

Exercice 1 Soit $T \in \mathcal{M}_n(K)$, une matrice inversible, triangulaire supérieure en blocs p,q:

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Déterminer T^{-1}.

3.2 Endomorphismes et matrices nilpotents

Proposition 13 *Soit E un Kev et $u \in \mathcal{L}(E)$. Notons, pour $k \in \mathbb{N}$, $N_k = \operatorname{Ker} u^k$ et $I_k = \operatorname{Im} u^k$. Les suites de s.e.v. (N_k) et (I_k) sont respectivement croissante et décroissante et s'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $N_{k_0} = N_{k_0+1}$ (resp. $I_{k_0} = I_{k_0+1}$), alors, pour tout entier k supérieur à k_0, on a $N_k = N_{k_0}$ (resp. $I_k = I_{k_0}$).*

[Ind] Pour montrer l'égalité de deux ensembles, on peut procéder par double inclusion.

Remarque: Si E est de dimension finie, les deux suites (N_k) et (I_k) sont stationnaires et le théorème du rang assure que lorsque l'une des deux suites (N_k) ou (I_k) est stationnaire elles le sont toutes les deux à partir du même rang.

Exercice 2 Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. On pose, pour tout entier naturel p: $K_p = \operatorname{Ker} u^p$ et $I_p = \operatorname{Im} u^p$.
Montrer que les suites (K_p) et (I_p) sont stationnaires; de plus si s est le plus petit des entiers p tels que $I_p = I_{p+1}$ alors $K_s = K_{s+1}$ et si $s \geq r$: $K_{r-1} \neq K_r$. Montrer enfin que E est somme directe de K_s et I_s.

Définition 6 *Soit E un Kev et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est nilpotent s'il existe un entier naturel non nul m tel que $u^m = 0$. L'ordre de l'endomorphisme nilpotent est alors le plus petit entier naturel p tel que $u^p = 0$.*

Exercice 3 Soit $\Delta : K_n[X] \to K_n[X]$; $P \mapsto P(X+1) - P(X)$. Montrer que Δ est nilpotent.

Théorème 6 *Soit E un Kev de dimension finie et u un endomorphisme de E nilpotent. Alors l'ordre de u est inférieur ou égal à $\dim E$.*

[Ind] Étudier la suite $(\dim I_k)$.

Définition 7 *Soit $N \in \mathcal{M}_n(K)$. On dit que N est nilpotente s'il existe un entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^m = 0$. L'ordre de N est alors le plus petit entier naturel p tel que $N^p = 0$.*

Proposition 14 *Soit $N \in \mathcal{M}_n(K)$. Si N est nilpotente, $N^n = 0$.*

[Ind] Utiliser le théorème précédent.

Proposition 15 *Une matrice triangulaire supérieure est nilpotente si et seulement si ses éléments diagonaux sont nuls.*

[Ind] Calculer...

Exercice 4 Une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure) par blocs est nilpotente si et seulement si ses blocs diagonaux sont nilpotents.

Proposition 16 *Soit u un endomorphisme nilpotent d'ordre p . Alors $\mathrm{Id}_E - u$ est inversible et $(\mathrm{Id}_E - u)^{-1} = \mathrm{Id}_E + u + \cdots + u^p$.*

[Ind] Calculer la composée des endomorphismes proposés.

3.3 Transformations élémentaires

3.3.1 Matrices de permutation

Définition 8 *Soit $n \in N^*$ et $\sigma \in \mathcal{S}_n$ un élément du groupe des permutations de l'ensemble d'entiers $[1,n]$. On appelle matrice de permutation associée à σ, la matrice $M_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{i,j \in [1,n]}$.*

Proposition 17 *Soit E un Kev de dimension $n \geq 1$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. La matrice de l'endomorphisme u est une matrice de permutation associée à la permutation σ si et seulement si $\quad \forall i \in [1,n] \quad u(e_i) = e_{\sigma(i)}$.*

[Ind] Appliquer la définition de la matrice dans une base donnée d'un endomorphisme.

Remarque: Une matrice de permutation est inversible.

Proposition 18 *L'application M qui, à une permutation σ appartenant $\mathcal{S}_n$, associe la matrice M_σ appartenant à $GL_n(K)$ est un morphisme de groupes injectif. Son image est appelée groupe des matrices de permutation de taille n.*

[Ind] Utiliser les endomorphismes associés.

Proposition 19 (Effet d'un produit à gauche par une matrice de permutation) *Soient $A \in \mathcal{M}_{pq}(K)$ et $\sigma \in \mathcal{S}_p$. Notons $(L_1,\ldots,L_p)$ la famille des vecteurs lignes de A. La matrice $M_\sigma A$ est la matrice appartenant à $\mathcal{M}_{pq}(K)$ dont la famille des vecteurs lignes est $(L_{\sigma^{-1}(1)},\ldots,L_{\sigma^{-1}(p)})$.*

[Ind] Calculer les lignes du produit $M_\sigma A$

Proposition 20 (Effet d'un produit à droite par une matrice de permutation) *Soient $A \in \mathcal{M}_{pq}(K)$ et $\tau \in \mathcal{S}_q$. Notons $(C_1,\ldots,C_q)$ la famille des vecteurs colonnes de A. La matrice AM_τ est la matrice appartenant à $\mathcal{M}_{pq}(K)$ dont la famille des vecteurs colonnes est $(C_{\tau(1)},\ldots,C_{\tau(p)})$.*

[Ind] Les colonnes de A sont les lignes de ${}^tA$.

Exercice 5 Trouver les matrices carrées de taille n qui commutent avec toutes les matrices de permutations (de taille n).

3.3.2 Matrices de transvection

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $(E_{pq})_{p,q} \in [1,n]$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(K)$:

$$E_{pq} = (\delta_{ip}\delta_{jq})_{i,j\in[1,n]}.$$

Définition 9 *On appelle matrice de transvection, une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telle qu'il existe $\lambda \in K$ et $i,j \in [1,n]$ $(i \neq j)$ tels que $A = I_n + \lambda.E_{ij}$, on la note alors $T_{ij}(\lambda)$..*

Proposition 21 (Effet d'un produit à gauche par une matrice de transvection) *Soient $A \in \mathcal{M}_{pq}(K)$ et $T_{ij}(\lambda)$ une matrice carrée $p \times p$ de transvection ($i,j \in [1,p]$, $i \neq j$ et $\lambda \in K$). Notons $(L_1,\ldots,L_p)$ la famille des vecteurs lignes de A. La matrice $T_{ij}(\lambda)A$ est la matrice appartenant à $\mathcal{M}_{pq}(K)$ dont la famille des vecteurs lignes est $(L_1,\ldots,L_{i-1},L_i+\lambda L_j,L_{i+1},\ldots,L_p)$.*

[Ind] Calculer le produit $E_{ij}A$.

Proposition 22 (Effet d'un produit à droite par une matrice de transvection) *Soient $A \in \mathcal{M}_{pq}(K)$ et $T_{ij}(\lambda)$ une matrice carrée $q \times q$ de transvection ($i,j \in [1,q]$, $i \neq j$ et $\lambda \in K$). Notons $(C_1,\ldots,C_q)$ la famille des vecteurs colonnes de A. La matrice $AT_{ij}(\lambda)$ est la matrice appartenant à $\mathcal{M}_{pq}(K)$ dont la famille des vecteurs colonnes est $(C_1,\ldots,C_{j-1},C_j+\lambda C_i,C_{j+1},\ldots,C_q)$.*

[Ind] Calculer le produit AE_{ij}.

Exercice 6 Soit E un K-ev de dimension finie $n > 0$, H un hyperplan de E et u un endomorphisme de E laissant invariant tout élément de H. Notons α le déterminant de u.
a) Montrer que si $\alpha \neq 1$, il existe une droite D supplémentaire de H et une seule, stable par u; u est alors l'affinité relative à l'hyperplan H, d'axe D et de rapport α.
b) Montrer, lorsque $\alpha = 1$, que pour toute forme linéaire f sur E dont le noyau est H, il existe un vecteur e et un seul de H tel que, pour tout vecteur x de E

$$u(x) = x + f(x)e$$

on dit alors que u est une transvection relative à l'hyperplan H.

3.3.3 Matrices d'affinités

Définition 10 *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\lambda \in K$. *On note* $D_i(\lambda)$ *la matrice* $\mathrm{Diag}(1,\ldots,1,\lambda,1,\ldots,1)$ *où* λ *est placé à la* $i^{\text{eème}}$ *place et on dit que* $D_i(\lambda)$ *est une matrice de l'affinité de base l'hyperplan* $\mathcal{H}_i = [e_1,\ldots,e_{i-1},e_{i+1},\ldots,e_n]$, *de direction la droite* $\mathcal{D}_i = [e_i]$ *et de rapport* λ.

Proposition 23 (Effet d'un produit à gauche par une matrice d'affinité) *Soient* A *une matrice appartenant à* $\mathcal{M}_{pq}(K)$ *et* $D_i(\lambda)$ *une matrice carrée* $p \times p$ *d'affinité* ($i \in [1,p]$ *et* $\lambda \in K$). *Notons* $(L_1,\ldots,L_p)$ *la famille des vecteurs lignes de* A. *La matrice* $D_i(\lambda)A$ *est la matrice appartenant à* $\mathcal{M}_{pq}(K)$ *dont la famille des vecteurs lignes est* $(L_1,\ldots,L_{i-1},\lambda L_i,L_{i+1},\ldots,L_p)$.

[Ind] Calculer...

Proposition 24 (Effet d'un produit à droite par une matrice d'affinité) *Soient* A *une matrice appartenant à* $\mathcal{M}_{pq}(K)$ *et* $D_i(\lambda)$ *une matrice carrée* $q \times q$ *d'affinité* ($i \in [1,q]$ *et* $\lambda \in K$). *Notons* $(C_1,\ldots,C_q)$ *la famille des vecteurs colonnes de* A. *La matrice* $AD_i(\lambda)$ *est la matrice appartenant à* $\mathcal{M}_{pq}(K)$ *dont la famille des vecteurs colonnes est* $(C_1,\ldots,C_{i-1},\lambda C_i,C_{i+1},\ldots,C_q)$.

[Ind] Calculer...

Exercice 7 Trouver les matrices carrées de taille n qui commutent avec toutes les matrices d'affinités élémentaires (de taille n).

3.3.4 Opérations élémentaires

Les opérations élémentaires sur les LIGNES d'une matrice A:
a) permutation
b) ajout à une ligne d'une autre ligne multipliée par un scalaire
c) multiplication d'une ligne par un scalaire non nul
se traduisent, par le produit à GAUCHE de A par des matrices de transformations, respectivement:
a) une matrice de permutation
b) une matrice de transvection
c) une matrice d'affinité.Les opérations élémentaires sur les COLONNES se traduisent, quant à elles, par le produit à DROITE de A par des matrices de transformations.

Une matrice de transformation agit donc sur les lignes ou les colonnes d'une matrice et pour connaître ou se rappeler son effet, il suffit de l'appliquer à l'identité. La matrice de transformation est donc l'effet qu'elle produit par multiplication à gauche sur les lignes de l'identité et par multiplication à droite sur les colonnes de l'identité.

Exercice 8 Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que les coefficients de A et A^{-1} sont positifs ou nuls si et seulement si les coefficients de A sont positifs et chaque ligne et chaque colonne de A contient un seul élément non nul.

3.3.5 Applications pratiques

Une suite d'opérations élémentaires effectuées sur les lignes d'une matrice, pour la transformer en une matrice diagonale, triangulaire supérieure ou tout autre forme désirable, peuvent donc s'effectuer en multipliant successivement à gauche cette matrice par des matrices de transformations.

- Calcul du rang
  Une matrice de transformation est inversible et donc ne modifie pas le rang d'un produit, la matrice obtenue possède le même rang que la matrice de départ, ce qui permet le calcul du rang de la matrice par manipulation de lignes et/ou de colonnes.

– Calcul du déterminant

Seules les matrices d'affinités changent le déterminant d'un produit. Si on prend soin de conserver les rapports des affinités utilisées lors d'une transformation, on peut retrouver le déterminant de la matrice de départ, en divisant le déterminant de la matrice obtenue par le produit de tous les rapports utilisés.

– Calcul de l'inverse

Nous savons que l'on peut transformer, par manipulation de lignes, une matrice carrée inversible A en l'identité, c'est la méthode de Gauss du pivot partiel. Il existe alors des matrices de transformations inversibles $T_1,T_2,\dots,T_N$ telles que $T_N \cdots T_2 T_1 A = I_n$. Le produit $T_N \cdots T_1$ est donc l'inverse de A, on peut le connaître car il est égal au résultat obtenu en appliquant ces mêmes transformations à l'identité.

Il est clair que, pour appliquer cette méthode, il faut manipuler exclusivement les lignes (ou exclusivement les colonnes) de la matrice.

3.4 Travaux Dirigés : Calcul matriciel

Exercice 9 Dans $M_n(K)$, démontrer qu'une matrice A commutant avec toutes les autres matrices X (i.e. $AX = XA$) est la matrice d'une homothétie.

Exercice 10 Dans tout cet exercice, $M_n(K)$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n sur le corps K.

a) On désigne par E_{ij} la matrice dont tous les termes sont nuls sauf le terme intersection de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne qui est égal 1. Vérifier que $E_{jk}.E_{qr} = \delta_{kq}E_{jr}$ où $\delta_{kq} = 0$ si $k \neq r$ et $\delta_{qq} = 1$ si $k = q$.

b) Soit A une matrice de $M_n(K)$. Montrer que l'addition à un vecteur ligne de A d'un vecteur proportionnel à un autre vecteur ligne peut se faire en multipliant A à gauche par une matrice convenable.

Démontrer qu'on peut effectuer une opération analogue avec les vecteurs colonnes par une multiplication à droite.

c) On suppose que la premire ligne de A comporte au moins un élment non nul. Montrer qu'il existe des matrices P et Q, produits de matrices de la forme $I + \lambda E_{ij}$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in K$, telles que $P.A.Q$ soit de la forme:

$$P.A.Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{B'} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = B$$

(On pourra, dans un premier temps, transformer la matrice A en une matrice qui comporte un élément égal à 1 à l'intersection de la première ligne et de la première colonne)

d) On suppose que A est de rang $r > 0$. Montrer qu'il existe des matrices P et Q, produits de matrices de la forme $I + \lambda E_{ij}$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in K$ telles que:

$$P.A.Q = B = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & \mathbf{0} & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & d & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & \mathbf{0} & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

le terme d étant à la place d'indice r sur la diagonale et $d \neq 0$. Montrer en outre que si $r < n$, on peut choisir $d = 1$. (On pourra utiliser un raisonnement par récurrence)

e) En déduire que le groupe $S_n(K)$ des matrices carrées d'ordre n et de déterminant égal à 1 est engendré par les matrices $I + \lambda E_{ij}$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in K$. (Extrait de TPE)

Exercice 11 [Info]
la méthode du pivot

Calcul de A^{-1} si $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & -4 \\ 3 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

$1^{ère}$ méthode: En se plaçant dans $\mathbb{R}^3$ l'endomorphisme associé peut s'écrire $AX = X'$

$$\left\{\begin{array}{r} x-3y+\ z=x\prime \\ 2x-5y-4z=y\prime \\ 3x-4y+3z=z' \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x-3y+z=x' \\ y-6z=-2x\prime+y\prime \\ 5y=-3x'+z' \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} y=\frac{1}{5}(-3x'+z') \\ z=\frac{1}{6}(y+2x'-y') \\ x=x'+3y-z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x=\frac{1}{30}(-31x'-15y'+17z') \\ y=\frac{1}{30}(-18x'+6z') \\ z=\frac{1}{30}(7x'-5y'+z') \end{array}\right.$$

Nous avons ainsi $A = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} -31 & -15 & 17 \\ -18 & 0 & 6 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

Autre méthode (du pivot). calcul de l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underbrace{\overset{C_2\longleftrightarrow C_1}{\rightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \underbrace{\overset{C_3\longleftrightarrow C_3-2C_2}{\rightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underbrace{\overset{C_1\longleftrightarrow C_1-C_2}{\rightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underbrace{\overset{C_3\longleftrightarrow -C_3}{\rightarrow}}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\overset{C_1\longleftrightarrow C_1-2C_3}{\rightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Effectuer les mêmes transformations à partir de la matrice identitée on trouve $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ qui n'est autre que A^{-1} .

Soit A une matrice inversible les trois opérations élmentaires permettent de transformer A en la matrice unitée.
1 changer des colonnes d'indices p et q
2 multiplication par $a \neq 0$ des élments de la $p^{ème}$ colonne
3 ajouter à la $q^{ème}$ colonne α fois la $p^{ème}$.
Il existe au moins un élément non nul dans la premire ligne.Une opération du type 1 le place dans la première colonne, une opération du type 2 le transforme en 1.En appliquant $(n-1)$ fois une opération du type 3 on peut transformer tous les autres éléments de la première ligne en 0.Ces opérations n'affectant pas le rang de la matrice trouvée on recommence. Les mêmes transformations transforment la matrice unitée en A^{-1} . Pour chaque Φ, opération élémentaire on a $\Phi(A) = A.\Phi(I)$, donc si $\xi(A) = I; A\xi(I) = I$

Résolution d'un système. $\left\{\begin{array}{r} x_2+2x_4=1 \\ 2x_1+5x_2+x_3-x_4=0 \\ 4x_1+2x_2+3x_3=2 \\ -x_1+4x_3+5x_4=-5 \end{array}\right.$ la matrice associée est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Multiplier par $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ par $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{2} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{2} & 1 \end{pmatrix}$ à gauche on trouve $A_3 = E_3E_2E_1PA$ toutes ces matrices ont pour déterminant 1, le système est transformé de la façon suivante…

Exercice 12 [Décomposition LU (voir Info)]
Soit A une matrice carrée d'ordre n, à coefficients réels. On suppose que les mineurs principaux Δ_k de A sont tous non nuls. ($\Delta_k = \det(A_k)$ où A_k est la matrice extraite de A formée des k premières lignes et des k premières colonnes de A). Montrer par récurrence qu'il existe un unique couple T_-, T_+ de matrices triangulaires inférieure et supérieure de diagonale formée de

1 telle que : $A = T_- \Delta T_+$ où $\Delta = diag\left(\Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \cdots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right)$. En déduire une application pour la résolution des systèmes de Cramer.

3.5 Démonstrations

Proposition 1 Si $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale alors $\forall i$ on a $u(e_i) = \lambda_i e_i$ et donc on a bien $u([e_i]) \subset [e_i]$. Réciproquement si $\forall i \ : \ u([e_i]) \subset [e_i]$ cela signifie que $\forall i \ : \ \exists \lambda_i \in K \ : \ u(e_i) = \lambda_i e_i$ et donc $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.

Théorème 1 $D_n(K)$ est non vide car il contient par exemple la matrice identité I et est contenu dans l'algèbre $\mathcal{M}_n(K)$. La somme et le produit par un scalaire de matrices diagonales est diagonale car ce sont des opérations termes à termes. Pour le produit on a $Diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \times Diag(\mu_1, \cdots, \mu_n) = Diag(\lambda_1\mu_1, \cdots, \lambda_n\mu_n)$. En effet $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}\lambda_k\delta_{kj}\mu_j = \delta_{ij}\lambda_j\mu_j$. Puisque $I \in D_n(K)$ on a bien une sous algèbre. Puisque $Diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E_{ii}$ où E_{ij} sont les matrices élémentaires qui forment une base de $\mathcal{M}_n$ la dimension du sous espace vectoriel des matrices diagonales est n. Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit des termes diagonaux, il suffit de développer par rapport à la première colonne $det(Diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)) = \lambda_1 det(Diag(\lambda_2, \cdots, \lambda_n)) = \cdots = \lambda_1 \cdots \lambda_n$.En utilisant la formule du produit si une matrice diagonale est inversible alors ses coefficients sont tous non nuls et son inverse est $Diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)^{-1} = Diag(\frac{1}{\lambda_1}, \cdots, \frac{1}{\lambda_n})$.

Proposition 2 La $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire sup. $\iff \quad \forall i,j \in [1,n] \quad j < i \implies a_{ij} = 0$. $\iff \forall i \quad u(e_i) = \sum_{j \leq i} a_{ji} e_j \iff \quad \forall k \in [1,n] \quad \forall \ell \leq k \quad u(e_\ell) \in [e_1, \ldots, e_k]$. $\iff \quad \forall k \in [1,n] \quad u([e_1, \ldots, e_k]) \subset [e_1, \ldots, e_k]$..

Proposition 3 Si on a $u(e_j) = \sum_{i=1}^{j} a_{ij} e_i$ alors $u(e_{n-j}) = \sum_{i \geq j} a_{n+1-i,n+1-j} e_{n+1-i}$.

Théorème 2 L'ensemble $\mathcal{T}_n(K)$ des matrices triangulaires supérieures est non vide et bien inclus dans l'algèbre $\mathcal{M}_n(K)$. La somme et le produit par un scalaire de matrices triangulaires sont des matrices triangulaires. Pour le produit on utilise la proposition précèdente. Soit u,v des endomorphismes tels que leurs matrices dans la base $\mathcal{B}$ soient triangulaires. Ainsi $\forall k \in [1,n] \quad u([e_1, \ldots, e_k]) \subset [e_1, \ldots, e_k]$ et $\quad \forall k \in [1,n] \quad v([e_1, \ldots, e_k]) \subset [e_1, \ldots, e_k]$. et tout simplement $\quad \forall k \in [1,n] \quad \forall \ell \leq k \quad v \circ u(e_\ell) = v(u(e_\ell)) \in v([e_1, \ldots, e_k]) \subset [e_1, \ldots, e_k]$.. Si une matrice triangulaire est inversible alors $\quad \forall k \in [1,n] \quad u([e_1, \ldots, e_k]) = [e_1, \ldots, e_k]$. car u transforme une base en une base. Ainsi $\quad \forall k \in [1,n] \quad [e_1, \ldots, e_k]) = u^{-1}([e_1, \ldots, e_k])$. et M^{-1} est triangulaire. Pour la dimension $(E_{ij})_{i,j}$ est une base de $\mathcal{M}_n(K)$ et $(E_{i,j})_{i \leq j}$ est une base de $\mathcal{T}_n(K)$ qui est donc de dimension le nombre d'éléments de la base à savoir $\frac{n(n+1)}{2}$. Le déterminant est le produit des termes diagonaux en développant à chaque fois par rapport à la première colonne. Pour tout j : $u(e_j) = \sum_{i \leq j} a_{ij} e_i$ et ainsi $e_j = a_{1j} u^{-1}(e_1) + \cdots + a_{jj} u^{-1}(e_j)$ ce qui donne que $u^{-1}(e_j) = \frac{1}{a_{jj}} e_j + \sum_{i<j} a'_{ij} e_i$. les termes diagonaux de la matrice inverse sont les inverses des termes diagonaux on ne peut rien dire de plus.

Proposition 4 Si on a une matrice diagonale par blocs en prenant la définition des E_{n_k} on a $\forall k \in [1,p] \quad : \quad \forall \ell \in [s_k, \cdots, s_k + n_k]$ l'image de e_{n_ℓ} est combinaison linéaire des $(e_i)_{s_k \leq i \leq s_k + n_k}$ donc $u(E_{n_k} \subset E_{n_k}$. Et réciproquement s'il en est ainsi alors la matrice de u est diagonale par blocs.

Théorème 3 Posons $\begin{vmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{vmatrix} = det(C_1, \cdots, C_p, C_{p+1}, \cdots, C_n)$. L'application $(C_1, \cdots, C_p) \longmapsto \begin{vmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{vmatrix}$ est une forme p-linéaire des colonnes de A_1 donc colinéaire à $det(A_1)$ c'est à dire $\begin{vmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{vmatrix} = \lambda_1 det A_1$. Mais pour $A_1 = Id$ on a, en développant par rapport aux premières colonnes $det(A_2) = \lambda$ d'où le résultat.

Proposition 5 Par récurrence ona $detA = detA_1 detM_1 = \cdots = detA_1 \cdots detA_p$ où M_1 est formé des $p-1$ derniers blocs.

Théorème 4 Cet ensemble est non vide. La somme et la multiplication par un scalaire dematrices par blocs de même dimension sont des matrices par blocs. Pour la multiplication on utilise la proposition 4. Si v,u sont des endomorphismes associés à A,B avec les notations de la proposition : $v \circ u(E_{n_k}) \subset v(E_{n_k}) \subset E_{n_k}$ et le produit est bien par blocs. Sa dimension est le cardinal d'une base. Pour chaque bloc il faut et il suffit de n_i^2 matrices élémentaires. Une matrice diagonale par blocs est inversible si et seulement si chaque bloc est inversible par la proposition 5. Si u est inversible on a alors $\forall k \quad : u(E_k) = E_k$ et donc $u^{-1}(E_k) = E_k$ et donc chaque bloc de la matrice inverse correspond à A_k^{-1}. Il faur bien voir que $A_k = \mathcal{M}(u_{|E_k}$.

Proposition 6 Dire que la matrice est triangulaire par blocs signifie que l'image d'un vecteur de F_k s'exprime comme combinaison linéaire des précèdents c'est à dire exactement $u(F_k) \subset F_k$.

Proposition 7 Par récurrence en appliquant le théorème 3. $detA = detA_1 detM_1 = \cdots = detA_1 \cdots detA_p$ où $M_1 = \begin{vmatrix} A_1 & B' \\ 0 & A' \end{vmatrix}$.

Théorème 5 Cet ensemble est non vide. La somme et la multiplication par un scalaire de matrices par blocs de même dimension sont des matrices par blocs. Pour la multiplication on utilise la proposition 6. Si v,u sont des endomorphismes associés à A,B avec les notations de la proposition : $v \circ u(F_k) \subset v(F_k) \subset F_k$ et le produit est bien triangulaire par blocs. Sa dimension est le cardinal d'une base. Pour chaque ligne de blocs il faut et il suffit de $n_i(n_1 + \cdots + n_p)$ matrices élémentaires. Une matrice triangulaire par blocs est inversible si et seulement si chaque bloc diagonal est inversible par la proposition 7. Si u est inversible on a alors $\forall k \quad : u(F_k) = F_k$ et donc $u^{-1}(F_k) = F_k$ et donc la matrice inverse est triangulaire par blocs de même dimension.

Proposition 8 L'application considérée étant linéaire, il suffit d'exhiber l'application réciproque: soit Ψ l'application qui, à une famille $(v_{ij})_{i,j \in [1,p]}$ appartenant à $\prod_{i,j \in [1,p]} \mathcal{L}(E_j,E_i)$, associe l'application v de E dans E définie par

$$\forall x \in E \quad v(x) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \pi_i(v_{ij}(\pi_j(x))).$$

Il est aisé de montrer que v est un endomorphisme de E et que, pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, $\Psi \circ \Phi(u) = u$. Les espaces $\mathcal{L}(E)$ et $\prod_{i,j \in [1,p]} \mathcal{L}(E_j,E_i)$ ayant la même dimension finie n^2, Φ est un isomorphisme entre ces espaces.

Proposition 9 Soient $i,j \in [1,p]$.

$$\begin{aligned} \pi_i \circ (u \circ v) \circ \pi_j &= \pi_i \circ u \circ \left(\sum_{k=1}^{p} \pi_k \right) \circ v \circ \pi_j \\ &= \sum_{k=1}^{p} (\pi_i \circ u \circ \pi_k) \circ (\pi_k \circ v \circ \pi_j) \\ &= \sum_{k=1}^{p} u_{ik} \circ v_{kj}. \end{aligned}$$

Il suffit alors de considérer les restrictions de ces deux endomorphismes pour pouvoir conclure.

Proposition 10 Il faut toujours utiliser que les colonnes d'une matrice sont les coordonnées des images de vecteurs de base. Ainsi soit e un vecteur de $\mathcal{B}_|$ son image $\tilde{u}_{ij} = \pi_i \circ u \circ \pi_j(e)$ est dans E_i. Donc le bloc $A_{i,j}$ correspond bien à la matrice de u_{ij} dans les bases $\mathcal{B}_|$ et $\mathcal{B}_\rangle$.

Proposition 11 Pour la somme et la multiplication par un scalaire c'est clair puisque ces opérations s'effectuent coefficient à coefficient. Pour le produit $A \times B = \mathcal{M}(u \circ v) = \begin{pmatrix} A'_{11} & \cdots & A'_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ A'_{p1} & \cdots & A'_{pp} \end{pmatrix}$

où $A'_{i,j} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_j,\mathcal{B}_i}(u \widetilde{\circ} v)_{ij} = \mathcal{M}(\sum_{k=1}^{p} \tilde{u}_{ik} \circ \tilde{v}_{kj}) = \sum_{k=1}^{p} A_{ik} B_{kj}$.

Proposition 12 Le produit de deux matrices triangulaires supérieures par blocs de même tailles a sur la diagonale le produit des blocs diagonaux. Si on veut obtenir l'identité c'est à dire les blocs identités on a $A_{ii} \times A_{ii}^{-1} = I_{ii}$.

Proposition 13 On a pour tout p: $\ker u^{p+1} \supset \ker u^p$ car si $u^p(x) = 0$ alors $u^{p+1}(x) = 0$. Ainsi $(\ker u^p)_p$ est une suite croissante de sev de E. De même on a $\mathrm{Im\,m}\, u^{p+1} \subset \mathrm{Im\,m}\, u^p$ car si $x = u^{p+1}(y)$ on a $x = u^p(u(y))$. S'il existe s tel que $I_s = I_{s+1}$. alors la suite stationne car si $y \in I_{s+1}$ alors $y = u^{s+1}(x) = u(u^s(x)) = u(u^{s+1}(x')) = u^{s+2}(x')$ et donc $y \in I_{s+2}$ ceci prouve que $I_s = I_{s+1} = I_{s+2}$ et on recommence. De même pour les noyaux.

Théorème 6 Avec les notations de la proposition précédente, notons $n = \dim E$ et, pour $k \in \mathbb{N}$, $d_k = \dim I_k$. Montrons que $d_n = 0$.
L'endomorphisme u étant nilpotent, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $d_m = 0$. La suite (d_k) est donc décroissante et stationnaire à partir du rang m. Soit $p = \inf\{k \in \mathbb{N}\ ;\ d_k = 0$. Si $u \neq 0$, $p \geq 1$ et donc $d_{p-1} > d_p = 0$, on en déduit que la suite $d_0 = n, d_1, \ldots, d_p$ est strictement décroissante, car l'égalité de deux termes consécutifs dans la suite (d_k) entraîne l'égalité de tous les termes suivants.
La suite d'entiers $d_0 = n, d_1, \ldots, d_{p-1}$ étant strictement décroissante, on en déduit que $\forall k \in [0,p] \quad d_k \leq n - k$ et donc que $d_p = 0 \leq n - p$.

Proposition 14 L'ordre de l'endomorphisme canoniquement associé à N qui est nilpotent est inférieur ou égal à $\dim E$ donc on aura au pire $N^n = 0$

Proposition 15 Si la matrice est nilpotente alors ses puissances ont pour termes diagonaux les puissances des termes diagonaux qui doivent donc être nuls. Réciproquement si les termes diagonaux sont nuls avec les notations précèdentes : $u(E_k) \subset E_{k-1}$ et plus généralement $u^p(E_k \subset E_{k-p}$ ainsi u^n est nul et la matrice est nilpotente.

Proposition 16 Le plus simple est de vérifier on a: $(\mathrm{Id}_E + u + \cdots + u^p) \circ (\mathrm{Id}_E - u) = rmId - u + u - u^2 + u^2 + \cdots - u^{p-1} + u^{p-1} + u^p$ et comme $u^p = 0$ on a le résultat.

Proposition 17 Les colonnes sont les coordonnées des images de vecteur de base. $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{i,\sigma(j)} e_i = e_{\sigma(j)}$. Nous avons bien là l'équivalence.

Proposition 18 $(S_n, \circ)$ est bien un groupe et on a $M_{\sigma \circ \sigma'} = M_{\sigma \times M_{\sigma'}}$, ceci résulte de $\forall i \quad : v \circ u(e_i = v(e_{\sigma'(i)}) = e_{\sigma(\sigma'(i))}$ en prenant les endomorphismes associés. Par transfert de structure on a l'ensemble des matrices de permutations muni du produit est un groupe. L'application $\sigma \longmapsto M_\sigma$ est injective car $M_{\sigma = Id}$ donne $\sigma = id$.

Proposition 19 La matrice M_σ s'écrit $(\delta_{i,\sigma(j)})_{i,jin[1,n]}$. Soit $A = (a_{il})_{\substack{i \in [1,p] \\ l \in [1,q]}}$. Soit $i \in [1,p]$, la ligne i du produit$M_\sigma A$ est donc:

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{p} \delta_{i,\sigma(k)} a_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} \delta_{i,\sigma(k)} a_{kp} \end{pmatrix}$$

elle est donc égale à

$$\begin{pmatrix} a_{\sigma^{-1}(i)1} & \cdots & a_{\sigma^{-1}(i)p} \end{pmatrix}$$

Ainsi, à la $i^{eème}$ place, on trouve la ligne $L_{\sigma^{-1}(i)}$.

Proposition 20 ${}^t(AM_\tau) = M_{\tau^{-1}}{}^tA$. On applique alors la proposition précédente et on revient au produit de départ par transposition.

Proposition 21 $E_{ij}A$ est la matrice dont toutes les lignes sont nulles, sauf la $i^{eème}$ qui est égale à L_j. On termine aisément la démonstration.

Proposition 22 AE_{ij} est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles, sauf la $j^{eème}$ qui est égale à C_i. On termine alors la démonstration.

Proposition 23 Nous pouvons faire un clacul purement algèbrique. La matrice d'une affinité peut s'écrire : $I + (\lambda E_{ii}$ et la matrice $A = \sum_{kl} E_{kl}$le produit : $(I + (\lambda - 1)E_{ii}) \sum_{kl} a_{kl}E_{kl} = A + (\lambda - 1)\sum_{kl} E_{ii}E_{kl}$. Or on a vu que $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ d'où $(I + (\lambda - 1)E_{ii}) \sum_{kl} a_{kl}E_{kl} = A + (\lambda - 1)\sum_{kl} a_{kl}\delta_{ik}E_{il} = A + (\lambda - 1) + \sum_{l} a_{il}E_{il}$. Or $\sum_{l} a_{il}E_{il}$ est la $i^{\text{ème}}$ ligne et donc le résultat du produit est $L_1, \cdots, L_{i-1}, L_i + (\lambda - 1)L_i, L_{i+1}, \cdots, L_n$.

Proposition 24 Nous pouvons faire un clacul purement algèbrique. La matrice d'une affinité peut s'écrire : $I + (\lambda E_{ii}$ et la matrice $A = \sum_{kl} E_{kl}$le produit : $(\sum_{kl} a_{kl}E_{kl})(I + (\lambda - 1)E_{ii}) = A + (\lambda - 1)\sum_{kl} E_{kl}E_{ii}$. Or on a vu que $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ d'où $\sum_{kl} a_{kl}E_{kl}(I + (\lambda - 1)E_{ii}) = A + (\lambda - 1)\sum_{kl} a_{kl}\delta_{li}E_{ki} = A + (\lambda - 1) + \sum_{k} a_{ki}E_{ki}$. Or $\sum_{k} a_{ki}E_{ki}$ est la $i^{\text{ème}}$ colonne et donc le résultat du produit est $C_1, \cdots, C_{i-1}, C_i + (\lambda - 1)C_i, C_{i+1}, \cdots, C_n$.

3.6 Exercices

3.6.1 Indications

Exercice 1 Quelle est la forme de T^{-1} ?

Exercice 2 Une suite d'entiers décroissante minorée est convergente donc stationnaire.

Exercice 3 Suivre les degrés des polynômes images.

Exercice 4 Adapter le raisonnement précèdent en faisant attention à ce qui marche encore si la matrice est diagonale par blocs.

Exercice 5 Ecrire le produit.

Exercice 6 Se rappeler la définition d'un hyperplan.

Exercice 7 Faire le produit des deux côtés.

Exercice 8 Étudier les égalités $AA^{-1} = I_n$ et $A^{-1}A = I_n$. Pour la réciproque, remarquer qu'alors A est le produit d'une matrice de permutation et d'une matrice diagonale.

3.6.2 Corrigés

Exercice 1

Exercice 2

Exercice 3

Exercice 4

Exercice 5

Exercice 6

Exercice 7

Exercice 8

Exercice 9 Il suffit de particulariser X en prenant $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ on obtient $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $a_{j1} = 0$ si $j \neq 1$. Il suffit alors de faire descendre le 1 sur la diagonale pour obtenir que A est diagonale et enfin de faire parcourir le 1 sur la première ligne pour obtenir que A est la matrice d'une homothétie.

Exercice 12 Faisons une démonstration par récurrence sur n. Le résultat est vrai pour $n = 1$. Le supposant vrai pour les matrices de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ on a A_{n-1} qui s'écrit de façon unique $L_{n-1}U_{n-1}$ où L_{n-1} est triangulaire inférieure avec sur la diagonale $\left(\Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \cdots, \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}}\right)$ et U_{n-1} est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. On cherche L,U où écrites par blocs $L = \begin{pmatrix} T & 0 \\ \ell & b \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} T' & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec T triangulaire inférieure et T' triangulaire supérieure avec des 1 en diagonale, $\ell \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$ et $c \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$. Ainsi $LU = \begin{pmatrix} TT' & Tc \\ \ell T' & \ell c + b \end{pmatrix} = A = a_{ij}$

ce qui est équivalent à $\left\{\begin{array}{l} TT' = A_{n-1} \\ \ell T' = (a_{n,1}, \cdots, a_{n,n-1}) \\ Tc =^t (a_{1,n}, \cdots, a_{n-1,n}) \\ \ell c + b = a_{n,n} \end{array}\right.$. D'où l'existence et l'unicité de TT', de plus T' est inversible car $\det(T') = 1$ et T est inversible car $\det(T) = \Delta_1 \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1} \cdots \dfrac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}} = \Delta_{n-1} \neq 0$. Le système précédent donne ℓ,c,b de façon unique. $\Delta_n = \det(A) = \det(L)\det(U) = 1\Delta_1 \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1} \cdots \dfrac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}} b = \Delta_{n-1} b$. D'où b et la fin de la démonstration. Pour les systèmes de Cramer on a $AX = b \iff LUX = b \iff \left\{\begin{array}{l} UX = Y \\ LY = b \end{array}\right.$ on est donc ramené à la résolution de deux systèmes triangulaires.